arXiv:2302.07129v1 [physics.soc-ph] 14 Feb 2023

SHEEP：用于邻近性的有符号哈密顿量特征向量嵌入

Shazia'Ayn Babul*Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford, UK

Renaud Lambiotte†Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford, UK andTuring Institute, London, UK（日期：2023年2月15日）

我们提出了一种谱嵌入算法，用于在有符号图中寻找节点之间的邻近关系，其中边可以取正权重或负权重。我们采用物理视角，构造了一个取决于节点间距离的哈密顿量，使相对嵌入距离能够产生节点之间的相似性度量。该哈密顿量存在全局最小能量构型，可将其重新表述为特征向量问题，因此计算效率较高。我们利用矩阵扰动理论表明，该嵌入会产生基态能量，可将其用于检验强平衡的存在性，并据此建立一种基于能量的方法来确定最优嵌入维度。最后，我们通过在合成网络和实证网络上开展一系列实验表明，嵌入中的所得位置可用于恢复某些连续节点属性，并且在最优嵌入中到原点的距离可以作为衡量节点"极端主义"的指标。

关键词：网络科学、谱方法、嵌入算法、有符号图

一、引言

网络是表示复杂系统的有力方式，由一组通过表示相互作用的边连接起来的节点构成 [1]。典型实例来自多个学科，包括社会学（社会接触网络）、城市基础设施（公共交通网络）或生物相互作用（基因相互作用网络）。边表示各种不同类型的相互作用，可通过边上的属性加以区分，例如边权重，从而识别关系的性质和强度。本文考察有符号网络，其中边的权重可以为正，也可以为负。一个基本例子是社交网络，其中正边表示友谊，负边表示个体之间的敌意。下文中的图采用如下约定：红色表示负边，蓝色表示正边。

符号社交网络的拓扑通常通过海德尔的结构平衡理论来理解。这是一种心理学理论，认为在人际关系中，"平衡"的结构更为有利，这与格言敌人的敌人就是我的朋友以及朋友的朋友也是朋友的说法一致 [2]。将这一概念纳入符号网络的框架后，Harary 在 [3] 中指出，某些三元符号关系模式具有"平衡"性，因此在社交网络中应更为常见。在 [4], 中，Cartwright 和 Harary 使用"平衡"一词来指一种有符号网络，其中所有环都包含偶数条负边，如图 1 所示。如今，这一条件通常称为强平衡。由于 Harary 定理证明强平衡等价于两极化，社会平衡是理解符号网络多尺度拓扑的关键；强平衡图是可聚类的，也就是说，节点可以划分为两组，组内边为正边，连接两组的边为负边 [3]。Davis 在 [5], 中利用弱平衡这一概念证明了一种较弱的可聚类条件，指不存在仅含一条负边的环。具有弱平衡性质的图可以划分为若干 k 簇，簇内为正边，簇间为负边。已有研究表明，将符号图最优地划分为k 簇（其中 k 未知）是 NP困难，因此人们提出了许多不同方法来数值求解这一问题 [6–8]。图 1 展示了强平衡、弱平衡和不平衡环的示例，而图 2 展示了一个强平衡（2 个派系）图和一个弱平衡（3 个派系）图。这些条件与伊辛自旋玻璃模型密切相关，其中负手性方格会引入几何挫折，与符号图上的不平衡k-环类似 [9]。下一节将概述相关文献，并引导读者参阅 [10] ，了解关于有符号网络性质和原理的更详细综述。

结构平衡为理解符号网络提供了一个有价值的框架，将环模式与图的可聚类性联系起来。因此，两个节点之间的关系不仅取决于它们之间连边的（局部）符号，还与整体全局拓扑有关。人们通常通过网络嵌入来研究符号网络的簇结构。网络嵌入

