# 相同啁啾率多分量啁啾模型的参数估计

Abhinek Shukla、Debasis Kundu、Amit Mitra 和 Rhythm Grover

arXiv:2302.07098v1 [stat.ME] 13 Feb 2023

摘要——**相同啁啾率的多分量啁啾信号模型出现在各种雷达应用中，例如合成孔径雷达、快速移动目标的回波信号等。针对这类模型，人们已经提出了许多次优估计量，然而，这些估计量存在可辨识性问题或误差传播效应。本文研究了线性平稳误差污染下，相同啁啾率多分量啁啾模型参数的最小二乘估计量（LSEs）的理论性质。作为 LSEs 的替代方案，我们还提出了两种计算高效估计量，即序贯组合估计量和序贯插件估计量。我们推导了这些估计量的强相合性和渐近正态性。有趣的是，我们发现啁啾率参数的序贯组合估计量是渐近有效的。我们进行了大量数值模拟，验证了三种估计量在计算和理论性能方面均表现良好。此外，我们利用所提出的相同啁啾率多分量啁啾模型估计量分析了模拟雷达数据；结果表明，该方法能够高效地从含噪数据中恢复目标的逆合成孔径雷达（ISAR）图像。**

**关键词：** 一致性、渐近正态性、相同啁啾率、多分量啁啾信号、平稳线性过程、最小二乘估计量、序贯程序。

## I. 引言

本文考虑如下具有相同啁啾率参数的实值多分量啁啾模型：

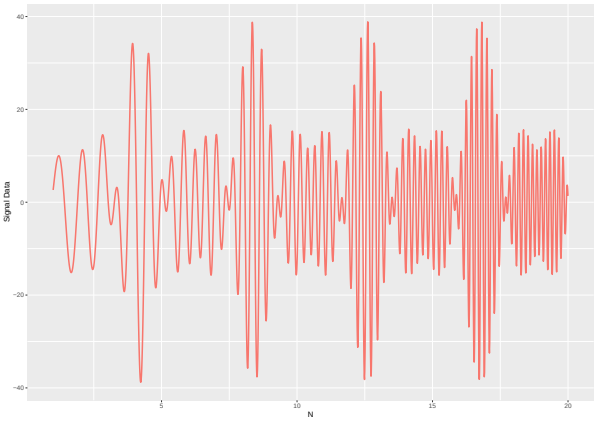
$$y(n) = \sum_{k=1}^{p} \left( A_k^0 \cos(\alpha_k^0 n + \beta^0 n^2) + B_k^0 \sin(\alpha_k^0 n + \beta^0 n^2) \right) + X(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}^0 = (\boldsymbol{A}^{0\top}, \boldsymbol{\xi}^{0\top})^\top = (\underbrace{A_1^0, B_1^0, A_2^0, B_2^0, \ldots, A_p^0, B_p^0}_{\boldsymbol{A}^\top}, \underbrace{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_p^0, \beta^0}_{\boldsymbol{\xi}^\top})^\top$ 是参数向量，$_k$，$B_k$ 是振幅参数，$^0$ $\alpha_k^0$ 是频率参数，$\beta^0$ 是第 $k^{th}$ 个分量的啁啾率参数，$k = 1$、2、3、.....、$p$，$X(n)$是噪声项。我们给出图1，以说明由模型（1）生成的数据在 $p = 5$，10这两个不同取值下的啁啾波形。

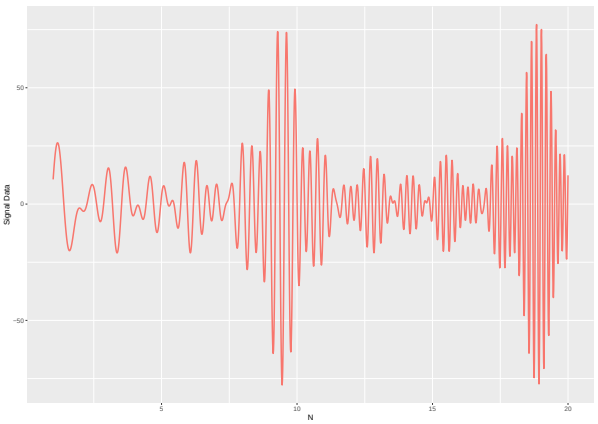
A. Shukla、D. Kundu和A. Mitra就职于印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系，印度坎普尔，邮编208016，印度。

R. Grover 就职于印度理工学院古瓦哈提分校梅塔数据科学与人工智能学院，印度阿萨姆邦 781039。

（通讯作者：Abhinek Shukla，电子邮箱：abhushukla@gmail.com）




（a） 具有相同啁啾率的五分量啁啾模型。




（b） 具有相同啁啾率的十分量啁啾模型。

图1： 具有相同啁啾率的多分量啁啾模型的啁啾波形。

考虑运动目标的雷达跟踪问题，在目标的平动已得到补偿的情况下，[18] 中观察到，散射体反射信号的多普勒相位是时间的二次函数。因此，经过斜距徙动校正后（见[18]），每个距离单元中的横向距离信号都可以视为具有共同未知啁啾率的多分量啁啾模型。模型（1）的另一种应用场景是：雷达或通信系统发射啁啾信号（例如线性调频信号（LFM）），并使其通过

线性有限脉冲响应（FIR）信道（例如存在多径传播时），则输出端会形成一个多分量啁啾模型，其中各分量具有相同的最高阶系数。这意味着滤波器输出由共享同一最高阶系数的多分量啁啾模型构成；对于二次相位而言，该系数即啁啾率。更多详情见 [2]。在研究利用卫星或飞机对地球进行高分辨率雷达成像时，也会出现啁啾率相同的多分量啁啾模型（[2]）。 [1], 中的分析表明，快速移动目标各散射体的回波信号近似为啁啾率相同的多分量啁啾信号。 [9] 还得出结论：由多个散射体组成的运动目标，其 ISAR 接收信号近似为啁啾率相同的多分量啁啾信号。对于具有多个散射体的非合作目标，也存在类似应用：经过外差检测后，回波信号可视为啁啾率相同的多分量线性调频信号，见[20]。文献中提及的其他应用还包括：高速目标回波数据在快时间维度上呈现多分量啁啾信号回波的形式，见 [22], [26] 等。因此，模型（1）在雷达和工程领域有着广泛的应用，研究高效的估计问题也因此对航空航天及工程领域的研究人员具有重要意义。此类模型的参考文献可见 [3],[12] 和 [11]。

关于啁啾率不同的多分量啁啾模型参数估计，已有大量文献（例如，参见 [23], [24], [29], [10], [14], [27]及其中引用的文献）。另一方面，专门研究啁啾率相同的多分量啁啾模型的文献则较少（例如，参见 [2] 和 [22]）。最小二乘估计量（LSEs）是获得模型 (1) 参数最优估计量最自然的选择。然而，计算最小二乘估计量需要求解一个 $(p+1)$ 维非线性优化问题，这在实践中会带来难以承受的计算开销。因此，有必要开发计算效率高且性能接近最优最小二乘估计量的方法。模型 (1) 是啁啾率不同的多分量啁啾信号的一个子模型。因此，可以考虑将针对啁啾率不同的多分量啁啾信号提出的高效方法应用于模型 (1)。其中一个例子是序贯最小二乘法（参见 [10]）：研究表明，它的计算复杂度低于最小二乘估计量，并且具有与最小二乘估计量相同的渐近分布。然而，由于模型 (1) 中不同分量的啁啾率 ($\beta^0$) 相同，正交结构不复存在，因此，要找到一种计算效率高的估计方法，是一个具有挑战性且非平凡的问题。因此，序贯估计量在理论和经验上的表现都难以预先判断。

针对模型 (1)， [24] 的次优估计量，例如乘积高阶模糊函数（PHAF）和积分三次相位函数（ICPF），分别在 [2] 和 [22], 中得到应用。PHAF 可提供次优估计量，而基于 ICPF 的估计量计算开销较大。然而，对于多分量模型，PHAF 和 ICPF 估计量的理论分析相当困难，这是因为不同分量之间以及分量与噪声之间存在干扰和/或相互作用。这些干扰源于此类方法对观测数据进行的非线性运算（参见 [2] 和 [24]）。此外，为获得低阶系数参数的估计量，还需进行去啁啾处理。这会因最高阶系数估计误差的传播，严重降低低阶系数估计量的性能。本文的目标有两个方面：

- 推导模型（1）模型参数的最小二乘估计量的理论性质；
- 提出计算上和渐近有效的啁啾率参数估计量，作为最小二乘估计量的替代方案。

我们研究了一个在雷达应用中跟踪移动目标时具有重要意义的模型。我们提出的估计方法旨在降低最小二乘估计量的计算复杂度，同时保持估计量的最优收敛速率。组合估计量基于通过序贯过程改进啁啾率估计量的原理，而代入估计量则旨在将最小二乘估计量的计算负荷降至最低。我们所提出的估计量的技术意义在于，在降低计算复杂度的同时，获得与最小二乘估计量相同的收敛速率。我们还证明了啁啾率参数的组合估计量是渐近最优的。此外，我们进一步分析了 [16]中提供的雷达数据，并表明所提出的估计量能够有效地重建含噪雷达数据的ISAR图像。

本文其余部分安排如下：首先，我们在第二节介绍为阐述所提出的三种估计量的估计方法而作出的假设，并在同一节详细说明这些估计量的估计方法及理论结果。第三节通过详细的数值模拟，研究所提出估计量的性能，并从均方误差（MSE）和计算时间两方面与 ICPF 进行比较。我们还提出了一些基于 PHAF 的估计量的实现步骤，以克服所提出估计量涉及的二维（2D）优化问题所带来的计算难题，并对其在一组雷达数据上的表现进行了审慎评估。第四节总结全文，随后附上包含定理证明的附录。

II. 估计方法

我们首先说明模型（1）的噪声项和参数所满足的假设，这些假设是阐述所提出方法设计思路以及推导三种估计量渐近理论性质所必需的。

### A. 假设

**假设1.** $X(n)$ 是具有以下形式的平稳线性过程：

$$X(n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a(j)\epsilon(n-j), \tag{2}$$

使得系数 $a(j)$ 绝对可和，即：

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a(j)|<\infty, \tag{3}$$

并且 $\{\epsilon(n)\}$ 是独立同分布（*i.i.d.*）随机变量序列，其均值为0，方差为$\sigma^2$ 且四阶矩有限。

**假设2.** 参数 $A_k^0, B_k^0 \in[-M,M]$ 的真值满足某些 $M>0$, $\alpha_k^0 \in(0,2\pi)$、 $\beta^0 \in(0,\pi/2)$ 以及 $A_k^{0^2}+B_k^{0^2}>0$，其中 $k=1,2,3,\ldots,p$。

**假设3**。 $A_1^{0^2}+B_1^{0^2}>A_2^{0^2}+B_2^{0^2}>\cdots>A_p^{0^2}+B_p^{0^2}$.

假设1定义了一大类误差，因为它不仅包含通常的独立同分布高斯误差假设，也涵盖移动平均过程、自回归过程等，因此也包括具有依赖结构的误差。假设2是一个标准假设，主要表明频率和频率变化率参数不处于边界上，同时避免参数空间可能取值中出现任何可辨识性问题。假设3有助于为制定自然的序贯程序提供动机，同时也保证通过这一序贯过程得到的估计量具有一致性。假设3还指导序贯程序按正确顺序识别不同分量。

