arXiv:2302.07110v1 [math.CO] 14 Feb 2023

H-自由图中最长路径的非空交集

James A. Long Jr.[*1]、Kevin G. Milans[†1]和 Andrea Munaro[‡2]

[1]美国西弗吉尼亚大学数学系[2]意大利帕尔马大学数学、物理与计算机科学系

2023年2月15日

摘要

我们在刻画满足以下性质的图 H 方面取得了进展：每个连通的 H-自由图都有一个大小为 1 的最长路径横截集。具体而言，我们证明，至多有 4 个顶点且满足该性质的图 H 恰好是线性森林。我们还证明，如果连通图 G 的阶相对于其连通度 $\kappa(G)$足够大，且其独立数 $\alpha(G)$满足 $\alpha(G) \leq \kappa(G)+2$，那么每个最大度顶点都构成一个大小为 1 的最长路径横截集。

1 引言

图论中的一个经典结果指出，连通图中的任意两条最长路径至少共享一个顶点。Gallai [11] 曾问，连通图中的所有最长路径是否实际上都至少共享一个顶点。Walther [27], 给出了否定答案，并构造了一个有 25 个顶点的反例。随后，Walther 和 Voss [28] 以及 Zamfirescu [31] 分别独立地构造了一个有 12 个顶点的反例（见图 1）。Brinkmann 和 Van Cleemput （见 [26]）证实，不存在顶点数少于 12 的反例。

图 G 中的 *Gallai* 集（或最长路径横截集）是一个顶点集合 S，使得 G 中的每条最长路径都包含一个属于 S的顶点。 G的*Gallai* 数或最长路径横截数记作 lpt(G)，是 Gallai 集的最小大小；而 *Gallai* 族是一个图族 $\mathcal{G}$，其中每个连通图 $G \in \mathcal{G}$都满足 lpt(G) $= 1$。若顶点 v 属于 G，且 $\{v\}$ 是一个 Gallai 集，则称该顶点为*Gallai* 顶点；含有 Gallai 顶点的图称为*Gallai* 图。

*jalong@mix.wvu.edu
†milans@math.wvu.edu
‡andrea.munaro@unipr.it

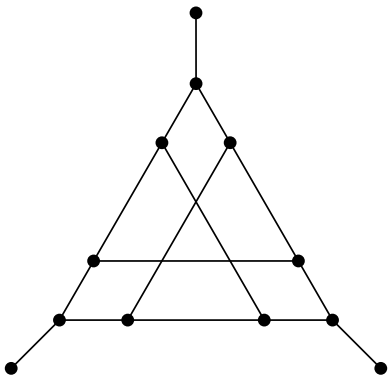

图 1：图 G_0：一个没有 Gallai 顶点的 12顶点图。

上文提到的反例是一些连通图 G ，它们满足 lpt(G) $= 2$。事实上，也存在一些连通图 G ，它们满足 lpt(G) $= 3$[15, 31] ，Walther [27] 和 Zamfirescu [30] 曾提出，连通图的 Gallai 数是否有界。在一篇姊妹论文中 [23] ，我们探讨了这个已有五十年历史的问题。基于 [25], ，我们证明连通图存在次线性最长路径横截集。我们的上界与常数下界 3 之间仍有很大差距。

本文关注 Gallai 问题的另一个自然变体：哪些图类构成 Gallai 族？众所周知，树的一族两两相交的子树具有非空交集；特别地，树构成一个 Gallai 族。人们还发现了其他一些 Gallai 族：分裂图和仙人掌图 [19], 圆弧图[1, 18], 串并联图 [6], 匹配数至多为 3 [5], 的图 [17]对偶弦图 $2K_2$, [13]-自由图 P_4,P_5-稀疏图以及 (P_5,$K_{1,3}$)-自由图 [3], 二部置换图 [4], 满足 H_1 且 H_2 连通的 (H_1, H_2)-自由图，以及每个 2-连通的 (H_1, H_2)-自由图都是哈密顿图的图类（所有此类参数对均已知，且每一对都包含$K_{1,3}$） [12]。

令 Free(H) 表示 H-free 图类。单生成图类具有 Free(H) 的形式，其中 H 为某个图。本文旨在刻画单生成 Gallai 族。在第 3 节中，我们通过证明以下结论取得进展：如果 Free(H) 是一个 Gallai 族，那么 H 是一个线性森林；当 $|V(H)| \leq 4$ 时，这一条件也是充分的。沿着 [13], 的思路，我们实际上证明了一个更一般的结论：如果 H 是一个至多含 4 个顶点的线性森林，且 G 是一个连通的 H-free 图，那么 G 中的所有最大度顶点都是 Gallai。关于结构和图算法性质的单生成类中的二分定理，已有多项研究。例如，针对哈密顿性 [10, 22],、团宽的有界性 [9], 、连通性代价 [2, 16], 以及各种算法问题的多项式时间可解性 [14, 20, 21, 24] 等性质，人们已经得到了相应的二分定理。在第 4 节中，我们证明：如果 G 是一个独立数为 $\alpha(G) \leq 4$ 的连通图（即， G 是 $5P_1$-free），那么 G 是 Gallai。随后我们猜想，当 $\alpha(G) \leq 5$ 时，同样的结论也成立。

Chv´atal 和 Erd˝os 的一个著名结果 [7] 断言，若图 G 满足 $|V(G)| \geq 3$ 且 $\alpha(G) \leq \kappa(G)$，则它有一个哈密顿圈；若 G 满足 $\alpha(G) \leq \kappa(G) + 1$，则它有一条哈密顿路径。由此可知， G 中的每个顶点都是 Gallai 顶点，只要 $\alpha(G) \leq \kappa(G) + 1$。在第5节中，我们证明，若连通图 G 相对于其连通度 $\kappa(G)$ 足够大，且 $\alpha(G) \leq \kappa(G)+2$，则每个最大度顶点都是 Gallai 顶点。此外，对于每个 $k \geq 1$，我们

给出一个 k-连通图 G 的无限族，使得 $\alpha(G) \leq k+3$，但 G 中没有最大度顶点是 Gallai 顶点（见例 20）。我们的结果有如下直接推论：若正则图 G 相对于其连通度足够大，且 $\alpha(G) \leq \kappa(G)+2$，则 G 含有一条哈密顿路径。条件 $\alpha(G) \leq \kappa(G)+2$ 在相差一个加法常数 2 的意义下是最优的（这可由 [8], 中的一个构造推出，见例 22）。

2 预备知识

本文仅考虑有限图。给定一个图 G，我们用$V(G)$表示其顶点集，用 $E(G)$表示其边集。

邻域和度。对于顶点 $v \in V(G)$，其邻域 $N_G(v)$是 G中与 v 相邻的顶点集合。对于顶点集合 $S \subseteq V(G)$， S的邻域记为 $N_G(S)$，定义为 $\bigcup_{v \in S} N_G(v)$。我们还将邻域的概念扩展到子图，定义当 H 是 G的子图时， $N_G(H) = N_G(V(H))$。顶点$v \in V(G)$的度 $d_G(v)$是 G 中与 v 关联的边数。当上下文已明确 G 时，我们可以用 $d(v)$表示 $d_G(v)$。若顶点 $v \in V(G)$ 满足 $d(v) = 3$，则称其为三次的。G 的最大度 $\Delta(G)$为 $\max\{d_G(v) : v \in V\}$。类似地， G 的最小度 $\delta(G)$为 $\min\{d_G(v) : v \in V\}$。

路径和圈。路径是一个非空图 P，具有 $V(P) = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ 和$E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}$。我们也可以按自然顺序 $x_0x_1 \cdots x_k$ 列出其顶点来表示 P。顶点 x_0和 x_k是 P的端或端点；其余顶点是 P的内部顶点。 P的长度是 P中边的数量。我们将n顶点路径记为 P_n。图 G 中的路径若包含 G的所有顶点，则称为哈密顿路径或生成路径。 uv路径是端点分别为 u和 v的路径。若 $P = x_0x_1 \cdots x_k$是路径且 $k \geq 2$，则顶点集为 $V(P)$、边集为 $E(P) \cup x_kx_0$ 的图是一个圈。圈的长度是其边（或顶点）的数量，具有 n 个顶点的圈记为C_n。图 G 中的圈若包含 G的所有顶点，则称为哈密顿圈或生成圈。含有圈的图的围长是其最短圈的长度；不含圈的图的围长为无穷大。图 G 中从顶点 u 到顶点 v 的距离 $\text{dist}_G(u, v)$，是 u 与 v之间最短路径的长度。

图运算。设 G 是一个图，且 $S \subseteq V(G)$。图 $G - S$ 是从 G 中删除 S 中的所有顶点以及所有与 S 中某个顶点相 incident 的边后得到的。由顶点集合 S' 诱导的 G 的子图记为 $G[S']$，它是图 $G - S$，其中 $S = V(G) - S'$。对于 $M \subseteq E(G)$，我们以类似方式定义 $G - M$。简单图 G 和 H 的并记为 $G \cup H$，其顶点集为 $V(G) \cup V(H)$，边集为 $E(G) \cup E(H)$。G 和 H 的不交并记为 $G + H$，即取 G 的一个副本和 H 的一个副本，并使它们的顶点集互不相交后得到的并。k 个 G 的副本的不交并记为 kG。

图类与特殊图。如果一个图不包含与集合 Z 中的图同构的诱导子图，则称其为 Z-自由的，所有 Z-自由图组成的集合记为 $\text{Free}(Z)$。完全图是指任意两个顶点都相邻的图，顶点数为 n 的完全图记为 K_n。三角形是图 K_3。对于$r \geq 2$，如果图 G 的顶点集可以划分为 r 个类，使得每条边的两个端点属于不同的类，则称图 G 为 r部图。如果一个 r 部图中，来自不同部的任意两个顶点都

相邻，则称其为完全图；二部图通常称为二分图。(X,Y)-二分图是二部划分为 $\{X,Y\}$ 的二分图。给定图 G 和 $X,Y \subseteq V(G)$，其诱导(X,Y)-二分图是 G 的二部子图，其顶点集为 $X \cup Y$，且每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中。树是一个不含任何圈作为子图的连通图，度为 1 的顶点称为其叶子。