* shazia.babul@maths.ox.ac.uk
† renaud.lambiotte@maths.ox.ac.uk

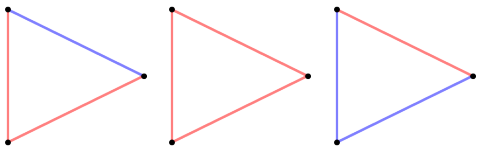


图 1：强平衡环（左）具有偶数条负边。弱平衡环（中）具有 i 条负边，其中 $i \neq 1$。不平衡环（右）只有一条负边。

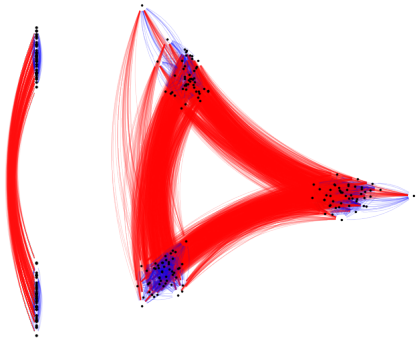


图 2：强平衡符号网络（左）具有两个对立派系，派系内部由正边连接，派系之间由负边连接。弱平衡网络（右）则可以有 3 个或更多派系。

是指一种获取节点低维表示的方法，同时考虑多尺度图拓扑。一般而言，嵌入方法有广泛的应用，从聚类到半监督节点分类皆可涵盖；推荐系统也会利用它，根据潜在（嵌入）空间中的邻近性进行推荐 [11, 12]。对于符号网络，嵌入方法通常旨在使同一派系中的节点在空间中彼此靠近，同时将不同派系彼此分开。然而，文献中有观点认为，实证网络往往并非完全平衡，而且符号社交网络趋于达到平衡的倾向，甚至可能不会随时间持续存在 [13]。具体而言，符号网络可能不存在自然的簇结构；正如 [8], 所提出的，不平衡符号社交网络的形成可能受到多种过程共同影响，包括调解、受欢迎程度差异以及内部子群敌意，因而产生不同于单凭结构平衡所能解释的模式。在不存在真实聚类时，依据连续距离变量量化节点之间的相似性或许更有用，这样便无需对派系数量和成员归属作出假设。若图中存在“调解者”，这一点尤其如此；调解者指的是与多个不同派系成员之间存在正边的节点 [8]。

本文采用物理学视角定义 SHEEP——一种基于能量的有符号网络嵌入方法，将局部、中间和全局信息纳入节点间的邻近度量。我们将节点建模为一个粒子系统，粒子之间通过吸引力（正边）和排斥力（负边）相互作用，并构造一个取决于节点间距离的哈密顿量，使相对嵌入距离能够形成相似性度量。与侧重于划分、适用于二元预测的嵌入方法不同，我们通过一系列合成网络和实证网络上的实验表明，嵌入中得到的位置可用于恢复某些连续节点属性。此外，该哈密顿量具有一个全局最小能量构型，可将其重构为特征向量问题，因此计算效率很高。在全局层面上，最低能量构型所生成的嵌入与结构平衡存在内在联系，而基态能量可用作两极化的统计检验。

本文结构安排如下。第二节概述网络嵌入方法的相关文献，尤其关注谱方法和基于能量的方法。第三节介绍我们的哈密顿量，并说明采用谱解法的动机。第四节聚焦强平衡情形。我们给出关于基态能量与图的平衡性之间关系的三项主要结果，并提出一种双极化度量。第五节将我们的方法扩展到高维，展示一种基于能量的方法，用于寻找最优嵌入维度。最后，在第六节中，我们提出有符号网络嵌入方法的两种应用：（1）根据连续节点属性在嵌入空间中的邻近性来恢复这些属性；（2）将节点到原点的距离用作“极端主义”程度的度量，并在合成生成的符号网络和实证网络上评估该方法。

A. 符号说明

对于矩阵 $M \in \mathbb{R}^{nxn}$，我们用 $\lambda_i(M)$ 表示特征值，用 $\nu_i(M)$ 表示对应的特征向量。对称矩阵 M 的特征值按如下顺序排列：$\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \ldots \geq \lambda_n(M)$，并具有对应的特征向量。我们用 $\mathbf{1}$ 表示全 1 向量。图 $G = (V, E)$ 是一个符号图，其节点集为 V，边集为 E；其中 E^+ 是正符号边集，E^- 是负符号边集，且满足 $E^+ \cup E^- = E$ 和 $E^+ \cap E^- = \emptyset$。

若 A 是图 G的邻接矩阵，则 $A_{ii} = 0$，$\forall i \in V$。下文中，我们关注无权有符号网络。对于一条边 $(i, j) \in E^+$，可知 $A_{ij} = 1$；同理，边 $(i, j) \in E^-$ 对应矩阵元素 $A_{ij} = -1$。正邻接矩阵 A^+ 定义为：若 $A_{ij} = 1$，则 $A^+_{ij} = 1$；否则为 0。类似地，负邻接矩阵 A^-_{ij} 定义为：若 $A_{ij} = -1$，则 $A^-_{ij} = -1$；否则为 0，因此 $A = A^+ + A^-$。我们还有

