arXiv:2302.07078v2 [math.CA] 11 Mar 2024

朴素函数论：基于上确界论证的实分析

Rafael Reno S. Cantuba

数学与统计学系，德拉萨大学，菲律宾马尼拉马拉特区塔夫脱大道 2401 号，邮编 1004

摘要

初等实函数论中的关键定理，其证明会用到紧致性论证。尽管较新的文献陆续引入了各种优雅的新紧致性论证或其等价形式，本文立足于这样一种观点：借助连续函数或可微函数的局部性质，运用上确界论证便已足够；而且，由此得到的实函数论体系，无须涉及比实数通常的序所直接蕴含的内容更为复杂的概念。

关键词：实分析，微积分，最小上界性质，完备性公理，上确界，紧致性论证 2020年数学学科分类：00A35,26A06, 26-01

1. 引言

介值定理和极值定理的证明，可以说，在常见的本科微积分教材中鲜少出现，因此，Salas、Hille 和 Etgen 所著的书 [16] 可谓相当罕见。若考察更“高等”的微积分或“初等”实分析教材，乃至较近出版、证明了上述定理的著作，这些证明可能会借助更“复杂”的工具：收敛子序列、 [4], 带标记分割 [1, 9], 实数归纳法、 [6], 连续性归纳法[10], 或“局部—整体”原理 [15]。我们并非要反对这些技巧的使用，因为每一种都是处理该主题的优雅方法。然而，如果一个人是初次接触这些技巧，并希望最终在学习、教学乃至研究实分析时采用它们，

在我们看来，相关启发式方法似乎有所欠缺。例如，实数归纳法或连续性归纳法中的归纳步骤充斥着不等式，或是关于区间的条件，以至于由此得出的陈述缺乏通常实分析的感觉。再举一例，带标记分割的概念涉及有序对或集合（子区间）以及元素；这种数学构造或许从集合论或代数视角来看颇具吸引力，却仍然过于脱离完备有序域的基本性质。在这方面，这本书 [16] 更显特别。在 [16, 引理 B.1.1、B.2.1], 中，介值定理和极值定理的证明极为简洁，只用到了由实数通常的序关系直接得到的事实。这种技巧广为人知，却并无正式名称；只有在 [18], 中，该技巧被称为“上确界／下确界论证”，因为它借助闭有界区间内非空子集的上确界（或下确界），通过反证法进行论证，直至得到所需结论。实数域的最小上界性质与其对偶性质——这里可非正式地称为“最大下界性质”——直接等价，因此，借助上确界的证明理应也有相应的下确界证明。我们将说明，使用上确界已足够。因此，我们只需在“上确界／下确界”中择一，故选择“上确界”。这就是我们所说的上确界论证，也是紧致性论证的一种 [18, 章节 2], ，此处是指这类论证形式体现了闭有界区间的紧致性，或体现了海涅-博雷尔定理的重要意义。不过，我们在此澄清，要成功进行紧致性论证，并不需要引入导向紧致性的整套拓扑概念。例如，上确界论证可能只需要实数域的最小上界性质。正如 [18, 章节 2], 所探讨的，紧致性论证所需的工具复杂程度各不相同；在我们看来，所用工具越复杂，它就越不可能在涉足高等数学的人们的集体意识中留存，甚至得以延续。我们认为，启发式方法的必要性，是决定未来的纯数学学生和教师最终采用何种技巧或方法的重要因素。

一个自然的问题是：哪些实分析基本定理可以用上确界论证来证明？我们将考察以下定理。

（BVT）有界值定理。若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $M>0$，使得 $a\le x\le b$ 蕴含 $f（x）\le M$。（EVT）极值定理。若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $c\in[a,b]$，使得 $a\le x\le b$ 蕴含 $f（x）\le f（c）$。（IVT）介值定理。若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f（a）<0<f（b）$，则存在 $c\in（a，b）$，使得 $f（c）=0$。（UCT）一致连续定理。若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 f 一致连续。（DIT）达布可积性定理。若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 f 在 $[a,b]$ 上（达布）可积。（SIFT）严格递增函数定理。若函数 f 在（a，b）上为正，则函数 f 在（a，b）上严格递增。（IFT）递增函数定理。若函数 f 在 $[a,b]$ 上非负，则函数 f 在 $[a,b]$ 上递增。（MVI）中值不等式。若函数 f 在 $[a,b]$ 上以 $M>0$ 为上界，则 $a\le x_1<x_2\le b$ 蕴含 $f（x_2）-f（x_1）\le M（x_2-x_1）$。（CFT）常函数定理。若函数 f 在 $[a,b]$ 上为零，则函数 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数。（命题 1）闭有界区间是连通的。（命题 2）闭有界区间是紧致的。

众所周知，上述命题列表并非相互独立。可以从中选取若干命题，由此推出其余命题。这里我们要强调的是，上确界论证的意义在于：借助这一技巧，可以直接从实数域的最小上界性质证明上述列表中的所有定理。因此，实分析课程的“设计者”可以灵活选择其中足够数量的命题，通过上确界论证加以证明，再用传统方法证明其余命题。上述列表中的某些命题具体依赖于同一列表中的哪些其他命题，我们将在下文讨论。

我们对上述定理的表述方式作几点说明。我们对（EVT）的表述应称为“最大值定理”；而“极值”版本的结论则应表述为：“存在c_1、$c_2\in[a,b]$，使得 $a\le x\le b$蕴含 $f(c_1)\le f(x)\le f(c_2)$。”关于 c_1 的第一部分可由仅包含 c_2 的版本推出，因为 f 的连续性蕴含 $-f$的连续性，所以关于 c_2 的部分已经足够。我们

决定保留（EVT）这一名称，因为它使用得更广泛。在高等实函数论的入门课程中，通常会先介绍一个较弱的命题，即（BVT）。有些版本用“有界”而非仅用“有上界”，或者在（BVT）陈述的末尾写作“$|f(x)| \leq M$”，而非“$f(x) \leq M$”。前者显然蕴含后者；反过来，则可利用f 的连续性蕴含 $-f$的连续性这一事实证明。在（EVT）的证明中，传统做法是先直接根据最小上界性质证明（BVT），再利用某个倒数函数的连续性来证明（EVT）[16, p。A-9]。显然，（EVT）蕴含（BVT），但（EVT）等价于完备性公理，而（BVT）则不等价 [8, p。 271]。这是因为，对于一个满足（BVT）这一公理的有序域 $\mathbb{F}$，还必须满足一个称为“可数共尾性”的附加条件， $\mathbb{F}$ 才能完备。实分析定理与实数域完备性之间的等价关系本身就相当值得研究。参见 [5, 8, 14, 17]。我们在列表中同时列出（BVT）和（EVT），尽管在采用上确界论证的方法中，证明（EVT）并不需要（BVT）；我们希望借此展现上确界论证这一技巧的重要性。

介值定理的某些版本中，假设的条件是“$f(a) < k < f(b)$ 或 $f(b) < k < f(a)$”，而非仅仅“$f(a) < 0 < f(b)$”；相应的结论是“$f(c) = k$”，而非“$f(c) = 0$”。后一种情况已经足够，因为前一种情况可由函数 f 的连续性推出函数 $x \mapsto f(x) - k$ 和 $x \mapsto k - f(x)$ 的连续性。

（UCT）在传统的初等实分析教学体系中之所以重要，是因为它有一个推论，即（DIT）。例如，参见[16, 定理 B.4.6]。正如我们将要证明的，（DIT）可以独立于（UCT）得到证明；但至少在笔者看来，这还不足以成为在设计实分析课程时舍弃（UCT）的理由。如果主要考虑的是如何直接从（ES）证明（DIT），那么理论发展的初期就必须引入所有与积分有关的预备概念。然而，如果仍要使用（UCT），这一点便没有必要，因为（UCT）只要求函数在闭有界区间上连续。此时，澄清我们对“可积性”和“积分”的用法最为恰当，这也符合 [8, 12]。全文中，可积性和积分的概念均采用达布意义，而非黎曼、麦克沙恩、丹乔伊、佩龙或亨斯托克–库兹韦尔意义：只采用达布意义。若函数 $\varphi:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为阶梯函数：存在 $[a,b]$的一个分割，其元素按如下顺序排列

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，使得对每个 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$\varphi|_{(x_{k-1}, x_k)}$都是常值函数。（此处使用的记号是函数在定义域的子集上的限制的标准记法。）因此，在 φ下，区间（x_{k-1}，x_k）的像恰好只有一个元素，记为 c_k。在这种情况下，我们定义 $\int_a^b \varphi := \sum_{k=1}^n c_k\,(x_k - x_{k-1})$，这就是我们所说的阶梯函数的积分。通过常规证明可以表明，阶梯函数的积分与分割的选取无关。若实值函数 f的定义域包含 $[a, b]$，则称其在$[a, b]$ 上可积，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，都存在阶梯函数 φ、ψ：$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$，使得 $\varphi \le f|_{[a,b]} \le \psi$且 $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$。若存在唯一的 $\int_a^b f \in \mathbb{R}$，使得对于任意阶梯函数$\varphi$、$\psi$：$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$，只要 $\varphi \le f|_{[a,b]} \le \psi$，就有 $\int_a^b \varphi \le \int_a^b f \le \int_a^b \psi$，则称 f在 $[a, b]$ 上有积分。在这种情况下，实数 $\int_a^b f$ 称为 f在 $[a, b]$上的积分。有序域的完备性（加上可数共尾性）的一种刻画称为“达布积分性质” [8, 第 271] 页。它与我们上述（DIT）表述的区别在于，结论是“f 在 $[a, b]$上有（达布）积分”，而不是“f在 $[a, b]$上（达布）可积”。前者显然蕴含后者，而在完备有序域中，反过来也成立；这项性质称为“积分等价性质”[8, 第 271]页。在 [6, 定理 4], 中，（DIT）是用实数归纳法证明的；据 [6, 第 141]页所述，这种方法颇具新意。我们完全同意这一点。不过，[6, 定理4] 证明中的思路强烈暗示，可以直接从最小上界性质证明（DIT）。本文将证明，这对（DIT）确实成立，对其他重要的实函数定理也同样如此。

在 [2], 中有一个使用上确界论证证明（SIFT）的证明，而一页论文中的讨论继续给出了（SIFT）$\Longrightarrow$（IFT）$\Longrightarrow$（MVI）的证明；此外，从 [19, 定理 1(c)–(e)], 可以找到一个证明，说明（IFT）$\Longrightarrow$（SIFT）$\Longrightarrow$（MVI）。与此同时，（IFT）很容易由（MVI）作为推论证明：给定 $\varepsilon > 0$，若 f' 在左端点为 a、右端点为 b的非退化区间上非负，则 $-f'$有上界 $\frac{\varepsilon}{b-a}$，而通过常规计算即可得出（IFT）的结论。在这两个来源中，[2, 19], 都有证明说明（CFT）是（SIFT）或（IFT）的推论；此外，还可以在 [13]中找到一个使用“下确界论证”独立证明（CFT）的证明。关于（SIFT）和（IFT）这两个名称，我们对“严格递

增”和“递增”的用法与 [19, 第 231]页一致。也就是说，给定一个函数 f，其定义域包含一个端点为 a 和 b的区间 I，若 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$蕴含 f（x_1）$< f$（x_2），我们就称 f 在 I 上严格递增；若 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$蕴含f（x_1）$\leq f$（x_2），则称 f在 I上递增。根据 [1, 第 174], 页的说法，（SIFT）、（IFT）和（MVI）与中值定理之间的关系很有意思，甚至令人着迷。关于这个主题已有大量文献，但感兴趣的读者可以从 [2, 7, 19]入手。当然，（CFT）在实函数论中非常重要。例如，（CFT）可用于证明微积分基本定理的一种形式可由另一种形式推出；后一种形式可通过积分中值定理证明，而积分中值定理又可利用极值定理和介值定理证明。（SIFT）可用于建立反函数定理，而反函数定理可用于解析地定义初等超越函数；（CFT）则可用于在微积分证明中推导这些超越函数的恒等式。鉴于上述（SIFT）、（IFT）、（MVI）和（CFT）之间的依赖关系，我们仍决定将它们全部列入清单，主要是为了进一步说明选择上确界论证来证明它们的优点。实分析课程的设计者可以简单地从（SIFT）、（IFT）或（MVI）中选一个作为起点，然后利用刚才提到的逻辑依赖关系。不过，正如我们将要展示的，所有四个定理都可以使用上确界论证分别独立证明。