图参数。如果图的顶点集或边集在满足性质 $\mathcal{P}$ 的所有子集中具有最大规模，则称其关于性质 $\mathcal{P}$ 是极大的。图的独立集是两两不相邻的顶点集，而独立数 $\alpha(G)$是图 G的最大独立集的规模。图的团是两两相邻的顶点集。在 G 中，匹配是一个端点互不相同的边集。若匹配 M中的每个顶点 S 都是边 M的端点，则称匹配 M饱和顶点集 S 。如果对于每个满足 $|S| < k$的 $S \subseteq V(G)$，都有 $|V(G)| > k$ 且 $G - S$ 连通，则称图 G是 k连通的。图 G 的连通度记为 $\kappa(G)$，它是使得 G 为 k连通图的最大 k 。

3 单生成子 Gallai 族

本节将推进对单生成 Gallai 族的分类。我们首先证明，单生成族 Free(H) 为 Gallai 族的一个必要条件是H 是一个至多含 9 个顶点的线性森林，其中线性森林是每个连通分量都是路径的森林。设 G_0 为图1 中的图，且 lpt(G_0) $= 2$ [28, 31]。通过在 G_0 中细分边，或将三度顶点替换为三角形，我们得到关于单生成 Gallai 族的必要条件，并分别构造出围长任意大的新反例，或不含导出爪的新反例。

下文中，若图 H 满足 Free(H) 是一个 Gallai 族，则称其为固定器；也就是说，禁止 H 就能 “ 固定 ”Gallai 问题的答案。

命题 1。若 H 是固定器，则 H 是一个至多有 9 个顶点的线性森林。

证明。设 H 是固定器。根据定义，若 G 是一个满足 lpt(G) > 1 的图，则 H 是 G 的一个诱导子图。

注意， G_0 由彼得森图中任意一个顶点拆分成一个由 R 个顶点组成的集合得到，这些顶点的度均为 1（见图1）。显然， G_0 是无三角形的，且 G_0 中的每条路径都至少避开 R中的一个顶点。由于彼得森图没有哈密顿圈， [29], 中的每条路径 G_0 至少漏掉 2 个顶点。此外，由于彼得森图是顶点传递的， [29] 且含有一个 9-圈，因此对每个顶点 $x \in V(G_0) - R$， G_0 中存在一条两端都在 R 的最长路径，它仅漏掉 x 以及 R中的另一个顶点。

令 M 为与 R 中顶点关联的 3 条边的集合。令 G_1 为由 G_0 得到的图：将 M 中的每条边替换为长度为 q 的路径，并将 M 之外的每条边替换为长度为 p 的路径，其中 $p > |V($ $H)|$。若 $q > |E(G_0)| \cdot p$，则 G_1 中的最长路径与 G_0 中两端均位于 R 的最长路径之间存在双射对应。回想一下，对于每个 $x \in V(G_0) - R$， G_0 中都存在一条两端均位于 R 且不包含 x 的最长路径，因此 lpt(G_1) > 1。由于 G_1 的围长大于 $|V(H)|$ ，且 H 是 G_1 的诱导子图，可知 H 无环。

令 S 为 G_1中的三度顶点集合。我们通过将 G_1 中的每个顶点$w \in S$ 替换为一个三角形 T_w ，得到 G_2 ； 其中， G_1 中与 w 相 incident 的三条边分别与

G_2中 T_w 的不同顶点相 incident。显然， G_2 是无爪的。令 P 为 G_2中的一条最长路径。同样，只要 q 足够大， P 的两个端点就在 R中。当 P 经过某个T_w中的顶点时，它在离开之前必须经过 T_w 中的所有顶点。因此， G_2 中的最长路径与 G_1 中的最长路径存在双射对应，且 $\mathsf{lpt}(G_2) > 1$。

由于 H 是 G_1 和 G_2 的诱导子图，因此 H 是无三角形且无爪的，从而 $\Delta(H) \leq 2$。回顾 H 是无环的，我们得到 H 是线性森林。但 H 也是 G_0 的诱导子图；为了将诱导线性森林作为 G_0 的子图，需要从 G_0 的每个三度顶点的闭邻域中删除一个顶点。令 R' 为 R 中顶点的邻点集合。由于 R' 中的顶点均为三次的，且它们的闭邻域互不相交，因此每个诱导线性森林至多有 $|V(G_0)| - |R'|$ 个顶点，从而 $|V(H)| \leq |V(G_0)| - |R'| = 12 - 3 = 9$。

□

注 2。 Gao 和 Shan [12, 问题 6]曾问道，连通无爪图中的所有最长路径是否具有非空交集。命题 1 对此问题给出了否定答案。

对于 $|V(H)| \leq 4$，我们证明 H 是固定器，当且仅当 H 是线性森林。必要性由命题 1 得出。为证明充分性，我们证明每个有 4 个顶点的线性森林都是固定器。阶为 4 的线性森林为 P_4、 $P_3 + P_1$、 $2P_2$、 $P_2 + 2P_1$ 和 $4P_1$ （见图2）。Cerioli 和 Lima [3] 证明， P_4-稀疏图（ P_4-自由图的一个超类）构成 Gallai 族；而 Golan 和 Shan [13] 证明， $2P_2$-自由图构成 Gallai 族。换言之， P_4和 $2P_2$是固定器。下文将讨论其余情况： P_3+P_1、P_2+2P_1和 $4P_1$。

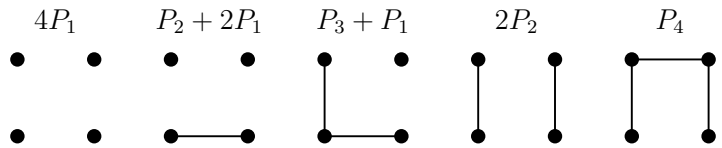

图2：4 个顶点上的线性森林。这些恰好是满足 Free(H) 是 Gallai 族的 4 个顶点图 H 。

我们先介绍一些基本但有用的观察。给定顶点 x， $y \in V(G)$， xy-纤维 是所有 xy-路径中最长的路径。同理， x-纤维 是所有以 x 为端点的路径中最长的路径，而纤维 是 G中的最长路径。注意，每个纤维都是某个顶点 x对应的 x-纤维，而每个 x-纤维也都是某个顶点 y对应的 xy-纤维。

下面两个基本引理会被反复使用，有时是隐式地使用。类似的思想是 [7] 中各项结果的关键。第一个基本引理讨论纤维的单个邻点。

引理3。 设 P是图 G中的一条 xy-路径，其中 $P = v_0 \cdots v_\ell$满足 $x = v_0$和 $y = v_\ell$。设 H是 $G - V(P)$的一个连通分量，它有一个邻点 v_i位于 P上。若 P是一个 x-纤维，则 $i < \ell$。此外，若 $0 < i$，则 $v_\ell v_{i-1} \notin E(G)$。同理，若 P是一个 y-纤维，则 $0 < i$；若 $i < \ell$，则 $v_0 v_{i+1} \notin E(G)$。

证明。 设 P是一个 x-纤维。 H 中没有顶点与 y相邻，否则 P会延伸为更长的x-纤维，从而产生矛盾。因此， $i < \ell$。此外，如果 $i > 0$ 和 $v_{i-1}v_\ell \in E$（G），那么从 v_0 到 v_{i-1}沿着P 前进，经过 $v_{i-1}v_\ell$，再从 v_ℓ 到 v_i沿着 P 反向前进，并前往 H，即可得到更长的 x-纤维。 P 是 y-纤维的情形是对称的。

□

在许多论证中，我们证明路径 P 在 G 中具有某种所需性质，否则就得到一条更长的路径。现在，我们将两种常见的获得更长路径的方法形式化。给定两个对象列表 a 和 b，将 a 与 b 进行拼接，是指通过以下方式从 a 得到的序列：(1) 用 b替换 a 的一个非空区间；或 (2) 将 b 插入 a 中的相邻元素之间；或 (3) 将 b 添加到 a的开头或末尾。给定一个宿主路径 P和一个修补路径 Q，将 P与 Q 进行拼接，是指这样一条路径：其顶点按照将 P 的有序顶点列表与 Q的有序顶点列表进行拼接后所得的顺序排列。与 P 具有相同端点的 P 的拼接称为内部拼接；否则，该拼接称为外部。

xy-路径 P 的一条绕行 是通过使用两条修补路径 Q_1和 Q_2，按如下方式从 P 得到的一条路径。设 Q_i是 $i \in \{1,2\}$的 u_iw_i-路径，且 u_1、u_2、w_1、w_2是沿着 P依次出现的不同顶点。我们沿着 P 从 x 走到 u_1，经过 Q_1，再沿着P 反向从 w_1 走到 u_2，经过 Q_2，最后沿着 P 从 w_2 走到 y。

请注意，我们对拼接和绕行的定义要求所得对象是一条路径，因此隐含地对宿主路径的各段与修补路径施加了某些不相交条件。此外，还要注意，P的内部拼接和绕行与 P 具有相同的端点。若 P 的拼接或绕行比 P长，则称其为增广的 。

设 P是 G中的一条路径，H是 $G-V(P)$的一个连通分量。若顶点 $s \in V(P)$有一个邻点位于 H 中，则称其为 H的附着点 。下一个引理讨论成对的附着点。

引理4。设 P 是图 G 中的一条 xy-路径，并设 H 是 $G-V(P)$ 的一个连通分量，其附着点为 s 和 s'。沿 P 从 x 到 y 遍历时，s 出现在 s' 之前。以下结论成立：

1. 若 s 和 s' 在 P 上相邻，则存在 P 的增广内部拼接。*2.* 若 s 和 s' 在 P 上不相邻，w 和 w' 分别紧接在 s 和 s' 之后，并且 $ww' \in E(G)$，则存在 P 的增广绕行。*3.* 若 s 和 s' 在 P 上不相邻，w 和 w' 分别紧接在 s 和 s' 之前，并且 $ww' \in E(G)$，则存在 P 的增广绕行。

证明。对于第 1 部分，由于 s 和 s' 是 P上的连续附着点，我们可以在 H 中 s 与 s' 之间插入一条适当的路径，从而得到一个增广内部拼接。对于第 2 部分，设 Q_1 是一条内部顶点位于 H 中的 ss'-路径，且 Q_2 为路径 ww'。利用修补路径 Q_1 和 Q_2，可以得到 P 的一条增广绕行。第 3 部分的情形是对称的。 □