$D^+ =$diag(deg_1^+, $deg_2^+ ... deg_n^+$)，其中 $deg_i^+ = \sum_j A_{ij}^+$ 是正子图的度矩阵； $D^- =$diag(deg_1^-, $deg_2^- ... deg_n^-$)，其中 $deg_i^- = -\sum_j A_{ij}^-$ 是负子图的度矩阵。特别地，我们注意到 $deg_i^- \geq 0$。我们还约定，n-完全图是包含n个节点的完全图，其中每条可能的边都存在。

文献中对我们在此提及的不同拉普拉斯矩阵并没有统一的命名体系。我们依照 [14] 称其为对立拉普拉斯矩阵的矩阵，也被称为 [15]中的符号拉普拉斯矩阵。遵循 [14] 的做法，我们定义了排斥拉普拉斯矩阵；在 [16], 中，它也被称为物理拉普拉斯矩阵，在 [17], 中则称为净拉普拉斯矩阵；由于其构造与无符号图上的拉普拉斯矩阵相同，也常简称为无符号拉普拉斯矩阵。

II. 相关文献

A. 谱方法

传统上，网络嵌入方法分为两类：谱方法和物理方法，它们适用于不同的目的。有符号网络上的谱方法主要用于图聚类，而这并非我们在此的目标；不过，这仍是一个内容丰富的领域，下面我们将概述相关文献。有符号图上的谱聚类始于 [18], ，其中作者提出了一种通过最小化与模块度矩阵相关的目标函数来进行聚类的方法。在 [15], 中，Kunegis 等人提出了一种使用对立拉普拉斯矩阵的谱方法，该矩阵定义于$^-$ $^-$，其中 $L_o = D - A$ 是与该图的无符号版本对应的对角矩阵，其度数按$\sum_j |A_{ij}|$获得。该方法使用对立拉普拉斯矩阵的前两个特征向量，将有符号图嵌入二维空间。由对立拉普拉斯矩阵产生的内积并非嵌入空间中距离的函数；与我们在此提出的物理启发方法不同，正连接派系之间负连接的多少不会影响最终位置。具体而言，对立拉普拉斯矩阵能够识别图是否强平衡，却无法表明节点间负交互的强度。在 [19], 中，研究表明，将对立拉普拉斯矩阵方法扩展到更高维度存在显著缺陷；作者因此提出了一种改进方法，通过最小化称为平衡归一化割的目标函数来实现。与此相关的是，在 [20], 中，作者将这一对立拉普拉斯矩阵的归一化版本用作基础，在给定一组输入节点的情况下寻找局部最优的极化社群。在 [21], 中，Curcuringu 等人构造了一种正则化谱算法，即使在图较为稀疏时，也能特别有效地恢复聚类。

与我们此处工作最相似的是 [22] 的工作，其中 Knyazev 使用排斥拉普拉斯矩阵 $L_r = D - A$ 其中 D 是邻接矩阵 A的行和对角矩阵，其取值可以为正也可以为负。Knyazev 从机械学视角指出，使用排斥拉普拉斯矩阵可以有效地对有符号图进行聚类，将聚类建模为具有负弹簧的质弹簧系统的特征模态。该图使用 k 个最小特征向量进行聚类，其中通过寻找最大的特征值间隙来选择 k 。尽管我们在此也提出使用相同的拉普拉斯矩阵，但我们采用基于能量的方法，寻求邻近关系而非聚类，并证明基态能量是用于极化的统计检验。在 [16],中，作者对 Gremban扩展的特征值应用 QR分解以获得聚类。Gremban扩展是一个与有符号网络上的随机游走过程相关的矩阵 [23]。 [24] 简要回顾了用于有符号图的相关谱聚类方法，比较了对立拉普拉斯矩阵、排斥拉普拉斯矩阵和 Gremban扩展。 [25] 中提出的一种方法通过最大化与邻接矩阵二次型相关的目标函数，寻找允许存在“中立”参与者的两极化网络的二分划分。尽管该方法使用了谱方法，但所得优化问题是NP难的，因此只能获得近似解。该方法已在 [26]中扩展到 k-聚类。正如 [21], 所指出的，大多数谱嵌入方法先验地固定聚类数量 $k+1$，使用 k 个最小特征向量嵌入节点，最后应用 K 均值分析来识别聚类。在我们提出的方法中，我们使用能量最小化方法来选择最优嵌入维度。