“微积分其余部分所依赖的”关于连续函数的三个基本定理，据 [11, 第 147], 页所述，是介值定理（IVT）、极值定理（EVT）和 UCT。这里所说的“微积分其余部分”，指的是实函数论中截至证明微积分基本定理的两种形式（及其直接推论，例如换元）并在此基础上解析地定义初等超越函数的那部分内容。这大致构成了实函数论最基础的核心，从经典的[3, 第 2], 章中便可见一斑。当然，我们的视角更为基础，而且绝非构造性的。根据前面的讨论，介值定理（IVT）、极值定理（EVT）和 UCT 确实已经足够。这三个“支柱”定理可以给出非常优雅的“拓扑证明”，但将它们应用于微积分的具体环境时，还需要命题 1（I1）和命题 2（I2），因此我们也将它们列入清单。它们可以直接通过关于实数域完备性的上确界论证来证明。值得一提的是，如果

实分析课程的设计者不选择从具体的上确界论证环境入手，而是选择更抽象的拓扑环境，那么之后只需援引命题 1（I1）和命题 2（I2），便可说明在拓扑环境中证明的结果能够转化为三个支柱定理更具体的形式。

2. 通过上确界论证构造证明的组成部分

将通过上确界论证来证明的实分析定理如下。

（有界值定理）若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $M>0$，使得 $a\le x\le b$ 蕴含 $f(x)\le M$。（极值定理）若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $c\in[a,b]$，使得$a\le x\le b$ 蕴含 $f(x)\le f(c)$。（介值定理）若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 a 处为负，且在 (a,b) 上非零，则函数 f 在 $[a,b]$ 上为负。（UCT）若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 f 一致连续。（达布积分定理）若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则对每个 $\varepsilon>0$，都存在 $[a,b]$ 的一个分割Δ，使得 $\mathcal{U}_f(\Delta)-\mathcal{L}_f(\Delta)<\varepsilon$。（SIFT’）若函数 f 在 (a,b) 上为正，则 $a<t<b$ 蕴含 $f(a)<f(t)$。（递增函数定理）若函数 f 在 $[a,b]$ 上非负，则 $a\le t\le b$ 蕴含 $f(a)\le f(t)$。（中值不等式）若函数 f 在 $[a,b]$ 上以 $M>0$ 为上界，则 $a\le t\le b$ 蕴含$f(t)-f(a)\le M(t-a)$。（常值函数定理）若函数 f 在 $[a,b]$ 上为零，则 $a\le t\le b$ 蕴含 $f(t)=f(a)$。（I1’）若 $U\subseteq[a,b]$ 包含 a，且相对于 $[a,b]$ 既开又闭，则 $[a,b]\subseteq U$。（命题 2）闭有界区间是紧致的。

通过以这种方式陈述这些定理，经由上确界论证的方法可以很容易地推广，后文将对此加以展示。新的表述（IVT’）、（DIT’）、（SIFT’）、（IFT’）、（MVI’）、（CFT’）和（I1’）分别是（IVT）、（DIT）、（SIFT）、（IFT）、（MVI）、（CFT）和（I1）的充分条件。

假设（IVT’）成立。为证明（IVT），设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<0<f(b)$。若函数 f 在 (a,b) 上处处非零，则由（IFT’），函数 f 在 b 处为负，这与 $0<f(b)$ 矛盾。因此，存在 $c\in(a,b)$，使得函数 f 为零。

若（DIT’）成立，且函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则根据达布上和与下和的一条常规性质，存在阶梯函数 $\varphi,\psi\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$，使得 $\varphi\le f|_{[a,b]}\le\psi$，并且 $\int_a^b\varphi=\mathcal{L}_f(\Delta)$ 和 $\int_a^b\psi=\mathcal{U}_f(\Delta)$。将其代入（DIT’）中的不等式，即可证明函数 f 在 $[a,b]$ 上可积。

假设（MVI’）成立，且函数 f 在 $[a,b]$ 上被 $M>0$ 有上界。特别地，给定 x_1、$x_2\in[a,b]$，其中 $x_1<x_2$，函数 f 在 $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$ 上被 M 有上界，因此

$$x_1\le t\le x_2\Longrightarrow f(t)-f(x_1)\le M(t-x_1),$$

并令 $t=x_2$，我们得到 $f(x_2)-f(x_1)\le M(x_2-x_1)$，由此证明了（MVI）。类似的论证可用于证明（SIFT’）$\Longrightarrow$（SIFT）以及（IFT’）$\Longrightarrow$（IFT）。（CFT’）$\Longrightarrow$（CFT）的蕴含关系显然成立。

假设（I1’）成立，但为了导出矛盾，假设存在一个不连通的区间 $[a,b]$。这意味着存在 $[a,b]$ 的互不相交的非空子集 U 和 V，它们相对于 $[a,b]$ 都是开的，并且 $U\cup V=[a,b]$。不失一般性，可假设 $a\in U$。由前述集合等式可知，$U=[a,b]\setminus V$ 相对于 $[a,b]$ 是闭的；根据（I1’），$[a,b]\subseteq U$。通过常规的集合论论证可得，$V=\emptyset$。这证明了（I1’）$\Longrightarrow$（I1）。

设 ε 和 M 为正实数，设 U 是包含 a的 $[a,b]$ 的子集，并设 $\mathscr{C}$是 $[a,b]$的一个开覆盖。给定 $x\in[a,b]$，令 $\mathscr{P}(a,x)$ 表示 $[a,x]$的所有分割构成的集合。本节列出的各个定理（有界值定理）–（命题 2）的结论，都可以与一个关于两个实变量的命题函数 $\mathcal{P}$ 相关联，如下表所示。

定理	命题函数
（有界值定理）	$\mathcal{P}(a,x)\colon\quad \exists M>0\quad a\le t\le x\Longrightarrow f(t)\le M$
（极值定理）	$\mathcal{P}(a,x)\colon\quad \exists \ell\in[a,x]\quad a\le t\le x\Longrightarrow f(t)\le f(\ell)$
（介值定理）	$\mathcal{P}(a,x)\colon\quad a\le t\le x\Longrightarrow f(a)<0$
（UCT）	$\mathcal{P}(a,x)=\mathcal{P}_\varepsilon(a,x)\colon\quad \exists\delta>0\quad \forall s,\ t\in[a,x]\quad \lvert s-t\rvert<\delta\Longrightarrow\lvert f(s)-f(t)\rvert<\varepsilon$
（达布积分定理）	$\mathcal{P}(a,x)=\mathcal{P}_\varepsilon(a,x)\colon\quad \exists\Delta\in\mathscr{P}(a,x)\quad \mathcal{U}_f(\Delta)-\mathcal{L}_f(\Delta)\le(x-a)\,2\,\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$
（SIFT’）	$\mathcal{P}(a,x)\colon\quad a<t<x\Longrightarrow f(a)<f(t)$
（递增函数定理）	$\mathcal{P}(a,x)\colon\quad a\le t\le x\Longrightarrow f(a)\le f(t)$
（中值不等式）	$\mathcal{P}(a,x)=\mathcal{P}_M(a,x)\colon\quad a\le t\le x\Longrightarrow f(t)-f(a)\le M(t-a)$
（常值函数定理）	$\mathcal{P}(a,x)\colon\quad a\le t\le x\Longrightarrow f(t)=f(a)$
（I1’）	$\mathcal{P}(a,x)=\mathcal{P}_U(a,x)\colon\quad [a,x]\subseteq U$
（I2）	$\mathcal{P}(a,x)=\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(a,x)\colon\quad \exists A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathscr{C}\quad [a,x]\subseteq\bigcup_{k=1}^n A_k$

表 1：（BVT）–（命题 2）各结论的命题函数 $\mathcal{P}$

命题 1. 设 (⋆) 是表 1 所列定理之一，并设 $x \in [a,b]$。若 $\mathcal{P}$ 是与 (⋆) 的结论相关联的命题函数，则当 $x = a$ 或 $[a,b]$ 为单点集时，$\mathcal{P}(a,x)$ 为真。

证明。如果 (⋆) 是 (I1')，那么我们在此只需注意到，假设 U 包含 a，因此证明显而易见。其余情形的证明都很简单。 □

使用上确界论证证明 (BVT)–(I2) 的主要策略是利用集合

$$\mathcal{S} = \{x \in [a,b] \ : \ \mathcal{P}(a,x)\}.$$

在某些情形下，$\mathcal{S}$ 可能依赖于 ε、M、U 或 $\mathscr{C}$，因为 $\mathcal{P}$ 存在这种依赖关系。每种情形下，$\mathcal{P}$ 也依赖于 f；不过，为了简化记号，表 1 的下标中不再标明这一点。证明将利用实数域最小上界性质的以下推论。

原理 2。如果 $\mathcal{S}$ 是 $[a,b]$ 的非空子集，那么存在 $c \in [a,b]$，使得 $c = \sup \mathcal{S}$。

证明。最小上界性质保证 c 在 $\mathbb{R}$ 中存在。由于 b 是 $\mathcal{S}$ 的上界，$c \le b$。由于 $\mathcal{S}$ 有一个元素，比如 x，且 a 是 $\mathcal{S}$ 的下界，而 c 是 $\mathcal{S}$ 的上界，$a \le x \le c \le b$。因此，$c \in [a,b]$。 □

原理 3. 设 $\mathcal{S}$ 是 $[a,b]$ 的非空子集。如果 $\mathcal{S}$ 不是单点集，那么 $a \ne \sup \mathcal{S}$。

证明。假设 $\mathcal{S}$ 是 $[a,b]$ 的非空子集。我们采用逆否法。给定 $x \in \mathcal{S}$，$\mathcal{S}$ 的上界 $\sup \mathcal{S}$ 与下界 a 满足 $a \le x \le \sup \mathcal{S}$，其中最左侧的成员若假设等于 $\sup \mathcal{S}$，则可得出结论：$\mathcal{S}$ 的每个元素都等于 $\sup \mathcal{S}$。

□

“不是上界”这一谓词会在通过上确界论证的证明中反复出现，因此我们将使用以下内容。

原理 4. 若 $c = \sup \mathcal{S}$ 且 $\delta > 0$，则存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得$c - \delta < \xi \le c$。

证明. 由 $\delta > 0$，我们得到 $c - \delta < c$，因此 $c - \delta$ 不是 $\mathcal{S}$的上界，这意味着存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得 $c - \delta < \xi$。由于 c 是 $\mathcal{S}$的上界， $c - \delta < \xi \leq c$。 □

若给定 $a \leq x \leq c$，且条件 $\mathcal{P}(a, x)$ 和 $\mathcal{P}(x, c)$ 蕴含 $\mathcal{P}(a, c)$，则称关于两个实变量的命题函数 $\mathcal{P}$ 是传递的。

引理 5. 设 $(\star)$ 是表 1 中的一个定理，但不包括 (UCT) 或 (SIFT')。若 $\mathcal{P}$ 是与 $(\star)$ 相关联的命题函数，则 $\mathcal{P}$ 是传递的。

证明. 此处我们只证明当 $(\star)$ 为 (DIT) 时 $\mathcal{P}$ 的传递性。关于 $(\star)$ 的其余情况，证明都很常规。

设 $\eta := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$。假设 $a \leq x \leq c$，并假设 $\mathcal{P}(a, x)$ 和 $\mathcal{P}(x, c)$ 均成立。因此，存在 $\Lambda \in \mathscr{P}(a, x)$ 和 $\Delta \in \mathscr{P}(x, c)$，使得

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_f(\Lambda) - \mathcal{L}_f(\Lambda) &\leq (x - a)\eta, && (1) \\ \mathcal{U}_f(\Delta) - \mathcal{L}_f(\Delta) &\leq (c - x)\eta. && (2) \end{aligned}$$