当 P是一种纤维，且 $G-V(P)$的一个连通分量 H含有许多附着点时，下面的引理将给出一个包含于 P且由非附着点组成的大独立集。

引理 5。设 P是图 G中的一条 xy-路径，H是 $G-V(P)$ 的一个连通分量，并设k 为 H的附着点数。则存在 G 的一个独立集 A，使得$A \subseteq V(P)$，且没有边连接 A 中的顶点与 $V(H)$中的顶点，并且满足以下条件：

1. 如果 P是一个 xy-纤维，则 $A \subseteq V(P) - \{x,y\}$和 $|A| \geq k-1$。

2. 如果 P 是一个 x-纤维，则 $A \subseteq V(P) - \{x\}$ 和 $|A| \geq k$。

3. 如果 P 是一个纤维，那么 $A \subseteq V$（P）和 $|A| \geq k+1$。

证明。设 s_1，……，s_k 是 H的附着点，其索引沿 P从 x 到 y递增，并设 $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$（见图 3）。

对于第1部分，设 A 为 P中紧跟在某个 s_i 之后且满足 $1 \leq i < k$的顶点集合。由于 P 是一个 xy-纤维，引理 4 表明， s_i 和 s_{i+1} 沿 P并不相邻。因此， S 和 A 不相交，所以 A 中的任何顶点都没有邻点属于 H。由引理 4可知， A 是一个独立集。

对于第2部分，进一步假设 P 是一个 x-纤维。由引理 3， $s_k \neq y$，我们可以将 A 取为紧跟在某个 s_i 之后且满足 $1 \leq i \leq k$的顶点集合。

对于第3部分，额外假设 P 是一个纤维。根据引理3，可得 $s_1 \neq x$。令 A 为紧接在一个附着点之后的顶点与 x组成的集合。注意，由于 P 也是一个 y-纤维，根据引理3 可知， x 在 A中没有邻点，因此 A 是一个大小为 $k+1$的独立集。

□

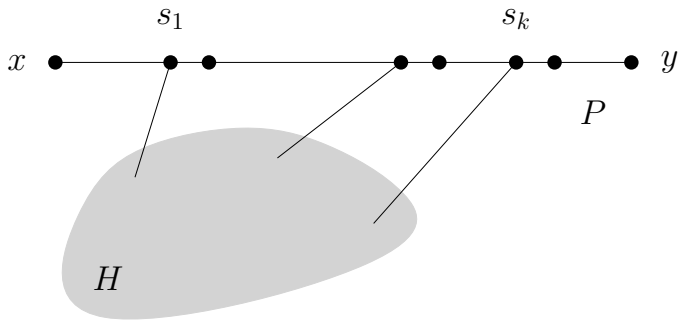

图3：引理 A 证明中的构造5。

我们最终将在接下来的几节中证明， $P_3 + P_1$、 $P_2 + 2P_1$和 $4P_1$ 都是固定器。

3.1 $P_3 + P_1$ 是一个固定器

定理6. 如果 G 是一个连通的$(P_3 + P_1)$-自由图，那么度至少为$\Delta(G) - 1$ 的每个顶点都是一个 *Gallai* 顶点。

证明。令 P为 G中的一条最长路径，其中 $P = v_0 \cdots v_\ell$，且 $x = v_0$和 $y = v_\ell$。反设存在一个顶点 u，满足 $d(u) \geq \Delta(G) - 1$，但 $u \notin V(P)$。令 H 为包含 u的 $G - V(P)$的连通分量。令 $T = V(H)$，令 S 为 H在 P上的附着点集合，令 $k = |S|$，并令 $t = |T|$。

注意， H 是一个完全图；否则， P_3 在 H 中与 P的一个端点一起将诱导出 $P_3 + P_1$ 在 G中的一个 H (G)。我们现在断言，对每个$v_i \in S$，3根据引理，给定一个邻点 z，它是 v_i在 H中的 $\{z, v_i, v_{i+1}, x\}$ 将诱导出 $P_3 + P_1$。

接下来我们断言，当 $v_i \in S$ 时， $v_{i-1}v_{i+1} \notin E(G)$。否则，我们可以先从 H 中的 v_i 的一个邻点 z 出发，沿着 zv_ix 行进，再沿着 P 从 x 到 v_{i-1}，从而得到一条更长的路径，

穿过 $v_{i-1}v_{i+1}$，并沿着 P 从 v_{i+1} 到 y。因此，对于每个 $z \in T$ 和 $v_i \in S$，都有 $zv_i \in E(G)$；否则，$\{z, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}$ 将诱导出一个 $P_3 + P_1$ 的副本。由此可得，对于每个 $z \in T$，$N(z) = (T - \{z\}) \cup S$。特别地，$d(u) = (t-1) + k$。

接下来我们断言，如果 v_i、$v_j \in S$ 与 $i \neq j$，那么 $v_iv_{j+1} \in E(G)$。否则，给定 H 中 v_i 的一个邻点 z，集合 $\{z, v_i, v_{i+1}, v_{j+1}\}$ 将诱导出 P_3+P_1 的一个副本，因为根据引理4，$v_{i+1}v_{j+1} \notin E(G)$。这意味着，如果 $v_i \in S$，那么 v_i 的邻域包含 x、T 和 $\{v_{j+1}: v_j \in S\}$，因此 $d(v_i) \geq 1 + t + k$。于是 $\Delta(G) \geq d(v_i) \geq d(u) + 2$，产生矛盾。 □

定理 6 中的度假设是最佳可能的。事实上，完全二部图 $K_{t,t+2}$ 是 $(P_3 + P_1)$-自由的，最大度为 $t + 2$，且度为 t 的顶点不是 Gallai。

3.2 $P_2 + 2P_1$ 是固定器

命题7。 如果 G 是一个连通的 $(P_2 + 2P_1)$-free 图，那么最大度的每个顶点都是 Gallai 顶点。

证明。设 G 是一个连通的 $(P_2 + 2P_1)$-free 图，并设 $P = v_0 \cdots v_\ell$ 是 G 中的一条最长路径，其端点为 $x = v_0$ 和 $y = v_\ell$。反设 u 是一个最大度顶点，且 $u \notin V(P)$。令 $k = d(u) = \Delta(G)$，并令 H 为包含 u 的 $G - V(P)$ 的连通分量。注意到 $xy \notin E(G)$，否则我们可以从 H 中的一个与 P 相邻的顶点出发，沿着圈 $P + xy$ 绕行，从而得到一条更长的路径。此外，$V(G) - V(P)$ 是一个独立集；否则，根据引理3，$V(G) - V(P)$ 中的一对相邻顶点与 x 和 y 将诱导出一个 $P_2 + 2P_1$ 的副本。

令 S 为 H 的附着点集合。由于 H 只有一个顶点，因此 $|S| = k$。应用引理5，其中 H 是仅含顶点 u 的图，存在一个独立集 $A \subseteq V(P)$，使得 $|A| = k + 1$ 且 $A \cap S = \varnothing$。

若某个顶点 $s \in S$ 有两个非邻点 w_1，$w_2 \in A$，则 $\{u, s, w_1, w_2\}$ 诱导出一个 $P_2 + 2P_1$ 的副本。因此，S 中的每个顶点在 A 中至少有 k 个邻点。对 u 计数可知，S 中的每个顶点的度至少为 $k + 1$，这与 $\Delta(G) = k$ 矛盾。 □

在 $(P_2 + 2P_1)$-自由图 G 中，度为 $\Delta(G) - 1$ 的顶点未必是 Gallai 顶点。事实上，考虑由 $K_{t,t+2}$ 删去一个饱和大小为 t 的部分的匹配后得到的图 G。G 是 $(P_2 + 2P_1)$-自由的，且 $\Delta(G) = t + 1$。G 中的最长路径会漏掉一个顶点，而 Gallai 顶点是较小部分中的顶点。较大部分中有两个非 Gallai 顶点的度为 t，这等于 $\Delta(G) - 1$。

3.3 $4P_1$ 是固定器

对于图 G 中包含顶点 x 和 y 的路径 P，P 的边界点为 x 和 y 的闭子路，记作 $P[x, y]$，是 P 中端点为 x 和 y 的子路径。P 的边界点为 x 和 y 的开子路，记作 $P(x, y)$，即 $P[x, y] - \{x, y\}$。此外，我们类似地定义半开子路径 $P[x, y)$ 和 $P(x, y]$。

令 $x, y \in V(G)$，令 P 是 G 中的一条 xy-路径，并令 H 是 $G - V(P)$ 的一个连通分量。对于每个非附着点 $w \in V(P)$，我们将 w 的秩定义为 rank(w)，即

$P[x,w]$ 中包含 w 但不包含任何附着点的子路径的最大长度。注意，如果 $s_1,\ldots,s_k$ 是附着点，且其索引从 x 到 y 递增，那么非附着点 $w \in V(P(s_i,s_{i+1}))$ 的秩为 $\mathrm{dist}_P(s_i,w) - 1$。

引理 8. 设 P 是图 G 中的一条 xy-路径，H 是 $G-V(P)$ 的一个完全分支。设 S 为 H 在 P 上的附着点集合，其中 $S = \{s_1,\ldots,s_k\}$，下标从 x 到 y 递增；并假设诱导的 $(S,V(H))$-二分图存在一个饱和 S_0 的匹配，其中 $S_0 \subseteq S$ 且 $|S_0| \le |V(H)|$。以下结论成立。

1. 若 $s_1 = x$，则 P 存在一个端点为 y 的增广拼接。若 $s_k = y$，则 P 存在一个端点为 x 的增广拼接。若 s_i 和 s_{i+1} 在 P 上相邻，则 P 存在一个增广内部拼接。*2.* 若 $P-S$ 的某个连通分量 P_0 的顶点数小于 $|V(H)|$，则 P 存在一个替换 P_0 的增广拼接。*3.* 若 w 和 w' 位于 $P-S-V(P[x,s_1])$ 的不同连通分量中，$\mathrm{rank}(w) + \mathrm{rank}(w') \lhd |V(H)|$，且 $ww' \in E(G)$，则 P 存在一个增广绕行。*4.* 若 w 和 w' 位于 $P-S$ 的不同连通分量中，$\mathrm{rank}(w) + \mathrm{rank}(w') < |V(H)|$，且 $ww' \in E(G)$，则 G 存在一条端点为 y 且比 P 更长的路径。