接下来，我们介绍模型(1)参数的最小二乘估计量、序贯组合估计量和序贯插件估计量的估计方法。这些方法基于以下假设：模型(1)的分量数$p$ 事先已知。

### B. 最小二乘估计量

令 $\boldsymbol{Y}=(y(1)\ y(2)\ldots,y(N))^\top$ 为数据向量，并定义以下平方和：

$$Q(\boldsymbol{\theta})=(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{A})^\top(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{A}),$$

其中， $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{A}^\top,\boldsymbol{\xi}^\top)^\top$、$(n,2k-1)^{th}$ 和 $(n,2k)^{th}$ 是 $N\times 2p$ 阶矩阵 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})$ 的元素，分别为 $\cos(\alpha_k n+\beta n^2)$ 和 $\sin(\alpha_k n+\beta n^2)$。于是， $\boldsymbol{\theta}^0$ 的最小二乘估计量可按如下方式求得：

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}=\arg\min_{\boldsymbol{\theta}}Q(\boldsymbol{\theta}). \tag{4}$$

注意，使用可分离线性回归技术，上述优化问题可从一个 $(3p+1)$ 维非线性优化问题化简为一个 $(p+1)$ 维问题（参见例如 [10] 和 [19]）。因此，经过化简后，上述估计量也可等价地表示为：

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}=\arg\min_{\boldsymbol{\theta}}\big(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi})\big)^\top\big(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi})\big),$$

其中， $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi})=\Big(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})^\top\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\Big)^{-1}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})^\top\boldsymbol{Y}$，更多细节请参见 [7]。这里， $\boldsymbol{A}$ 的估计值为：

$$\widehat{\boldsymbol{A}}=\Big(\boldsymbol{W}(\widehat{\boldsymbol{\xi}})^\top\boldsymbol{W}(\widehat{\boldsymbol{\xi}})\Big)^{-1}\boldsymbol{W}(\widehat{\boldsymbol{\xi}})^\top\boldsymbol{Y}.$$

### C. 序贯组合估计量

我们采用序贯估计程序的思路 [10]来寻找计算上更简单的方法。该序贯估计量每次仅基于估计一个分量，因此只需解决一个二维优化问题$p$ 次。现在，我们按以下步骤定义模型 (1) 参数的序贯组合估计量：

- **步骤 1**考虑以下平方和：

$$Q_1(\boldsymbol{\theta_1})=\sum_{n=1}^{N}\big(y(n)-A_1\cos(\alpha_1 n+\beta_1 n^2)-B_1\sin(\alpha_1 n+\beta_1 n^2)\big)^2.$$

第一分量的参数向量为 $\boldsymbol{\theta}_1^0=(A_1^0,\ B_1^0,\ \alpha_1^0,\ \beta^0)^\top$，令 $\boldsymbol{\theta}_1=(A_1,\ B_1,\ \alpha_1,\ \beta_1)^\top$，则我们将第一分量参数的序贯组合估计量定义如下：

$$\breve{\boldsymbol{\theta}}_1=\arg\min_{\boldsymbol{\theta}_1}Q_1(\boldsymbol{\theta}_1). \tag{5}$$

注意，利用可分离线性回归技术（参见 [19]），可以将上述 (5) 化简为一个二维优化问题。我们可以像化简 (4) 那样化简 (5)。对于其余分量估计量，这同样也是一个二维优化问题。

- **步骤 2** 我们从数据中消除第一分量的影响，然后通过更新数据来定义第二分量参数向量 $\boldsymbol{\theta}_2^0=(A_2^0,\ B_2^0,\ \alpha_2^0,\ \beta^0)^\top$ 的序贯组合估计量 $\breve{\boldsymbol{\theta}}_2=(\breve{A}_2,\ \breve{B}_2,\ \breve{\alpha}_2,\ \breve{\beta}_2)^\top$：

$$\breve{y}_1(n)=y(n)-\breve{A}_1\cos(\breve{\alpha}_1 n+\breve{\beta}_1 n^2)-\breve{B}_1\sin(\breve{\alpha}_1 n+\breve{\beta}_1 n^2).$$

考虑：

$$Q_2(\boldsymbol{\theta}_2)=\sum_{n=1}^{N}\big(\breve{y}_1(n)-A_2\cos(\alpha_2 n+\beta_2 n^2)-B_2\sin(\alpha_2 n+\beta_2 n^2)\big)^2,$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_2 = (A_2,\ B_2,\ \alpha_2,\ \beta_2)^\top$，则第二个分量估计量由下式给出：

$$\breve{\boldsymbol{\theta}}_2 = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}_2} Q_2(\boldsymbol{\theta}_2). \tag{6}$$

我们可以仿照式（4）对式（6）进行简化。

•**步骤 3** 我们对剩余分量的序贯组合估计量重复步骤 2，即 $\breve{\boldsymbol{\theta}}_k = (\breve{A}_k,\ \breve{B}_k,\ \breve{\alpha}_k,\ \breve{\beta}_k)^\top$, $k \geq 3$.

• **步骤 4** 由于模型（1）中的所有不同分量都具有相同的啁啾率参数，因此我们提出以最优方式组合来自各分量的估计量 $\beta^0$ 。已知当啁啾率不同时，不同分量的估计量渐近独立（参见 [10]）。因此，受这一结果启发，我们提出通过最小化下列类别中所有分量估计量 $\beta_k$的线性组合的方差˘，来构造参数 $\beta^0$ 的序贯组合估计量 $\breve{\beta}$ :

$$\breve{\beta} = \sum_{k=1}^{p} l_k \breve{\beta}_k, \qquad \sum_{k=1}^{p} l_k = 1.$$

啁啾率参数的序贯组合估计量$\beta^0$ 因此为:

$$\breve{\beta} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{p}(\breve{A}_k^{0^2} + \breve{B}_k^{0^2})} \sum_{k=1}^{p} (\breve{A}_k^{0^2} + \breve{B}_k^{0^2})\breve{\beta}_k.$$

˘我们已证明， $\beta$ 是啁啾率参数 $\beta^0$的渐近最优估计量。最后， $\breve{\boldsymbol{\theta}} = (\breve{A}_1, \breve{B}_1, \breve{A}_2, \breve{B}_2, \ldots, \breve{A}_p, \breve{B}_p, \breve{\alpha}_1, \breve{\alpha}_2, \ldots, \breve{\alpha}_p, \breve{\beta})^\top$是参数 $\boldsymbol{\theta}^0 = (A_1^0, B_1^0, A_2^0, B_2^0, \ldots, A_p^0, B_p^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_p^0, \beta^0)^\top$的拟议序贯组合估计量。

### *D.* 序贯插件估计量

在许多实际应用中，模型 (1) 中的分量数量可能非常大。序贯组合估计量需要求解 $p$ 个二维优化问题。在这种情况下，实施序贯组合估计量将涉及繁琐的计算。因此，为解决这一问题，我们仅针对第一分量估计量进行二维优化，然后将对 $\beta^0$ 的这一估计代入所有剩余分量。因此，序贯插件估计量只需求解一个二维优化问题和 $(p-1)$ 个一维优化问题，从而大幅降低计算成本。下面我们通过以下步骤详细介绍模型 (1) 参数的序贯插件估计量方法:

• **第一步** 定义以下平方和，以估计第一模型（1）的分量参数:

$$Q_1(\bar{\boldsymbol{\theta}}_1) = \sum_{n=1}^{N} \big(y(n) - A_1\cos(\alpha_1 n + \beta n^2) - B_1\sin(\alpha_1 n + \beta n^2)\big)^2.$$

进一步定义 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_1 = (A_1,\ B_1,\ \alpha_1,\ \beta)^\top$，然后按如下方式估计第一分量参数 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_1^0 = (A_1^0,\ B_1^0,\ \alpha_1^0,\ \beta^0)^\top$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1 = \arg\min_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_1} Q_1(\bar{\boldsymbol{\theta}}_1). \tag{7}$$

我们可以仿照式（4）简化式（7）。式（7）可以化为一个二维优化问题。但对于其他分量，这将是一个一维优化问题（见式（8））。可以看出，第一分量参数的序贯组合估计量与序贯插件估计量相同。

• **步骤-II** 计算第二分量估计量 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2 = (\widetilde{A}_2, \widetilde{B}_2, \widetilde{\alpha}_2)^\top$的 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_2^0 = (A_2^0, B_2^0, \alpha_2^0)^\top$，我们将数据更新为:

$$\widetilde{y_1}(n) = y(n) - \widetilde{A}_1\cos(\widetilde{\alpha}_1 n + \widetilde{\beta} n^2) - \widetilde{B}_1\sin(\widetilde{\alpha}_1 n + \widetilde{\beta} n^2),$$

并定义以下平方和:

$$Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2) = \sum_{n=1}^{N} \big(\widetilde{y_1}(n) - A_2\cos(\alpha_2 n + \widetilde{\beta} n^2) - B_2\sin(\alpha_2 n + \widetilde{\beta} n^2)\big)^2,$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_2 = (A_2, B_2, \alpha_2)^\top$。第二分量的序贯组合估计量为:

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2 = \arg\min_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2} Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2). \tag{8}$$

•**步骤-III** 对其余分量参数重复步骤-II，即 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0 = (A_k^0, B_k^0, \alpha_k^0)$，其中 $k \geq 3$。

由此，我们得到参数的序贯插件估计量 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{A}_1,\ \widetilde{B}_1,\ \widetilde{A}_2,\ \widetilde{B}_2,\ \ldots,\ \widetilde{A}_p,\ \widetilde{B}_p,\ \widetilde{\alpha}_1,\ \widetilde{\alpha}_2,\ \ldots,\ \widetilde{\alpha}_p,\ \widetilde{\beta})^\top$

$\boldsymbol{\theta}^0 = (A_1^0,\ B_1^0,\ A_2^0,\ B_2^0,\ \ldots,\ A_p^0,\ B_p^0,\ \alpha_1^0,\ \alpha_2^0,\ \ldots,\ \alpha_p^0,\ \beta^0)^\top$。我们强调，与序贯组合的情形不同，在序贯插件方法中， $\beta^0$ 只估计一次；而在序贯组合中，对于所有不同的分量参数， $\beta^0$ 都会被重复估计。

### *E.* 主要定理

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$、$\breve{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ 是模型 () 的参数 $\boldsymbol{\theta}^0$ **定理1.** 估计量 1 *1,* 的强一致估计 2 3, $\widehat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{\theta}^0$ $\breve{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{\theta}^0$ $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{\theta}^0$ $N \to \infty$ 量，在假设和.....下，即.....、.....，当.....时。这里， $a.s.$表示几乎必然收敛。

证明。 证明请参阅附录 A。 □

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$、$\breve{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ 渐近服从正态分布，其缩放矩阵为 **定理2.** 在假设*1*、*2*和*3*下，估计量 $\boldsymbol{\theta}$、

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \overset{g}{diag}(\underbrace{N^{1/2}, N^{1/2}, \ldots, N^{1/2}, N^{1/2}}_{2p\ \ times}, \underbrace{N^{3/2}, \ldots, N^{3/2}}_{p\ \ times}, N^{5/2})$$

*, i.e.,*

$$\boldsymbol{D}^{-1}\big(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{3p+1}\Big(\mathbf{0}, 2c\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_1\Big),$$

$$\boldsymbol{D}^{-1}\left(\breve{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}^{0}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{3p+1}\left(\mathbf{0}, 2c\sigma^{2}\boldsymbol{\Sigma}_{2}\right) \text{ and}$$

$$\boldsymbol{D}^{-1}\left(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}^{0}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{3p+1}\left(\mathbf{0}, 2c\sigma^{2}\boldsymbol{\Sigma}_{3}\right),$$