集合 $\Lambda \cup \Delta$ 是 $[a, c]$ 的一个分割，根据达布上和与达布下和的定义，

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_f(\Lambda \cup \Delta) &= \mathcal{U}_f(\Lambda) + \mathcal{U}_f(\Delta), && (3) \\ \mathcal{L}_f(\Lambda \cup \Delta) &= \mathcal{L}_f(\Lambda) + \mathcal{L}_f(\Delta). && (4) \end{aligned}$$

利用 (2)–(4),

$$\mathcal{U}_f(\Lambda \cup \Delta) - \mathcal{L}_f(\Lambda \cup \Delta) \leq (c - x)\eta + (x - a)\eta = (c - a)\eta,$$

这证明了 $\mathcal{P}(a, c)$ 为真，因此 $\mathcal{P}$ 是传递的。 □

之所以没有将 (UCT) 和 (SIFT') 纳入引理 5，是因为，例如，对于 (UCT) 的情况，如果 $\mathcal{P}$ 是与 (UCT) 相关联的命题函数，那么 $\mathcal{P}(a, c)$ 为真不仅取决于 $\mathcal{P}(a, x)$ 和 $\mathcal{P}(x, c)$ 为真，还取决于 x 和 c“有多接近”。对于 (SIFT')，由于 $\mathcal{P}$ 的假设中含有严格不等式，因此会遇到一些问题。因此，在这些情况下， $\mathcal{P}$ 满足的条件并非恰好是传递性，但与之密切相关。

设 $\delta_0 > 0$，并假设 $a < c - \delta_0 < x \leq c$。如果 $\mathcal{P}(a, x)$ 和$\mathcal{P}(c - \delta_0, c)$ 蕴含 $\mathcal{P}(a, c)$，那么 $\mathcal{P}$称为伪传递的。如果 $\mathcal{P}(a, x)$

并且 $\mathcal{P}(c-\delta_0, c)$ 蕴含存在 $\delta \in (0, \delta_0]$，使得 $\mathcal{P}(a, c+\delta)$ 成立，那么 $\mathcal{P}$ 称为准传递。下面的证明是显然的。

命题 6. 如果 $\mathcal{P}$ 是表 1 中与（SIFT'）相关联的命题函数，那么 $\mathcal{P}$ 是伪传递的。

如果 $\mathcal{P}$ 是表 1 中与（UCT）相关联的命题函数，要证明 $\mathcal{P}$的伪传递性和准传递性，我们需要以下引理。

引理 7. 给定正实数 δ_1 和 δ_2，若 $a < c-\delta_1 < \xi \leq c$，则存在 $\delta_3 > 0$，它不超过 δ_1 和 δ_2，使得对于任意s、$t \in [a, c+\delta_3]$，若 $|s-t| < \delta_3$，则 s、$t \in [a, \xi]$或 s、$t \in [c-\delta_1, c+\delta_1]$至少有一组成立。

证明. 由于 $c-\delta_1 < \xi$，我们有 $\delta := \xi-(c-\delta_1) > 0$。令 $\delta_3 := \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\delta}{2}\}$，其中该集合只包含正数；此外，$\delta_3$ 既不超过δ_1，也不超过 δ_2，如所求。由 $\delta_3 \leq \delta_1$，可得 $[c, c+\delta_3] \subseteq [c, c+\delta_1]$；而由 $c-\delta_1 < \xi \leq c$，我们有 $(\xi, c] \subseteq [c-\delta_1, c]$。因此，

$$(\xi, c+\delta_3] \subseteq (\xi, c] \cup [c, c+\delta_3] \subseteq [c-\delta_1, c] \cup [c, c+\delta_1] \subseteq [c-\delta_1, c+\delta_1]\,. \quad (5)$$

但由 $c-\delta_1 < \xi \leq c$，我们也有 $(c-\delta_1, \xi] \subseteq [c-\delta_1, c+\delta_1]$，因此由 (5)，

$$(c-\delta_1, \xi] \cup (\xi, c+\delta_3] \subseteq [c-\delta_1, c+\delta_1]\,. \quad (6)$$

设 $s, t \in [a, c+\delta_3]$ 满足 $|s-t| < \delta_3$。由于 $a < c-\delta_1 < \xi \leq c$，且最右端的项严格小于 $c+\delta_3$，我们得到

$$[a, c+\delta_3] \subseteq [a, c-\delta_1] \cup (c-\delta_1, \xi] \cup (\xi, c+\delta_3]\,. \quad (7)$$

不失一般性，假设 $s \leq t$，并且我们首先排除以下可能性：$s \in [a, c-\delta_1]$，但 $t \in (\xi, c+\delta_3]$。若此情形成立，则 $s \leq c-\delta_1 < \xi < t$，这意味着 $\delta = \xi-(c-\delta_1) \leq t-s$，其中最右端的项为 $|s-t|$，而最左端的项大于 $\frac{\delta}{2} \geq \delta_3$。因此，$\delta_3 < |s-t|$，这与 s, t 的选取相矛盾。根据 (7)，其余情形为：s, t 要么都属于 $[a, c-\delta_1] \cup (c-\delta_1, \xi] \subseteq [a, \xi]$，要么都属于 $(c-\delta_1, \xi] \cup (\xi, c+\delta_3]$；由 (6) 可知，后者包含于 $[c-\delta_1, c+\delta_1]$。 □

引理 8. 参见表 1，若 $\mathcal{P}$ 是与（UCT）相关联的命题函数，则 $\mathcal{P}$ 是准传递且伪传递的。

证明. 假设 $a < c-\delta_1 < \xi \le c$，且陈述 $\mathcal{P}(a,\xi)$ 和 $\mathcal{P}(c-\delta_1, c+\delta_1)$ 为真。因此，存在 $\delta_3 > 0$ 和 $\delta_4 > 0$，使得

$$s,t \in [a,\xi], \quad |s-t| < \delta_3 \implies |f(s)-f(t)| < \varepsilon, \tag{8}$$
$$s,t \in [c-\delta_1, c+\delta_1], \quad |s-t| < \delta_4 \implies |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{9}$$

根据引理 7，存在一个既不超过 δ_1 也不超过 $\min\{\delta_3,\delta_4\}$ 的 $\delta > 0$，使得对于任意 s、$t \in [a, c+\delta]$，若 $|s-t| < \delta$，则 s、t 要么都属于 $[a,\xi]$，要么都属于 $[c-\delta_1, c+\delta_1]$。在前一种情况下，$|s-t| < \delta \le \delta_3$，因此根据 (8)，$|f(s) - f(t)| < \varepsilon$。对于另一种情况，$|s-t| < \delta \le \delta_4$，我们使用 (9) 也可得到 $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$。至此，我们已证明 $\mathcal{P}(a, c+\delta)$，所以 $\mathcal{P}$ 是准传递的。

现在假设 $a < b-\delta_5 < \zeta \le b$，并且陈述 $\mathcal{P}(a,\zeta)$ 和 $\mathcal{P}(b-\delta_5, b)$ 均成立。因此，存在 $\delta_6 > 0$ 和 $\delta_7 > 0$，使得

$$s,t \in [a,\zeta], \quad |s-t| < \delta_6 \implies |f(s)-f(t)| < \varepsilon, \tag{10}$$
$$s,t \in [b-\delta_5, b], \quad |s-t| < \delta_7 \implies |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{11}$$

根据引理 7，存在不超过 δ_5 且为 $\{\delta_6,\delta_7\}$ 的最小值的 $\delta_8 > 0$，使得若 s，$t \in [a,b]$ 且 $|s-t| < \delta_8$，则要么 s，$t \in [a,\zeta]$，要么 s，$t \in [b-\delta_5, b+\delta_5]$；但由于 s，$t \in [a,b]$，我们还能得到 s，$t \in [b-\delta_5, b]$。对于 s，$t \in [a,\zeta]$ 的情形，我们使用 $\delta_8 \le \delta_6$ 和 (10) 得到 $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$；对于 s，$t \in [b-\delta_5, b]$ 的情形，我们使用 $\delta_8 \le \delta_7$ 和 (11)，得到 $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$。这就完成了对 $\mathcal{P}(a,b)$ 成立的证明。因此，$\mathcal{P}$ 是伪传递的。□

上确界论证的证明会用到一些陈述，它们是函数 $[a,b]$的连续性、可微性或某种拓扑性质的推论，并且可以通过 ε-δ论证加以证明；而 ε-δ论证无疑是分析证明的基本方法之一。对于本节列出的定理（有界值定理）–（命题 2）的证明，我们需要以下内容。

引理9. 给定定义在 $[a,b]$上的实值函数 f、$c \in$ （a,b）以及 $M > 0$，以下结论成立。

(ED1) 若函数 f 在 c 处连续，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c-\delta < c < c+\delta < b$，并且函数 f 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上有上界。(ED2) 若函数 f 在 c 处连续，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得$a < c-\delta < c < c+\delta < b$，并且存在 $k \in [a, c+\delta]$，使得$c-\delta \le t \le c+\delta$ 蕴含 $f(t) \le f(k)$。

(ED3) 若函数 f 在 c 处连续且非零，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且对于每个 $t \in [c - \delta, c + \delta]$，数 $f(c)$ 和 $f(t)$ 同号。(ED4) 设 $\varepsilon > 0$。若函数 f 在 c 处连续，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $s, t \in [c - \delta, c + \delta]$ 蕴含 $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$。(ED5) 设 $\varepsilon > 0$。若函数 f 在 c 处连续，则若 $\eta := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $c - \delta < t \leq c$ 蕴含 (ED6) 若 $f'(c) > 0$，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $c - \delta \leq s < t \leq c + \delta$ 蕴含 $f(s) < f(t)$。(ED7) 若 $f'(c) \geq 0$，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $c - \delta \leq s < t \leq c + \delta$ 蕴含 $f(s) \leq f(t)$。(ED8) 若 $f'(c) \leq M$，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $c - \delta \leq s < t \leq c + \delta$ 蕴含 $f(t) - f(s) \leq M(t - s)$。(ED9) 若 $f'(c) = 0$，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $s, t \in [c - \delta, c + \delta]$ 蕴含 $f(s) = f(t)$。(ED10) 假设 $U \subseteq [a, b]$ 包含 a，并且相对于 $[a, b]$ 既开又闭。若 $c \in U$，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $[c - \delta, c + \delta] \subseteq U$。

(ε-δ命题 11）设 $\mathscr{C}$ 是 $[a, b]$的一个开覆盖，并且 $Q \in \mathscr{C}$。若 $c \in Q$，则存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c < c + \delta < b$，并且 $[c - \delta, c + \delta] \subseteq Q$。

（ED1）–（ED11）的 ε-δ证明留给读者完成。事实是，$a < c < b$ 对于所要求的 δ “足够小”这一点很重要。严格来说，（ED10）、（ED11）只是“δ论证”，但为保持一致，我们将引理9中的所有断言都命名为（EDx）。有时，我们将需要（ED1）–（ED11）的类似命题，其中需要函数 f 在 b 处的连续性或可微性（而不是某个 c）。这些 ε-δ证明非常相似，下面我们陈述它们而不作证明。

