arXiv:2302.07085v1 [math.CV] 14 Feb 2023

具有内部不动点的 Burns-Krantz 刚性

FENG RONG

Abstract. 我们证明，对于具有内部不动点的全纯自映射，在强伪凸点附近存在一种 Burns-Krantz 型边界刚性。这证实了 Huang 的一个猜想。

1. Introduction

在 [4], 中，Burns 和 Krantz 建立了以下基本刚性结果。

定理 1.1。 [4] 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中一个边界光滑的强拟凸域， $n \geq 1$， $p \in \partial\Omega$，且 F 是 Ω 的全纯自映射。若当 $z \to p$ 时， $F(z) = z + o(|z-p|^3)$，则 $F(z) \equiv z$。

在 [8], 中，Huang 证明了 Burns-Krantz 刚性的一个“局部化”版本（[8, 定理 2.5]），其假设仅要求边界点 p 附近具有强拟凸性。此外，以下两个带有内部不动点的 Burns-Krantz 型刚性结果也已得到证明。

定理 1.2. [8, 推论 1.5] 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的一个光滑边界域， $p \in \partial D$，且 F 是 D 的全纯自映射。若对某个 $z_0 \in D$，有 $F(z_0) = z_0$，并且当 $z \to p$ 时，$F(z) = z + o(|z-p|)$，则 $F(z) \equiv z$。

定理 1.3. [8, 推论 2.7] 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个光滑边界强凸域， $n \geq 2$ $p \in \partial\Omega$，且 F 是 Ω 的全纯自映射。若对某个 $z_0 \in \Omega$，有 $F(z_0) = z_0$，并且当 $z \to p$ 时， $F(z) = z + o(|z-p|^2)$，则 $F(z) \equiv z$。

此外， [8] 曾猜想，对于 $\mathbb{C}^n$ $n \geq 2$中的有界强伪凸域，也应有类似的结果。加上 Ω 单连通这一条件后，Huang 在 [6] 和 [7] 中证明了这一猜想（参见 [5]）。下面的结果综合了 [6, 推论 3] 和 [7, 定理 5]。

定理 1.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$，是具有 Stein 邻域基的有界单连通全纯正规域，或具有 C^∞-光滑边界的有界单连通拟凸域。设 $p \in \partial\Omega$ 是一个 C^3-光滑强伪凸点。设 F 是 Ω 的全纯自映射，满足 $F(q) = q$，其中$q \in \Omega$，且

$$F(z) = z + o(\|z-p\|^2), \quad z \to p.$$

于是 $F(z) \equiv z$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32H99, 32A40.*Key words and phrases.* Burns-Krantz 刚性，复测地线。作者部分得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12271350）。

本文旨在证明黄氏猜想成立。事实上，它是下文主要结果的推论。

定理 1.5. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$，或者是具有 Stein 邻域基的有界 taut 域，或者是边界为 C^∞-光滑的有界伪凸域。设 $p \in \partial\Omega$ 是一个 C^3-光滑的强伪凸点。设 F 是 Ω 的一个全纯自映射，满足 $F(z) = z + o(|z-p|^k)$，其中 $z \to p$。若 $F(z) \neq z$，则 $k \leq 2$和
1) 若 $k = 2$，则 $\{F^m\}$ 正规收敛到 p，且 F 不可能是 Ω 的自同构。

2) 若 $k = 1$，则 $\{F^m\}$ 要么正规收敛到 p，要么 F 固定一个正维全纯回缩。并且，除非 Ω 与单位球双全纯，否则 F 不可能是 Ω 的自同构。

由此可立即得到以下推论。

推论 1.6. 设 Ω 和 $p \in \partial\Omega$ 如定理 1.5 中所述。若 F 是 Ω 的一个全纯自映射，满足对于某个 $z_0 \in \Omega$ 有 $F(z_0) = z_0$，且 $F(z) = z + o(|z-p|^2)$ 如 $z \to p$，则 $F(z) \equiv z$。

由于边界为 C^2-光滑的有界强伪凸域是 taut 流形且具有 Stein 邻域基，推论 1.6 证实了黄氏猜想。

注 1.7. 在额外假设 Ω 单连通的情况下，定理 1.5 已在 [7] 中给出。我们的主要贡献是引理 2.7 和 2.8。

2. 定理 1.5 的证明

我们先回顾 taut 流形上的迭代理论中的以下基本结果（例如参见 [2, 1]）。

定理 2.1. 设 X 是一个 taut 流形，且 F 是X的一个全纯自映射。假设 $\{F^m\}$ 不是紧致发散的。那么存在一个全纯回缩映射 ρ，将 X 映到子流形 M 上，使得 $\{F^m\}$ 的每个极限点 h 都具有 $h = \phi \circ \rho$的形式，其中 $\phi \in \mathrm{Aut}(M)$ 是适当的。此外，ρ 是 $\{F^m\}$的一个极限点，且 $f := F|_M \in \mathrm{Aut}(M)$。

