arXiv:2302.07066v1 [math.LO] 14 Feb 2023

克莱尼可计算性理论中的非正规深渊*

Sam Sanders[1]

哲学系 II，波鸿鲁尔大学，德国 sasander@me.com
https://sasander.wixsite.com/academic

摘要。基于其 S1-S9 计算方案的克莱尼可计算性理论构成了 *computing with objects of any finitetype* 的一个模型，并扩展了 Turing 的“机器模型”，该模型将 *computingwith real numbers*形式化。Kleene 框架中的一个根本区别在于 *normal* 泛函与 *non-normal* 泛函之间：前者计算相应的 *Kleene quantifier* $\exists^n$ ，而后者则不能。历史上，研究重点在正规泛函，但近年来，人们基于诸如 *un-countability of the reals*等著名定理研究了新的非正规泛函。这些新的非正规泛函与 Tait 扇泛函等历史实例有着根本区别：后者可由 $\exists^2$ 计算，而前者只能在 $\exists^3$中计算。尽管 $\exists^2$ 与 $\exists^3$之间存在巨大鸿沟，我们找到了若干密切相关、却落在这道深渊不同侧的非正规泛函。我们的例子基于一些主流数学概念，例如 *quasi-continuity*、 *Baire classes*和 *semi-continuity*。

1 引言

1.1 动机与概述

可计算性理论是理论计算机科学与数理逻辑交叉领域的一门学科，其核心问题如下：

给定两个数学对象 X 和 Y， X 原则上能否计算出 Y？

当 X 和 Y 是实数时，Turing 著名的“机器”模型（[31]）是处理这一问题的标准方法，也就是说，“计算”是按照图灵机的含义来理解的。为了形式化涉及（全定义）抽象对象的计算，例如实数上的函数或实数的良序，Kleene 于 [13] 引入了 S1-S9 计算方案。Dag Normann 和作者最近引入了（ [25] ）一种包含不动点算子的 λ演算，它恰好刻画了 S1-S9，并能处理部分对象。今后，任何关于可计算性的论述均应理解为处于 Kleene 框架之中，并且（如相关）也包括 [25] 中的扩展。

* 本研究获得了 *Deutsche Forschungsgemeinschaft*（DFG）（资助编号：SA3418/1-1）以及 *Klaus Tschira Boost Fund*（资助编号：GSO/KT 43）的支持。

Kleene 框架中的一个根本区别是正规泛函与非正规泛函之间的区别：前者计算相应的 Kleene 量词$\exists^n$，而后者则不计算（见第 1.2 节）。历史上，研究重点一直是正规泛函，因为当时人们甚至只知道少数几个自然的非正规泛函实例。第一个这样的实例是 Tait 扇泛函，它以有理数集 $2^{\mathbb{N}}$ 上的连续函数为输入，计算其一致连续模（[27]）。

最近，Dag Normann 和作者基于一些主流定理识别出了新的非正规泛函，例如海涅–博雷尔定理、若尔当分解定理，以及 $\mathbb{R}$ ([19–21,23–25]) 的不可数性。这些非正规泛函有着很大的不同：Tait 扇泛函可在 $\exists^2$ 中计算，因此相当温和；相比之下，下面的非正规运算无法在任何 S^2_k 中计算，而后者可以判定 Π^1_k 公式。

$$Given\ Y:[0,1]\to\mathbb{N},\ find\ x,y\in\mathbb{R}\ such\ that\ x\neq_{\mathbb{R}} y\ and\ Y(x)=_{\mathbb{N}} Y(y). \quad (1)$$

显然，这一运算证明了一个基本事实：不存在从单位区间到自然数的单射。(1) 中的运算可以通过 $\exists^3$ 执行，这一点可由证明 $\mathbb{R}$ 不可数的众多证明中的一些推出。[19–21,23–25] 中研究的几乎所有非正规泛函都能计算 (1) 中的运算，或某种同样困难的变体。

鉴于上述情况，非正规泛函可分为两类：一类可在 $\exists^2$ 中计算，例如 Tait 扇泛函；另一类只能借助 $\exists^3$ 计算，例如 (1) 中的运算。考虑到 $\exists^2$ 与 $\exists^3$ 之间计算能力的差异，这两类之间似乎存在一道巨大的鸿沟。本文识别出了一些密切相关、却分属这道鸿沟两侧的非正规泛函。具体而言，我们得到以下结果。

– 对拟连续函数进行基本运算（求连续点或上确界）可使用 $\exists^2$；对密切相关的团簇函数进行相同运算，则只能在 $\exists^3$ 中计算（第 2 节）。– 求第二类贝尔函数的上确界需要 $\exists^3$；对于有效第二类贝尔函数，同一运算可在 S^2 中计算（第 3 节）。– 对半连续函数进行基本运算（求连续点或上确界）需要 $\exists^3$，即使我们假设存在振荡函数（定义 4）也是如此；如果假设存在“半连续模”（第 4 节），则相同运算可在 $\exists^2$ 中计算。