引理10. 给定定义在 $[a,b]$ 上的实值函数 f （其中 $a<b$），并给定 $M>0$，以下结论成立。

(ED12) 如果函数 f 在 b 处连续，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得 $a<b-\delta<b$，并且函数 f 在 $[b-\delta,b]$ 上有上界。(ED13) 如果函数 f 在 b 处连续，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得$a<b-\delta<b$，并且存在 $k\in[a,b]$，使得 $b-\delta\le t\le b$ 蕴含 $f(t)\le f(k)$。(ED14) 如果函数 f 在 b 处连续且非零，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得 $a<b-\delta<b$，并且对于每个 $t\in[b-\delta,b]$，数 $f(b)$ 和 $f(t)$ 同号。(ED15) 设 $\varepsilon>0$。如果函数 f 在 b 处连续，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得 $a<b-\delta<b$，并且 $s,t\in[b-\delta,b]$ 蕴含 $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$。(ED16) 设 $\varepsilon>0$。如果函数 f 在 b 处连续，那么如果 $\eta:=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$，则存在足够小的$\delta>0$，使得 $a<b-\delta<b$，并且 $b-\delta\le t\le b$ 蕴含

$$\mathcal{U}_f(\{t,b\})-\mathcal{L}_f(\{t,b\})\le(b-t)\eta.$$

(ED17) 如果 $f'(b)>0$，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得$a<b-\delta<b$，并且 $b-\delta\le s<t\le b$蕴含 $f(s)<f(t)$。(ED18) 如果 $f'(b)\ge 0$，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得$a<b-\delta<b$，并且 $b-\delta\le s<t\le b$ 蕴含 $f(s)\le f(t)$。(ED19) 如果 $f'(b)\le M$，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得 $a<b-\delta<b$，并且 $b-\delta\le s<t\le b$蕴含 $f(t)-f(s)\le M(t-s)$。(ε-δ命题 20) 如果 $f'(b)=0$，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得$a<b-\delta<b$，并且 $s,t\in[b-\delta,b]$ 蕴含 $f(s)=f(t)$。(ED21) 假设 $U\subseteq[a,b]$ 包含 a，并且相对于 $[a,b]$既开又闭。如果 $b\in U$，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得 $a<b-\delta<b$，并且 $[b-\delta,b]\subseteq U$。(ε-δ命题 22) 假设 $\mathscr{C}$是 $[a,b]$的一个开覆盖，并且 $Q\in\mathscr{C}$。如果 $b\in Q$，那么存在足够小的 $\delta>0$，使得 $a<b-\delta<b$，并且$[b-\delta,b]\subseteq Q$。

正如后文所需，ε-δ陈述 (ED1)–(ED22) 分别与表 1 中的某个定理相关。下面列出这些对应关系。

定理	引理9 引理10	
(有界值定理)	(ED1)	(ED12)
(极值定理)	(ED2)	(ED13)
(介值定理)	(ED3)	(ED14)
(UCT)	(ED4)	(ED15)
(达布积分定理)	(ED5)	(ED16)
(SIFT')	(ED6)	(ED17)
(递增函数定理)	(ED7)	(ED18)
(中值不等式)	(ED8)	(ED19)
(常值函数定理)	(ε-δ命题 9)	(ε-δ命题 20)
(I1')	(ED10)	(ED21)
(I2)	(ε-δ命题 11)	(ED22)

表 2：与定理（有界值定理）–（命题 2）相关的 ε-δ 陈述

使用上确界论证需要进行反证法证明，具体来说，会用到以下内容。

（i）I型矛盾： $c = \sup \mathcal{S}$，但存在 $\delta > 0$ 使得$c + \delta \in \mathcal{S}$。（ii）II型矛盾： $c = \sup \mathcal{S}$，但存在 $\delta > 0$ 使得 $c - \delta$ 是 $\mathcal{S}$的上界。

如果上确界论证中只使用 I 型矛盾，那么通过上确界论证得到的证明就是 I 型证明。我们只关注 I 型证明，而第2节开头列出的定理都可以用 I 型证明来证明。

即使 (SIFT) 和 (IFT) 可以用 I 型证明来证明，这些定理仍然可以通过同时使用 I 型矛盾和 II 型矛盾来证明。如果要在 [2] 中阐述 (SIFT) 的证明，可以看到，(SIFT) 可以通过一个 I 型矛盾和两个 II 型矛盾来证明。对于 (IFT)，也可以给出类似的证明。在 [16, 引理 B.1.1]，的证明中，通过上确界论证证明了 (IVT) 的一个版本，但该论证不是 I 型的。上述非 I 型证明的细节留给读者。

3. 一般的 I 型证明

在以下证明中，令 $(\star)$ 表示表 1 所列定理之一。令 $\mathcal{P}$ 为与 $(\star)$ 相关联的命题函数。

(⋆) 的 I 型证明。根据命题 1，陈述 $\mathcal{P}(a,a)$ 为真，因此 a 是集合 $\mathcal{S} := \{x \in [a,b] : \mathcal{P}(a,x)\}$ 的一个元素，故该集合非空。根据原理 2，$c := \sup \mathcal{S}$ 在 $[a,b]$ 中存在。再次利用命题 1，若 $[a,b]$ 是单点集，则 (⋆) 的结论显然成立，因此根据原理 3，我们可以进一步假设 $a < c \leq b$。

为导出矛盾，假设 $c < b$。若 (EDx) 是表 2 第二列中与 (⋆) 相关的 epsilon-delta 表述，则由 (EDx)，存在足够小的 $\delta_1 > 0$，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{12}$$

并且满足

$$c - \delta_1 \leq t \leq c + \delta_1 < b \Longrightarrow \mathcal{P}(t, c + \delta_1). \tag{13}$$

由原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{14}$$

因此，我们可以在 (13) 中令 $t = \xi$，从而得出 $\mathcal{P}(\xi, c + \delta_1)$ 成立。此外，$\xi \in \mathcal{S}$ 意味着 $\mathcal{P}(a,\xi)$ 成立。由 (12)、(14)，$a \leq \xi \leq c + \delta_1$；根据引理 5，当 (⋆) 既不是 (UCT) 也不是 (SIFT') 时，$\mathcal{P}$ 是传递的。因此，$\mathcal{P}(a, c + \delta_1)$ 成立。若 (⋆) 是 (SIFT')，则由 (13)，$\mathcal{P}(c - \delta_1, c + \delta_1)$ 成立；根据命题 6，$\mathcal{P}$ 是伪传递的，因此 $\mathcal{P}(a, c + \delta_1)$ 成立。若 (⋆) 是 (UCT)，则我们利用函数 $\mathcal{P}$ 的准传递性，构造一个 $\delta \in (0, \delta_1]$，使得 $\mathcal{P}(a, c + \delta)$ 成立。由于 $\delta \leq \delta_1$，由 (12)，$c + \delta$，$c + \delta_1 \in [a,b]$。现在我们要么有 $c + \delta_1 \in \mathcal{S}$，要么有 $c + \delta \in \mathcal{S}$；无论哪种情况，我们都得出了一个 I 型矛盾。

此后，$a < c = b = \sup \mathcal{S}$。若 (EDy) 是表 2 第三列中与 (⋆) 相关联的 ε-δ 陈述，则根据 (EDy)，存在足够小的 $\delta_2 > 0$，使得

$$a < b - \delta_2 < b, \tag{15}$$

并且使得

$$b - \delta_2 \leq t \leq b \Longrightarrow \mathcal{P}(t, b). \tag{16}$$

根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$ 使得

$$b - \delta_2 < \zeta \leq b. \tag{17}$$

当 (⋆) 不是 (UCT) 且不是 (SIFT') 时，我们可以在 (16) 中令$t = \zeta$，从而得出 $\mathcal{P}$(ζ, b) 成立；而当 (⋆) 是 (UCT) 或 (SIFT') 时，我们可以在 (16) 中令 $t = b - \delta_2$，从而得出 $\mathcal{P}(b - \delta_2, b)$ 成立。由 $\zeta \in \mathcal{S}$，我们发现 $\mathcal{P}(a, \zeta)$ 成立；由 (15)、(17)，$a \leq \zeta \leq b$和$a < b - \delta_2 < \zeta \leq b$。根据引理 5，当 (⋆) 不是 (UCT) 或不是 (SIFT') 时，$\mathcal{P}$ 是传递的；而根据命题 6 和引理 8，当 (⋆) 是 (UCT) 或 (SIFT') 时，$\mathcal{P}$ 是伪传递的。所有情况下，$\mathcal{P}(a, b)$ 均成立，这就证明了 (⋆)。

□

4. 结论

I 型证明遵循以下模式：先证明 $\mathcal{S}$ 是 $[a, b]$ 的非空子集，再使用一种特殊的论证形式证明 $b = \sup \mathcal{S}$，然后用类似的论证证明 $b \in \mathcal{S}$。所需定理的结论与 $\mathcal{S}$ 的定义条件有关，而首次运用这种特殊论证形式时，便会产生 I型矛盾。在两次运用这种特殊论证形式时，都会使用 ε-δ陈述；这些陈述自然源自连续性、可微性、开集、闭集或紧致性的定义。不需要用到序列概念，因此，这种证明可以视为足够初等，能够直接由实数域的最小上界性质得出。此前我们提到了启发式方法的必要性；依我们之见，I 型证明正好满足了这一需求。每当使用原理 2 时，便会使人想到最小上界性质和上界的概念，而原理 3 则基于下界的概念。更重要的是，每次使用原理 4 时，都会使人想到谓词“不是上界”，它用于构造 $\mathcal{S}$ 中具有特殊性质的元素。其他步骤则要求复习 ε-δ论证，这是分析学基础训练的核心内容。这些步骤与基本分析概念有着直接联系，因此使 I 型证明有别于更抽象或更复杂的方法；又由于 I 型证明适用于最基本的实函数定理，因此可以将其视为实分析证明中的一个重要统一主题。

参考文献

[1] R. Bartle，《实分析导论》，第4版，John Wiley & Sons，新泽西州霍博肯，2011年。

[2] L. Bers，论如何避开中值定理，《美国数学月刊》74 (1967) 583。[3] E. Bishop，《构造性分析基础》，Springer，纽约州纽约市，1967年。[4] A. Browder，《数学分析：导论》，第2版，Springer，纽约州纽约市，1996年。[5] R. Cantuba，逆向实分析中的 Littlewood 原理，《实分析交流》49 (2024) 111–122。[6] P. Clark，实数归纳法教师指南，《数学杂志》92 (2019) 136–150。[7] L. Cohen，论如何“刁难”中值定理，《美国数学月刊》74 (1967) 581–582。[8] M. Deveau 和 H. Teismann， $72+42$：有序域完备性与阿基米德性质的刻画，《实分析交流》39 (2014) 261–304。[9] R. Gordon，带标记分割在初等实分析中的应用，《美国数学月刊》105 (1998) 107–117。[10] D. Hathaway，运用连续性归纳法，《大学数学杂志》42 (2011) 229–231。[11] J. Munkres，《拓扑学》，第2版，Prentice Hall，新泽西州上萨德尔河，2000年。[12] J. Olmsted，有序域中的黎曼积分，《两年制大学数学杂志》4 (1973) 34–40。[13] M. Powderly，微积分基本定理的一个简单证明，《美国数学月刊》70 (1963) 544。[14] J. Propp，逆向实分析，《美国数学月刊》120 (2013) 392–408。[15] O. Rioul 和 J. Magossi，实连续统的局部—整体原理，载于：W. Carnielli 等（编），《矛盾：从一致性到不一致性》，Springer，《逻辑研究趋势·逻辑图书馆》47 (2018) 213–240。[16] S. Salas、E. Hille 和 G. Etgen，《微积分：一元与多元》，John Wiley & Sons，新泽西州霍博肯，2007年。

[17] H. Teismann，关于更完整的完备性公理列表，《美国数学月刊》120（2013）99–114。[18] B. Thomson，重新思考初等实分析课程，《美国数学月刊》114（2007）469–490。[19] T. Tucker，重新思考微积分中的严谨性：中值定理的作用，《美国数学月刊》104（1997）231–240。

附录 A。I 型证明（有界值定理）

由平凡的不等式 $f(a) \leq |f(a)| + 1$，其中右端为正数，可得

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ \exists M > 0 \quad a \leq t \leq x \Longrightarrow f(t) \leq M\},$$

包含 a，因此非空。根据原理 2，$c := \sup \mathcal{S}$ 在 $[a,b]$ 中存在，所以 f 在 c 处连续。如果 $[a,b]$ 是单点集，则（有界值定理）的陈述显然成立，因此根据原理 3，我们还可以假设 $a < c \leq b$。

假设 $c < b$。根据（ED1），存在足够小的 $\delta_1 > 0$，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{A.1}$$

并且 f 在 $[c - \delta_1, c + \delta_1]$ 上有上界。根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{A.2}$$

其中 $\xi \in \mathcal{S}$ 进一步意味着 f 在 $[a,\xi]$ 上有上界。根据（A.1）–（A.2），f 在 $[a, c + \delta_1] \subseteq [a,\xi] \cup [c - \delta_1, c + \delta_1]$ 上有上界，且 $c + \delta_1 \in [a,b]$。因此，我们构造出了 $\mathcal{S}$ 中的一个元素 $c + \delta_1$，其值大于它的上界 c。