B. 物理方法

用于研究符号网络的基于能量的技术，主要被用于检测聚类，例如 [7, 27], 中提出的方法，其哈密顿量是节点簇分配及节点之间边的符号的函数。这些方法借鉴了自旋玻璃文献，使用模拟退火来寻找最优的簇分配。然而，对于无符号网络，连续型基于能量的技术则是另一类重要的图嵌入方法。通常，人们通过为边赋予吸引力和排斥力来设定能量函数，并采用优化算法寻找最低能量构型。对于无符号图，边通常被建模为吸引力，而所有节点彼此排斥，以实现美观的二维布局。 [28] 中提出的弹簧嵌入方法是最早的力导向模型之一，它将节点视为电荷，并用弹簧对边进行建模。Fruchterman 和 Reingold 在 [29] 中进一步改进了用于寻找最低能量构型的算法。在 [30], 中，Kamada 和 Kawai 提出了一种算法，将边视为弹簧，其自然长度等于图的理论距离。

在 [31], 中，Kermarrec 等人提出了一种基于能量的方法，用于在二维空间中绘制有符号图以检测符号聚类；该方法使用对数能量函数，正如 [32] 中为在无符号图中寻找社群而提出的函数。

除非所选的能量函数严格凸，否则基于力的方法所采用的优化算法只能找到局部极小值；对于图绘制而言，这已足够。在这里，我们则构造一个具有全局极小值的哈密顿量。我们借鉴了 SpringRank，这是一种受物理启发的模型，它使用基于弹簧势的哈密顿量 [33]，沿一条一维直线为有向无符号网络中的节点生成层级排名。SpringRank 哈密顿量定义如下：

$$H(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}(s_i - s_j - 1)^2 \tag{1}$$

SpringRank 哈密顿量具有全局极小值，因此可以对基态能量进行统计比较，以确定层级结构是否显著。接下来，我们将 SpringRank 方法推广到无向符号网络：通过定义一个由排斥力和吸引力之和构成的哈密顿量，将节点嵌入 k 维空间，其中排斥力和吸引力分别对应负边和正边，并求得全局最小能量构型。

III. 弹簧/反弹簧符号图哈密顿量

A. 哈密顿量

有符号网络上基于弹簧力的哈密顿量推广如下构造。假设每个节点 i 在度量空间 $\mathbb{R}^k$中都有一个关联的位置向量$\mathbf{x}_i$ 。正边被建模为弹簧吸引力，负边则对应一种“反弹簧”排斥力，其关于距离同样呈二次关系。

$$H = \sum_{i,j} A^{+}_{ij}|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 + \sum_{i,j} A^{-}_{ij}|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 \tag{2}$$

哈密顿量的第一项在正向连接的节点之间距离最小时达到最小值，而第二项则要求负向连接的节点之间距离尽可能大。我们旨在找到一组位置向量$\{\mathbf{x}_i\}$，以描述最低能量构型。当两个节点之间存在负边时，将它们推至无限远或许能使其相互作用项最小化。因此，我们在式 2 中引入一个约束，以控制距离的“爆炸”。

B. 与谱方法的关系

在介绍约束之前，我们先说明所提出的基于能量的嵌入与谱方法之间的关系。由于具有强平衡性的图可以划分为两个派系，因此本节余下部分将只考虑一维嵌入。向量 $\mathbf{x}$ 表示描述 n 节点沿直线位置的 n维向量 x_i 。

在 [14], 中，作者介绍了两种符号图拉普拉斯矩阵。图中正边部分的拉普拉斯矩阵为 $L^+ = D^+ - A^+$。负图拉普拉斯矩阵有两种可能，对应着符号拉普拉斯矩阵的两种可能。对立拉普拉斯矩阵：

$$L_o = D^+ - A^+ + D^- - A^- \tag{3}$$

以及排斥拉普拉斯矩阵：

$$L_r = D^+ - A^+ - D^- - A^- \tag{4}$$

这两个矩阵在向量$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$上诱导出二次型。注意， x_i 是与节点 i关联的标量值。对立拉普拉斯矩阵诱导出的二次型为：

$$\mathbf{x}^T L_o \mathbf{x} = \sum_{i,j} A^{+}_{ij}|x_i - x_j|^2 - \sum_{i,j} A^{-}_{ij}|x_i + x_j|^2 \tag{5}$$