其中， $diag(a_1$、 $a_2$、...、 $a_k)$ 表示一个对角线元素为 $a_1$、$a_2$、...、 $a_k$ 的 $k\times k$ 对角矩阵。正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_1$、 $\boldsymbol{\Sigma}_2$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_3$ 的对角元素见附录 *B* 中的公式(11)-(17) 。

证明。 证明请参见附录 B。 □

对于啁啾率不同的多分量啁啾模型参数估计量，也有与定理1和2类似的结果。然而，对于啁啾率相同的多分量啁啾模型，其估计量需要单独研究，因为在这种情况下，不同啁啾分量通常具有的渐近正交性不再成立。啁啾率相同时估计量的渐近方差-协方差矩阵不同于啁啾率不同的情况。因此，我们工作的创新之处在于，分别推导了这些估计量的所有性质；这些性质并不能直接从针对啁啾率不同情形所建立的估计量性质中得到。

**备注：** 若在定理2中， $X(n)$是一个均值为0、方差为 $\sigma^2$ 的独立同分布序列，则 $\boldsymbol{\Sigma}_1$ 的对角元素将给出相应的克拉美-罗下界。我们在（11）和（12）中报告了 $\alpha_k^0$ 和 $\beta^0$ 的最小二乘估计量的渐近方差。结果表明，啁啾率参数 $\beta^0$ 的序贯组合估计量是渐近最优的；然而，频率参数 $\alpha_k^0$ 的序贯插件估计量的渐近方差小于序贯组合估计量的渐近方差（参见补充材料第3页中的比较）。因此， $\boldsymbol{\Sigma}_3 - \boldsymbol{\Sigma}_2$ 既非正定，也非负定。下一节的数值模拟也验证了这些理论结果。

## III. 数值模拟

我们进行了大量数值模拟，根据均方误差研究所提出的不同方法的表现，并考察获得这些估计量所需的时间。数值模拟大致分为五个小节。在 III-A 小节中，我们针对具有相同啁啾率的五分量啁啾模型，以均方误差为指标，比较了非线性参数的最小二乘估计量、序贯插件估计量和序贯组合估计量的有限样本性能。在 III-B 小节中，我们将所提出的估计量与基于 ICPF 的啁啾率参数估计量进行了比较。随后，在 III-C 小节中，我们从获得这些估计量所需的时间方面介绍了计算成本。我们还在 III-D 小节中给出估计量的一些实现方法及其性能，以降低所提出估计量的计算难度。III-E 小节使用一组雷达信号数据评估所提出的实现过程。在整个数值模拟中，我们使用模型 (1) 的解析形式进行比较，参见 [2] 中的公式 (1)。我们还考虑了以下两种不同类型的误差序列 $X(n)$:

- **E1：** $X(n)$ 是一列独立同分布（i.i.d.）的高斯误差，其均值为 0，方差为 $\sigma^2$;
- **E2：** $X(n)$ 是具有以下表示形式的自回归移动平均（ARMA）误差:

$$X(n) = 0.6X(n-1) + \epsilon(n) + 0.1\epsilon(n-1). \quad (9)$$

其中， $\epsilon(n)$ 是一列独立同分布的高斯随机变量，其均值为 0，方差为 $\sigma^2$。

实部和虚部分别独立地受到上述两种误差 E1 和 E2 的污染。III-A、III-B 和 III-C 小节中模型的参数如下:

$$\begin{aligned} &p=5,\ A_1^0=3.35,\ A_2^0=2.8,\ A_3^0=2.1,\ A_4^0=1.59,\\ &A_5^0=0.9,\ \alpha_1^0=0.89,\ \alpha_2^0=0.96,\ \alpha_3^0=0.76,\\ &\alpha_4^0=0.56,\ \alpha_5^0=0.37,\ \beta^0=0.87. \end{aligned} \quad (10)$$

### *A.* 比较序贯组合估计量和序贯插件估计量下最小二乘估计量的均方误差

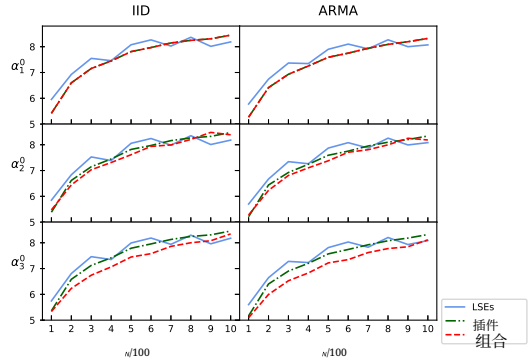
对于 [2]，的解析模型 (1)，我们从均方误差的角度研究了最小二乘估计量、序贯组合估计量和序贯插件估计量的有限样本性能。我们选取了不同的样本量集合$N$ = 100、200、.....、1000。对于误差 $X(n)$，我们分别考虑了 E1 和 E2，其中 $\sigma$ = 2，3。对于生成的一组数据，我们计算了最小二乘估计量、序贯组合估计量和序贯插件估计量的估计值。所有这些估计量都没有显式形式，因此我们必须借助一些标准数值方法。这里，我们使用 Nelder–Mead 单纯形算法 [15]（通过 R 软件中的“optim”函数）对相关目标函数进行优化，以获得所有这些估计量。为了使 Nelder-Mead 算法收敛到真实参数，我们还需要良好的初始猜测值。因此，我们在区间 $[\alpha_k^0-1/N, \alpha_k^0+1/N]$上使用网格搜索，针对 $k$ = 1、2、3、4、5 和 $[\beta^0-1/N^2, \beta^0+1/N^2]$ 获取初始猜测值。

现在，我们计算参数估计值与真值之间的平方误差。随后重复这一过程，最多进行 10,000 次，并求出各个估计量对应的平方误差的平均值，由此得到均方误差。图 2给出了情形 $\sigma$ = 2 下不同样本量对应的均方误差曲线。情形 $\sigma$ = 3 的类似结果见补充材料第 1 页图 1。

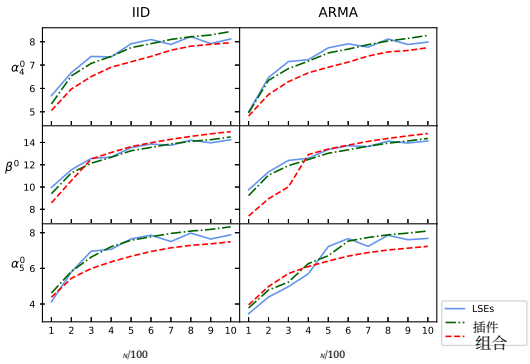
次优估计量通常具有相对较高的信噪比（SNR）阈值。因此，我们还针对31个不同的信噪比值，进行了10,000次重复试验，以评估估计量的均方误差

这些信噪比值的范围为−5至10。根据相应的信噪比值，从正态分布中随机抽取误差，其均值为0，方差则相应变化。所得图形如图3所示。根据这些图可以总结出以下观察结果：

- 随着样本量增加，这三种估计量的均方误差均降低，从而验证了定理1中所述的一致性（图2）；
- 随着信噪比增加，这三种估计量的均方误差均降低（图3）；
- 对于啁啾率参数 $\beta^0$，与序贯组合估计量相比，序贯插件估计量的均方误差更稳定（图2）；
- 随着分量数量增加，这三种估计量的信噪比阈值似乎都向更高的信噪比值移动。例如，$\alpha_3^0$ 中这三种估计量的信噪比阈值约为 -5 dB，而 $\alpha_5^0$ 中约为 2.5 dB。这也表明，对于（1）型模型，序贯程序在信噪比阈值方面的表现与使用最小二乘估计量一样好。例如，参见图3中 $\alpha_5^0$ 的估计量表现；
- 频率参数 $\alpha_k^0$，$k = 2$，3，4，5 的序贯插件估计量的均方误差与最小二乘估计量的相当（图2、图3）；
- 当信噪比较高时，啁啾率参数的序贯组合估计量$\beta^0$的表现与最小二乘估计量相当（图3）；
- 图2还验证了定理2给出的所得估计量的收敛速率。




(a) $\alpha_1^0$、$\alpha_2^0$ 和 $\alpha_3^0$的估计量。




(b) $\alpha_4^0$、$\beta^0$ 和 $\alpha_5^0$的估计量。

图2：对于情形$\sigma = 2$，随着样本量增加，*LSE*、序贯插件估计量（插件）和序贯组合估计量（组合）的均方误差（在 −对数10 尺度上）。

### *B.* 与 *ICPF* 的比较

文献 [22]展示了用于估计啁啾率参数的 ICPF 实现。我们比较了同一模型（见式（10））下，最小二乘估计量、序贯组合估计量、序贯插件估计量和基于 ICPF 的啁啾率参数估计量 $\beta^0$ 的均方误差。我们选取了30个不同的信噪比值来比较它们的表现。均方误差基于10,000次重复试验计算得出。模拟结果见图4，由此可以得出以下结论：

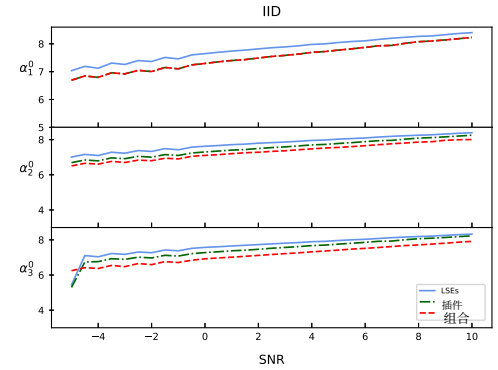
- 当信噪比高于2.5 dB时，序贯组合估计量的表现与最小二乘估计量相当，且优于其他计算高效估计量，即基于 ICPF 的估计量和序贯插件估计量；
- 序贯插件估计量的均方误差比 ICPF 和序贯组合估计量的更稳定。

此外，我们在补充材料中添加了表1，以突出所提方法在定量方面的技术优势。

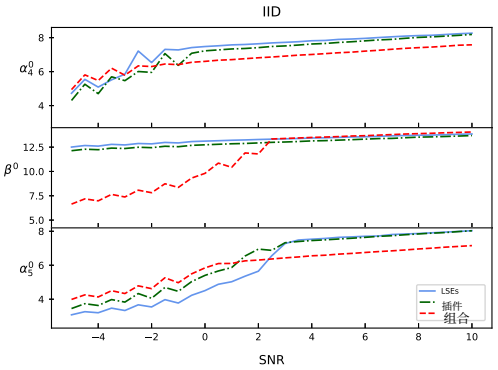
### *C.* 所有估计量的计算时间比较

我们进一步展示了使用最小二乘估计量、序贯组合估计量和序贯插件估计量。我们采用了与 III-A 小节中所建议的相同方法：先选择初始猜测值，再应用 Nelder-Mead 算法来获得所有最终估计值。补充材料第 3 页的图 2 显示了计算最小二乘估计量和序贯组合估计量的平均时间（基于 1000 次重复试验）与计算序贯插件估计量的平均时间之比。我们得出结论（见补充材料中的图 2）：计算最小二乘估计量所需的时间是计算序贯插件估计量所需时间的 6 倍以上。此外，对于较大的样本量，计算序贯组合估计量所需的时间是计算序贯插件估计量所需时间的 5 倍以上。在这一比较中，我们没有选择 ICPF，因为在该设置（10）中，为最小二乘估计量和序贯组合估计量找到合适的初始猜测值通常比 ICPF 耗时得多：ICPF 只需解决一个一维优化问题，而最小二乘估计量需要解决一个六维优化问题，序贯组合估计量则需要解决五个二维优化问题。