从此，$a < c = b = \sup \mathcal{S}$。根据 (ED12)，存在足够小的 $\delta_2 > 0$，使得

$$a < b - \delta_2 < b, \tag{A.3}$$

并且 f 在 $(b - \delta_2, b]$ 上有上界。根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$，使得

$$b - \delta_2 < \zeta \leq b, \tag{A.4}$$

其中 $\zeta \in \mathcal{S}$ 意味着 f 在 $[a,\zeta]$ 上有上界。由 (A.3)–(A.4)，f 在 $[a,b] \subseteq [a,\zeta] \cup (b - \delta_2, b]$ 上有上界。

□

附录 B. 极值定理的 I 型证明

由平凡的不等式 $f(a) \leq f(a)$，我们发现 a 是.....的一个元素

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ \exists \ell \in [a,x] \quad a \leq t \leq x \Longrightarrow f(t) \leq f(\ell)\},$$

因此非空。根据原理 2， $c := \sup \mathcal{S}$ exists in $[a,b]$，所以函数 f f 在 c处连续。如果 $[a,b]$ 是一个单点集，则极值定理的陈述显然成立，因此根据原理 3，我们可以进一步假设 $a < c \leq b$。假设 $c < b$。根据 (ED2)，存在足够小的 $\delta_1 > 0$，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{B.1}$$

并且存在 $k \in [a, c + \delta_1]$，使得

$$c - \delta_1 \leq t \leq c + \delta_1 \Longrightarrow f(t) \leq f(k). \tag{B.2}$$

根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{B.3}$$

其中 $\xi \in \mathcal{S}$ 进一步意味着存在 $s \in [a, \xi]$，使得

$$a \leq t \leq \xi \Longrightarrow f(t) \leq f(s). \tag{B.4}$$

令 u 为 $\{k, s\}$ 中的一个元素，满足 $f(u) = \max\{f(k), f(s)\}$。根据 (B.1)、(B.3)，若 $a \leq t \leq c + \delta_1$，则 $t \in [a, c + \delta_1] \subseteq [a, \xi] \cup [c - \delta_1, c + \delta_1]$，因此 (B.2)、(B.4) 的假设均成立，由此得到 $f(t) \leq f(k) \leq f(u)$ 或 $f(t) \leq f(s) \leq f(u)$。无论哪种情况，$f(t) \leq f(u)$，其中 $c + \delta_1 \in [a, b]$。这样，我们就找到了 $\mathcal{S}$中的一个元素 $c + \delta_1$，它大于其上界 c。

以下， $a < c = b =$ 上确界 $\mathcal{S}$。根据（ED13），存在足够小的 $\delta_2 > 0$，使得

$$a < b - \delta_2 < b, \tag{B.5}$$

并且存在 $v \in [a, b]$，使得

$$b - \delta_2 \leq t \leq b \Longrightarrow f(t) \leq f(v). \tag{B.6}$$

根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$，使得

$$b - \delta_2 < \zeta \leq b, \tag{B.7}$$

其中 $\zeta \in \mathcal{S}$ 进一步意味着存在 $w \in [a, b]$，使得

$$a \leq t \leq \zeta \Longrightarrow f(t) \leq f(w). \tag{B.8}$$

设 c 是 $\{v, w\}$ 中的一个元素，使得 $f(c) = \max\{f(v), f(w)\}$。根据 (B.5)、(B.7)，若 $a \leq x \leq b$，则 $x \in [a, b] \subseteq [a, \zeta] \cup (b - \delta_2, b]$，因此 (B.6)、(B.8) 的假设在 $t = x$ 处均成立，从而得到 $f(x) \leq f(v) \leq f(c)$ 或 $f(x) \leq f(w) \leq f(c)$。因此，$f(x) \leq f(c)$。 □

附录 C. 介值定理的 I 型证明

为了导出矛盾，假设 f 在 (a,b) 上处处非零。由 $f(a) < 0 < f(b)$，我们得到

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ a \le t \le x \Longrightarrow f(t) < 0\},$$

包含 a，因此非空。根据原理 2，$c := \sup \mathcal{S}$ 在 $[a,b]$ 中存在，因此函数 f 在 c 处连续。如果 $[a,b]$ 是单点集，那么 $a = b$; 由于 f 是函数，$f(a) = f(b)$，这与 $f(a) < 0 < f(b)$ 矛盾。因此，根据原理 3，我们可以进一步假设 $a < c \le b$。

假设 $c < b$。根据 (ED3)，存在足够小的 $\delta_1 > 0$，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{C.1}$$

并且对于任意 $t \in [c - \delta_1, c + \delta_1]$，$f(c)$ 与 $f(t)$ 同号。根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得

$$c - \delta_1 < \xi \le c, \tag{C.2}$$

其中，$\xi \in \mathcal{S}$ 进一步表明 f 在 $[a,\xi]$ 上为负。根据 (C.1)–(C.2)，这样的一个 t 是 ξ，因此 f 在 $[c - \delta_1, c + \delta_1]$ 上为负，在 $[a, c + \delta_1] \subseteq [a,\xi] \cup [c - \delta_1, c + \delta_1]$ 上也为负，其中 $c + \delta_1 \in [a,b]$。因此，我们构造出了 $\mathcal{S}$ 中一个大于其上界 c 的元素 $c + \delta_1$。

以下设 $a < c = b = \sup \mathcal{S}$。根据 (ED14)，存在足够小的 $\delta_2 > 0$，使得

$$a < b - \delta_2 < b, \tag{C.3}$$

并且对于任意 $t \in (b - \delta_2, b]$，$f(b)$ 与 $f(t)$ 同号。根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$，使得

$$b - \delta_2 < \zeta \le b, \tag{C.4}$$

其中 $\zeta \in \mathcal{S}$ 意味着 f 在 $[a,\zeta]$ 上为负。由 (C.3)–(C.4)，$\zeta \in [b - \delta_2, b]$，因此 f 在 $[b - \delta_2, b]$ 上为负，在 $[a,b] \subseteq [a,\zeta] \cup [b - \delta_2, b]$ 上也为负。但根据假设 $f(a) < 0 < f(b)$，f 在 b 处为正。因此，存在一个 $c \in (a,b)$，使得 f 为零。 □

附录 D. UCT 的 I 型证明

令 $\varepsilon > 0$。利用平凡等式 $|a-a|=0$，可推得 a 是.....的一个元素

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\varepsilon := \{x \in [a,b] \ : \ \exists \delta > 0 \quad \forall s,t \in [a,x] \quad |s-t| < \delta \Longrightarrow |f(s)-f(t)| < \varepsilon\},$$

因此非空。由原理 2， $c := \sup \mathcal{S}$ exists in $[a,b]$。由于单点集上的任何函数都显然一致连续，以下我们假设 $[a,b]$ 不是单点集，因此由原理 3，我们还可以进一步假设 $a < c \leq b$。

假设 $c < b$。由 (ED4)，存在足够小的 $\delta_1 > 0$，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{D.1}$$

并且

$$s,t \in [c-\delta_1, c+\delta_1] \Longrightarrow |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{D.2}$$

由原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{D.3}$$

其中 $\xi \in \mathcal{S}$ 还意味着存在 $\delta_2 > 0$，使得对于任意 $s,t \in [a,\xi]$,

$$|s-t| < \delta_2 \Longrightarrow |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{D.4}$$

根据引理 7，存在一个既不超过 δ_1 也不超过 δ_2 的 $\delta_3 > 0$，使得对于任意 s、$t \in [a, c+\delta_3]$，若 $|s-t| < \delta_3$，则 s、t 要么都属于 $[a,\xi]$，要么都属于 $[c-\delta_1, c+\delta_1]$。在前一种情况下，$|s-t| < \delta_3 \leq \delta_2$，因此由 (D.4)，$|f(s)-f(t)| < \varepsilon$。在后一种情况下，我们也利用 (D.2) 得到 $|f(s)-f(t)| < \varepsilon$。由于 $\delta_3 \leq \delta_1$，根据 (D.1)，$c+\delta_3 \in [a,b]$。至此，我们已证明 $c+\delta_3$ 是 $\mathcal{S}$的一个元素，但它大于 $\mathcal{S}$的上界 c。

此后，$a < c = b = \sup \mathcal{S}$。根据 (ED15)，存在一个足够小的 $\delta_4 > 0$，使得 $a < b - \delta_4 < b$，并且

$$s,t \in [b-\delta_4, b] \Longrightarrow |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{D.5}$$

根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$ 使得

$$a < b - \delta_4 < \zeta \leq b, \tag{D.6}$$

其中 $\zeta \in \mathcal{S}$ 进一步意味着存在 $\delta_5 > 0$，使得对于任意 s、$t \in [a,\zeta]$,

$$|s-t| < \delta_5 \Longrightarrow |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{D.7}$$

根据引理 7，存在 $\delta_6 > 0$，使其不超过 δ_4 和 δ_5，并且若 s、$t \in [a,b]$ 满足 $|s-t| < \delta_6$，则要么 s、$t \in [a,\zeta]$，要么 s、$t \in [b-\delta_4, b+\delta_4]$；但由于 s、$t \in [a,b]$，我们还可以得到 s、$t \in [b-\delta_4, b]$。对于 s、$t \in [a,\zeta]$ 的情形，我们利用 $\delta_6 \leq \delta_5$ 和 (D.7) 得到 $|f(s)-f(t)| < \varepsilon$；而对于 s、$t \in [b-\delta_4, b]$ 的情形，我们利用 (D.5) 得到 $|f(s)-f(t)| < \varepsilon$。因此，$f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。 □

附录 E. DIT 的 I 型证明

若 $a=b$，则每个阶梯函数 $\varphi\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 都具有性质 $\int_a^a\varphi=\varphi(a)\,(c-c)\ =0$。若 $r\in\mathbb{R}$ 具有性质 $0\le r\le 0$，则 $\int_a^a f=r=0$，问题便得以解决。此外，我们对阶梯函数的定义（可积性的定义以此为基础）要求区间 $[a,b]$ 有一个分割，即一个非空子集，因此 $a>b$ 不可能成立。

以下假设 $a<b$。

给定 $\varepsilon>0$，我们有 $\eta:=\ 2\ \frac{\varepsilon}{(b-a)}>0$。对于每个 $x\in[a,b]$，令 $\mathscr{P}(a,x)$ 表示 $[a,x]$ 的所有分割组成的集合，并令

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_\eta:=\{x\in[a,b]\ :\ \exists\Delta\in\mathscr{P}(a,x)\quad \mathcal{U}_f(\Delta)-\mathcal{L}_f(\Delta)\le(x-a)\eta\}.$$

对于 $[a,a]$ 的分割 $\{a\}$，我们有 $\mathcal{U}_f(\{a\})\ -\mathcal{L}_f(\{a\})\ =0\le(a-a)\eta$。因此，$a\in\mathcal{S}$，所以 $\mathcal{S}$ 非空。根据原理 2，$c:=$ 在 $[a,b]$ 中的上确界 $\mathcal{S}$ 存在。由于 $a<b$，$[a,b]$ 不是单点集，因此根据原理 3，我们可以进一步假设 $a<c\le b$。

假设 $c<b$。根据 (ED5)，存在足够小的 $\delta_1>0$，使得

$$a<c-\delta_1<c<c+\delta_1<b, \tag{E.1}$$

并且

$$c-\delta_1<t\le c\Longrightarrow\mathcal{U}_f\left(\{t,c+\delta_1\}\right)-\mathcal{L}_f\left(\{t,c+\delta_1\}\right)\le(c+\delta_1-t)\eta. \tag{E.2}$$

根据原理 4，存在 $\xi\in\mathcal{S}$ 使得 $c-\delta_1<\xi\le c$。因此，(E.2) 的假设在 $t=\xi$ 处成立，于是，

$$\mathcal{U}_f\left(\{\xi,c+\delta_1\}\right)-\mathcal{L}_f\left(\{\xi,c+\delta_1\}\right)\le(c+\delta_1-\xi)\eta. \tag{E.3}$$