证明。对于第 1 部分，若 $s_1 = x$ 或 $s_k = y$，则通过在 P 前接或后接 H的哈密顿路径，可得到一个增广拼接。若 s_i 和 s_{i+1} 沿着 P相邻，则由引理 4 可知，P 具有一个增广内部拼接。

对于第 2 部分，令 P_0 为 $P-S$ 的一个连通分量，且满足 $1 \le |V(P_0)| < |V(H)|$。注意，P_0是 $P[x,s_1]$，或者对于某个 i，$P(s_k,y]$，或 $P(s_i,s_{i+1})$。设 $P_0 = P(s_i,s_{i+1})$。因此，存在一个匹配 $\{s_iz, s_{i+1}z'\}$，将 s_i和 s_{i+1}分别连接到不同的顶点 $z,z' \in V(H)$。由于H 是完全的，H 包含一条生成的 zz'-路径 Q。由于 $|V(P_0)| < |V(H)|$，我们通过用 Q替换 P_0，得到一个增广内部拼接。情形 $P_0 = P[x,s_1)$ 和 $P_0 = P(s_k,y]$类似，只是此时得到一个增广外部拼接。

对于第3部分，我们可以假设在沿着 P 从 x 到 y 遍历时，w 出现在 w' 之前（见图4）。令 i和 j为满足 $w \in V(P(s_i,s_{i+1}))$以及 $w' \in V(P(s_j,s_{j+1}))$的指标，但当 $w' \in V(P(s_k,y])$时，我们令 $j=k$。由于 w和 w'位于 $P-S$的不同连通分量中，因此有 $i<j$。如果 $|V(H)|=1$，那么秩(w) +秩(w') $< |V(H)|$意味着 w紧接在 s_i 之后，且 w' 紧接在 s_j之后。由引理4的第(2)部分，我们得到 P 具有一条增广绕行。否则，$|V(H)| \ge 2$，并且存在一个匹配 $\{s_iz, s_jz'\}$，将 s_i和 s_j 连接到不同的顶点 z、$z' \in V(H)$。令 Q_1 为一条 s_is_j-路径，其内部顶点构成 H中的一条生成的 zz'-路径，并令 Q_2 为路径 ww'。带有修补路径Q_1和 Q_2的 P的绕行，加入 $V(H)$中的顶点，但省略 $P(s_i,w)$中的秩(w)个顶点以及 $P(s_j,w')$中的秩(w')个顶点。由于秩(w)+秩(w') $< |V(H)|$，该绕行是增广的。

对于第 4 部分，除非 $w \in V(P[x,s_1])$，否则我们可以应用第 3 部分中的论证。与之前一样，令j为满足 $w' \in V(P(s_j,s_{j+1}))$ 的指标，但若 $w' \in V(P(s_k,y])$，则令 $j=k$。我们通过以下方式得到一条新路径 P'：从 y 沿 P 反向走到 w'，经过 $w'w$，再从 w 沿P 正向走到 s_j，经过一条连接 s_j 与 H 中某个顶点的边，最后沿着 H 中的一条哈密顿路径走完。路径 P' 包含了 $V(H)$ 的全部顶点，但不包含 $P[x,w$ 中的 $\mathrm{rank}(w)$ 个顶点，以及 $P(s_j,w')$ 中的 $\mathrm{rank}(w')$ 个顶点。由于 $\mathrm{rank}(w) + \mathrm{rank}(w') < |V(H)|$，路径 P' 比 P 长。 □

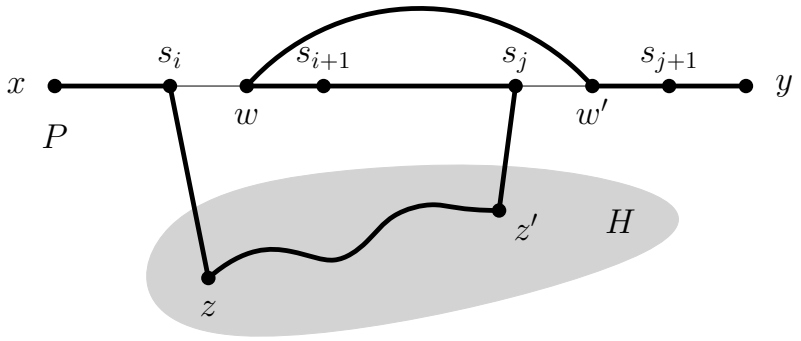

图4：引理 8的第3部分。

我们的下一个引理ma 在 G 为 k-连通且 $\alpha(G) \leq k+2$ 时提供了额外的结构 .

引理 9。设 P 是图 G 中一条最长路径，其端点为 x 和 y，并设 H 是 $G-V(P)$ 的一个连通分量。假设 G 是 k- 连通的，且 $\alpha(G) \leq k+2$。则有以下结论。

1. H 在 P 上的附着点集合 S 的大小为 k。*2.* 子图 H 是完全的。*3.* 图 $P-S$ 有 $k+1$ 个连通分支，每个分支至少有 $|V(H)|$ 个顶点。*4.* 若 w 和 w' 属于 $P-S$ 的不同连通分支，且 $d(w)+d(w') < |V(H)|$，则 $ww' \notin E(G)$。*5.* $P-S$ 中秩小于 $|V(H)|$ 的每个连通分量中的顶点构成一个团。

证明。设 $S=\{s_1,\ldots,s_r\}$，其指标从 x 递增至 y。由于 G 是 k-连通的，且 H 是 $G-V(P)$ 的一个连通分量，因此 $r \geq k$；否则，S 将 $V(H)$ 与 x 和 y 分隔开。由于 P 是一个纤维，由引理 5 可知，G 包含一个独立集 A，其中 $|A|=r+1$，且 $A \subseteq V(P)$，并且没有边连接 A 和 $V(H)$。由于 $1+(k+1) \leq \alpha(H)+(r+1)=\alpha(H)+|A| \leq \alpha(G) \leq k+2$，可得 $\alpha(H)=1$ 且 $r=k$。因此，附着点恰有 k 个，且 H 是完全的。

令 $S_0 \subseteq S$，其中 $|S_0| \leq |V(H)|$，并令 B 为诱导的 $(S_0, V(H))$-二分图。若 B 没有饱和 S_0的匹配，则由霍尔定理 [29] 可知，存在 $S_1 \subseteq S_0$ 使得$|N_B(S_1)| < |S_1|$。由于 $|N_B(S_1)| < |S_1| \leq |S_0| \leq |V(H)|$，因此 $N_B(S_1) \cup (S-S_1)$是一个大小小于 k的割集，这与 G 是 k-连通的事实矛盾。因此，引理 8 适用；又由于 P 是一条最长路径，结论 3 和 4 得证。

还需证明第 5 部分。反设 w 和 w' 是 $P-S$ 的同一连通分量 W 中的两个不同顶点，且 $d(w), d(w') < |V(H)|$ and $ww' \notin E(G)$。令 A 为 P 中秩为 0 的非附着点集合，并从 A 中删除 $W \cap A$ 中的顶点，再加入 w 和 w'，得到 A'。注意，除 $\{w,w'\}$外，A' 中的任意一对顶点的秩之和都小于 $|V(H)|$，且与 $P-S$的两个连通分量相交。由第 4 部分可知，A' 是一个独立集。由于$|A'|=k+2$和 A 由非附着点组成，我们可以加入 H 中的任意顶点，从而得到一个大小为 $k+3$的独立集，矛盾。

□

定理 10。 设 $k \in \{1,2\}$。如果 G 是 k-连通的，且 $\alpha(G) \leq k+2$，那么 G 中的每条最长路径都包含度至少为 $\Delta(G)-(2-k)$的每个顶点。

证明。 设 P是 G 中的一条最长路径，其端点为 x 和 y，并反设存在 $u \notin V(P)$，使得 $d(u) \geq \Delta(G)-(2-k)$。设 H是包含 u的$G-V(P)$ 的连通分量，并设 $t=|V(H)|$。设 H在P上的附着点为 $s_1,\ldots,s_k$，按从 x到 y的顺序编号，并设 $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$。注意，$\Delta(G) \leq d(u)+(2-k) \leq ((t-1)+k)+(2-k)=t+1$。

对于 $P-S$的每个连通分量 W，令 $f(W)$ 为 W中秩 $(w)<t$的顶点 w所构成的集合。我们声称，对于某个 $P-S$的连通分量 W，$N(s_1)$ 要么包含 $V(H)$，要么包含 $f(W)$。若不然，令 A 为这样一个顶点集合：它在 $P-S$的每个连通分量中，包含 s_1 的秩最低的非邻点。注意，若 A中有一对顶点 $\{w,w'\}$，则秩 (w) +秩 (w') $<t$；否则，s_1 在包含 w 和 w'的 $P-S$ 连通分量中至少有 t 个邻点组成的集合 B。令 z为 $P[x,s_1]$ 中紧邻 s_1之前的顶点。注意，$z \notin B$，因为 s_1 的某个非邻点将 z与 $P[x,s_1$的初始段分隔开来，该初始段由属于 B的顶点组成。将 B 与 z一并计数可知，$d(s_1) \geq t+2$，这与 $\Delta(G) \leq t+1$矛盾。因此，秩 (w) + 秩 (w') $<t$，由引理 9 的第（4）部分可知，A是一个独立集。然而，A 与 s_1 以及 H 中 s_1 的一个非邻点构成大小为$k+3$的独立集，这与 $\alpha(G) \leq k+2$矛盾。因此，对于 $P-S$的某个连通分量 W，$N(s_1)$ 要么包含 $V(H)$，要么包含 $f(W)$。