然而，我们根据计算 {v1} 估计值所需的时间，对序贯插件估计量和 ICPF 估计量进行了比较




(a) $\alpha_1^0$、 $\alpha_2^0$ 和 $\alpha_3^0$的估计量。




(b) $\alpha_4^0$、 $\beta^0$ 和 $\alpha_5^0$的估计量。

图3：在固定样本量 $N = 500$的条件下，最小二乘估计量、序贯插件估计量（插件）和序贯组合估计量（组合）的均方误差（以对数10 刻度表示）随信噪比的变化。

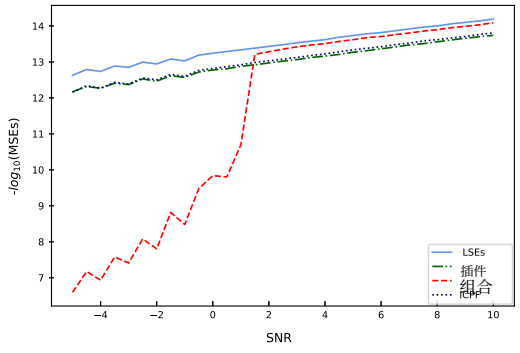



图4：在固定样本量 $N$ =501的条件下，最小二乘估计量、序贯插件估计量（插件）、序贯组合估计量（组合）以及基于 ICPF 的啁啾率参数估计量的均方误差（以对数10 刻度表示）随信噪比的变化。

。我们在区间 $[\alpha_1^0 - 1/\sqrt{N}, \alpha_1^0 + 1/\sqrt{N}]$ 和 $[\beta^0 - 1/\sqrt{N}, \beta^0 + 1/\sqrt{N}]$ 上使用网格搜索，为两个估计量获取初始猜测值，以便执行 Nelder-Mead算法。选择这些区间的原因是，我们始终可以使用基于高阶模糊函数（HAF）的估计量来获得 $\beta^0$， $\alpha_1^0$ 的初始猜测值，然后在 HAF 估计值附近长度为 $1/\sqrt{N}$ 的区间上进行网格搜索。我们比较了计算效率最高的估计量（序贯插件估计量）与基于 ICPF 的估计量所需的时间。表中报告了两个估计量在 50 次重复试验中的平均时间（秒）。从表 I 可以清楚地看出，序贯插件估计量显著优于 ICPF 估计量，因此速度更快。请注意，所有时间比较模拟均在以下配置的系统上进行：Intel(R) Xeon(R) CPU E7-8870 v3 @ 2.10GHz。

### *D.* 使用 *PHAF* 实现

计算效率最高的估计量是序贯插件估计量，它需要针对第一分量估计量求解一个二维优化问题，并针对剩余分量求解一个一维优化问题。当样本量较大时，二维优化的计算负担会很重。因此，我们现在提出一种只需求解一维优化问题的实现方法。ICPF 和 PHAF 都需要求解一维优化问题，但 ICPF 需要对数据执行大量代数运算，因此与 PHAF 相比，计算负担更重。因此，基于 PHAF 的估计量有助于降低为序贯插件估计量和序贯组合估计量获取一组良好初始猜测值时的计算难度。我们首先获得第一分量估计量的 PHAF 估计值，然后提出以下三种不同方案，为第一分量序贯插件估计量获取初始猜测值：

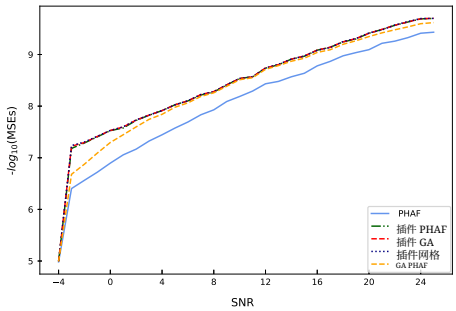
1) PHAF；2) 在 PHAF 估计值的 $1/(2\pi N)$ 邻域内使用遗传算法（GA）；3) 在 PHAF 频率和频率变化率参数估计量的 $1/N^{0.9}$ 和 $1/N^{1.9}$邻域周围进行网格搜索。

我们使用来自 R 软件的“GA”程序包 [21] 来实现遗传算法。遗传算法的初始种群规模固定为 500，精英数量为 20，适应度函数为第一分量误差平方和的相反数。使用轮盘赌选择法确定下一世代个体的父代。交叉概率设为 0.9，变异概率设为 0.1。随后运行遗传算法 100 个世代。

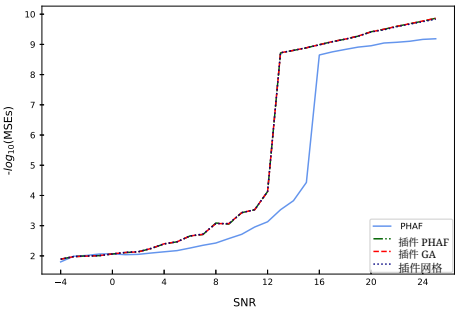
完成这一步后，我们只需通过一维优化问题求出剩余分量频率参数的序贯插件估计量，这很容易实现。我们比较了序贯

| 样本量 | 101 | 121 | 141 | 161 | 181 | 201 | 221 | 241 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ICPF | 16.07 | 31.72 | 53.46 | 88.25 | 118.47 | 181.58 | 228.66 | 299.67 |
| 插件 | 7.36 | 13.43 | 20.7 | 30.18 | 36.92 | 47.91 | 60.62 | 74.46 |

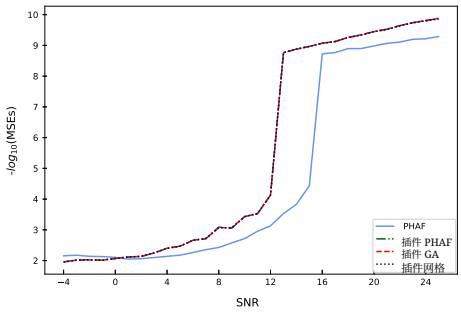
表 I: 序贯插件估计量与 *ICPF* 关于时间（秒）的计算复杂度比较。




（a） $\alpha_1^0$ 的估计量。

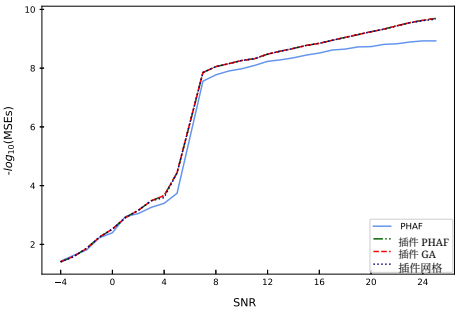



(a) $\alpha_3^0$的估计量。




（b） $\alpha_2^0$ 的估计量。

图 5: *PHAF*估计量、以 *PHAF* 为初始猜测值获得的序贯插件估计量（插件 *PHAF*）、以 *GA* 为初始猜测值获得的序贯插件估计量（插件 *GA*）、通过网格搜索获取初始猜测值而获得的序贯插件估计量（插件网格），以及采用 *PHAF* 实现的遗传算法（*GA PHAF*）的均方误差（以 $-$对数$_{10}$ 刻度表示）随信噪比的变化，样本量固定为 $N = 500$。




(b) $\alpha_4^0$的估计量。

图 6: *PHAF*估计量、以 *PHAF* 为初始猜测值获得的序贯插件估计量（插件 *PHAF*）、以 *GA* 为初始猜测值获得的序贯插件估计量（插件 *GA*），以及通过网格搜索获取初始猜测值而获得的序贯插件估计量（插件网格）的均方误差（以 $-$对数$_{10}$ 刻度表示）随信噪比的变化，样本量固定为 $N = 500$。

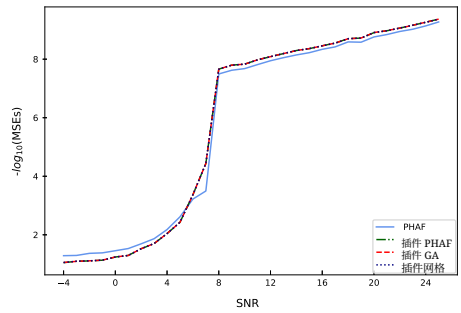
插件估计量（采用上述实现方法）与 PHAF 估计量在 30 个不同信噪比水平下的均方误差。均方误差基于 1000 次重复试验计算。样本量为 $N = 500$，非线性参数与式 (10) 中所述相同。在我们的实验中，遗传算法平均耗时 56.6 秒，网格搜索平均耗时 17.8 秒，均用于计算初始猜测值；上述时间基于 30,000 次重复试验。由图 5、6 和 7 可轻易观察到：

- 即使信噪比较低（-3 dB），第一分量参数的序贯插件估计量也表现出色；
- 其余分量参数的序贯插件估计量在约 12 dB 时表现更佳；
- 寻找插件估计量初始猜测值的不同实现步骤取得了相似的性能。

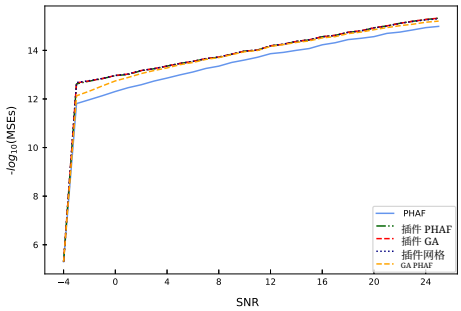
对于数据分析，我们建议直接使用 PHAF 作为初始猜测值，因为在所提出的三种方法中，它耗时最少，同时数值性能也与另外两种方法相当。

### *E.* 雷达数据分析

我们考虑一组来自 [16]（第4章）的雷达数据仿真，其中放置了110个点散射体，以再现一架虚构飞机的轮廓。采集了64个不同频率和64个不同观测角度下的后向散射电场。我们进一步在雷达数据的实部和虚部中加入标准差为5的独立同分布正态误差，使估计问题更加贴近实际且更具挑战性。常规小带宽小角度




(a) $\alpha_5^0$的估计量。




(b) $\beta^0$的估计量。

图7： *PHAF*估计量、以 *PHAF* 作为初始猜测值获得的序贯插件估计量（插件 *PHAF*）、以 *GA* 作为初始猜测值获得的序贯插件估计量（插件 *GA*）、通过网格搜索获取初始猜测值获得的序贯插件估计量（插件网格）以及采用 *PHAF* 实现的 *GA*（*GA PHAF*）在固定样本量 $N = 500$下相对于信噪比的均方误差（ $-$对数$_{10}$ 尺度）。

ISAR成像算法用于获得飞机的ISAR图像，如图8所示，并调整至一定的对比度。受 [18],的启发，我们对每个距离单元格中观测到的后向散射数据拟合了等啁啾率的二十分量啁啾模型。获得各距离单元中这些二十分量啁啾模型的拟合数据后，我们应用常规小带宽小角度ISAR成像算法，得到与污染数据图8（a）具有相同对比度的ISAR图像。

从图8可以看出，采用具有最优收敛速率的估计量，能够令人满意地拟合目标受到照射后获得的后向散射电场数据；而图8(d)中使用PHAF得到的ISAR图像则出现了失真和噪声。组合估计量优于基于插件和PHAF的估计量。请注意，这些图像的对比度相同。我们提出的估计量还可以与合适的对比度调整算法进一步结合，从而即使在更困难的情况下，也能用于改善ISAR成像。我们提出这些估计量时假设啁啾分量的数量已知，因此，选择二十分量啁啾模型具有主观性；对于这类雷达数据集，贝叶斯信息准则（BIC）或基于最大后验概率（MAP）的方法等现有方法无法估计出合适的分量数量。我们认为，基于贝叶斯后验推断的方法将能有效解决此类问题。因此，有必要另行开展一项全面研究，探讨如何估计这类数据集中的分量数量。