条件 $\xi\in\mathcal{S}$ 也意味着存在 $\Lambda\in\mathscr{P}(a,\xi)$，使得

$$\mathcal{U}_f\left(\Lambda\right)-\mathcal{L}_f\left(\Lambda\right)\le(\xi-a)\eta. \tag{E.4}$$

集合 $\Lambda\cup\{\xi,c+\delta_1\}$ 是 $[a,c+\delta_1]$ 的一个分割，并且

$$\mathcal{U}_f(\Lambda\cup\{\xi,c+\delta_1\})\ =\mathcal{U}_f(\Lambda)\ +\mathcal{U}_f(\{\xi,c+\delta_1\})\qquad\mathcal{L}_f(\Lambda\cup\{\xi,c+\delta_1\})\ =\mathcal{L}_f(\Lambda)\ +\mathcal{L}_f(\{\xi,c+\delta_1\})。 \tag{E.5}$$

利用 (E.1)、(E.3)–(E.5)，

$$\mathcal{U}_f\left(\Lambda\cup\{\xi,c+\delta_1\}\right)-\mathcal{L}_f\left(\Lambda\cup\{\xi,c+\delta_1\}\right)\le(c+\delta_1-\xi)\eta+(\xi-a)\eta=(c+\delta_1-a)\eta,$$

其中 $c+\delta_1\in[a,b]$。至此，我们构造出了 $\mathcal{S}$ 中的一个元素 $c+\delta_1$，它大于其上界 c。

从此，$a<c\le b=\sup\mathcal{S}$。根据 (ED16)，存在足够小的 $\delta_2>0$，使得 $a<b-\delta_2<b$，且对任意 $t\in[a,b]$，

$$b-\delta_2<t\le b\Longrightarrow\mathcal{U}_f\left(\{t,b\}\right)-\mathcal{L}_f\left(\{t,b\}\right)\le(b-t)\eta. \tag{E.6}$$

根据原理 4，存在 $\zeta\in\mathcal{S}$ 使得 $b-\delta_2<\zeta\le b$，其中 $\zeta\in\mathcal{S}$ 蕴含 $\zeta\in[a,b]$，因此由 (E.6) 可得，

$$\mathcal{U}_f\left(\{\zeta,b\}\right)-\mathcal{L}_f\left(\{\zeta,b\}\right)\le(b-\zeta)\eta. \tag{E.7}$$

条件 $\zeta\in\mathcal{S}$ 还意味着存在 $\Omega\in\mathscr{P}(a,\zeta)$，使得

$$\mathcal{U}_f\left(\Omega\right)-\mathcal{L}_f\left(\Omega\right)\le(\zeta-a)\eta. \tag{E.8}$$

集合 $\Omega\cup\{\zeta,b\}$ 是 $[a,b]$ 的一个分割，且

$$\mathcal{U}_f\left(\Omega\cup\{\zeta,b\}\right)=\mathcal{U}_f\left(\Omega\right)+\mathcal{U}_f\left(\{\zeta,b\}\right),\quad\mathcal{L}_f\left(\Omega\cup\{\zeta,b\}\right)=\mathcal{L}_f\left(\Omega\right)+\mathcal{L}_f\left(\{\zeta,b\}\right). \tag{E.9}$$

利用 (E.7)–(E.10)，

$$\mathcal{U}_f\left(\Omega\cup\{\zeta,b\}\right)-\mathcal{L}_f\left(\Omega\cup\{\zeta,b\}\right)\le(b-\zeta)\eta+(\zeta-a)\eta=(b-a)\eta=(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<\varepsilon. \tag{E.10}$$

根据达布上和与下和的一条常规性质，存在阶梯函数 $\varphi,\psi\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$，使得 $\varphi\le f|_{[a,b]}\le\psi$ 且 $\int_a^b\varphi=\mathcal{L}_f(\Omega\cup\{\zeta,b\})$ 和 $\int_a^b\psi=\mathcal{U}_f(\Omega\cup\{\zeta,b\})$；将它们代入 (E.10)，即可证明 f 在 $[a,b]$ 上可积。

□

附录 F. SIFT 的 I 型证明

命题“若 $a < t < x$，则 $f(a) < f(t)$”在 $x = a$ 时恒真。因此， a 是集合

$$\mathcal{S} := \{x \in [a, b] \ : \ a \leq t \leq x \Longrightarrow f(a) < f(t)\},$$

因此非空。由原理 2， $c := \sup \mathcal{S}$ exists 属于 $[a, b]$。因此， $f'(c) \leq M$。若 $[a, b]$ 是单点集，则 (SIFT) 的陈述显然成立。以下假设情况并非如此，因此根据原理 3，我们进一步假设 $a < c \leq b$。

假设 $c < b$. 根据 (ED6)，存在 $\delta_1 > 0$，其足够小，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{F.1}$$

且还满足以下条件

$$c - \delta_1 \leq s < t \leq c + \delta_1 \Longrightarrow f(s) < f(t). \tag{F.2}$$

特别是在 $s = c - \delta_1$ 处，

$$c - \delta_1 < t \leq c + \delta_1 \Longrightarrow f(c - \delta_1) < f(t). \tag{F.3}$$

根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{F.4}$$

其中 $\xi \in \mathcal{S}$ 进一步推出

$$a < t < \xi \Longrightarrow f(a) < f(t). \tag{F.5}$$

根据 (F.1)、(F.4)，我们可以在 (F.5) 中令 $t = c - \delta_1$ ，从而得到

$$f(a) < f(c - \delta_1). \tag{F.6}$$

根据 (F.1)、(F.4)，$(a, c + \delta_1) \subseteq (a, \xi) \cup (c - \delta_1, c + \delta_1)$。因此，若 $a < t < c + \delta_1$，则 $a < t < \xi$ 或 $c - \delta_1 \leq t < c + \delta_1$，前一种情况下，我们只需使用 (F.5) 得到 $f(a) < f(t)$；后一种情况下，我们使用 (F.3)、(F.6) 得到 $f(a) < f(c - \delta_1) < f(t)$，其中根据 (G.1)， $c + \delta_1 \in [a, b]$。这样，我们就得到了 $\mathcal{S}$ 中的一个元素 $c + \delta_1$，它大于上界 c。

以下记 $a < c = b =$ 上确界 $\mathcal{S}$。根据 ED18，存在足够小的 $\delta_2 > 0$ ，使得

$$a < b - \delta_2 < b, \tag{F.7}$$

并且使得

$$b - \delta_2 \leq s < t \leq b \Longrightarrow f(s) < f(t). \tag{F.8}$$

特别地，在 $s = b - \delta_2$处，

$$b - \delta_2 < t \leq b \Longrightarrow f(b - \delta_2) < f(t). \tag{F.9}$$

根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$ ，使得

$$b - \delta_2 < \zeta \leq b, \tag{F.10}$$

其中 $\zeta \in \mathcal{S}$ 表示

$$a < t < \zeta \Longrightarrow f(a) < f(t). \tag{F.11}$$

由 (F.7)、(F.10)，我们可在 (F.11) 中令 $t = b - \delta_2$，从而得到

$$f(a) < f(b - \delta_2). \tag{F.12}$$

由 (F.7)、(F.10)，$(a, b) \subseteq (a, \zeta) \cup (b - \delta_2, b)$，因此若 $a < t < b$，则 $a < t < \zeta$ 或 $b - \delta_2 < t < b$。在第一种情况下，我们使用 (F.11) 得到 $f(a) < f(t)$；在第二种情况下，我们使用 (F.9)、(F.12) 得到$f(a) < f(b - \delta_2) < f(t)$。至此，我们已经证明，若函数 f 在 $[a, b]$ 上为正，则

$$a < t < b \Longrightarrow f(a) < f(t).$$

特别地，给定 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 < x_2$，函数 f 在 $(x_1, b) \subseteq [a, b]$ 上为正，因此

$$x_1 < t < b \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(t). \tag{F.13}$$

由于 $x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 < x_2$，我们有 $x_1 < x_2 < b$，因此可以在 (F.13) 中令 $t = x_2$，从而得到 $f(x_1) < f(x_2)$，如所需。 □

附录 G. (IFT) 的 I 型证明

由显然的不等式 $f(a) \leq f(a)$，可知 a 是集合中的一个元素

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ a \leq t \leq x \Longrightarrow f(a) \leq f(t)\},$$

因此该集合非空。根据原理 2，$c := \sup \mathcal{S}$ 存在于 $[a,b]$ 中。因此，$f'(c) \leq M$。若 $[a,b]$ 是单点集，则 (IFT) 的陈述显然成立。以下假设并非如此，因此根据原理 3，我们进一步假设 $a < c \leq b$。

假设 $c < b$。根据 (ED7)，存在 $\delta_1 > 0$，且其足够小，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{G.1}$$

并且还满足以下条件：

$$c - \delta_1 \leq s < t \leq c + \delta_1 \Longrightarrow f(s) \leq f(t). \tag{G.2}$$

根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{G.3}$$

因此我们可以在 (G.2) 中令 $s = \xi$，从而得到

$$\xi \leq t \leq c + \delta_1 \Longrightarrow f(\xi) \leq f(t). \tag{G.4}$$

条件 $\xi \in \mathcal{S}$ 进一步意味着

$$a \leq t \leq \xi \Longrightarrow f(a) \leq f(t). \tag{G.5}$$

特别地，在 $t = \xi$ 处，

$$f(a) \leq f(\xi). \tag{G.6}$$

由 (G.1)、(G.3)，$[a, c+\delta_1] \subseteq [a,\xi] \cup (c-\delta_1, c+\delta_1]$。因此，若 $a \leq t \leq c+\delta_1$，则要么 $a \leq t \leq \xi$，要么 $\xi < t \leq c+\delta_1$；对于前一种情形，只需使用 (G.5)，而对于后一种情形，使用 (G.4)、(G.5)，即可得到 $f(a) \leq f(\xi) \leq f(t)$，其中，由 (G.1) 可知 $c + \delta_1 \in [a,b]$。这样，我们就得到了一个属于 $\mathcal{S}$ 的元素 $c+\delta_1$，它大于上界 c。

此后，$a < c = b = \sup \mathcal{S}$. By **(ED18)**，存在足够小的 $\delta_2 > 0$，使得

$$a < b - \delta_2 < b, \tag{G.7}$$

并且满足

$$b - \delta_2 \leq s < t \leq b \Longrightarrow f(s) \leq f(t). \tag{G.8}$$

根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$ 使得

$$b - \delta_2 < \zeta \leq b, \tag{G.9}$$

因此，我们可以在 (G.8) 中令 $s = \zeta$，从而得到

$$\zeta < t \leq b \Longrightarrow f(\zeta) \leq f(t). \tag{G.10}$$

条件 $\zeta \in \mathcal{S}$ 意味着

$$a \leq t \leq \zeta \Longrightarrow f(a) \leq f(t), \tag{G.11}$$

因此在 $t = \zeta$处，

$$f(a) \leq f(\zeta). \tag{G.12}$$

由 (G.7)、(G.9)，$[a,b] \subseteq [a,\zeta] \cup [b-\delta_2, b]$，因此若 $a \leq t \leq b$，则 $a \leq t \leq \zeta$或 $\zeta < t \leq b$。在第一种情形下，我们使用 (G.11)；在第二种情形下，我们使用 (G.10)、(G.12) 得到 $f(a) \leq f(\zeta) \leq f(t)$，至此，我们已经证明，若 f' 在 $[a,b]$上非负，则

$$a \leq t \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(t).$$

特别地，给定 x_1、$x_2 \in [a,b]$，且 $x_1 < x_2$，f' 在 $[x_1, x_2] \subseteq [a,b]$上非负，因此

$$x_1 \leq t \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(t),$$

并令 $t = x_2$，我们便得到 $f(x_1) \leq f(x_2)$，如所需。 □

附录 H。I 型证明（MVI）

由显然的不等式 $f(a) - f(a) \leq M(a-a)$，可知 a 是该集合中的一个元素

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ a \leq t \leq x \Longrightarrow f(t) - f(a) \leq M(t-a)\},$$