注意，对于 $P-S$ 的每个连通分量 W，都有 $|V(H)|=t$ 和 $|f(W)|=t$。令 v 和 v' 为沿着 P 的 s_1 的直接邻点，并令 v'' 为 H 中 s_1 的一个邻点。注意到 $V(H)$ 与每个 $f(W)$ 和 $\{v,v',v''\}$ 的交集至多包含一个顶点，因此可得 $d(s_1) \geq t+3-1$，这与 $\Delta(G) \leq t+1$ 矛盾。

□

我们指出两个推论。

推论 11. 如果 G 是一个连通图，满足 $\alpha(G) \leq 3$ 且 $\Delta(G)-\delta(G) \leq 1$，或者如果 G 是一个 2-连通正则图，满足 $\alpha(G) \leq 4$，那么 G 有一条哈密顿路径。

推论 12. 图 $4P_1$ 是一个固定器。

4 一个5顶点固定器

本节中，我们证明 $5P_1$ 是一个固定器。尽管 $5P_1$ 是一个固定器，但存在一些连通的 $5P_1$-自由图，其中没有任何最大度顶点是 Gallai 顶点（见例 20）。相比之下，对于每个阶数至多为 4 的固定器 F，连通 F-自由图中的最大度顶点全都是 Gallai 顶点：Golan 和 Shan [13] 证明了 $F=2P_2$的情形，本节 3的结果证明了 $F \in \{P_3+P_1, P_2+2P_1, 4P_1\}$的情形，而 $F=P_4$的情形留作练习。

陈述 $5P_1$ 是一个固定器，等价于以下陈述：若 G 是一个连通图，且 $\alpha(G) \leq 4$，那么 G 有一个 Gallai 顶点。若 G 是 2-连通的，则该结论可直接由定理 10推出。当 G 有割点时，我们利用 G的块—割点结构。对于P是指定顶点 $x,y \in V(G)$的 x-纤维或 xy-纤维的情形，我们需要定理 10 的以下两个变体

引理 13. 设 G 是一个带有指定顶点 x 的2-连通图。若 $\alpha(G-x) \leq 3$，则每个 x-纤维都包含 G 中每个最大度顶点。

证明。设 P 是一个 x-纤维，其另一个端点为 y，并反设 P 上不存在最大度顶点 u。设 H 是 $G - V(P)$ 中包含 u 的连通分量，并设 r 为 H 在 P 上的附着点数。注意，$r \geq 2$；否则，分隔 y 和 H 的附着点至多有一个，这与 G 是 2-连通图矛盾。此外，根据引理 5 的第 (2) 部分，有 $r + \alpha(H) \leq \alpha(G - x) \leq 3$。由于 $r \geq 2$ 且 $\alpha(H) \geq 1$，可得 $r = 2$ 且 $\alpha(H) = 1$。因此，H 是一个完全图。设 $\{s_1, s_2\}$ 为 H 在 P 上的附着点集合，指标从 x 到 y 递增，并设 $S = \{s_1, s_2\}$。

由于 G 是 2-连通的，因此在诱导的 $(S, V(H))$-二分图中存在一个匹配，使 S 或 $|V(H)| = 1$ 饱和。令 $t = |V(H)|$，并注意到 $d(u) \leq (t-1) + 2 = t + 1$。由于 P 是一个 x-纤维，由引理 8 可知，$P(s_1, s_2)$ 和 $P(s_2, y]$ 均非空（第 (1) 部分），且各自至少有 t 个顶点（第 (2) 部分）。如果 s_2 在 $\{V(H)\ V(P(s_1, s_2))\ V(P(s_2, y])\}$ 中的某个集合里有至少 t 个邻点，那么 $d(s_2) \geq t + 2 > d(u)$，这与 u 具有最大度矛盾。因此，s_2 在 $V(H)$、$V(P(s_1, s_2))$ 和 $V(P(s_2, y])$ 中的每个集合里都少于 t 个邻点。令 w_1 和 w_2 分别为 s_2 在 $P(s_1, s_2)$ 和 $P(s_2, y]$ 中秩最小的非邻点，并令 z 为 s_2 在 H 中的一个非邻点。

我们声称 $\{s_2, z, w_1, w_2\}$ 是一个独立集，这与 $\alpha(G - x) \leq 3$矛盾。根据构造，s_2 在 $\{z, w_1, w_2\}$中没有邻点。由于 w_1 和 w_2 不是附着点，z 在 $\{w_1, w_2\}$中没有邻点。若 $w_1 w_2 \in E(G)$，则由引理 8 的第 (3) 部分以及P是一个 x-纤维这一事实可得 $\mathsf{rank}(w_1) + \mathsf{rank}(w_2) \geq t$。因此，$s_2$ 与$P(s_1, w_1)$ 和 $P(s_2, w_2)$中的所有顶点都相邻，且这些顶点至少有 t 个。再加上 s_2 在 P 中的前一个顶点以及 s_2 在 H 中的一个邻点，我们有 $d(s_2) \geq t + 2$，这与 u 具有最大度矛盾。 □

引理 14. 设 G 是一个2-连通图，x 和 y 是 G的两个不同顶点。若$\alpha(G - \{x, y\}) \leq 2$，则每个 xy-纤维都包含 G 中每个度最大的顶点，或者$G - \{x, y\}$ 是两个完全图的不交并。

证明。令 P 为一个 xy-纤维，令 u 为不在 P 上的一个最大度顶点，并令 H 为 $G - V(P)$ 中包含 u 的连通分量。令 $\{s_1, \ldots, s_r\}$ 为 H 的附着点集合，指标从 x 到 y 递增，并令 $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$。由于 G 是 2-连通的，因此有 $r \geq 2$；否则，删除 S 会将 H 与 $V(P) - S$ 分隔开（由于 $x \neq y$，后者非空）。根据引理 5，存在一个独立集 $A \subseteq V(P - \{x, y\})$，使得 $|A| = r - 1$，且没有边连接 A 与 $V(H)$。因此，$1 + 1 \leq (r-1) + \alpha(H) \leq \alpha(G - \{x, y\}) \leq 2$。由此可得 $r = 2$，且 $\alpha(H) = 1$。

令 $t = |V(H)|$。注意到 H 是完全的，并且由于 G 是 2-连通的，在由 S和 $V(H)$诱导的二分图中，存在一个饱和 S 或 $|V(H)| = 1$的匹配。由引理 8 可知，$|V(P(s_1, s_2))| \geq t$；否则，存在一个增广内部拼接，用 $P(s_1, s_2)$替换 P，这与 P 是一个 xy-纤维矛盾。

令 $W = V(P(s_1,\ s_2))$。注意到 W是一个团；否则，W 中的一对非邻接顶点与 H 中的一个顶点构成大小为 3 的独立集，这与 $\alpha(G - \{x, y\}) \leq 2$矛盾。

若 $(x, y) = (s_1, s_2)$，则 $G - \{x, y\}$ 是完全图 H 与 W上的完全图的不交并。否则，若 $x \neq s_1$，则 s_1 在 H 中有一个非邻点，且在 W中也有一个非邻点；或者 $d(s_1) \geq t + 2 > d(u)$。因此，s_1 与 W中的一个非邻点

以及 H 中的一个非邻点构成 $G-\{x,y\}$中大小为 3 的独立集，矛盾。 $y \neq s_2$ 的情形类似。

□

图 的块割点图 是图 G 的一个二分图 H 其中一部分由 G 的割点组成，另一部分则包含一个顶点 b_i ，每个块 B_i 对应 G。此外， vb_i是 H 的一条边，当且仅当 $v \in B_i$。当 G 连通时，它的块割点图是一棵树，其叶子是 G 的块（例如，参见 [29]）。我们称图 B 的一个块 G为 特殊的 ，如果 G 中的每条最长路径都包含 B中的一条边。

引理 15. *I* 如果连通图 G中没有割点是 *Gallai* 的，那么 G有一个特殊块 *k.*

证明。设 G 是一个连通图，其中没有割点是 Gallai 的。反设 G 的任何块都不是特殊的。令 T 为 G的块割点树。我们在 V（T）上构造一个有向图 D，使每个顶点的出度均为 1。令 G 中的一个块为 B。我们指定一个特定的割点 $x \in V$（B），并将有向边 Bx 加入 D中。由于B 不是特殊的， G 的一条最长路径包含在 $G-E$（B）的某个连通分量 H 中。注意， H 和 B 恰有一个公共顶点，我们取 x 为这个割点。

设 x 是 G 中的一个割点。我们指定一个包含 x 的特定块 B，并将有向边 xB 加入 D。由于 x 不是 Gallai， $G-x$ 的某个连通分量 H 包含 G 中的一条最长路径。设 B 是包含 x 的块，且满足 $B-x \subseteq H$。我们将有向边 xB 加入 E（D）。

由于 $|E(D)| = |V(T)| > |E(T)|$，可知存在一个块 B 和一个割点 x，使得 Bx 和 xB 都是 D 中的边。这意味着 G 有点不相交的最长路，这与连通图中任意两条最长路径至少共享一个顶点这一事实矛盾。

□

引理 16。如果 G 是一个连通图， $\alpha(G) \leq 4$，且 G 有一个特殊块，那么 G 有一个 *Gallai* 顶点。

证明。设 G 是一个连通图，满足 α（G）≤ 4，并且有一个特殊块 B。设 S 是 B 中割点的集合，且 $S=\{x_1,\ldots,x_k\}$。由于 α（G）≤ 4，我们有 $k \leq 4$。

情形 $k=0$。在此情形下， $G=B$ 因此 G 是 2-连通的。由定理 10可知， G 有一个 Gallai 顶点。

情形 $k=1$。设 $u \in V(B)$，其中 $d_B(u) = \Delta(B)$。我们断言， u 是G中的一个 Gallai 顶点。设 P是 G中的一条最长路径。若 P包含于 B中，则由定理 10 可得 $u \in V(P)$。若 P 经由割点 x_1离开 B，则 $P \cap B$ 是 B 中的一个 x_1-纤维，因此由引理 13 可得$u \in V(P)$。

情形 $k=2$。首先假设 $B-S$ 不是两个完全图的不交并。设 $u \in V(B)$，其中 $d_B(u) = \Delta(B)$。我们断言， u 是一个 Gallai 顶点。设 P 是 G中的一条最长路径。由于 B 是特殊的，因此 $P \cap B$ 是 P的一个非平凡子路径。注意，作为 B的一个子图，路径 $P \cap B$ 可能是一个纤维、一个 x_1-纤维、一个 x_2-纤维或一个x_1x_2-纤维，分别取决于 P 在 B中有两个、一个还是零个端点。由定理 10、引理 13 或引理 14 可分别得出 $u \in V(P \cap B)$。