最后，我们在第 1.2.1 节简要概述 Kleene 框架。第 1.2.2 节和第 1.2.3 节将介绍所需的公理和定义。

1.2 预备知识与定义

我们将在第1.2.1节简要介绍 Kleene 高阶可计算性理论。我们将介绍一些重要的公理（第1.2.2节）和定义（第 1.2.3 节）。完整介绍可参见例如 [24, §2] 或 [17]。由于 Kleene 的可计算性理论大量借鉴了类型论，我们将经常使用后者的常见

记号；例如，自然数是类型 0 对象，记作 n^0 或 $n \in \mathbb{N}$。类似地，贝尔空间的元素是类型 1 对象，记作 $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 或 f^1。从贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射记作 $Y: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$或 Y^2。关于这类记号的概述可参见例如 [17, 25]。

1.2.1 克莱尼可计算性理论 我们的主要结果属于可计算性理论，并将如下精确定义「可计算性」概念。

(I) 除非另有明确说明，我们采用 ZFC，即带有选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论，作为所有结果的官方元理论。(II) 我们采用克莱尼的高阶计算概念，即他提出的九条子句 S1-S9（见 [17, 第 5] 章或 [13]），作为涉及全对象的「可计算」的官方概念。

我们指出，S1-S8 相当基础，只是引入了一种带有高阶参数的高阶原始递归。真正的威力来自 S9，它以一种特设的方式，实质上将 S1-S9 可计算性的递归定理硬编码其中。相比之下，图灵机的递归定理是从第一原理在 [30] 中推导出来的。

从历史角度来看，在可计算性理论中有一个广为人知的说法：许多人曾试图为所有有限类型的对象构造计算模型，并以自然的方式从中推出递归定理，但都未能成功。正因如此，Kleene 最终引入了 S1-S9。起初，这些系统因其前述的临时性而受到批评，但最终获得了普遍认可。如今，Dag Normann 和作者基于 λ 演算引入了一种新的计算模型 [25]，它具有以下性质：

– 该模型包含 S1-S8，而以“临时”方案著称的 S9 则被更自然的（最小）不动点算子所取代；– 对于全对象，该模型恰好刻画了 S1-S9 可计算性；– 该模型支持“使用部分对象进行计算”；– 与 S1-S9 相比，该模型的模块化程度更高，因为只需省略某些不动点算子，就能轻松得到子模型。

关于高阶可计算性理论的全面概述，请参阅 [17, 25]。我们确实会提及“正规”与“非正规”泛函之间的区别，其依据是 [17, §5.4]中的以下定义。我们仅在$n = 2$的情形下使用 $\exists^n$，3，如第1.2.2节所定义。

定义 1 对于 $n \geq 2$，如果类型为 n 的泛函按照 S1-S9 计算克莱尼量词 $\exists^n$，则称其为正规泛函；否则称为非正规泛函。

这是一个历史事实：基于 Kleene 的 S1-S9 方案的高阶可计算性理论，主要关注正规泛函的世界；这一观点可见于 [17, §5.4]。尽管如此，我们此前曾研究过新型非正规泛函的计算性质，即那些能够计算以下定理和原理所声称存在的对象的泛函：

– 海涅-博雷尔、维塔利和林德洛夫¨的覆盖定理（[20]），– 贝尔纲定理（[19]），– 类似 Pincherle定理的局部-整体原理（[20]），–（可数）选择公理的弱片段（[21]），– 若尔当分解定理及相关结果（[23, 25]），– $\mathbb{R}$ 的不可数性（[22, 24]）。

最后，第一个不可计算的非正规泛函示例——Tait 扇泛函（[27]）——相当温和：它可在 $\exists^2$ 中计算。相比之下，基于前述列表的泛函，包括第 1.1 节中的运算（1），可在 $\exists^3$ 中计算，但无法在任何 S_k^2 中计算；后者能判定 Π_k^1-公式（详情见第1.2.2节）。

1.2.2 一些概括泛函 在 Turing 式可计算性理论中，计算难度是根据预言机集合在著名的理解层级中的位置来衡量的。因此，本节将介绍一些与高阶理解有关的公理和泛函。这里我们主要讨论常规理解，即在诸如 Π_k^1 和 Σ_k^1 这样的公式类中，只允许使用关于 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的参数。

首先，泛函 φ^2（也称为克莱尼量词 $\exists^2$），如（$\exists^2$）所示，显然在 $f = 11\ldots$ 处不连续；事实上，通过格里奥特技巧（见 [15, §3]），$\exists^2$ 在（计算意义上）等价于存在满足以下条件的 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $F(x) = 1$ 当且仅当 $x >_{\mathbb{R}} 0$，否则为 0。

$$(\exists \varphi^2 \leq_2 1)(\forall f^1)\big[(\exists n)(f(n) = 0) \leftrightarrow \varphi(f) = 0\big]. \tag{$\exists^2$}$$