## IV. 结论

我们建立了三种估计量的理论渐近性质，即相同啁啾率的啁啾信号模型参数的最小二乘估计量、序贯组合估计量和序贯插件估计量。我们观察到，在这三种估计量中，序贯插件估计量的计算负担最小，为最小二乘估计量提供了一种计算高效的替代方案。实证结果表明，序贯插件估计量对啁啾率参数具有稳定的性能。我们进一步观察到，啁啾率参数的序贯组合估计量$\beta^0$ 是渐近最优的，其渐近方差与最小二乘估计量的渐近方差相匹配。对雷达信号数据的分析表明，模型（1）可以令人满意地用于分析此类信号，因此，我们提出的估计量有望进一步应用于雷达应用中。可以观察到，使用我们提出的估计量将雷达信号拟合到模型（1）能够取得令人满意的效果，尤其是组合估计量优于基于插件和 PHAF 的估计量。大量数值模拟支持所推导的所提估计量的理论渐近性质。未来的工作可以着眼于估计此类雷达信号数据中存在的啁啾信号分量数量。。

## 致谢

我们感谢副编辑 Hasan Mir 博士的鼓励，也感谢三位匿名审稿人提出的建设性意见。他们的建议显著改善了稿件。

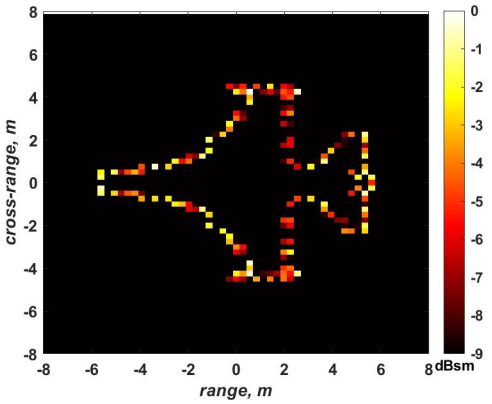
## V. 附录 A

我们简要概述定理1和定理2的证明。

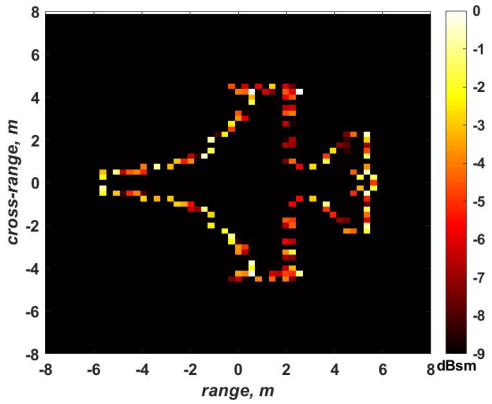
### *A. LSE* 的强一致性

证明： $\widehat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{\theta}^0$ 的证明与 [8] 的定理1的证明思路类似，只需作适当修改。

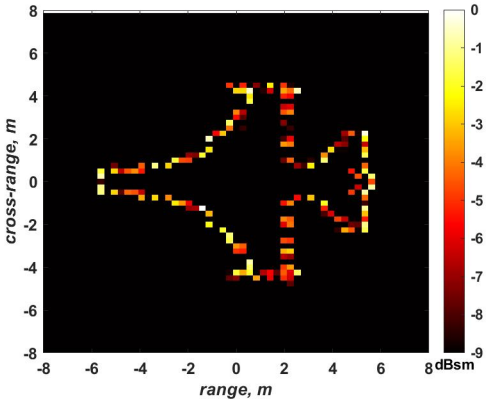
■



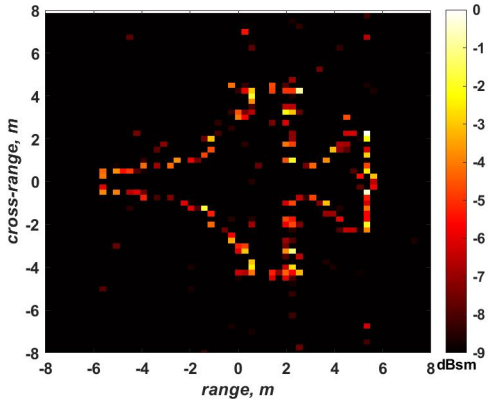

(a) 污染数据的 *ISAR* 图像。




(b) 使用组合估计量拟合数据得到的 *ISAR* 图像。




(c) 使用插件估计量拟合数据得到的 *ISAR* 图像。




(d) 使用 *PHAF* 估计量拟合数据得到的 *ISAR* 图像。

图8： 通过对每个距离单元信号拟合相同啁啾率的二十分量啁啾模型得到的 *ISAR* 图像。

*B.* 序贯组合估计量的强相合性

证明： $\breve{\boldsymbol{\theta}}_k \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{\theta}_k^0$ 的证明与 [10]中的定理3、4和5的证明思路类似。注意， $\beta = (\breve{A}_k^{0^2} + \breve{B}_k^{0^2})\breve{\beta}_k$ 是一个连续函数，因此根据连续映射定理， $\breve{\beta}$ 对 $\beta^0$强相合。

*and* $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_2 = [-M, M] \times [-M, M] \times (0, 2\pi)$. *If* $\liminf \inf_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2 \in S_c} \frac{1}{N}\left(Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2) - Q_2(\boldsymbol{\theta}_2^0)\right) > 0$ *a.s. for any* $c > 0$, *then* $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2$, *the minimizer of* $Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2)$, *is a strongly consistent estimator of* $\boldsymbol{\theta}_2^0$.

证明. 证明思路与 [25] 中引理1的证明相同。 □

*C.* 序贯插件估计量的强一致性

证明： 我们知道，第一分量序贯插件估计量与第一分量序贯组合估计量相同，因此

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1 \xrightarrow{a.s.} (A_1^0, B_1^0, \alpha_1^0, \beta^0)^\top$$

可由前面的论证得出（见第V-B节）。我们简要证明 $\boldsymbol{\theta}_2$ 的一致性，而 $\boldsymbol{\theta}_k$ 的强一致性可通过类似的方法证明。首先考虑以下引理:

**引理1.** 考虑集合 $S_c = \{\boldsymbol{\theta}_2 : \boldsymbol{\theta}_2 \in \boldsymbol{\Theta}_2, |\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^0| \geq c\}$, 其中 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_2 = (A_2, B_2, \alpha_2)^\top$, $\boldsymbol{\theta}_2^0 = (A_2^0, B_2^0, \alpha_2^0)^\top$

现在，我们需要证明 $\liminf \inf_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2 \in S_c} \frac{1}{N}\left(Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2) - Q_2(\boldsymbol{\theta}_2^0)\right) > 0$ $a.s.$。我们将使用 [10] 中关于第一分量序贯插件估计量的结果，即 $\widetilde{\beta} = \beta^0 + o(1/N^2)$。展开差值 $\left(Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2) - Q_2(\boldsymbol{\theta}_2^0)\right)$，并按照 [10], 中定理3的证明思路，可得 $\liminf \inf_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2 \in S_c} \frac{1}{N}\left(Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2) - Q_2(\boldsymbol{\theta}_2^0)\right) > 0$ $a.s.$ 对任意 $c > 0$ 均成立。

## VI. 附录 B

### A. 最小二乘估计量的渐近正态性

证明：我们将沿用 II-B 小节中的记号。利用多元泰勒级数展开，可得：

$$\boldsymbol{Q}'(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - \boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{\theta}^0) = \boldsymbol{Q}''(\hat{\widehat{\boldsymbol{\theta}}})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0),$$

其中，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是位于$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 与 $\boldsymbol{\theta}^0$之间的一个点。

Above yields $\boldsymbol{D}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0) = -[\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}''(\hat{\widehat{\boldsymbol{\theta}}})\boldsymbol{D}]^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{\theta}^0),$

其中 $\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 矩阵在定理2中定义。现在考虑导数向量 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{\theta}^0)$。利用随机过程中心极限定理（见 [5]），我们得到 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{\theta}^0)$的渐近分布为多元正态分布，其均值向量为$\mathbf{0}$，方差协方差矩阵为 $2c\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$，可表示为如下分块矩阵形式： $2c\sigma^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$. 对该分块矩阵求逆即可得到 $\boldsymbol{\Sigma}_1$的元素。这里， $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ 是阶数为 $2p \times 2p$的单位矩阵， $\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}^\top$,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \begin{bmatrix} B_1^0/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_1^0/3 \\ -A_1^0/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_1^0/3 \\ 0 & B_2^0/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2^0/3 \\ 0 & -A_2^0/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_2^0/3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & B_p^0/2 & B_p^0/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -A_p^0/2 & -A_p^0/3 \end{bmatrix}_{(2p\times(p+1))}$$

对于 $k = 1, 2, \ldots\ldots, p$， $k^{th}$行 $\left(A_k^{0^2} + B_k^{0^2}\right)$ 在 $1^{th}$列包含 $\frac{3}{\left(A_k^{0^2} + B_k^{0^2}\right)}$，并在$(p+1)^{th}$列包含 $\frac{4}{\left(A_k^{0^2} + B_k^{0^2}\right)}$。 $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$的 $(p+1) \times (p+1)^{th}$元素为$\sum_{k=1}^{p} \frac{\left(A_k^{0^2} + B_k^{0^2}\right)}{5}$。$(p+1)^{th}$行的其余元素可利用对称性得到。 $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ 的其余元素均为0。利用 $\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$的表达式，我们可以轻松计算矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_1$的每一项。

可见，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{Q}''(\xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\Sigma}_1$，其中$2c\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$是 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{\theta}^0)$的方差-协方差矩阵。经过简单计算，可得以下结果：

$$AsymVar\Big(N^{-5/2}(\widehat{\beta} - \beta^0)\Big) = \frac{360c\sigma^2}{\sum_{k=1}^{p}\left(A_k^{0^2} + B_k^{0^2}\right)}, \quad (11)$$

$$AsymVar\Big(N^{-3/2}(\widehat{\alpha}_k - \alpha_k^0)\Big) = \frac{360c\sigma^2}{\sum_{k=1}^{p}\left(A_k^{0^2} + B_k^{0^2}\right)} + \frac{24c\sigma^2}{\left(A_k^{0^2} + B_k^{0^2}\right)}. \quad (12)$$

■

### B. 序贯组合估计量的渐近正态性：

证明：我们将沿用第 II-C 小节中的记号。若定义 $\boldsymbol{\theta}_1 = (A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1)^\top$，则对于以下平方和，

$$Q_1(\boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{n=1}^{N}\big(y(n) - A_1\cos(\alpha_1 n + \beta_1 n^2) - B_1\sin(\alpha_1 n + \beta_1 n^2)\big)^2.$$

利用多元泰勒级数展开，可得：

$$\boldsymbol{Q}_1'(\breve{\boldsymbol{\theta}}_1) - \boldsymbol{Q}_1'(\boldsymbol{\theta}_1^0) = \breve{\boldsymbol{Q}}_1''(\breve{\breve{\boldsymbol{\theta}}}_1)(\breve{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^0),$$

其中，$\breve{\boldsymbol{\theta}}_1$ 是位于 $\breve{\boldsymbol{\theta}}_1$ 与 $\boldsymbol{\theta}_1^0$ 之间的一个点。对于 $\boldsymbol{D}_1^{-1} = diag(N^{1/2}, N^{1/2}, N^{3/2}, N^{5/2})$，可得：

$$\boldsymbol{D}_1^{-1}(\breve{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^0) = -[\boldsymbol{D}_1\breve{\boldsymbol{Q}}_1''(\breve{\breve{\boldsymbol{\theta}}}_1)\boldsymbol{D}_1]^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{Q}_1'(\boldsymbol{\theta}_1^0),$$