回顾一下，ρ X 的全纯自映射是全纯回缩映射，当且仅当 $\rho^2 = \rho$。子流形 $M = \rho(X)$ 被称为 X 的全纯回缩。

接下来，我们引用一些 Huang 的工作 [6, 7, 8] 中的结果。

引理 2.2。 [6, 引理 6] 设 Ω 和 $p \in \partial\Omega$ 如定理 1.5 中所述。设 F 是 Ω 的一个自同构，满足当 $z \to p$ 时，$F(z) = z + o(|z-p|^k)$。如果 $k = 2$ 或 $k = 1$，且 Ω 不双全纯于单位球，则 $F(z) \equiv z$。

引理 2.3。 [6, 引理 7] 设 Ω 和 $p \in \partial\Omega$ 如定理 1.5 中所述。设 F 是 Ω 的一个全纯自映射，满足当 $z \to p$ 时，$F(z) = z + o(|z-p|)$。那么，对于 p 的任意邻域 V，存在一点 $z \in V \cap \Omega$，使得对于任意$m \geq 1$，$f^m(z) \in V$。

命题 2.4. [7, 命题 1] 设 Ω 和 $p \in \partial\Omega$ 如定理 1.5 中所述。假设 $M \subset \Omega$ 是复维数大于 1 的全纯回缩，且 $p \in \partial M$。那么，对于 p 的任意邻域 U，存在 Ω 的一条复测地线φ，满足 $\varphi(\Delta) \subset U \cap M$, $\varphi(1) = p$，以及 $\varphi \in C^1(\overline{\Delta})$。

回顾一下，若全纯映射 $\varphi\colon \Delta \to \Omega$ 是 Ω 的一条复测地线（例如参见 [1]），则它是 k_Δ 与 k_Ω 之间的等距映射，也就是说，对于所有 $\zeta_1, \zeta_2 \in \Delta$，都有 $k_\Omega(\varphi(\zeta_1)\ \varphi(\zeta_2)) = k_\Delta(\zeta_1, \zeta_2)$。这里，$k_\Omega(z_1, z_2)$ 表示 $z_1, z_2 \in \Omega$ 的 Kobayashi 距离，而 Δ 是单位圆盘。

定理 2.5。[8, 定理 2.2] 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域，$n \geq 2$。设$\varphi\colon \Delta \to \Omega$ 是一个真全纯映射，且在 $\varphi(1) = p \in \partial\Omega$ 附近 Lipschitz 连续。假设 Ω 存在一个定义函数 ρ，它是 C^1-光滑的，且在 p 附近满足 $d\rho \neq 0$，使得 $\rho \circ \varphi$ 是次调和函数。若 F 是 Ω 的一个全纯自映射，在 $\varphi(\Delta)$ 处有不动点，且 $F(z) = z + o(|z-p|^2)$ 为 $z \to p$，则 $F(z) \equiv z$。

我们还需要以下引理。

引理 2.6。[3, 引理 2.2] 设 Ω 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个域，p 是其光滑边界点，且 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ 是全纯的。假设 f 在 p 处的非切向微分 df_p 存在。那么，对于 Ω 中任意非切向收敛于 p 的序列 $\{z_k\}$，有 $df_{z_k} \to df_p$。

现在，设 Ω、$p \in \partial\Omega$ 和 $F\colon \Omega \to \Omega$ 如定理 1.5 中所述，且 $F(z) \not\equiv z$。

首先，假设 $\{F^m\}$ 是紧致发散的。根据 Huang 的局部 Burns-Krantz 刚性（[8, 定理 2.5]），我们有 $k \leq 2$。此外，由引理 2.2，除非 $k = 1$ 且 Ω 与单位球双全纯，否则 F 不可能是自同构。

接下来，假设 $\{F^m\}$ 不是紧致发散的。那么，由定理 2.1，Ω 有一个全纯回缩 M。令 $l = \dim_{\mathbb{C}} M$。由引理 2.3，$l > 0$ 和$p \in \partial M$。再由引理 2.2，$l < n$。因此，我们可以假设 $1 \leq l \leq n-1$。