与（$\exists^2$）相关，（μ^2）中的泛函 μ^2 称为费弗曼的 μ（[1]）。

$$(\exists \mu^2)(\forall f^1)\big(\big[(\exists n)(f(n) = 0) \to [f(\mu(f)) = 0 \wedge (\forall i < \mu(f))(f(i) \neq 0)\big] \wedge [(\forall n)(f(n) \neq 0) \to \mu(f) = 0]\big). \tag{μ^2}$$

在科伦巴赫基理论（[15]）上，我们有（$\exists^2$）$\leftrightarrow$（μ^2），而 $\exists^2$ 和 μ^2在计算上也等价。希尔伯特和贝尔奈斯在补编 IV（ [10, ）中仅使用 μ^2，形式化了数学中的相当大部分内容。

其次，（S^2）中的泛函 S^2 称为苏斯林泛函（[15]）。

$$(\exists \mathsf{S}^2 \leq_2 1)(\forall f^1)\big[(\exists g^1)(\forall n^0)(f(\overline{g}n) = 0) \leftrightarrow \mathsf{S}(f) = 0\big]. \tag{S^2}$$

根据定义，苏斯林泛函 S^2 可以判定左侧（S^2）中的 Σ_1^1公式是真是假。类似地，我们定义泛函 S_k^2，用于判定 Σ_k^1公式的真假。我们注意到，[7, 第 129] 页中的费弗曼-西格算子 ν_n，本质上是经强化的 S_n^2，能够为所讨论的 Σ_n^1公式返回一个见证（如果存在）。

第三，下面的泛函 E^3 显然可以计算 $\exists^2$ 和 S_k^2，对于任意 $k \in \mathbb{N}$:

$$(\exists E^3 \leq_3 1)(\forall Y^2)\big[(\exists f^1)(Y(f) = 0) \leftrightarrow E(Y) = 0\big]. \tag{$\exists^3$}$$

（$\exists^3$）中的泛函也称为克莱尼量词 $\exists^3$，对于其他泛函，我们也采用相同的——如今显而易见的——约定。希尔伯特和贝尔奈斯在 [10, 补编 IV], 中引入了一个泛函 ν^3，后者本质上就是 $\exists^3$，它也像 ν_k 那样提供一个见证。

总之，第 1.1 节中的运算 (1) 在 $\exists^3$ 中可计算，但在任何 S_k^2 中都不可计算，正如 [22] 中所确立的那样。许多非正规泛函都表现出同样的"计算难度"，我们仅将此视为支持另行建立非正规泛函分类尺度的依据。

1.2.3 一些定义 我们介绍下文所需的一些定义，这些定义大多源自主流数学。我们注意到，$\mathbb{R}$ 的子集由其特征函数给出（定义 2）；后者在测度论和概率论中十分常见。

首先，我们采用通常的（开）集定义，其中 $B(x,r)$ 是半径为 $r>0$、中心为 $x\in\mathbb{R}$ 的开球。

定义 **2** [集合]

– 子集 $A\subset\mathbb{R}$ 由其特征函数 $F_A:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ 给出，即对于所有 $x\in\mathbb{R}$，我们记 $x\in A$ 表示 $F_A(x)=1$。– 若 $x\in O$ 蕴含存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $B(x,\frac{1}{2^k})\subset O$，则子集 $O\subset\mathbb{R}$ 为开集。– 若子集 $C\subset\mathbb{R}$ 的补集 $\mathbb{R}\setminus C$ 为开集，则该子集为闭集。

前面的定义并未假设任何计算数据／额外表示。正如 [23, 25], 所确立的，在基础实分析（傅里叶级数）中，我们很容易遇到没有额外表示的闭集。

其次，以下集合在实分析的证明中往往至关重要。

定义 3 集合 C_f 和 D_f 分别汇集了 f 中 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续和不连续的点。

C_f, D_f的一个问题是，连续性的定义涉及对 $\mathbb{R}$的量化。一般而言，判断给定的 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 函数在某个给定实数处是否连续，难度不亚于第 1.2.2 节中的 $\exists^3$。因此，集合C_f, D_f一般确实存在，但例如在 $\exists^2$中不可计算。我们将证明，对于拟连续函数和半连续函数，这些集合在 $\exists^2$中是可定义的。

第三，为了使用 $\exists^2$来定义 C_f，也可以（额外）假设振荡函数 $\mathrm{osc}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 存在，如定义 4 所示。事实上，此时 f 作为 $x\in\mathbb{R}$ 连续，等价于算术公式 $\mathrm{osc}f(x)=_{\mathbb{R}}0$。

定义 **4** [振荡函数] 对于任意 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，相应的振荡函数定义如下：$\mathrm{osc}f([a,b]):=$上确界$_{x\in[a,b]}f(x)-$下确界$_{x\in[a,b]}f(x)$，以及 $\mathrm{osc}f(x):=$极限$_{k\to\infty}\mathrm{osc}f(B(x,\frac{1}{2^k}))$。