否则，设 $B-S$ 是完全图 W_1 和 W_2 的不交并（见图 5）。由于 B 是 2-连通的，对于 $i \in \{1,2\}$，在诱导的（S， V（W_i））-二分图中存在一个匹配，使 S 饱和或使 $|V(W_i)$ 饱和$| = 1$。此外，由于 S 是 B 中的一个最小割， S 中的每个顶点都在 V（W_1）和 V（W_2）中有邻点。由此可知， B 有一个哈密顿

圈。我们断言 x_2 是一个 Gallai 顶点。令 P 为 G 中的一条最长路径，并反设 $x_2 \notin V$（P）。由于 B 是特殊的， P 在 B 中至少有一个端点。用适当的哈密顿路径替换 P 在 B 内的子路径，即可得到 G 中一条更长的路径。

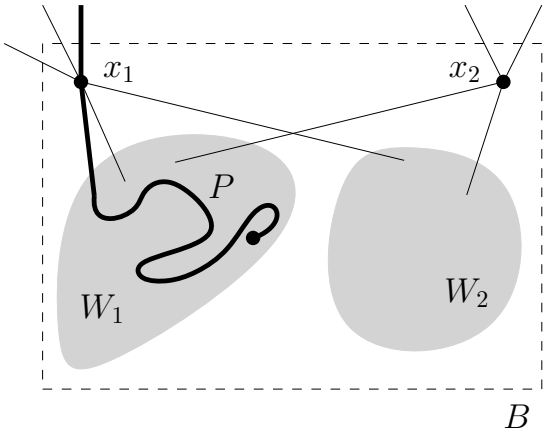

图 5：情形 $k = 2$ 引理 16的证明中。

情形 $k = 3$。注意， $B - S$ 是完全图 W_1，否则 α（G） > 4。假设存在一对割点，例如 $\{x_1, x_3\}$，使得 $B - \{x_1, x_3\}$ 是两个完全图的不交并。这两个图必然是 W_1 和由 x_2 构成的单顶点子图；令W_2 为这个单顶点子图。与情形 $k = 2$一样，可知 B 有一个包含 $x_1x_2x_3$ 作为子路径的哈密顿圈。我们声称 x_3 是一个 Gallai 顶点。令 P为 G 中的一条最长路径，并反设 $x_3 \notin V$（P）。注意， P不能在 B中有端点，否则用一条适当的哈密顿路径替换 $P \cap B$，即可在 G中得到一条更长的路径。因此，作为 B的子图，路径 $P \cap B$ 是一个 x_1x_2-纤维。但 B 有一条生成的 x_1x_2-路径，这与 $x_3 \notin V$（P）矛盾。

否则，不存在一对割点，使得从 B 中删除它们后，得到两个完全图的不交并。令 $u \in V$(B)，其中 $d_B(u) = \Delta(B)$。我们声称 u 是一个 Gallai 顶点。令 P 为 G 中的一条最长路径。由此可知，作为 B 的子图，路径 $P \cap B$ 是一个纤维、某个 $x_i \in S$ 的 x_i-纤维，或某个 x_i，$x_j \in S$ 的 x_ix_j-纤维，分别对应于 P 在 B 中有两个、一个或零个端点的情形。由定理 10、引理 13 或引理 14 可得，分别有 $u \in V(P \cap B)$。

情形 $k = 4$。条件 $\alpha(G) \leq 4$ 要求 $|V(B)| = 4$，而 2-连通性要求 B 包含一个 4-圈 C。令 x_i 为 B 中的一个割点，使得 $G - E(B)$ 中的某个 x_i- 纤维长度最大。我们声称 x_i 是一个 Gallai 顶点。令 P 为 G 中的一条最长路径，并反设 $x_i \notin V(P)$。路径 P 分解为三个子路径 P_1、 P_2 和 P_3，其中 $P_2 = P \cap B$。令 x_j 为 $V(P_1) \cap V(P_2)$ 中的顶点，并令 x_k 为 $V(P_2) \cap V(P_3)$ 中的顶点。由于 $|V(B)| = 4$，可知 x_j 或 x_k 是 C 中 x_i 的一个邻点。若 $x_kx_i \in E(C)$，则通过保留 P_1、用边 x_kx_i 延长 P_2 得到 P_2'，并以 $G - E(B)$ 中的一个 x_i-纤维 P_3' 替换 P_3，便可在 G 中找到一条更长的路径。由于 P_2' 比 P_2 长，且根据我们对 x_i 的选择， P_3' 至少与 P_3 一样长，因此由 P_1、 P_2' 和 P_3' 拼接得到的路径比 P 更长。情形 $x_jx_i \in E(C)$ 对称。

□

应用我们的引理可得如下结论。

定理 17. 设 G 为一个连通图。如果 $\alpha(G) \leq 4$，那么 G 有一个 *Gallai* 顶点。等价地，$5P_1$ 是一个固定器。

证明。 如果 G 中的某个割点是 Gallai 顶点，则结论成立。否则，由引理 15可知， G具有一个特殊块，因此由引理 G 具有一个 Gallai 顶点，引理 16得证。 □

图 G_0 （见图 1）表明，存在一个连通图 G ，使得 G 没有 Gallai 顶点，而 α（G）$= 6$。情形 α（G） ≤ 5 仍有待解决。

猜想 18。 如果 α（G） ≤ 5 且 G 连通，则 G 具有一个 *Gallai* 顶点。

当 G 为 3-连通时， $\alpha(G) \leq 5$，且 G 足够大时，定理 19 表明，G 具有一个 Gallai 顶点。除去有限个 $\kappa(G) \geq 3$的情形外，要解决猜想 18，只需考虑 $\kappa(G) = 1$ 以及 $\kappa(G) = 2$的情形。尽管合理的预期是，可以通过分析 G的块结构来处理 $\kappa(G) = 1$ 的情形，但如何处理 $\kappa(G) = 2$的情形则不太明确。

5 一个 Chv´atal–Erd˝os 型结果

Chv´atal 和 Erd˝os 的一个著名结果 [7] 指出，若 $\alpha(G) \leq \kappa(G)$，则 G 有哈密顿圈；同样的技巧还表明，当$\alpha(G) \leq \kappa(G) + 1$时， G 有哈密顿路径。显然，若 G 有哈密顿路径，则 G 中的每个顶点都是 Gallai 顶点。我们证明，若 $\alpha(G) \leq \kappa(G)+2$ ，并且就 $\kappa(G)$ 而言， G 足够大，则 G 中的最大度顶点都是 Gallai 顶点。

定理 19. 对于每个正整数 k，存在一个整数 n_0 ，使得若 G 是一个有 $\alpha(G) \leq k + 2$ 且 $n \geq n_0$的n顶点 k连通图，则每个最大度顶点都是 *Gallai* 顶点。

证明。取 $n_0 = k(k+2)(2k+3) +1$。设 P是 G中的一条最长路径，其端点为 x和y，并反设 $u \in V(G) - V(P)$ 且 $d(u) = \Delta(G)$。设 H 是 $G - V(P)$中包含 u的连通分量，并设 $t = |V(H)|$。由引理 9 可知，H 是完全的，且 H 在 P 上有一个包含 k 个附着点的集合 S。令 $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ 的指标从 x 递增至 y。对于 $1 \leq i < k$， 令 $W_i = V(P(s_i, s_{i+1}))$；我们还定义 $W_0 = V(P[x, s_1))$ 和 $W_k = V(P(s_k, y])$。由引理 9，对 $0 \leq i \leq k$，有 $|W_i| \geq t$。由于$u \in V(H)$，我们有 $N(u) \subseteq (V(H) - \{u\}) \cup S$，因此 $\Delta(G) = d(u) \leq (t-1)+k$。若$t \leq 2k(k+1)$，则 $\Delta(G) \leq k(2k+3)-1$，从而 $\alpha(G) \geq n/(\Delta(G)+1) \geq n/[k(2k+3)] > k+2$，因为 $n \geq n_0$。因此，我们可以假设 $t > 2k(k+1)$。

我们断言， H 是 $G - V(P)$的唯一连通分量。若 $G - V(P)$包含第二个连通分量 H'，则令 S' 为 H' 在 P上的附着点集合。由引理 9可知， $|S'| = k$。对于每个 i，从秩属于 $\{0, \ldots, k\}$ 的顶点中选取 $a_i \in W_i$， 使得 $a_i \notin S'$。令 $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$。由于 $t > 2k(k+1) > 2k$，由引理 9 可知， A 是大小为 $k+1$ 的独立集。由于 A 与 $S \cup S'$ 不相交，我们可以通过在 H 中添加一个顶点、在 H'中添加一个顶点，将A 扩展为大小为 $k+3$ 的独立集。由于$\alpha(G) \leq k+2$，这就导致矛盾，因此 H 是 $G - V(P)$的唯一连通分量。

接下来，我们声称每个顶点 $w \in W_i$ 在 W_i之外至多有 k 个邻点。令 A 为 $V(P) - S$中由满足以下条件的顶点组成的子集： $w\text{rank}(w) = 0$。由引理 9，可得

这是一个大小为 $|A| = k+1$ 的独立集。注意，每个顶点 $w \in V(P) - (S \cup A)$ 在 A 中至少有一个邻点；否则， w 与 A 以及 H 中的一个顶点将构成一个大小为 $k+3$ 的独立集。由于 $|A| = k+1$ 且 $\Delta(G) \leq t+k-1$，因此可得 $|V(P)-(S\cup A)| \leq (k+1)(t+k-1)$，从而 $|V(P) - S| \leq (k+1)(t+k) = t(k+1)+k(k+1)$。由于 $V(P) - S = \bigcup_{i=0}^{k} W_i$，且对每个 i 都有 $|W_i| \geq t$，因此可得 $t \leq |W_i| \leq t + k(k+1)$。由引理 9 可知，在每个 W_i 中，秩最小的 t 个顶点构成一个团。由对称性，在每个 W_i 中，秩最大的 t 个顶点也构成一个团。由于 $|W_i| \leq t + k(k+1) < 2t$，因此 W_i 中的每个顶点都属于秩最小的 t 个顶点或秩最大的 t 个顶点。特别地， W_i 中的每个顶点在 W_i 中至少有 $t-1$ 个邻点，因此在 W_i 之外至多有 k 个邻点。