其中，$\boldsymbol{Q}_1'(\boldsymbol{\theta}_1) = \mathbf{0}$. 我们首先计算导数向量 $\boldsymbol{Q}_1'(\boldsymbol{\theta}_1^0)$:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial A_1'}\right|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_1^0} &= -2\sum_{n=1}^{N}\big(y(n) - A_1^0\cos(\alpha_1^0 n + \beta^0 n^2) \\
&\quad - B_1^0\sin(\alpha_1^0 n + \beta^0 n^2)\big)\cos(\alpha_1^0 n + \beta^0 n^2) \\
&= -2\sum_{n=1}^{N}\big(X(n) + A_2^0\cos(\alpha_2^0 n + \beta^0 n^2) \\
&\quad + B_2^0\sin(\alpha_2^0 n + \beta^0 n^2)\big)\cos(\alpha_1^0 n + \beta^0 n^2) \\
&= -2\sum_{n=1}^{N}\Big(X(n)\cos(\alpha_1^0 n + \beta^0 n^2)\Big) + o(\sqrt{N}).
\end{aligned}$$

利用文中提到的猜想以及 [10] 中的引理 2，可得上述最后一个等式。其他导数项的推导类似。由此可证明，第一分量估计量具有与单分量啁啾模型参数的最小二乘估计量相同的渐近性质。若考虑第二分量估计量 $\breve{\boldsymbol{\theta}}_2 = (\breve{A}_2, \breve{B}_2, \breve{\alpha}_2, \breve{\beta}_2)^\top$，并定义

$$\breve{y}_1(n) = y(n) - \breve{A}_1\cos(\breve{\alpha}_1 n + \breve{\beta}_1 n^2) - \breve{B}_1\sin(\breve{\alpha}_1 n + \breve{\beta}_1 n^2), \text{ and}$$

$$Q_2(\boldsymbol{\theta}_2) = \sum_{n=1}^{N}\big(\breve{y}_1(n) - A_2\cos(\alpha_2 n + \beta_2 n^2) - B_2\sin(\alpha_2 n + \beta_2 n^2)\big)^2.$$

$Q_2(\boldsymbol{\theta}_2)$ 在 $\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_2^0$ 处的导数向量包含以下元素：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial Q_2(\boldsymbol{\theta}_2)}{\partial A_2}\right|_{\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}_2^0} &= -2\sum_{n=1}^{N}\Big(X(n)\cos(\alpha_2^0 n + \beta^0 n^2)\Big) + o(\sqrt{N}), \\
\left.\frac{\partial Q_2(\boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \alpha_2}\right|_{\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}_2^0} &= -2\sum_{n=1}^{N}\Big(X(n)\big(A_2^0 n\sin(\alpha_2^0 n + \beta^0 n^2) \\
&\quad - B_2^0 n\cos(\alpha_2^0 n + \beta^0 n^2)\big)\Big) + o(N\sqrt{N}),
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial Q_2(\boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \beta}\right|_{\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}_2^0} = -2\sum_{n=1}^{N}\Big(X(n)\big(A_2^0 n^2\sin(\alpha_2^0 n+\beta^0 n^2) - B_2^0 n^2\cos(\alpha_2^0 n+\beta^0 n^2)\big)\Big)+o(N\sqrt{N}).$$

按照第一分量证明的相同思路，我们得到，对于 $k \geq 1$，$\boldsymbol{\theta}_k$ 渐近服从正态分布，其方差协方差矩阵为

$$\frac{2c\sigma^2}{A_k^{0^2}+B_k^{0^2}}\begin{bmatrix} A_k^{0^2}+9B_k^{0^2} & -8A_k^0B_k^0 & -36B_k^0 & 30B_k^0 \\ -8A_k^0B_k^0 & 9A_k^{0^2}+B_k^{0^2} & 36A_k^0 & -30A_k^0 \\ -36B_k^0 & 36A_k^0 & 192 & -180 \\ 30B_k^0 & -30A_k^0 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

因此，$\alpha_k^0$ 的序贯组合估计量的渐近方差为：

$$AsymVar\Big(N^{-3/2}(\breve{\alpha}_k-\alpha_k^0)\Big)=\frac{384c\sigma^2}{\Big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\Big)}. \quad (13)$$

注意，不同分量的序贯组合估计量渐近独立。因此，通过最小化线性组合的方差，可得到 $\beta^0$ 的最终估计量：

$$\breve{\beta}=\sum_{k=1}^{p} l_k\breve{\beta}_k, \qquad l_k\geq 0, \sum_{k=1}^{p} l_k=1$$

解上述方程可得 $l_k=(A_k^{0^2}+B_k^{0^2})/\sum_{k=1}^{p}(A_k^{0^2}+B_k^{0^2})$。

由于 $l_k$ 是振幅参数的函数，我们可以使用其一致估计量。经过简单计算，可以证明 $\beta$ 的渐近方差与最小二乘估计量的渐近方差相同。

■

*C.* 序贯插件估计量的渐近正态性

证明：注意，第一分量参数的序贯插件估计量与序贯组合估计量相同。因此，我们有 $\boldsymbol{D}_1^{-1}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1-\bar{\boldsymbol{\theta}}_1^0\Big)$ 依分布收敛于均值为$\mathbf{0}$、方差协方差矩阵为

$$\frac{2c\sigma^2}{A_1^{0^2}+B_1^{0^2}}\begin{bmatrix} A_1^{0^2}+9B_1^{0^2} & -8A_1^0B_1^0 & -36B_1^0 & 30B_1^0 \\ -8A_1^0B_1^0 & 9A_1^{0^2}+B_1^{0^2} & 36A_1^0 & -30A_1^0 \\ -36B_1^0 & 36A_1^0 & 192 & -180 \\ 30B_1^0 & -30A_1^0 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{D}_1^{-1}=diag(N^{1/2},\ N^{1/2},\ N^{3/2},\ N^{5/2})$。现在，对于第二分量估计量 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2=(\widetilde{A}_2,\ \widetilde{B}_2,\ \widetilde{\alpha}_2)^\top$（对应 $\boldsymbol{\theta}_2^0=(A_2^0,\ B_2^0,\ \alpha_2^0)^\top$），我们将数据更新为：

$\widetilde{y_1}(n)=y(n)-\widetilde{A}_1\cos(\widetilde{\alpha}_1 n+\widetilde{\beta}n^2)-\widetilde{B}_1\sin(\widetilde{\alpha}_1 n+\widetilde{\beta}n^2)$并定义以下平方和：

$$Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2)=\sum_{n=1}^{N}\big(\widetilde{y_1}(n)-A_2\cos(\alpha_2 n+\widetilde{\beta}n^2) - B_2\sin(\alpha_2 n+\widetilde{\beta}n^2)\big)^2.$$

现在，我们按以下步骤计算导数向量 $\boldsymbol{Q}_2'(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2^0)$ 的各个元素：

$$\left.\frac{\partial Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2)}{\partial A_2}\right|_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2=\bar{\boldsymbol{\theta}}_2^0} = -2\sum_{n=1}^{N}\Big(X(n)\cos(\alpha_2^0 n+\beta^0 n^2)\Big) + B_2^0 N^3(\widetilde{\beta}-\beta^0)/3+o(\sqrt{N}).$$

类似地，可以证明

$$\left.\frac{\partial Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2)}{\partial B_2}\right|_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2=\bar{\boldsymbol{\theta}}_2^0} = -2\sum_{n=1}^{N}\Big(X(n)\sin(\alpha_2^0 n+\beta^0 n^2)\Big) - A_2^0 N^3(\widetilde{\beta}-\beta^0)/3+o(\sqrt{N}),$$

$$\left.\frac{\partial Q_2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2)}{\partial \alpha_2}\right|_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2=\bar{\boldsymbol{\theta}}_2^0} = 2\sum_{n=1}^{N}\Big(nX(n)\Big(A_2^0\sin(\alpha_2^0 n+\beta^0 n^2) - B_2^0\cos(\alpha_2^0 n+\beta^0 n^2)\Big)\Big) + \Big(A_2^{0^2}+B_2^{0^2}\Big)N^4(\widetilde{\beta}-\beta^0)/4+o(N\sqrt{N}).$$

$\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Q}_2''(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2^0)\boldsymbol{D}_2 \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 & B_2^0/2 \\ 0 & 1 & -A_2^0/2 \\ B_2^0/2 & -A_2^0/2 & (A_2^{0^2}+B_2^{0^2})/3 \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_2$, where $\boldsymbol{D}_2^{-1} = diag(N^{1/2}, N^{1/2}, N^{3/2})$, and $\Big[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Q}_2''(\bar{\boldsymbol{\theta}}_2^0)\boldsymbol{D}_2\Big]^{-1} \xrightarrow{n\to\infty}$

$$\frac{1}{A_2^{0^2}+B_2^{0^2}}\begin{bmatrix} A_2^{0^2}+4B_2^{0^2} & -3A_2^0B_2^0 & -6B_2^0 \\ -3A_2^0B_2^0 & 4A_2^{0^2}+B_2^{0^2} & 6A_2^0 \\ -6B_2^0 & 6A_2^0 & 12 \end{bmatrix}.$$

任意 $k^{th}$ 分量在$k=3$、4、.....、$p$下的导数向量性质也可类似地得到。关于渐近方差和协方差的一些重要观察结果见补充材料（第 1、2 和 3 页）。汇总这些方差和协方差，我们将$2c\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_3^k$ 记为$\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_k'(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)$的渐近方差协方差矩阵，则$\sim\boldsymbol{\theta}_k$ 的渐近方差协方差矩阵为：

$$2c\sigma^2\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_k^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_3^k\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_k^{-1},$$

其中 $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Q}_k''(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)\boldsymbol{D}_2=\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_k$。经过一些直接计算，我们得到

$$AsymVar(\widetilde{\alpha}_k)=\frac{24c\sigma^2}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)}+\frac{360c\sigma^2}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)}, \quad (14)$$

$$AsymVar(\widetilde{\beta})=\frac{360c\sigma^2}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)}, \quad (15)$$

$$AsymVar(\widetilde{A}_k)=\frac{2c\sigma^2}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)}\Bigg[\big(A_k^{0^2}+4B_k^{0^2}\big)+\frac{5B_k^{0^2}\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)}\Bigg], \quad (16)$$

$$AsymVar(\widetilde{B}_k) = \frac{2c\sigma^2}{\left(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\right)}\Bigg[\left(4A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\right) + \frac{5A_k^{0^2}\left(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\right)}{\left(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\right)}\Bigg]. \quad (17)$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $2c\sigma^2\mathbf{\Sigma}_{1k}$ $\boldsymbol{\theta}_1$ 与 $\boldsymbol{\theta}_k$之间的渐近协方差矩阵为

$$\frac{2c\sigma^2}{\left(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\right)}\begin{bmatrix} 5B_1^0B_k^0 & -5B_1^0A_k^0 & -30B_1^0 \\ -5A_1^0B_k^0 & 5A_1^0A_k^0 & 30A_1^0 \\ -30B_k^0 & 30A_k^0 & 180 \\ 30B_k^0 & -30A_k^0 & -180 \end{bmatrix}.$$

$k^{th}$ 与 $j^{th}$ 分量估计量之间的渐近协方差可利用补充材料（第 3 页）中给出的结果得到， 。

■

为使研究更加完整，补充材料（第 3 页）中还对 $k \geq 2$ 下 $\alpha_k^0$、$A_k^0$ 和 $B_k^0$的序贯插件估计量与序贯组合估计量的渐近方差进行了简要比较。