我们注意到，黎曼和汉克尔早已在黎曼积分的背景下考虑过振荡这一概念（[9, 28]）。

2 准连续性及相关概念

我们研究准连续性的概念以及与之密切相关的团簇性概念，如定义 5 所述。正如下文所讨论的，后者本质上是前者在求和运算下的闭包。尽管如此，关于准连续性的基本性质会导出可在 $\exists^2$ 中计算的泛函；而根据定理 8，将同样的泛函推广到团簇函数后，则无法在任何 S_k^2 中计算。

首先，定义 5 有一些历史背景：贝尔证明，分别连续的 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 在一个变量上是拟连续的；他在 [2, 第 95] 页提到，后一个概念（未命名）是由 Volterra 提出的。

定义 5 对于 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，我们有以下定义：

– f 在 $x_0 \in [0,1]$ 处拟连续，是指对于 $\epsilon > 0$ 以及 x_0的任意开邻域U，存在开集 $\emptyset \neq G \subset U$，使得 $(\forall x \in G)(|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon)$。– f 在 $x_0 \in [0,1]$ 处团簇连续，是指对于 $\epsilon > 0$ 以及 x_0的任意开邻域 U，存在非空开集 $G \subset U$，使得 $(\forall x, y \in G)(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$。

这些概念具有良好的技术和概念性质，具体如下。

– 团簇函数恰好是拟连续函数之和这一类函数（[5, 6, 18]）。尤其是，团簇函数对求和封闭，而拟连续函数则不是。– 拟连续函数的逐点极限（若存在）总是团簇连续的（[11, 推论 2.5.2]）。– 集合 C_f 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，当且仅当 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是团簇连续的（见 [5, 8]）。

此外，拟连续函数可能相当“狂野”：如果 $\mathfrak{c}$ 是 $\mathbb{R}$ 的基数，那么存在 $2^{\mathfrak{c}}$ 个不可测的拟连续 $[0,1] \to \mathbb{R}$ 函数，以及 $2^{\mathfrak{c}}$ 个可测的拟连续 $[0,1] \to [0,1]$ 函数（见 [12]）。

其次，我们证明 $\exists^2$ 足以见证拟连续函数的基本性质。因此，相关泛函属于与 Tait 扇泛函相同的类别。如果一个集合由 RM 编码给出（见 [29, II.5.6]），即由一列有理开球给出，我们就称其为“RM-开”。

定理 6 对于拟连续的 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，我们有以下结论：

– 集合 C_f 可由 $\exists^2$ 定义，且后者能计算某个 $x \in C_f$，– 存在一个 RM-开集序列 $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$，可在 $\exists^2$ 中定义，使得$C_f = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$，– 振荡函数 $\mathrm{osc}_f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 可在 $\exists^2$ 中计算。– 对任意 $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$，上确界 $\sup_{x\in[p,q]} f(x)$ 可在 $\exists^2$ 中计算。

证明。固定拟连续的 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，并使用 $\exists^2$ 来定义 $x \in O_m$，以防

$$(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall q, r \in B(x, \tfrac{1}{2^{N_0}}) \cap \mathbb{Q})(|f(q) - f(r)| \leq \tfrac{1}{2^m}). \tag{2}$$

根据准连续性的（定义），公式 (2) 等价于

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall w, z \in B(x, \tfrac{1}{2^{N_1}}))(|f(w) - f(z)| \leq \tfrac{1}{2^m}), \tag{3}$$

其中请注意，若在 (2) 和 (3) 中 $N_0 = N_1$ ，该等价关系仍然成立。现在将 μ^2 应用于 (2)，得到 $G:([0,1]\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$，使得对于所有 $x \in [0,1]$和 $m \in \mathbb{N}$，我们有

$$x \in O_m \to (\forall w, z \in B(x, \tfrac{1}{2^{G(x,m)}}))(|f(w) - f(z)| \leq \tfrac{1}{2^m}).$$

因此， $x \in O_m \to B(x, \frac{1}{2^{G(x,m)}}) \subset O_m$，这表明 O_m 是开集。显然，我们也有 $O_m = \cup_{q\in\mathbb{Q}} B(q, \frac{1}{2^{G(q,m)}})$，即我们也有 O_m的 RM 表示。要找到一个点 $x \in C_f = \cap_{m\in\mathbb{N}} O_m$，RM 表示的贝尔纲定理证明可由 [29, II.5.8], 有效实现，前两项便完成了。

对于最后两项，注意到根据准连续性的定义，$\sup_{x\in[p,q]} f(x)$ 等于 $\sup_{x\in[p,q]\cap\mathbb{Q}} f(x)$。特别地，在通常用于求上确界的区间二分过程中，根据准连续性的定义，可以将'$(\exists x \in [0,1])(f(x) > y)$'等价地替换为'$(\exists q \in [0,1]\cap\mathbb{Q})(f(q) > y)$'。下确界和振荡函数也同样如此，因此振荡函数 $\mathrm{osc}_f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 也可在 $\exists^2$中计算。□