因此该集合非空。根据原理 2，$c := $ 上确界 $\mathcal{S}$ 存在于 $[a,b]$ 中。因此，$f'(c) \leq M$。如果 $[a,b]$ 是单点集，则（MVI）的陈述显然成立。下文假设情况并非如此，因此根据原理 3，我们进一步假设 $a < c \leq b$。

假设 $c < b$。根据（ED8），存在 $\delta_1 > 0$，其足够小，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{H.1}$$

并且还满足以下条件：

$$c - \delta_1 \leq s < t \leq c + \delta_1 \Longrightarrow f(t) - f(s) \leq M(t-s). \tag{H.2}$$

根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{H.3}$$

因此我们可以在（H.2）中令 $s = \xi$，从而得到

$$\xi \leq t \leq c + \delta_1 \Longrightarrow f(t) - f(\xi) \leq M(t-\xi). \tag{H.4}$$

条件 $\xi \in \mathcal{S}$ 进一步表明

$$a \leq t \leq \xi \Longrightarrow f(t) - f(a) \leq M(t-a). \tag{H.5}$$

特别地，在 $t = \xi$ 处，

$$f(\xi) - f(a) \leq M(\xi - a). \tag{H.6}$$

由 (H.1)、(H.3)，$[a, c+\delta_1] \subseteq [a,\xi] \cup (c-\delta_1, c+\delta_1]$。因此，若 $a \leq t \leq c+\delta_1$，则要么 $a \leq t \leq \xi$，要么 $\xi < t \leq c+\delta_1$；对于前一种情况，我们只需使用 (H.5)，而对于后一种情况，我们使用 (H.4)、(H.5)，从而得到

$$f(t) - f(a) = f(t) - f(\xi) + f(\xi) - f(a) \leq M(t-\xi) + M(\xi - a) = M(t-a),$$

其中，由 (H.1)，$c + \delta_1 \in [a,b]$。因此，我们构造出了一个属于 $\mathcal{S}$ 的元素 $c+\delta_1$，它大于上界 c。

此后，$a < c = b = \sup \mathcal{S}$。由 (ED19)，存在一个足够小的 $\delta_2 > 0$，使得

$$a < b - \delta_2 < b, \tag{H.7}$$

并且使得

$$b - \delta_2 \leq s < t \leq b \Longrightarrow f(t) - f(s) \leq M(t-s). \tag{H.8}$$

根据原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$ 使得

$$b - \delta_2 < \zeta \leq b, \tag{H.9}$$

因此，我们可以在 (H.8) 中令 $s = \zeta$，从而得到

$$\zeta < t \leq b \Longrightarrow f(t) - f(\zeta) \leq M(t - \zeta). \tag{H.10}$$

条件 $\zeta \in \mathcal{S}$ 意味着

$$a \leq t \leq \zeta \Longrightarrow f(t) - f(a) \leq M(t - a), \tag{H.11}$$

因此在 $t = \zeta$处,

$$f(\zeta) - f(a) \leq M(\zeta - a). \tag{H.12}$$

由 (H.7)、(H.9) 可知，$[a, b] \subseteq [a, \zeta] \cup [b - \delta_2, b]$，因此如果 $a \leq t \leq b$，那么 $a \leq t \leq \zeta$或 $\zeta < t \leq b$。在第一种情况下，我们使用 (H.11)；而在第二种情况下，我们使用 (H.10)、(H.12) 得到

$$f(t) - f(a) = f(t) - f(\zeta) + f(\zeta) - f(a) \leq M(t - \zeta) + M(\zeta - a) = M(t - a),$$

此时，我们已经证明：如果函数 f 在 $[a, b]$上有上界 M，那么

$$a \leq t \leq b \Longrightarrow f(t) - f(a) \leq M(t - a).$$

特别地，给定满足 $x_1 < x_2$的 x_1、$x_2 \in [a, b]$，f'在 $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$上有上界 M，因此

$$x_1 \leq t \leq x_2 \Longrightarrow f(t) - f(x_1) \leq M(t - x_1),$$

令 $t = x_2$，则有 $f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1)$，正如所需。 □

附录 I. (CFT) 的 I 型证明

当 $x = a$ 时，断言 $a \le t \le x$ 推出 $f(a) = f(x)$ 成立。因此， a 是集合中的一个元素

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ a \le t \le x \Longrightarrow f(t) = f(a)\},$$

因此该集合非空。由原理 2， $c := \sup \mathcal{S}$ exists in $[a,b]$。因此， $f'(c) > 0$。若 $[a,b]$ 是单点集，则 (CFT) 的陈述显然成立。下文假设并非如此，因此由原理 3，我们还可以假设 $a < c \le b$。

假设 $c < b$。由 (ε-δ命题 9)，存在足够小的 $\delta_1 > 0$ ，使得

$$a \le c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{I.1}$$

并且满足

$$x, t \in [c - \delta_1, c + \delta_1] \Longrightarrow f(x) = f(t). \tag{I.2}$$

由原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$ ，使得

$$c - \delta < \xi \le c, \tag{I.3}$$

因此，我们可以在 (I.2) 中令 $x = \xi$ ，从而得到

$$t \in [c - \delta_1, c + \delta_1] \Longrightarrow f(\xi) = f(t). \tag{I.4}$$

条件 $\xi \in \mathcal{S}$ 进一步意味着

$$t \in [a, \xi] \Longrightarrow f(t) = f(a). \tag{I.5}$$

由于 $\xi \in [a, \xi]$，由 (I.5) 得 $f(\xi) = f(a)$，将其代入 (I.4) 得

$$t \in [c - \delta_1, c + \delta_1] \Longrightarrow f(a) = f(t). \tag{I.6}$$

由 (I.1)、(I.3)，若 $a \le t \le c + \delta_1$，则 $t \in [a, c + \delta_1] \subseteq [a, \xi] \cup [c - \delta_1, c + \delta_1]$，因此由 (I.5)、(I.6)， $f(t) = f(a)$，其中 $c + \delta_1 \in [a,b]$。因此， $c + \delta_1$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个元素，且大于其上界 c。

今后， $a < c = b = \sup \mathcal{S}$。由 ε-δ命题 20，存在足够小的 $\delta_2 > 0$ ，使得

$$a < b - \delta_2 \le b, \tag{I.7}$$

并且使得

$$x, t \in [b - \delta_2, b] \Longrightarrow f(x) = f(t). \tag{I.8}$$

由原理 4，存在 $\zeta \in \mathcal{S}$ ，使得

$$b - \delta_2 < \zeta \le b, \tag{I.9}$$

因此我们可以在 (I.8) 中令 $x = \zeta$ ，从而得到

$$t \in [b - \delta_2, b] \Longrightarrow f(\zeta) = f(t). \tag{I.10}$$

条件 $\zeta \in \mathcal{S}$ 进一步意味着

$$t \in [a, \zeta] \Longrightarrow f(t) = f(a). \tag{I.11}$$

由于 $\zeta \in [a, \zeta]$，根据 (I.11)， $f(\zeta) = f(a)$，因此 (I.10) 进一步变为

$$t \in [b - \delta_2, b] \Longrightarrow f(a) = f(t). \tag{I.12}$$

由 (I.7)、(I.9) 和 $[a,b] \subseteq [a, \zeta] \cup [b - \delta_2, b]$，以及由 (I.11)、(I.12)， $a \le t \le b$ 推出 $f(t) = f(a)$。因此， f 在 $[a,b]$ 上为常数。 □

附录 J。命题 1 的 I 型证明

若 $[a,b]$ 不连通，则存在互不相交的非空子集 U和 V，它们是 $[a,b]$的子集，且都相对于 $[a,b]$为开集，并满足 $U \cup V = [a,b]$。不失一般性，假设 $a \in U$。因此， $[a,a] =\{a\} \subseteq U$，这意味着 a 是集合中的一个元素

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ [a,x] \subseteq U\}, \tag{J.1}$$

因此非空。根据原理 2， $c :=$ 在 $[a,b]$中存在上确界{sup} $\mathcal{S}$。如果 $[a,b]$ 是单点集，那么它显然是连通的，因此下文假设 $[a,b]$ 含有多个元素。根据原理 3，我们进一步假设 $a < c \leq b$。

由于 $U \cup V = [a,b]$ 且 V相对于 $[a,b]$是开集，因此 U相对于 $[a,b]$是闭集。 c的上确界 $\mathcal{S}$ is 是 $\mathcal{S}$的一个闭包点，由（J.1）可得 $\mathcal{S} \subseteq U$。因此， $c \in \overline{\mathcal{S}} \subseteq \overline{U} = U$。

假设 $c < b$。由于 U相对于 $[a,b]$是开集，存在一个实数开集 Q，使得$U = Q \cap [a,b]$。根据（ED10），存在足够小的 $\delta_1 > 0$，使得

$$a < c - \delta_1 < c < c + \delta_1 < b, \tag{J.2}$$

and 即 $[c-\delta_1, c+\delta_1] \subseteq Q$，其中根据 (J.2)，左侧是 $[a,b]$ 的子集，因此取 the 两边与 $[a,b]$ 的交集，得到

$$[c-\delta_1, c+\delta_1] \subseteq U, \tag{J.3}$$

根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得

$$c - \delta_1 < \xi \leq c, \tag{J.4}$$

其中 $\xi \in \mathcal{S}$ 进一步推出

$$[a, \xi] \subseteq U. \tag{J.5}$$

由 (J.2)–(J.5)， $[a, c+\delta_1] \subseteq [a,\xi] \cup [c-\delta_1, c+\delta_1] \subseteq U$，其中 $c+\delta_1 \in [a,b]$ 是由 (J.2) 得出的，且 $c \in [a,b]$。因此，我们构造出了 $\mathcal{S}$ 的一个元素 $c+\delta_1$，它大于其上界 c。

从此， $b = c = \sup \mathcal{S}$，这意味着 $[a,b] \subseteq U$。由于 $U \subseteq [a,b]$，我们有 $[a,b] = U$。因此，$[a,b] \cap V = U \cap V$，进一步可得 $V = \emptyset$，因为 $V \subseteq [a,b]$，且 $U \cap V = \emptyset$。这与 $V \neq \emptyset$这一假设矛盾。因此， $[a,b]$ 是连通的。 □

附录 K. 命题 2 的 I 型证明

设 $\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$的一个开覆盖。由于 $a\in[a,b]$，存在 $A\in\mathscr{C}$ 使得 $a\in A$，或者有限集 $\{A\}\subseteq\mathscr{C}$ 是区间 $[a,a]$的一个开覆盖。这意味着集合

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_{\mathscr{C}}:=\left\{x\in[a,b]\ :\ \exists A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{C}\quad [a,x]\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right\},$$

包含 a，因此非空。根据原理 2，$c:=\sup\mathcal{S}$ 在 $[a,b]$中存在。由于单点集显然是紧致的，我们进一步假设 $[a,b]$不是单点集，因此根据原理 3，我们还可以进一步假设 $a<c\leq b$。假设 $c<b$。由于 $c\in[a,b]$，且 $\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$的一个开覆盖，因此存在一个开集 $Q\in\mathscr{C}$，使得

满足 $c\in Q$。根据 (ED10)，存在足够小的 $\delta_1>0$，使得

$$a<c-\delta_1<c<c+\delta_1<b, \tag{K.1}$$

并且

$$[c-\delta_1,c+\delta_1]\subseteq Q. \tag{K.2}$$

根据原理 4，存在 $\xi\in\mathcal{S}$，使得

$$c-\delta_1<\xi\leq c, \tag{K.3}$$

其中 $\xi\in\mathcal{S}$ 进一步意味着存在 O_1、O_2、.....、$O_n\in\mathscr{B}$，使得

$$[a,\xi]\subseteq O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n. \tag{K.4}$$

由 (K.1)–(K.4)，$[a,c+\delta_1]\subseteq[a,\xi]\cup[c-\delta_1,c+\delta_1]\subseteq O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n\cup Q$。这意味着 $c+\delta_1$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个元素，但大于 $\mathcal{S}$ 的上界 c。