现在可知，每个 W_i 都是一个团。事实上，如果 w_i， $w_i' \in W_i$ 但 $w_i w_i' \notin E(G)$，那么我们可以得到一个独立集 A，其中 $A \subseteq V(P) - S$，而 $|A| = k+2$ 如下所述。从 $A = \{w_i, w_i'\}$ 开始，我们从每个满足 $j \neq i$ 的 W_j 中向 A 添加一个顶点。由于 $|W_j| \geq t > k(k+1)$，且 A 中已经存在的每个顶点在 W_j 中至多有 k 个邻点，因此可以将 W_j 中的某个顶点添加到 A 中。将 A 与 H 中的一个顶点结合，可得到一个大小为 $k+3$ 的独立集，这就产生了矛盾。因此，每个 W_i 都是一个团。

如果顶点 z 与 B 中的每个顶点都相邻，则称顶点 z 支配顶点集合 B。接下来，我们断言，每个 $s_i \in S$ 都支配 $\{W_0, \ldots, W_k, V(H)\}$ 中的某个集合。如果某个附着点 s_i 在每个 W_j 中都有多于 k^2 个非邻点，并且在 H 中有一个非邻点 v，那么我们可以从 $\{s_i, v\}$ 开始，并从每个 W_j 中添加一个顶点，从而得到一个大小为 $k+3$ 的独立集。由此可知，每个 s_i 在 $\{W_0, \ldots, W_k, V(H)\}$ 中的某个集合内至少有 $t - k^2$ 个邻点。令 $W_{k+1} = V(H)$，设 s_i 为一个附着顶点，并选择 j，使得 $0 \leq j \leq k+1$，且 s_i 在 W_j 中至少有 $t-k^2$ 个邻点。我们断言， s_i 支配 W_j。事实上，如果 $w \in W_j$ 但 $s_i w \notin E(G)$，那么从 $A = \{s_i, w\}$ 开始，并从每个满足 $0 \leq \ell \leq k+1$ 和 $\ell \neq j$ 的 W_ℓ 中添加一个顶点，就能得到一个大小为 $k+3$ 的独立集 A。由于 s_i 在 W_ℓ 中至多有 $(t+k-1) - (t-k^2)$ 个邻点，且 A 中已经存在的其他每个顶点在 W_ℓ 中至多有 k 个邻点，并且 $|W_\ell| \geq t > (k(k+1) - 1) + (k+1)k$，因此 W_ℓ 中包含一个可以添加到 A 中的顶点。由于 $\alpha(G) \leq k+2$，我们得到矛盾，因此 s_i 支配 W_j。

令 $1 \leq i < k$。由于 W_i 是一个团，且 $W_i = V(P(s_i, s_{i+1}))$，通过任意重新排列 W_i 中的顶点（只要第一个顶点与 s_i 相邻，最后一个顶点与 s_{i+1} 相邻），我们便可得到一条路径 P'，满足 $V(P) = V(P')$，且附着点集合不变。类似地，只要 W_0 中的最后一个顶点与 s_1 相邻，我们就可以重新排列 W_0；只要 W_k 中的第一个顶点与 s_k 相邻，我们也可以重新排列 W_k。令 R 为 P 中 S 的邻点集合。注意，对每个 $w \in W_i - R$ 以及每个满足 $1 \leq q \leq |W_i| - 2$ 的 q，通过适当重新排列 W_i，我们可以得到一条路径 P'，满足 $V(P) = V(P')$，其附着点不变，且 $\mathrm{rank}(w) = q$。由此可知，若对于某个 $w \in W_i$ 和 $w' \in W_j$，有 $ww' \in E(G)$，且 i 与 j 是 $\{0, \ldots, k\}$ 中不同的元素，则 $w, w' \in R$。否则，我们可以重新排列 W_i 和 W_j，得到一条新路径 P'，使得 $\mathrm{rank}(w) \leq 1$ 且 $\mathrm{rank}(w') \leq 1$，或者 $\mathrm{rank}(w) \geq |W_i| - 2$ 且 $\mathrm{rank}(w') \geq |W_j| - 2$。在后一种情况下，反转 P' 可得到一条路径 P''，其中 $\mathrm{rank}(w) \leq 1$ 且 $\mathrm{rank}(w') \leq 1$。这与关于 P' 或 P'' 的引理 9 矛盾，因为 $\mathrm{rank}(w) + \mathrm{rank}(w') \leq 2$，但 $|V(H)| = t > 2k(k+1) \geq 4$。

通过证明某个附着点的度超过 $\Delta(G)$，我们得到了最终的矛盾。令 $D = \sum_{i=1}^{k} d(s_i)$，并注意到 $D \leq k(t+k-1)$。我们利用三组边给出 D 的下界。首先，对每个 s_i，令 T_i 为与 s_i 相 incident 的 3 条边组成的集合

该集合由连接 s_i 与其在 R 中两个邻点的边，以及一条连接 s_i 和 H 中某个顶点的边组成。其次，对于 $0 \le i \le k$，存在一个大小为 k 的匹配 M_i，连接 W_i 和 $V(G) - W_i$ 中的顶点；否则，K˝onig-Egerv´ary 定理 [29] 表明，诱导的 $(W_i, V(G) - W_i)$-二分图有一个大小小于 k 的顶点覆盖；由于 $|W_i|, |V(G) - W_i| \ge t > k$，该顶点覆盖也是一个顶点割。从 M_i 中删去与 $W_i \cap R$ 中顶点关联的边，得到 M_i'。注意，$|M_i'| \ge |M_i| - 2 \ge k - 2$ 总是成立，但对于 $i \in \{0, k\}$，我们有 $|M_i'| \ge |M_i| - 1 \ge k - 1$。假设 $e \in M_i'$，令 w 为 e 在 W_i 中的端点，并令 v 为 e 在 $V(G) - W_i$ 中的另一个端点。由于 w 不是附着点，因此有 $v \notin V(H)$；又由于 H 是 $G - V(P)$ 的唯一连通分量，可得 $v \in V(P) - W_i$。由于 $w \notin R$，可知 v 必须是附着点。因此，M_i' 中的每条边都连接 $W_i - R$ 中的一个顶点和 S 中的一个顶点。此外，M_i' 和 T_j 不相交，因为 T_j 中的每条边都在 $R \cup V(H)$ 中有一个端点，而 M_i' 中没有任何边有这样的端点。由 $Z = \bigcup_{i=0}^{k} M_i' \cup \bigcup_{j=1}^{k} T_j$，可得 $|Z| \ge [(k-1)(k-2) + 2(k-1)] + 3k = k(k+2)$。第三，对于 $1 \le i \le k$，令 F_i 为连接 s_i 与 $\{W_0, \ldots, W_k, V(H)\}$ 中某个集合的边的集合，该集合由 s_i 支配。注意，$|F_i \cap Z| \le 2$，因为 F_i 在 $\bigcup_{i=0}^{k} M_i'$ 中至多包含一条边，在 $\bigcup_{j=1}^{k} T_j$ 中也至多包含一条边。令 $F = \bigcup_{j=1}^{k} F_i$，并注意到 $|F| \ge tk$ 和 $|F \cap Z| \le 2k$。

我们计算 $D \ge |F \cup Z| = |F| + |Z| - |F \cap Z| \ge tk + k(k+2) - 2k = tk + k^2 = k(t+k)$。由于 $D \le k(t + k - 1)$，因此 $k(t + k) \le D \le k(t + k - 1)$，这与 k 为正相矛盾。 □

例 20。定理 19 中的假设 $\alpha(G) \le \kappa(G) + 2$ 是最佳可能的。令 G 为由星图 $K_{1,k+2}$ 得到的图，该星图的叶子为 $\{x_1, \ldots, x_{k+2}\}$：将中心顶点替换为一个 k-团 S，并将每个叶顶点 x_i 替换为一个包含 k 个指定顶点 Y_i 的 t-团 X_i，其中这些指定顶点均与 S相连。由于 $V(G)$可由 $k + 3$个团覆盖，我们有 $\alpha(G) \le k + 3$。此外，由于 S 是大小为 k 的割集，当 $R \subseteq V(G)$ 且 $|R| < k$时，图 $G - R$ 在 S、Y_1、……、Y_{k+2}中的每一个集合内至少包含一个顶点，这意味着 $G - R$是连通的。

我们断言，G中的 Gallai 顶点集合为 S。由于 $|S| = k$和 $G - S$是 $k + 2$ 个 K_t的副本的不交并，因此 G 中的每条路径至多有 $|V(G)| - t$ 个顶点。G中达到此上界的路径包含 S 以及 X_1、……、X_{k+2}中除一个之外的所有顶点，这意味着 $u \in V(G)$是 Gallai 顶点，当且仅当 $u \in S$成立。根据构造，S 中的每个顶点的度为$k(k + 2) + (k - 1)$。因此，当 t 充分大时，G 中最大度顶点的集合为 $Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k+2}$，其中没有一个是 Gallai 顶点。

虽然最大度顶点不是 Gallai 顶点，但我们的构造仍然有 Gallai 顶点。自然会问，是否每个连通度足够高的图都有一个 Gallai 顶点 [30, 32]。正如第 1节所述，当 k时，存在没有 Gallai 顶点的 -连通图 $k \le 3$。对于 $k \ge 4$，这个问题仍未解决。

完全二部图$K_{s,\ s+2}$表明条件 $\alpha（G） \le \kappa（G） + 1$ 一般不能放宽为 $\alpha（G） \le \kappa（G） + 2$，同时仍保证哈密顿路径的存在 [7]。然而，定理19 立即表明，对于充分大的正则图，这是可以做到的。

推论21. 对于每个正整数 k，都存在 n_0，使得每个具有 $\alpha(G) \le k + 2$ 个顶点的 k连通正则图 G 都有一条哈密顿路径。

我们不知道推论 $\alpha(G) \leq k+2$ 中的条件 21 是否是最优的。以下来自 [8] 的构造表明，该条件不能放宽为 $\alpha(G) \leq k+5$。