第三，尽管团簇函数与概括泛函关系密切，且有定理 6，团簇函数的基本性质仍会导出一些难以用概括泛函计算的泛函，这一点由定理 8 可知。为此，我们需要以下来自 [25], 的定义；它也证明了单位区间是不可数的。

定义 7 若任意 $\Phi: \big((\mathbb{R}\to\{0,1\})\times(\mathbb{R}\to\mathbb{N})\big) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为康托尔实现器：对于非空 $A \subset [0,1]$ 和 $Y: [0,1] \to \mathbb{N}$， $\Phi(A,Y) \notin A$，且在 A 上为单射。

如 [23], 所示，即使要求双射（而非单射），也不存在任何可由 S_k^2 计算的康托尔实现器。我们有如下结果。

定理 8 以下泛函都不可由任何 S_k^2 计算：

– 任意泛函 $\Phi : (\mathbb{R}\to\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，使得对于所有团簇连续的 $f: [0,1] \to [0,1]$, 都有 $\Phi(f) \in C_f$。 – 任意泛函 $\Psi : (\mathbb{R}\to\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$, 使得对于团簇连续的 $f: [0,1] \to [0,1],$, 都有 $\Psi(f,p,q) = \sup_{x\in[p,q]} f(x)$, 其中 $p,q \in [0,1]$。 – 任意泛函 $\zeta : (\mathbb{R}\to\mathbb{R}) \to ((\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{Q}^2)$, 使得对于团簇连续的 f: $[0,1] \to [0,1]$，且对于任意 $n,m \in \mathbb{N}$, $\zeta(f,m,n)$ 是一个开区间，使得 $C_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(\cup_{m\in\mathbb{N}} \zeta(f,m,n)\big)$。

特别是，这些泛函中的每一个都能计算一个康托尔实现器（给定 $\exists^2$）。

证明。固定 $A \subset [0,1]$ 和 $Y: [0,1] \to \mathbb{N}$ 在 A上是单射。现在定义如下函数 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, 对任意 $x \in [0,1]$, 定义如下：

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^{Y(x)+1}} & \text{in case } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{4}$$

根据定义，对于任意 $\varepsilon > 0$，仅有有限多个 $x \in A$ 使得$f(x) > \varepsilon$对 $i \leq k$成立。这立即意味着 f在任意 $x \in [0,1]$处都是团簇连续的

并且在任意 $y \notin A$处连续。现在令 Φ 如第一项所述，并注意到$\Phi(f) \in C_f$ 意味着 $\Phi(f) \notin A$，这正是康托尔实现器所要求的。

对于第二项，设 Ψ如后者所述，并考察 $\Psi(f, 0, 1)$，它具有如下形式：对某个 $y_0 \in [0,1]$和 $n_0 \in \mathbb{N}$，$\frac{1}{2^{n_0+1}} = f(y_0)$。现在检查$\Psi(f, 0, 1_2) = \Psi(f, 0, 1)$，以判断 $y_0 \in [0, \frac{1}{2}]$是否成立。因此，我们知道了 y_0 的二进制表示的第一位。重复这一过程，我们可以计算y_0，并以类似方式得到 A 的一个枚举。借助这个枚举，我们可以按照 [29, II.4.9], 的方法计算 $z \notin A$，从而得到一个康托尔实现器。

对于第三项，为了找到一个点 $x \in C_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(\cup_{m\in\mathbb{N}} \zeta(f, m, n)\big)$，RM 表示下贝尔纲定理的证明可由 [29,II.5.8], 有效完成，而第一项则提供了一个康托尔实现器。□

3 第一类和第二类贝尔类

我们研究贝尔第一类函数的概念，以及与之密切相关的（有效）贝尔第二类函数概念，如定义 9 所述。然而，贝尔第一类函数的基本性质产生了可在 $\exists^2$ 中计算的泛函，而将同样的泛函推广到贝尔第二类后，在任何 S_k^2 中都不可计算。有效第二类贝尔函数的性质仍可由苏斯林泛函 S^2 计算。

首先，在引入贝尔类之后，贝尔指出，贝尔第二类函数可以像（5）中那样表示为重复极限（见 [2, 第 69] 页）。给定$\exists^2$，有效 Baire 2 函数本质上就是二阶算术中所使用的贝尔第二类函数表示（[3]）。

定义 9 对于 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，我们有如下定义：

– f 若为一列连续函数的逐点极限，则称其为贝尔第一类函数。– f 若为一列贝尔第一类函数的逐点极限，则称其为贝尔第二类函数。– f 若存在一个二重序列（$f_{n,m}$）$_{n,m\in\mathbb{N}}$，其中的函数均为 $[0,1]$ 上的连续函数，使得

$$f(x) =_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_{n,m}(x) \text{ for all } x \in [0,1]. \tag{5}$$

其次，以下定理——连同定理 11——表明，就可计算性理论性质而言，第二类贝尔函数及其表示存在一道巨大的分界。请注意，对于有效第二类贝尔函数，我们假设相关的（双重）序列是算法的输入。