参考文献


[1] Aifang, L., Xiaohua, Z., Jinhui, L., & Zhong, L. (2003). 使用去斜法对快速移动目标进行ISAR距离像补偿。载于IEEE神经网络与信号处理国际会议，2003年12月。2003年会议论文集（第2卷，第1619-1623页）。[2] Barbarossa, S., Scaglione, A., & Giannakis, G. B. (1998). 用于多分量多项式相位信号建模的乘积高阶模糊函数。《IEEE信号处理汇刊》，46(3)，691-708。[3] Barbarossa, S. (1995). 通过组合维格纳–霍夫变换分析多分量线性调频信号。《IEEE信号处理汇刊》，43(6)，1511-1515。[4] DjuriC, P. M. (1996). 白高斯噪声中正弦信号的模型选择准则。《IEEE信号处理汇刊》，44(7)，1744-1751。[5] Fuller, W. A. (2009). 统计时间序列导论。John Wiley & Sons。[6] Grover, R., Kundu, D., & Mitra, A. (2018). 二维啁啾模型的近似最小二乘估计量及其渐近性质。《多元分析杂志》，168，211-220。[7] Grover, R., Kundu, D., & Mitra, A. (2021). 一种估计二维啁啾信号模型参数的高效方法。《多维系统与信号处理》，32(1)，49-75。[8] Kundu, D., & Nandi, S. (2008). 平稳噪声下啁啾信号的参数估计。Statistica Sinica，187-201。[9] Liu, A., Zhu, X., & Lin, J. (2005). 分数阶傅里叶变换在快速移动目标ISAR距离像补偿中的应用。载于IEEE/SP第13届统计信号处理研讨会，2005年7月（第950-955页）。[10] Lahiri, A., Kundu, D., & Mitra, A. (2015). 多啁啾信号的参数估计。《多元分析杂志》，139，189-206。[11] Ma, N., & Goh, J. T. (2004). 宽带啁啾信号的到达方向估计。载于IEEE声学、语音与信号处理国际会议，2004年5月（第2卷，第ii-261页）。[12] Ma, N., & Goh, J. T. (2006). 用于估计宽带啁啾信号到达方向的基于模糊函数的技术。《IEEE信号处理汇刊》，54(5)，1826-1839。[13] Nandi, S., & Kundu, D. (2020). 统计信号处理。Springer Singapore。[14] Nandi, S., Grover, R., & Kundu, D. (2021). 加性α稳定误差下多啁啾信号的参数估计。《信号处理》，189，108232。

[15] Nelder, J. A., & Mead, R. (1965). 一种用于函数最小化的单纯形法。《计算机杂志》，7(4)，308-313。[16] Ozdemir, C. (2012). 使用MATLAB算法进行逆合成孔径雷达成像（第210卷）。John Wiley & Sons。[17] Prasad, A., Kundu, D., & Mitra, A. (2008). 正弦模型参数之和的序贯估计。《统计规划与推断杂志》，138(5)，1297-1313。[18] Rao, W., Li, G., Wang, X., & Xia, X. G. (2014). 用于旋转目标ISAR成像的参数化稀疏表示方法。《IEEE航空航天与电子系统汇刊》，50(2)，910-919。[19] Richards, F. S. (1961). 一种最大似然估计方法。《英国皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》，23(2)，469-475。[20] Ruan, H., Wu, Y. H., & Ye, W. (2013). 一种用于逆合成孔径激光雷达的距离像运动补偿方法。载于IET国际雷达会议，2013年4月（第1-5页）。[21] Scrucca, L. (2013). GA：R语言中的遗传算法程序包。《统计软件杂志》，53，1-37。[22] Tian, B., Chen, Z., Xu, S., & Liu, Y. (2013). 基于积分立方相位函数的高速目标ISAR成像补偿。载于MIPPR：多光谱图像采集、处理与分析，2013年10月（第8917卷，第89170B页）。国际光学与光子学学会。[23] Wang, P., & Yang, J. (2006). 使用乘积立方相位函数分析多分量啁啾信号。《数字信号处理》，16(6)，654-669。[24] Wang, P., Li, H., & Himed, B. (2008). 使用积分立方相位函数估计线性调频信号的参数。载于IEEE第42届阿西洛马会议：信号、系统与计算机，2008年10月（第487-491页）。[25] Wu, C. F. (1981). 非线性最小二乘估计的渐近理论。《统计年刊》，9(3)，501-513。[26] Wu, Y., Ruan, H., & Yu, D. (2014). 面向机动目标的逆合成孔径激光雷达成像算法。载于IEEE第七届图像与信号处理国际会议，2014年10月（第569-574页）。[27] Xu, F., Bao, Q., Chen, Z., Pan, S., & Lin, C. (2018). 基于短时傅里叶变换+ 霍夫变换和分数阶傅里叶变换的多分量线性调频信号参数估计。载于第二届IEEE高级信息管理、通信、电子与自动化控制会议（IMCEC），2018年5月（第839-842页）。[28] Xue, J., Han, X., & Zhang, Q. (2017). 一种基于分数阶傅里叶变换的ISAR运动补偿参数估计对称累积互相关法。载于IEEE第九届无线通信与信号处理国际会议（WCSP），2017年10月（第1-6页）。[29] Yang, P., Liu, Z., & Jiang, W. L. (2015). 基于离散啁啾傅里叶变换和总体蒙特卡洛的多分量啁啾信号参数估计。《信号、图像与视频处理》，9(5)，1137-1149。



**Abhinek Shukla** 于2013年至2018年期间在贝拿勒斯印度教大学获得统计学理学学士（荣誉）学位和统计学理学硕士学位。他加入印度坎普尔的印度理工学院坎普尔分校，成为研究学者，在Amit Mitra教授和Debasis Kundu教授的指导下开展研究。他目前的研究兴趣包括参数估计和多项式相位信号模型检测。他还致力于改进基于平均随机梯度下降估计量的推断方法。

**Debasis Kundu** 于1989年在C. R. Rao教授指导下获得美国宾夕法尼亚州宾夕法尼亚州立大学博士学位。博士毕业后，他加入美国德克萨斯州达拉斯的达拉斯德克萨斯大学，担任助理教授，之后于1990年加入印度坎普尔的印度理工学院坎普尔分校。2011年至2014年，他担任印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系主任；自2008年起担任讲席教授，自2019年起担任该校教务长。他在多种同行评审期刊上发表了300多篇研究论文。他合著了两部研究专著，主题分别为统计信号处理和步进应力模型，并共同编辑了一本统计计算著作。他的研究涵盖统计学的多个领域，主要兴趣包括分布理论、寿命数据分析、删失、统计信号处理和统计计算。Kundu教授曾获加拿大数学学会颁发的Chandana奖、印度概率与统计学会颁发的杰出统计学家奖，以及印度运筹学会颁发的P. C. Mahalanobis奖。他现任《印度概率与统计学会期刊》主编，并担任《统计通讯：理论与方法》、《统计通讯：模拟与计算》和《Sankhya》B辑的编委。他曾担任《IEEE可靠性汇刊》、《统计理论与实践期刊》和《分布理论期刊》的编委。他是印度国家科学院院士，也是英国皇家统计学会会士。

**Amit Mitra** 在加尔各答大学获得统计学理学学士学位，随后在印度理工学院坎普尔分校获得统计学理学硕士和博士学位。他现任印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系统计学教授。其研究兴趣包括统计信号处理、金融与经济时间序列数据挖掘，以及非线性时间序列模型的参数估计。

**Rhythm Grover** 获得了德里大学的理学学士学位，并在印度理工学院坎普尔分校获得理学硕士和博士学位。她曾在印度统计研究所理论统计与数学单位担任博士后研究人员。2021年，她加入印度理工学院古瓦哈提分校 Mehta家族数据科学与人工智能学院，任助理教授。她的研究兴趣涵盖统计学与信号处理的交叉领域，尤其关注为信号处理模型的参数估计开发高效算法、推导经典参数估计方法的统计性质，以及在存在离群值的情况下稳健估计模型参数。

arXiv:2302.07098v1 [stat.ME] 13 Feb 2023

# 关于相同啁啾率的多分量啁啾模型参数估计

Abhinek Shukla、Debasis Kundu、Amit Mitra和Rhythm Grover

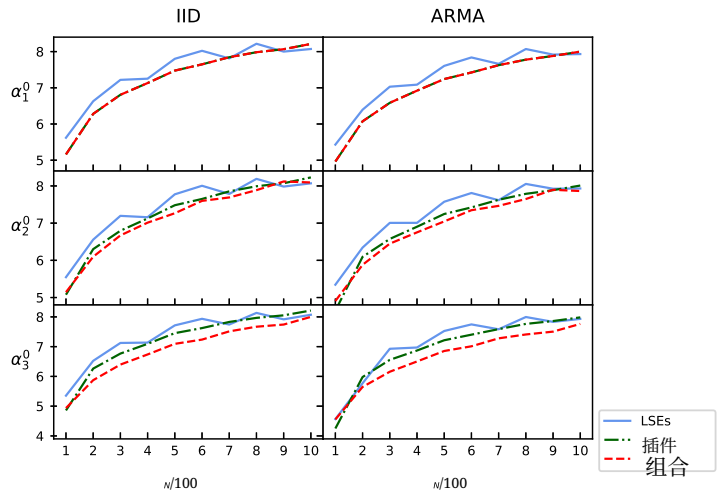
I. 研究模型：

本文考虑如下具有相同啁啾率参数的实值多分量啁啾模型：

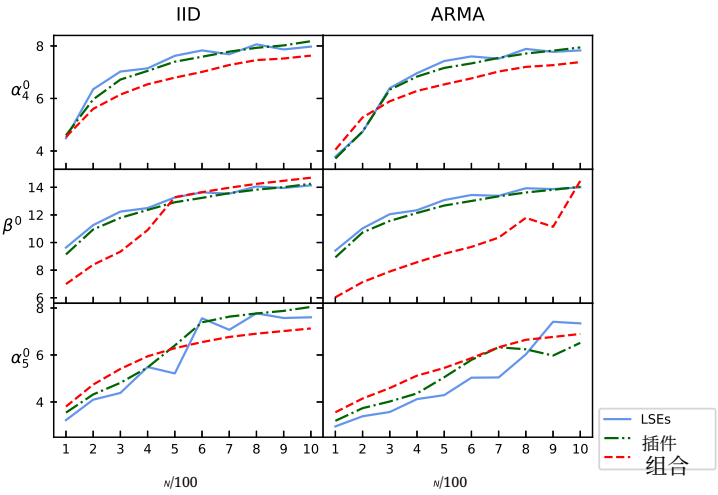
$$y(n) = \sum_{k=1}^{p} \left( A_k^0 \cos(\alpha_k^0 n + \beta^0 n^2) + B_k^0 \sin(\alpha_k^0 n + \beta^0 n^2) \right) + X(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}^0 = (\underbrace{A_1^0, B_1^0, A_2^0, B_2^0, \ldots, A_p^0, B_p^0}_{\boldsymbol{A}^\top}, \underbrace{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_p^0}_{\boldsymbol{\xi}^\top}, \beta^0)^\top$ is 参数向量，$A_k^0$，$B_k^0$ 为振幅参数，$\alpha_k^0$ 为频率参数，$\beta^0$ 为 $k^{th}$ 分量的啁啾率参数，$k = 1, 2, 3, \ldots, p$，且 $X(n)$为噪声项。