今后，$a<c=b=\sup\mathcal{S}$。由于 $\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$的一个开覆盖，存在一个开集 $B\in\mathscr{C}$ such，使得 $b\in B$。根据 (ED21)，存在一个足够小的 $\delta_2>0$，使得

$$a<b-\delta_2<b, \tag{K.5}$$

具有如下性质：

$$[b-\delta_2,b]\subseteq Q. \tag{K.6}$$

根据原理 4，存在 $\zeta\in\mathcal{S}$，使得

$$b-\delta_2<\zeta\leq b, \tag{K.7}$$

其中还可推出，存在 C_1、C_2、.....、$C_m\in\mathscr{C}$，使得

$$[a,\zeta]\subseteq C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_m. \tag{K.8}$$

利用 (K.5)、(K.7) 和 $[a,b]\subseteq[a,\zeta]\cup[b-\delta_2,b]$，并由 (K.6)、(K.8) 得到 $[a,b]\subseteq C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_m\cup B$，其中开集 C_1、C_2、.....、C_m、B 来自 $[a,b]$的任意开覆盖 $\mathscr{C}$，因此构成 $[a,b]$的子覆盖。所以，$[a,b]$ 是紧致的。□

附录 L. 通过上确界论证证明（介值定理）

由于 $f(a) < 0$，数 a 是

$$\mathcal{S} := \{x \in [a,b] \ : \ a \le t \le x \Longrightarrow f(t) < 0\},$$

因此该集合非空。根据原理 2， $c :=$ 上确界 $\mathcal{S}$ 存在于 $[a,b]$ 中。

假设 $f(c) < 0$。我们不可能有 $c = b$。否则， $f(c) = f(b) > 0$。因此，条件 $c \le b$ from $c \in [a,b]$ 进一步变为 $c < b$。通过 ε-δ论证，存在足够小的 $\delta > 0$ ，使得

$$c < c + \delta < b, \tag{L.1}$$

并且 f 在（$c - \delta$， $c + \delta$]）上为负。根据原理 4，存在 $\xi \in \mathcal{S}$ ，使得

$$c - \delta < \xi \le c, \tag{L.2}$$

并且 f 在 $[a, \xi]$ 上为负。条件 $\xi \in \mathcal{S}$ 还意味着

$$a \le \xi \le b. \tag{L.3}$$

利用（L.1）–（L.3）， f 在 $[a, \xi]$ 以及（$c - \delta$， $c + \delta$]）上的负性意味着 f 在 $[a, c + \delta] \subseteq [a, \xi] \cup$（$c - \delta$，$c + \delta$]）上为负，且 $c + \delta \in [a, b]$。因此，我们构造出了集合 $c + \delta$ 中的一个元素，该元素大于其上界 c。

假设 $f(c) > 0$。由于 $f(a) < 0$，因此 $c = a$ 不可能成立。否则， $f(c) = f(a) < 0$。因此，来自 $c \in [a,b]$ 的条件 $a \le c$ 进一步变为 $a < c$。通过 ε-δ论证，存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $a < c - \delta < c$ 并且

$$c - \delta < t \le c \Longrightarrow f(t) > 0. \tag{L.4}$$

如果 $c - \delta$ 不是 $\mathcal{S}$ 的上界，那么存在 $\xi \in \mathcal{S}$ 使得 $c - \delta < \xi$。由于 c 是 $\mathcal{S}$ 的上界，我们进一步有 $c - \delta < \xi \le c$，因此由 (L.4) 可得， $f(\xi) > 0$。此时，我们有 $a \le \xi \le \xi$ 和 $f(\xi) \not< 0$，这意味着 $\xi \notin \mathcal{S}$。但这样一来， $\mathcal{S}$ 的上界 $c - \delta$ 严格小于最小上界 c。

由于从 $f(c) < 0$ 和 $f(c) > 0$ 都导出了矛盾，根据三歧性定律， $f(c) = 0$，正如所需。

如果 $c = a$ 或 $c = b$，那么 $f(c) = f(a) < 0$ 或 $f(c) = f(b) > 0$，这两种情况都与 $f(c) = 0$矛盾，因此 con条件 $c \in [a,b]$ 进一步变为 $c \in (a,b)$。 □

附录 M. 通过上确界论证证明 (SIFT)

假设函数 f f 在 (a,b) 上不是严格递增的。也就是说，存在 $\alpha,\beta\in(a,b)$，使得 $\alpha<\beta$，但 $f(\alpha)\not<f(\beta)$。因此，我们有 $a<\alpha<\beta<b$，并且 $f(\alpha)\geq f(\beta)$。等价地，存在 $\beta\in(a,b)$，并且存在 $\alpha\in(a,\beta)$，使得 $f(\alpha)\geq f(\beta)$。这意味着 α 是集合中的一个元素

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_\beta:=\{x\in(a,\beta)\ :\ f(x)\geq f(\beta)\},$$

因此非空。此外， $\mathcal{S}\subseteq(a,\beta)\subseteq[a,\beta]$。根据原理 2， $c:=\sup\mathcal{S}$ 存在于 $[a,\beta]$ 中。

假设 $c\in\mathcal{S}$。这意味着 $c\in(a,\beta)$，因此 $c<\beta$。根据假设， $f'(c)>0$，通过一个 ε-δ 论证，存在足够小的 $\delta_1>0$，使得 $c<c+\delta_1<\beta$，且 $f(c)<f(c+\delta_1)$。但由于 $c\in\mathcal{S}$，我们进一步得到 $f(\beta)\leq f(c)<f(c+\delta_1)$。由于 $c\in(a,\beta)$ 意味着 $a<c$，我们进一步得到 $a<c<c+\delta_1<\beta$，且 $f(c+\delta_1)\geq f(\beta)$。因此，我们构造出了 $c+\delta_1$，它属于 $\mathcal{S}$，且大于上界 c。

此后， $c\qquad\notin\mathcal{S}$。这意味着要么 $c\notin(a,\beta)$，要么 $f(c)\not\geq f(\beta\qquad)$.

对于 $c\notin(a,\beta)$ 的情形，我们利用这样一个事实： β 是 $\mathcal{S}$的一个上界，而 c 是其最小上界，因此 $c\leq\beta$。但 $c\notin(a,\beta)$ 意味着 $c\in[\beta,\infty)$，所以 $c\geq\beta$。至此，我们证明了 $c=\beta$。由于 f 是一个函数， $f(c)=f(\beta)$。通过一个利用 $f'(c)>0$ 这一事实的 ε-δ论证，存在 $\delta_2>0$，使得

$$c-\delta_2<t<c\Longrightarrow f(t)<f(c)=f(\beta).\tag{M.1}$$

如果 $c-\delta_2$ 不是 $\mathcal{S}$的上界，则存在 $\zeta\in\mathcal{S}$，使得 $c-\delta_2<\zeta\leq c$。由于 $c\notin\mathcal{S}$ 和 $\zeta\in\mathcal{S}$，
$\zeta\neq c$ $c-\delta_2<\zeta<c$ $\zeta\in\mathcal{S}$ $f\ \zeta\ \geq f\ \beta$ $t=\zeta$ ，并且我们还得到 。此外，
进一步意味着 ( ) ( )，但在 (N.1) 中代入，得到 $f(\zeta)<f(\beta)$。因此， $c-\delta_2$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个上界，但这个上界严格小于最小上界 c。

在 $f(c)\not\geq f(\beta)$ 的情况下，通过 ε-δ论证可知 $f(c)<f(\beta)$，或者 $f(\beta)-f(c)>0$
tha利用函数 f 在 c 处的连续性，可得存在 $\delta_3>0$ 使得

$$c-\delta_3<t\leq c\Longrightarrow f(t)<f(\beta).\tag{M.2}$$

If $c-\delta_3$ 不是 $\mathcal{S}$ 的上界，因此存在 $\varrho\in\mathcal{S}$ 使得 $c-\delta_3<\varrho\leq c$，其中 $\varrho\in\mathcal{S}$ 进一步
imp位于 $f(\varrho)\geq f(\beta)$，但在 (N.2) 中设定 $t=\varrho$，则 $f(\varrho)<f(\beta)$。

由于在所有情况下都出现了矛盾，因此 f 在（a， b）上严格递增。 □

附录 N. 通过上确界论证证明 IFT

假设 f 在 $[a,b]$上不是严格递增的。也就是说，存在 α、$\beta \in [a,b]$，使得 $\alpha < \beta$，但$f(\alpha) \not\leq f(\beta)$。因此，我们有 $a \leq \alpha < \beta \leq b$，并且 $f(\alpha) \geq f(\beta)$。等价地，存在 $\beta \in [a,b]$，并且存在 $\alpha \in [a,\beta)$，使得 $f(\alpha) > f(\beta)$。这意味着 α 是集合

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\beta := \{x \in [a,\beta) \ : \ f(x) > f(\beta)\},$$

因此非空。此外，$\mathcal{S} \subseteq [a,\beta) \subseteq [a,\beta]$。根据原理 2，$c := \text{上确界 } \mathcal{S} \text{ 存在于 } [a,\beta]$。

假设 $c \in \mathcal{S}$。这意味着 $c \in [a,\beta)$，因此 $c < \beta$。根据假设，$f'(c) > 0$，并通过一个 epsilon-delta 论证，存在 $\delta_1 > 0$，足够小，使得 $c < c + \delta_1 < \beta$，从而 $f(c) \leq f(c+\delta_1)$。但由于 $c \in \mathcal{S}$，我们进一步有 $f(\beta) < f(c) \leq f(c+\delta_1)$。由于 $c \in [a,\beta)$ 蕴含 $a \leq c$，我们进一步有 $a \leq c < c + \delta_1 < \beta$ 且 $f(c+\delta_1) > f(\beta)$。因此，我们构造出了一个属于 $\mathcal{S}$ 的元素 $c + \delta_1$，它大于上界 c。

今后，$c \notin \mathcal{S}$。这意味着，要么是 $c \notin [a,\beta)$，要么是 $f(c) \not> f(\beta)$.

对于 $c \notin [a,\beta)$ 这种情况，我们利用这样一个事实：β 是一个上界，而 c 是 $\mathcal{S}$的最小上界，因此 $c \leq \beta$。但 $c \notin [a,\beta)$ 意味着 $c \in [\beta,\infty)$，所以 $c \geq \beta$。由此我们证明了 $c = \beta$。由于 f 是一个函数，$f(c) = f(\beta)$。通过一个利用 $f'(c) \geq 0$这一事实的 ε-δ论证，存在 $\delta_2 > 0$ 使得

$$c - \delta_2 < t < c \Longrightarrow f(t) \leq f(c) = f(\beta). \tag{N.1}$$

如果 $c - \delta_2$ 不是 $\mathcal{S}$的上界，则存在 $\zeta \in \mathcal{S}$ 使得 $c - \delta_2 < \zeta \leq c$。由于 $c \notin \mathcal{S}$和 $\zeta \in \mathcal{S}$，
$\zeta \neq c$ $c - \delta_2 < \zeta < c$ $\zeta \in \mathcal{S}$ $f\ \zeta\ > f\ \beta$ $t = \zeta$ ，并且我们还得到 。此外，
进一步可推出 ( ) ( )，但将 代入 (N.1)，我们有 $f(\zeta) \leq f(\beta)$。因此，$c - \delta_2$ 是 $\mathcal{S}$的一个上界，但这个上界严格小于最小上界 c。

在 $f(c) \not> f(\beta)$ 的情况下，根据利用了.....的 ε-δ论证，我们有 $f(c) \leq f(\beta)$
con由于 f 在 c 处的连续性，存在 $\delta_3 > 0$ 使得

$$c - \delta_3 < t \leq c \Longrightarrow f(t) \leq f(\beta). \tag{N.2}$$

如果 $c - \delta_3$ 不是 $\mathcal{S}$ 的上界，则存在 $\varrho \in \mathcal{S}$ 使得 $c - \delta_3 < \varrho \leq c$，其中 $\varrho \in \mathcal{S}$ 进一步推出 $f(\varrho) > f(\beta)$；但在 (N.2) 中令 $t = \varrho$，则有 $f(\varrho) \leq f(\beta)$。

由于所有情况下都出现了矛盾，f 在 $[a,b]$上严格递增。 □