定理 10 对于有效 Baire 2 $f\colon [0,1] \to [0,1]$，上确界 $\sup_{x\in[p,q]} f(x)$ 可在 S^2 中计算，其中 p、$q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ 任意。

证明。设 $(f_{n,m})$ 是 (5) 中的二重序列。根据重复极限的定义，公式 $(\exists x \in [0,1])(f(x) > q)$ 等价于

$$(\exists y \in [0,1], l \in \mathbb{N})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\exists M \in \mathbb{N})(\forall m \geq M)(f_{n,m}(y) \geq q + \tfrac{1}{2^l}),$$

将 $f_{n,m}$ 替换为连续函数的 RM 编码后，这等价于一个 Σ^1_1-公式。注意， $\exists^2$ 根据 [14, §4]（对于贝尔空间）和 [26, §2.2] （对于 $\mathbb{R}$）可以（统一地）计算出此类编码。鉴于上述等价关系，S^2 可以判定 $(\exists x \in [0,1])(f(x) > q)$，从而计算所需的上确界。□

根据 [26, §2.3.1] 中的结果， $\exists^2$ 可以计算有界贝尔第一类函数的上确界。也可以探讨子类的类似结果。

第三，我们有以下定理。注意，对于第二类贝尔函数，我们假设与之关联的贝尔第一类函数序列是算法的输入。

定理 11 以下泛函在任何 S^2_k 中都不可计算：

– 任意泛函 $\Phi : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$，只要对于贝尔 2 $f\colon [0,1] \to [0,1],$，我们有 $\Phi(f,p,q) = \sup_{x\in[p,q]} f(x)$，其中 $p,q \in [0,1]$。 – 任意泛函 $\Psi : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\mathbb{N}^2 \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}))$，只要对于第二类贝尔 $f\colon [0,1] \to [0,1]$，二重序列 $(\Psi(f,n,m))_{n,\ m\in\mathbb{N}}$ 满足 (5)。

特别是，给定 S^2，这些泛函中的每一个都能计算一个康托尔实现器。

证明。对于第一项，(4) 中的 f 是 Baire 2。事实上，考虑如下

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^{Y(x)+1}} & \text{in case } x \in A \wedge Y(x) \le n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{6}$$

它至多只有 $n+1$ 个不连续点，也就是说， f_n 肯定是 Baire 1。显然，对于 $x \in [0,1]$, 我们有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$。对于第二项，结合第一项的结果与定理 10。□

4 半连续性

我们研究贝尔提出的上半连续性和下半连续性概念（[2]）。有趣的是，对于上半连续的 f，我们可以利用 $\exists^2$ 定义 $C_f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$；然而，通过任何 S^2_k 都无法计算 $x \in C_f$（见定理 13 和 14），即使假设存在振荡函数也是如此。若要求有一个“半连续模”（见定义 12）， $\exists^2$ 就能计算某些 $x \in C_f$（定理 15）。不过，虽然在 $\exists^2$ 中可以计算连续模，但根据推论 16，任何 S^2_k 都无法计算半连续模。

首先，我们采用以下标准定义。

定义 **12** [半连续性] 对于 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，我们有以下结论：

– f 在 $x_0 \in [0,1]$ 处上半连续（usco），是指对于任意 $y > f(x_0)$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $z \in B(x, \frac{1}{2^N})$，都有 $f(z) < y$; – f 在 $x_0 \in [0,1]$ 处下半连续（lsco），是指对于任意 $y < f(x_0)$，存在$N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $z \in B(x, \frac{1}{2^N})$，都有 $f(z) > y$,

– f 的上半连续模函数是任意满足以下条件的函数 $\Psi\colon [0,1]\to\mathbb{R}^+$：

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\forall y\in B(x,\Psi(x,k)))(f(y)<f(x)+\tfrac{1}{2^k}).$$

我们也将 Ψ 称为“上半连续模函数”。

其次，我们有以下定理。

定理 13 对于上半连续 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，集合 C_f 可用 $\exists^2$定义。

证明。首先，根据定义即可证明“$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x\in\mathbb{R}$处连续”与“$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 处上半连续且下半连续”等价。接着，对于上半连续 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，“$f$ 在 $x\in[0,1]$处不连续”等价于

$$(\exists l\in\mathbb{N})(\forall k\in\mathbb{N})(\exists y\in B(x,\tfrac{1}{2^k})(f(y)\leq f(x)-\tfrac{1}{2^l}), \tag{7}$$

这表示 f 在 $x\in[0,1]$处不是下半连续的。现在，(7) 等价于

$$(\exists l\in\mathbb{N})(\forall k\in\mathbb{N})\underline{(\exists r\in B(x,\tfrac{1}{2^k})\cap\mathbb{Q})}(f(r)\leq f(x)-\tfrac{1}{2^l}), \tag{8}$$

特别是，由于 f是上半连续的，(8) 中带下划线的量词取值范围为有理数集。由于 (8) 是算术的，$\exists^2$ 使我们能够定义 D_f（以及 C_f）。□