II. 图




（a） $\alpha_1^0$、 $\alpha_2^0$ 和 $\alpha_3^0$ 的估计量。




(b) $\alpha_4^0$、 $\beta^0$ 和$\alpha_5^0$的估计量。

图1： </style}最小二乘估计量、序贯插件估计量（插件）和序贯组合估计量（组合）的均方误差（在对数10 尺度上）随样本量增加的变化，针对情形$\sigma = 3$。

III. 一些进一步的结果

经过一些繁琐的计算，我们得到关于 $k \geq 2$ 的以下结果：

1)

$$AsymVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial A_k}\right) = 2c\sigma^2\left(1 + \frac{20B_k^{0^2}}{A_1^{0^2} + B_1^{0^2}}\right),$$

2)

$$AsymVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial B_k}\right) = 2c\sigma^2\left(1 + \frac{20A_k^{0^2}}{A_1^{0^2} + B_1^{0^2}}\right),$$

3)

$$AsymVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_k}\right) = 2c\sigma^2\left(\frac{A_k^{0^2} + B_k^{0^2}}{3} + \frac{45(A_k^{0^2} + B_k^{0^2})^2}{4(A_1^{0^2} + B_1^{0^2})}\right),$$

A. Shukla、D. Kundu 和 A. Mitra 任职于印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系，地址：印度坎普尔 208016。

R. Grover 任职于印度理工学院古瓦哈提分校 Mehta 家族数据科学与人工智能学院，地址：印度阿萨姆邦 781039。

（通讯作者：Abhinek Shukla，电子邮箱：abhushukla@gmail.com）

| SNR | LSEs | 插件法 | 组合 | ICPF |
|---|---|---|---|---|
| -10 | 7.45E-13 | 2.06E-07 | 5.55E-06 | 4.03E-06 |
| -9.5 | 6.56E-13 | 3.11E-09 | 3.82E-06 | 1.38E-06 |
| -9 | 7.45E-13 | 2.06E-07 | 5.55E-06 | 4.03E-06 |
| -8.5 | 4.78E-13 | 1.29E-12 | 1.88E-06 | 1.13E-07 |
| -8 | 5.57E-13 | 1.48E-12 | 2.76E-06 | 5.62E-07 |
| -7.5 | 3.55E-13 | 9.85E-13 | 8.34E-07 | 1.64E-12 |
| -7 | 4.16E-13 | 1.16E-12 | 1.27E-06 | 1.69E-08 |
| -6.5 | 2.76E-13 | 7.65E-13 | 4.01E-07 | 8.23E-13 |
| -6 | 3.16E-13 | 8.77E-13 | 6.24E-07 | 4.89E-10 |
| -5.5 | 2.03E-13 | 6.14E-13 | 1.76E-07 | 6.01E-13 |
| -5 | 2.36E-13 | 6.78E-13 | 2.55E-07 | 6.96E-13 |
| -4.5 | 1.62E-13 | 4.82E-13 | 6.72E-08 | 4.59E-13 |
| -4 | 1.84E-13 | 5.42E-13 | 1.17E-07 | 5.38E-13 |
| -3.5 | 1.30E-13 | 3.91E-13 | 2.65E-08 | 3.70E-13 |
| -3 | 1.42E-13 | 4.27E-13 | 3.90E-08 | 4.10E-13 |
| -2.5 | 1.01E-13 | 2.98E-13 | 8.34E-09 | 2.80E-13 |
| -2 | 1.14E-13 | 3.42E-13 | 1.58E-08 | 3.14E-13 |
| -1.5 | 8.30E-14 | 2.43E-13 | 1.53E-09 | 2.22E-13 |
| -1 | 9.35E-14 | 2.69E-13 | 3.31E-09 | 2.53E-13 |
| -0.5 | 6.47E-14 | 1.91E-13 | 3.33E-10 | 1.72E-13 |
| 0 | 5.74E-14 | 1.68E-13 | 1.45E-10 | 1.52E-13 |
| 0.5 | 5.12E-14 | 1.55E-13 | 1.58E-10 | 1.36E-13 |
| 1 | 4.62E-14 | 1.33E-13 | 2.02E-11 | 1.20E-13 |
| 1.5 | 4.14E-14 | 1.20E-13 | 6.14E-14 | 1.04E-13 |
| 2 | 3.71E-14 | 1.08E-13 | 2.53E-11 | 9.51E-14 |
| 2.5 | 3.32E-14 | 9.51E-14 | 4.41E-14 | 8.36E-14 |
| 3 | 2.94E-14 | 8.64E-14 | 3.81E-14 | 7.51E-14 |
| 3.5 | 2.65E-14 | 7.55E-14 | 3.40E-14 | 6.66E-14 |
| 4 | 2.41E-14 | 6.90E-14 | 3.10E-14 | 6.00E-14 |
| 4.5 | 2.06E-14 | 6.20E-14 | 2.70E-14 | 5.23E-14 |
| 5 | 1.85E-14 | 5.38E-14 | 2.41E-14 | 4.60E-14 |
| 5.5 | 1.65E-14 | 4.86E-14 | 2.11E-14 | 4.17E-14 |
| 6 | 1.53E-14 | 4.31E-14 | 1.97E-14 | 3.78E-14 |
| 6.5 | 1.36E-14 | 3.85E-14 | 1.74E-14 | 3.31E-14 |
| 7 | 1.21E-14 | 3.39E-14 | 1.58E-14 | 3.01E-14 |
| 7.5 | 1.08E-14 | 3.11E-14 | 1.39E-14 | 2.60E-14 |
| 8 | 1.00E-14 | 2.77E-14 | 1.27E-14 | 2.41E-14 |
| 8.5 | 8.75E-15 | 2.45E-14 | 1.12E-14 | 2.17E-14 |
| 9 | 7.97E-15 | 2.20E-14 | 1.03E-14 | 1.96E-14 |
| 9.5 | 7.26E-15 | 2.00E-14 | 9.29E-15 | 1.73E-14 |
| 10 | 6.44E-15 | 1.82E-14 | 8.17E-15 | 1.56E-14 |

表 I: 与 *ICPF* 的均方误差比较。

4)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial A_k}, \frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial B_k}\right) = 2c\sigma^2\left(-\frac{20B_k^0A_k^0}{A_1^{0^2}+B_1^{0^2}}\right),$$

5)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial A_k}, \frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_k}\right) = 2c\sigma^2B_k^0\left(1/2+\frac{15(A_k^{0^2}+B_k^{0^2})}{A_1^{0^2}+B_1^{0^2}}\right),$$

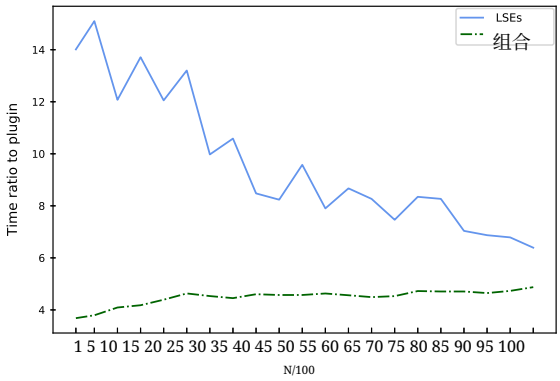



图2： 计算估计量所需的时间与序贯插件估计量所需时间之比。

6)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial B_k}, \frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_k}\right) = -2c\sigma^2 A_k^0\left(1/2 + \frac{15(A_k^{0^2}+B_k^{0^2})}{A_1^{0^2}+B_1^{0^2}}\right).$$

$k^{th}$ 和 $j^{th}$ 分量估计量之间的渐近协方差可通过以下结果得到：， $1 < k < j \leq p$

1)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial A_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{\sqrt{N}\partial A_j}\right) = 2c\sigma^2\big(20B_j^0 B_k^0\big),$$

2)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial A_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{\sqrt{N}\partial B_j}\right) = 2c\sigma^2\big(-20A_j^0 B_k^0\big),$$

3)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial A_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_j}\right) = 2c\sigma^2\left(15B_k^0\big(A_j^{0^2}+B_j^{0^2}\big)\right),$$

4)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial B_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{\sqrt{N}\partial A_j}\right) = 2c\sigma^2\big(-20B_j^0 A_k^0\big),$$

5)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial B_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{\sqrt{N}\partial B_j}\right) = 2c\sigma^2\big(20A_j^0 A_k^0\big),$$

6)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{\sqrt{N}\partial B_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_j}\right) = 2c\sigma^2\left(-15A_k^0\big(A_j^{0^2}+B_j^{0^2}\big)\right),$$

7)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_j}\right) = 2c\sigma^2\left(\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)\big(A_j^{0^2}+B_j^{0^2}\big)\frac{45}{4}\right),$$

8)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{N\sqrt{N}\partial A_j}\right) = 2c\sigma^2\left(15B_j^0\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)\right),$$

9)

$$AsymCoVar\left(\frac{\partial Q_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}_k^0)}{N\sqrt{N}\partial \alpha_k}, \frac{\partial Q_j(\bar{\boldsymbol{\theta}}_j^0)}{N\sqrt{N}\partial B_j}\right) = 2c\sigma^2\left(-15A_j^0\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)\right).$$

$\alpha_k^0$、$A_k^0$ 和 $B_k^0$的序贯插件估计量与序贯组合估计量的渐近方差简要比较（ $k \geq 2$）：

1)

$$AsymVar(\widetilde{\alpha}_k) - AsymVar(\breve{\alpha}_k) = \frac{360c\sigma^2\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}-(A_1^{0^2}+B_1^{0^2})\big)}{(A_1^{0^2}+B_1^{0^2})(A_k^{0^2}+B_k^{0^2})} < 0.$$

2) 由于 $A_k^{0^2}+B_k^{0^2} < A_1^{0^2}+B_1^{0^2} \Longrightarrow 1$

$\cancel{A_1^{0^2}+B_1^{0^2}} < \cancel{A_k^{0^2}+B_k^{0^2}}$， 对于 $A_k^{0^2} \neq B_k^{0^2}$

$$\Delta_1 = \frac{AsymVar(\widetilde{A}_k) - AsymVar(\breve{A}_k)}{2c\sigma^2} = \frac{\big(3A_k^{0^2}-8B_k^{0^2}\big)}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)} + \frac{\big(5A_k^{0^2}\big)}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\big(3A_k^{0^2}-8B_k^{0^2}\big)}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)} + \cancel{\frac{\big(5A_k^{0^2}\big)}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)}} < \Delta_1 < \frac{\big(3A_k^{0^2}-8B_k^{0^2}\big)}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)} + \frac{\big(5A_k^{0^2}\big)}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{8\big(A_k^{0^2}-B_k^{0^2}\big)}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)} < \Delta_1 < \frac{8\big(A_k^{0^2}-B_k^{0^2}\big)}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)}.$$

此处， $\Delta_1 < 0$ 适用于 $A_k^{0^2} < B_k^{0^2}$。

3) Similarly, for $A_k^{0^2} \neq B_k^{0^2}$, we can observe

$$\Delta_2 = \frac{AsymVar(\widetilde{B}_k) - AsymVar(\breve{B}_k)}{2c\sigma^2} = \frac{\big(3B_k^{0^2}-8A_k^{0^2}\big)}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)} + \frac{\big(5B_k^{0^2}\big)}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)} \Longrightarrow \frac{8\big(B_k^{0^2}-A_k^{0^2}\big)}{\big(A_1^{0^2}+B_1^{0^2}\big)} < \Delta_2 < \frac{8\big(B_k^{0^2}-A_k^{0^2}\big)}{\big(A_k^{0^2}+B_k^{0^2}\big)}.$$

Here, $\Delta_2 > 0$ for $A_k^{0^2} < B_k^{0^2}$.