以及排斥拉普拉斯矩阵：

$$\mathbf{x}^T L_r \mathbf{x} = \sum_{i,j} A^{+}_{ij}|x_i - x_j|^2 + \sum_{i,j} A^{-}_{ij}|x_i - x_j|^2 \tag{6}$$

对于一维位置向量，由排斥拉普拉斯矩阵得到的二次型等价于式 2 中提出的弹簧启发的哈密顿量。排斥拉普拉斯矩阵是实对称矩阵，因此其特征向量可以选为相互正交。由于该矩阵的行和为零，因此它有一个与特征向量 $\mathbf{1}$ 对应的特征值 0。与此前用于谱嵌入的对立拉普拉斯矩阵不同（如 [15] 所示），排斥拉普拉斯矩阵是不定的；对立拉普拉斯矩阵之所以适用，是因为它是半正定的。从物理视角来看，排斥拉普拉斯矩阵描述了一种哈密顿量：由于排斥力的能量随距离的平方增长，它允许距离发生“爆炸”。

C. 球面约束

按照 [34] 提出的图中节点排序方法，我们施加球面约束条件 $\sum x_i^2 = R$。这对应于在拉格朗日乘子约束下，使与排斥拉普拉斯矩阵相关的二次型最小化，即：

$$\mathbf{x}^T L_r \mathbf{x} - \beta(\sum x_i^2 - R) \tag{7}$$

求梯度后，可得到特征值 λ对应的特征向量 ν 满足以下方程:

$$L_r\nu = \lambda\nu \tag{8}$$

最小特征值与特征向量 ν_n相关联，该特征向量经过归一化，使得 $\nu_n^T\nu_n = R$。因此，哈密顿量的最小值为:

$$H(\nu_n) = \nu_n^T L_r \nu_n = \lambda_n R \tag{9}$$

球面约束本身是非凸的，但像排斥拉普拉斯矩阵这样的对称矩阵可以对角化为:

$$L_r = UDU^{-1} \tag{10}$$

其中， U 是一个正交矩阵，它将$\mathbf{x}$ 映射到单位 n球面上的另一个点。由此可知，哈密顿量的全局最小值由公式 9 的最小特征值给出。下文中我们取 $R = 1$。需要注意的是，不同于其他需要优化过程的基于力的方法，在球面约束下求哈密顿量的最小值可归结为一个特征值问题，其计算效率要高得多。

我们在此指出， [35, 36], 采用了一种相关方法，以邻近性代替划分；作者描述了一种二维图绘制技术，利用邻接矩阵的最小特征值，将符号网络绘制到“冲突空间”中。使用排斥拉普拉斯矩阵的优势源于公式 2 所体现的系统物理性，以及由此产生的与网络相关的能量。我们还展示了如何将我们的方法推广到高维，这是图绘制 方法与图嵌入 方法之间的关键区别。

IV. 基态能量与强平衡

在本节中，我们利用系统的物理性质，提出一种用于检验两极化的统计量，即基态能量，记作 E^0。与伊辛模型类似，当负环未引入几何挫折时，基态能量达到最低；我们希望证明，当图呈现强平衡时，我们的哈密顿量的基态能量达到最小值。如果检验统计量显著，那么它在零模型下出现的概率应极低。由于基态能量取决于网络结构的诸多方面，我们重点考察以下零模型：固定图拓扑，随机重新排列边的符号，同时保持正边与负边的密度不变，如 [37, 38] 所示。如果真实网络的基态能量低于零模型生成的网络，那么我们可以得出结论：该网络具有显著的潜在双极化结构。由于基态能量我们的哈密顿量的基态能量是排斥拉普拉斯矩阵的最小特征值，因此我们在此介绍完全图的排斥拉普拉斯矩阵谱的一些新结果，并通过数值方法将这些结果推广到非完全图。