第三，我们有以下定理：该定理表明，虽然可以使用 $\exists^2$定义 C_f，但后者无法计算任何 $x\in C_f$（对于任何 S_k^2 也是如此），即使我们假设存在一个振荡函数（见定义 4）。

定理 14 定理 8 在将“团簇连续”替换为“上半连续”或“带有振荡函数的上半连续”后仍然成立。

证明。式 (4) 中的函数 f 是上半连续的，这可由以下观察得出：对于任意 $\varepsilon>0$，只有有限多个 $x\in A$ 使得对于 $i\leq k$，$f(x)>\varepsilon$。现在对上半连续函数重复定理 8 的证明。容易证明，f 等于 osc_f，即 f 是自身的振荡函数。□

令我们惊讶的是，数学文献中研究了那些等于自身振荡函数的函数（[16]）。此外，定理 10 和定理 14 并不矛盾：虽然上半连续函数属于 Baire 1，但定理 14 并未假设输入中给出了 Baire 1（或有效 Baire 2）表示，而定理 10 当然作了这一假设。

第四，现在我们将证明，给定上半连续函数的一个模函数，我们可以使用 $\exists^2$ 找到上半连续函数的连续点。

定理 15 对于上半连续的 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，若其模函数为 $\Psi\colon [0,1]\to\mathbb{R}^+$，则可通过 $\exists^2$ 计算出一个实数$x\in C_f$。

证明。固定上半连续的 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，其模函数为 $\Psi\colon [0,1]\to\mathbb{R}^+$，并注意到对于$x\in[0,1]$ 和 $q\in\mathbb{Q}$，根据定义有：

$$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall z\in B(x,\tfrac{1}{2^N}))(f(z)\geq q)\leftrightarrow(\exists M\in\mathbb{N})\underline{(\forall r\in B(x,\tfrac{1}{2^M})\cap\mathbb{Q})}(f(r)\geq q),$$

其中，我们将右侧的（算术）公式简记为 $A(x,q)$。注意，上述等价关系对 $N = M$ 也成立。利用 $\exists^2$ 定义 $O_q := \{x \in [0,1] : f(x) < q \vee A(x,q)\}$，并注意到 $D_q := [0,1] \setminus O_q$ 是闭集且（根据定义）无处稠密。

接下来，我们证明 $D_f \subset \cup_{q\in\mathbb{Q}} D_q$。事实上，若 $x_0 \in D_f$，则 f 在 $x_0 \in [0,1]$处不可能是下半连续的，也就是说，我们有

$$(\exists l \in \mathbb{N})(\forall N \in \mathbb{N})(\exists z \in B(x_0, \tfrac{1}{2^N}))(f(z) \leq f(x_0) - \tfrac{1}{2^l}). \tag{9}$$

令 l_0如（9）所示，并考虑满足 $f(x_0) > q_0 > f(x_0) - \frac{1}{2^{l_0}}$的 $q_0 \in \mathbb{Q}$。根据定义，$f(x_0) \geq q_0$且 $\neg A(x_0, q_0)$，也就是说，$x_0 \in D_{q_0}$，正如所需。

最后，在 k_0是满足 $f(x)+\frac{1}{2^k} \leq q$的最小 $k \in \mathbb{N}$时（若存在这样的值），定义 $Y(x)$为 $\Psi(x, k_0)$；否则定义为零。若 $x \in O_q \wedge f(x) < q$，则 $B(x, Y(x)) \subset O_q$。若 $x \in O_q \wedge A(x,q)$，则μ^2 可以找到 M_0，即如$A(x,q)$所示的最小 $M \in \mathbb{N}$，使得 $B(x, \frac{1}{2^{M_0}}) \subset O_q$。因此，若 $x \in O_q$，我们可以计算出一个完全包含于 O_q 内、以 x 为中心的球（使用 μ^2）。这种开集表示方式称为 [19]中的R2表示。现在，贝尔纲定理推出存在 $y \in \cup_{q\in\mathbb{Q}} O_q$，它满足上一段中的$y \notin D_f$。根据 [19, 定理7.10]，$\exists^2$ 可以借助开集的R2表示计算出这样的 $y \in \cup_{q\in\mathbb{Q}} O_q$。本质上，众所周知的构造性证明仍然适用（例如参见 [4, 第 87]页），并且可以利用R2表示避免使用（可数）选择公理。□

以下推论应与这样一个事实形成对照：实函数的连续模可以从 $\exists^2$计算得到。

推论 16 下述泛函在任何 S^2_k 中都不可计算：

任意泛函 $\Phi : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to ((\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{R})$，使得 $\Phi(f)$ 是上半连续 $f : [0,1] \to [0,1]$ 的 usco 模函数。