例 22。 设 $k \geq 6$ 为偶数。设 G_1 为从 K_{k+1} 中删去一条边所得的图，设 G_2 为从 K_{k+1} 中删去一个由 $k-4$ 个顶点构成的匹配所得的图。设 G 为由两个 G_1 的副本和一个 G_2 的副本构成，并添加一个与所有度为 $k-1$的 k 个顶点相邻的新顶点后得到的图。我们有，G 是一个具有 $\alpha(G) = 6$ 且没有哈密顿路径的 1-连通正则图。

6 总结性备注与开放问题 S

本文旨在刻画单生成 Gallai 族。设 $\mathcal{H}$ 为固定图的集合，并回顾一下，$H \in \mathcal{H}$ 当且仅当 Free(H) 是一个 Gallai 族时成立。我们证明了 $\mathcal{H}$包含 $5P_1$ （定理 17）以及所有至多有 4 个顶点的线性森林（第 3节）。此外，$\mathcal{H}$包含于由 G_0 的诱导子图构成的线性森林族中（命题 1）。尚未解决的是，能否在有限多个情形下判定 $H \in \mathcal{H}$：

问题 23. 令 H 为 G_0 的一个线性森林诱导子图，使得 $5 \leq |V(H)| \leq 9$且 $H \neq 5P_1$。H Free() 是一个 *Gallai* 族吗？

我们相信，Free($6P_1$) 给出了肯定的回答（猜想18）。事实证明，$3P_3$ 和 $P_7 + 2P_1$ 是 G_0 中仅有的两个具有 9 个顶点的线性森林诱导子图，因此也是仅有的 9 顶点固定子候选，如下所示。

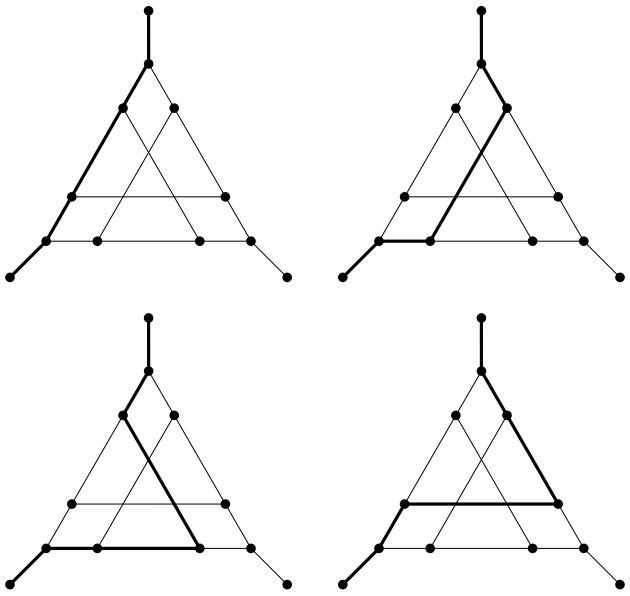

图 6： G_0 中包含两个度为 1 的顶点的诱导路径 G_0.

注 24. 图 $3P_3$ 和 $P_7 + 2P_1$ 是 G_0的仅有的 9 个顶点的线性森林诱导子图。论证如下。设 H 是 G_0 中一个有 9 个顶点的诱导线性森林，并设 $P = v_1 \cdots v_i$ 是 H中的一条最长路径。

先假设 P 在 G_0中包含两个度为 1 的顶点。由于 P 的前 3 个顶点和后 3 个顶点确定了 P，容易看出，除对称情形外， P 是图 6中所示的粗体路径之一。因此， H 是 $P_7 + 2P_1$的一个副本。

最后，假设 P 在 G_0中至多包含一个度为1的顶点。我们断言$i \leq 3$。事实上，若 $i \geq 4$，则 P在 G_0中至少包含 $i - 1 \geq 3$ 个度为3的顶点，不妨设它们为 v_1、v_2、v_3。注意， v_1在 V（G_0）中有两个邻点， $-V$（H）中也有两个邻点；而 v_2和 v_3各自在 V（G_0）和 $-V$（H）中有一个邻点。由于 G_0的围长为5，这些邻点互不相同，因此 $|V$（H）$| \leq 12-4 = 8$，矛盾。现在假设 H有 k个连通分量。注意， H有 $9-k$条边，而 $G_0 - E$（H）有 $6+k$条边，其中每条边在 V（G_0） $-V$（H）中都有一个端点。由于 G_0是次三正则的，且 $|V$（G_0） $-V$（H）$| = 12 - 9 = 3$，可得$6 + k \leq 3 \cdot 3$，因此 $k \leq 3$。故 $H = 3P_3$。

在推论21中，我们观察到以下 Chv´atal–Erd˝os 型结果：对于正则图 G，若 $\alpha(G) \leq \kappa(G) + 2$，且 G 相对于 $\kappa(G)$ 足够大，则 G 包含一条哈密顿路径。我们还观察到，不能将 $\alpha(G) \leq \kappa(G) + 2$ 放宽为 $\alpha(G) \leq \kappa(G) + 5$，并以提出确定最佳可能条件的问题作结。

参考文献

[1] P. N. Balister, E. Gy˝ori, J. Lehel, and R. H. Schelp. 圆弧图中的最长路径。组合、概率与计算，13(3):311–317，2004年。[2] R. Belmonte, P. van 't Hof, M. Kami´nski, and D. Paulusma. 反馈顶点集的连通性代价。离散应用数学，217:132–143，2017年。[3] M. R. Cerioli and P. T. Lima. 图类中最长路径的交集。离散应用数学，281:96–105，2020年。[4] M. R. Cerioli, C. G. Fernandes, R. G´omez, J. Guti´errez, and P. T. Lima. 最长路径的横截集。离散数学，343(3):111717，2020年。[5] F. Chen. 匹配数较小的图中最长路径的非空交集。捷克斯洛伐克数学杂志，65(2):545–553，2015年。[6] G. Chen, J. Ehrenm¨uller, C. G. Fernandes, C. G. Heise, S. Shan, P. Yang, and A. N. Yates. 串并联图中最长路径的非空交集。离散数学，340(3):287–304，2017年。[7] V. Chv´atal and P. Erd˝os. 关于哈密顿回路的一则注记。离散数学，2(2):111–113，1972年。[8] D. W. Cranston and S. O. 连通正则图的哈密顿性。信息处理快报，113(22):858–860，2013年。[9] K. K. Dabrowski and D. Paulusma. 由两个禁诱导子图定义的图类的团宽。计算机杂志，59(5):650–666，2016年。

[10] R. J. Faudree and R. J. Gould. 哈密顿性质的禁配对刻画。《离散数学》，173(1):45–60，1997年。[11] T. Gallai. 问题4。载于 P. Erd˝os 和 G. Katona（编），《图论：1966年9月在匈牙利蒂豪尼举行的蒂豪尼研讨会论文集》，第362页。Academic Press，纽约，1968年。[12] Y. Gao and S. Shan. 不含禁配对的图中最长路径的非空交集。《离散应用数学》，304:76–83，2021年。[13] G. Golan and S. Shan. $2K_2$-自由图中最长路径的非空交集。《组合数学电子期刊》，25(2)，2018年。[14] P. A. Golovach, D. Paulusma, and J. Song. 缩小 H-自由图上着色问题的复杂度差距。《信息与计算》，237:204–214，2014年。[15] B. Gr¨unbaum. 最长路径或回路未经过的顶点。《组合理论期刊A辑》，17(1):31–38，1974年。[16] T. R. Hartinger, M. Johnson, M. Milaniˇc, and D. Paulusma. 环横截集的连通性代价。《欧洲组合数学期刊》，58:203–224，2016年。[17] A. S. Jobson, A. E. K´ezdy, J. Lehel, and S. C. White. 绕行树。《离散应用数学》，206:73–80，2016年。[18] F. Joos. 关于圆弧图中最长路径的一则注记。《数学讨论：图论》，35:419–426，2015年。[19] S. Klavˇzar and M. Petkovˇsek. 最长路径具有非空交集的图。组合艺术，29:43–52，1990年。[20] D. V. Korobitsin. 单生成图类中支配数判定的复杂性。《离散数学及其应用》，2(2):191–200，1992年。[21] D. Kr´al’, J. Kratochv´ıl, Z. Tuza, and G. J. Woeginger. 不含禁诱导子图的图的着色复杂性。载于 A. Brandst¨adt 和 V. B. Le（编），《计算机科学中的图论概念》，计算机科学讲义第2204卷，第254–262页。Springer，2001年。[22] B. Li and P. Vr´ana. 蕴含哈密顿性的非连通图禁配对。《图论期刊》，84(3):249–261，2017年。[23] J. A. Long Jr., K. G. Milans, and A. Munaro. 次线性最长路径横截集。《SIAM离散数学期刊》，35(3):1673–1677，2021年。[24] A. Munaro. 涉及非局部性质的图问题的边界类。《理论计算机科学》，692:46–71，2017年。[25] D. Rautenbach and J.-S. Sereni. 最长路径和圈的横截集。《SIAM离散数学期刊》，28(1):335–341，2014年。

[26] A. Shabbir、C. T. Zamfirescu 和 T. I. Zamfirescu。最长路径与最长圈的相交：综述。《图论与应用电子期刊》，1(1): 56–76，2013年。.[27] H. Walther。关于不存在一个顶点，使图的所有最长路径都经过该点。《组合理论杂志》，6(1):1–6，1969年。.[28] H. Walther 和 H.-J. Voss。关于图中的圈。德国科学出版社，1974年。[29] D. B. West。图论导论。普伦蒂斯·霍尔，第2版，2001年。[30] T. Zamfirescu。一个没有共点最长路径的二连通平面图。《组合理论杂志》*B*辑，13(2):116–121，1972年。[31] T. Zamfirescu。关于图中的最长路径与回路。《斯堪的纳维亚数学》，38: 211–239，1976年。[32] T. Zamfirescu。相交的最长路径或圈：简短综述。克拉约瓦大学数学与信息学系列年刊，28:1–9，2001年。