引理 2.7。对于 $1 \leq l \leq n-1$，令 $f = F|_M$。那么 $f(z) \equiv z$。

证明。当 $l = 1$ 时，根据分类定理 [9, 定理 5.2], ，要么 f 是 M 上的无理旋转（其中 M 同构于圆盘、穿孔圆盘或环域），要么 f 的阶有限，即存在 $m \geq 1$ 使得 $f^m \equiv id$，且 M 中的每一点都是周期的。根据 [5] 的工作（参见 [6, 定理 1]），我们知道，M 在 p 附近是复平面中某个开集上的 Lipschitz 图像，该图像经过包含 $\partial\Omega$ 的复法向方向的 p。因此，如 $z \to p$ 在 M 中所示，由引理 2.6 可知，$dF_z \to id$，因为当 $z \to p$ 时，$F(z) = z + o(|z-p|)$。所以，我们必有 $f(z) \equiv z$。

当 $2 \leq l \leq n-1$ 时，该引理实质上就是 [7, 引理 5]。（在 [7, 引理 5], 中，假设区域是单连通的，尽管证明中并不需要这一假设。）□

引理 2.8. 当 $l = 1$ 时，令 $\varphi\colon \Delta \to M \subset \Omega$ 为黎曼映射（若 M 单连通）或万有覆盖映射（若 M 不单连通），且对某个序列 $\tau_j \to 1$，$\varphi(\tau_j) \to p$。当 $2 \leq l \leq n-1$ 时，令$\varphi\colon \Delta \to \Omega$ 为包含于 M 中的 Ω 的复测地线，且对某个序列 $\tau_j \to 1$，$\varphi(\tau_j) \to p$。那么，φ 在 1 的邻域内 Lipschitz 连续，且 $\varphi(1) = p$。

证明. 当 $l = 1$ 且 M 单连通时，该引理就是 [5, 引理 8]。

当 $l = 1$ 且 M 不单连通时，证明本质上与 [5, 引理 8] 的证明相同。事实上，尽管 [5, 引理 8] 讨论的是双全纯黎曼映射 φ，其证明只需要 φ 的局部逆映射，这对万有覆盖映射同样适用。

当 $2 \leq l \leq n-1$ 时，该引理可由命题 2.4 推出。 □

根据引理 2.7 和 2.8，可将定理 2.5 应用于 F，并得出 $k = 1$，因为 $F(z) \not\equiv z$。至此，定理 1.5 得证。

注 2.9. 在定理 1.5 和推论 1.6 中，我们只需假设 $F(z)$ 在 $z \to p$ 非切向地的边界行为。关于这一方向的更详细讨论，参见 [10]。

References

[1] M. Abate；《仿紧流形上全纯映射的迭代理论》，Mediterranean Press，Rendre，科森扎，1989 年。[2] E. Bedford； *On the automorphism group of a Stein manifold*，《数学年刊》266 (1983)，215-227。[3] F. Bracci，D. Zaitsev； *Boundary jets of holomorphic maps between strongly pseudoconvex domains* **254** 2008 1449 1466，《泛函分析杂志》( )，-。[4] D.M. Burns，S.G. Krantz； *Rigidity for holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary* **7** 1994 661 676，《美国数学会杂志》( )，-。[5] J.E. Fornæss，F. Rong； *On the boundary rigidity at strongly pseudoconvex points*，《数学杂志》297 (2021)，453-458。[6] X. Huang； *A preservation principle of extremal mappings near a strongly pseudoconvex point and its applications* **38** 1994 283 302，《伊利诺伊数学杂志》( )，-。[7] X. Huang； *A non-degeneracy property of extremal mappings and iterates of holomorphic self-mappings* **21** 1994 399 419，《比萨高等师范学校科学类年刊》( )，-。[8] X. Huang； *A boundary rigidity problem for holomorphic mappings on some weakly pseudo-convex domains* **47** 1995 405 420，《加拿大数学杂志》( )，-。[9] J. Milnor；《单复变量动力系统》，第 3 版，《数学研究年刊》160，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2006 年。[10] F. Rong； *Non-tangential Burns-Krantz rigidity* **33** 2023 72, ，《几何分析杂志》( )，论文编号 pp。

Department of Mathematics, School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, 800 Dong Chuan Road, Shanghai, 200240, P.R. China*Email address*: frong@sjtu.edu.cn