证明。结合定理14和定理15。 □

参考文献

[1] Jeremy Avigad 和 Solomon Feferman, *Gödel's functional "Dialectica" interpretation* (), 《证明论手册》, Stud. Logic Found. Math., 第 卷, 第 页, 337–405。[2] Ren´ *Sur les fonctions de variables réelles* **3** 1899 3, é 贝尔, 《》, 1 123 Ann. di Mat. (), 第 期, –。[3]Jordan Mitchell Barrett、Rodney G. Downey 和 Noam Green- berg, *Cousin's lemma in second-order arithmetic*, 预印本, arxiv: https://arxiv.org/abs/2105.02975（2021）。[4] Errett Bishop, *Foundations of constructive analysis*, McGraw-Hill, 1967。[5] J´an Bors´ík 和 Jozef Dobo˘ s, *A note on real cliquish functions*, Real Anal. Exchange 18（1992/93）, 第 1 期, 139–145。[6] J´an Bors´ík, *Sums of quasicontinuous functions defined on pseudometrizable spaces*, Real Anal. Exchange 22（1996/97）, 第 1 期, 328–337。

[7] Wilfried Buchholz、Solomon Feferman、Wolfram Pohlers 和 Wilfried Sieg, *ated inductive definitions and subsystems of analysis* 897, 1981 , LNM Springer, 。[8] Jozef Dobo˘s 和 Tibor ˘Sal ´ *Cliquish functions Riemann integrable functions and* at, 《》, , Acta *quasi-uniform convergence* **40 41** 1982 219 223 Math. Univ. Comenian. (( ) – [9] Hermann Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.* 1870 , Ludwig Friedrich Fues, 。[10] David Hilbert 和 Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik. II*, 第二版。Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 第 50 卷, Springer, 1970。[11] ˘Lubica Hol ´ ´ *USCO and quasicontinuous map-* a、Du˘san Holy 和 *pings* 81, 2021 Warren Moors, 《》, 第 卷, De Gruyter, 。[12] ˘Lubica Hol ´ *There are* $2^{\mathfrak{c}}$ *quasicontinuous non Borel functions on uncountable* a, 《》, Results *Polish space* **76** 2021 3, 126, 11 Math.（）, 第 期, 论文编号。[13] Stephen C. Kleene, *Recursive functionals and quantifiers of finite types. I*, Trans. Amer. Math. Soc. 91（1959）, 1–52。[14] Ulrich Kohlenbach, *Foundational and mathematical uses of higher types*, 《数学基础反思》, Lect. Notes Log., 第 15 卷, ASL, 2002 年, 第 92–116 页。[15] , *Higher order reverse mathematics*, 《逆数学 2001》, Lect. Notes Log., 第 21 卷, ASL, 2005 年, 第 281–295 页。[16] Pavel Kostyrko, *Some properties of oscillation*, Mathematica Slovaca 30（1980）, 157–162。[17] John Longley 和 Dag Normann, *Higher-order Computability*, 《可计算性的理论与应用》, Springer, 2015。[18] A. Maliszewski, *On the products of bounded Darboux Baire one functions*, J. Appl. Anal. 5（1999）, 第 2 期, 171–185。[19] Dag Normann 和 Sam Sanders, *Open sets in Reverse Mathematics and Computability Theory* **30** 2020 8, 40 , Journal of Logic and Computation（）, 第 期, 第 页。[20] , *Pincherle's theorem in reverse mathematics and computability theory*, Ann. Pure Appl. Logic 171（2020）, 第 5 期, 102788, 41。[21] , *The ~~Axiom of~~ Choice in Computability Theory and Reverse Mathematics*, Journal of Logic and Computation 31（2021）, 第 1 期, 297-325。[22] , ~~*On ro*~~*bust theorems due to Bolzano Weierstrass and Cantor in Reverse* , , , Journal of *Mathematics* 10 1017 2022 71 2022 51 Symbolic Logic, doi: 。/jsl. 。 （）, 第 页。[23] , *Betwixt Turing and Kleene*, Lecture Notes in Computer Science 13137, Springer（2022）, 236-252。[24] , *On the uncountability of* $\mathbb{R}$ **87** 2022 4, , Journal of Symbolic 1474 1521 Logic（）, 第 - 期。[25] , *On the computational properties of basic mathematical notions*, Journal of Logic and Computation 32（2022）, 第 8 期, 1747-1795。[26] , *The Biggest Five of Reverse Mathematics*, 已投稿, arxiv: https://arxiv.org/abs/2212.00489 （2023）, 第 39 页。[27] Dag Normann 和 William Tait, *On the computability of the fan functional*, 《Feferman 论数学基础》, Outst. Contrib. Log., 第 13 卷, Springer, 2017 年, 第 57–69 页。[28] Bernhard Riemann（作者）以及 Roger Clive Baker、Charles O. Christenson 和 Henry Orde（译者）, *Bernhard Riemann: collected works*, Kendrick Press, 2004。[29] Stephen G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic*, 第 2 版, Perspectives in Logic, CUP, 2009。[30] Robert I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, 1987。[31] Alan Turing, *On computable numbers with an application to the Entscheidungs-* , , *problem* **42** 1936 230 265 Proceedings of the London Mathematical Society（）, - 。