A. 排斥拉普拉斯矩阵：谱结果

我们考虑具有n 个节点的完全符号图集合，其满足条件 E^+, $E^- \neq \emptyset$, 记作 $\{G^n\}$。我们提出三个结果: (1) 最小特征值 λ_n 的下界为 $-n$。(2) 当图具有完美二分（强平衡）时，将达到下界 $\lambda_n = -n$ 。(3) 通过切换边符号引入挫折会严格增加基态能量的值。这些结果促使我们将基态能量用作两极化度量，或强平衡度量。

定理1。 对于满足条件 E^+、$E^- \neq \emptyset$的 n 阶完全符号图，排斥拉普拉斯矩阵的最小特征值为 $\lambda_n \geq -n$。

证明详见附录，主要步骤如下。从所有边均为负边的 n-完全图出发，可以很容易地证明，其谱为 $-n$ ，重数为 $n-1$，以及 0，重数为 1。任何其他带符号的 n-完全图，都可以通过逐次将边符号改为正边得到；这相当于在排斥拉普拉斯矩阵中加上一个 L^{shift} ，且该矩阵是半正定的。对两个拉普拉斯矩阵之和应用韦尔不等式，即可得出所需结果。

接下来，我们证明当图是强平衡图且存在二分划分时，下界可以取到。

定理 2。 考虑一个强平衡图 $G \in \{G^n\}$，使得图 G 的节点可以划分为两个集合 V_1 和 V_2，其中 V_1, $V_2 \neq \emptyset$。每个集合内部的节点由正边连接，而连接两个集合的边为负边。排斥拉普拉斯矩阵的最小特征值为 $\lambda_n = -n.$

同样，证明留待附录给出。大致而言，我们通过将同一集合中的节点放置在同一点，构造与最小特征值 λ_n 关联的特征向量 ν ，使得对于节点 $k \in V_i$ ，我们设定 $\nu_k = x_i$, 其中 $i \in$ (1,2)。利用特征向量的正交归一性，我们可以证明相应的特征值为 $-n$。

$$E^0_{bal} = \lambda_n = -n \tag{11}$$

根据定理1，这就是最小特征值。根据定理1和定理2，当图无挫折且具有符合强平衡的完美二分时，基态能量达到下界。

当图处于“挫折”状态时，我们要证明基态能量 E^0_{frus} 高于式11中给出的平衡图 E^0_{bal} 对应的能量，即 $-n$。我们比较节点数相同（ n）、正边和负边密度也相同的图。

定理 3。 考虑一个强平衡图 $G \in \{G^n\}$，其图 G 的节点可以划分为两个集合 V_1 和 V_2，其中 V_1、$V_2 \neq \emptyset$。通过切换两条边的边符号，将受挫引入该图中。当图足够大以满足$n > 4$，且 V_1、$V_2 > 2$时，基态能量严格增加 $E^0_{frus} > E^0_{bal}$。

证明涉及将受挫图的排斥拉普拉斯矩阵写成平衡图 L^G_r 的排斥拉普拉斯矩阵与一个扰动项之和，L^{switch}，该扰动项与一条正边和一条负边的边符号切换有关。由于两个项 L^G_r 和 L^{switch} 无法同时最小化，因此新图是“受挫的”。求出平衡图 L^G_r的排斥拉普拉斯矩阵的第二小特征值的一个界，可以近似得到基态与第一能级之间的“能隙”。当图足够大以满足$n > 4$，且 V_1时，$V_2 > 2$我们可以利用能隙从下方界定基态能量，从而得到所需的不等式。实际上， $n > 4$ 是一个较弱的约束，因为大多数感兴趣的图都包含超过四个节点。

$$E^0_{frus} > -n = E^0_{bal} \tag{12}$$

B. 双极化度量

根据完全有符号图上排斥拉普拉斯矩阵谱所提供的直觉，我们通过数值计算将其推广到非完全图的情形。结果表明，与零模型相比，基态能量是衡量两极化的统计显著指标。该检验能够正确识别具有强平衡的各种合成符号图中的极化结构。我们提出一种双极化得分：将图的基态能量与零模型能量分布进行比较，并使用其 z 分数。定义如下：

$$Z(G) = \frac{E^G_0 - \langle E_0 \rangle}{\sigma} \tag{13}$$

其中， $\langle E_0 \rangle$ 是零模型分布的均值， σ 是标准差。$Z(G)$ 的值若显著为负，则表明该图具有显著的极化。

已有多种针对有符号网络的两极化度量方法，通常关注图的局部或全局属性。例如， [39]提出了一种平衡度量，用于统计图中

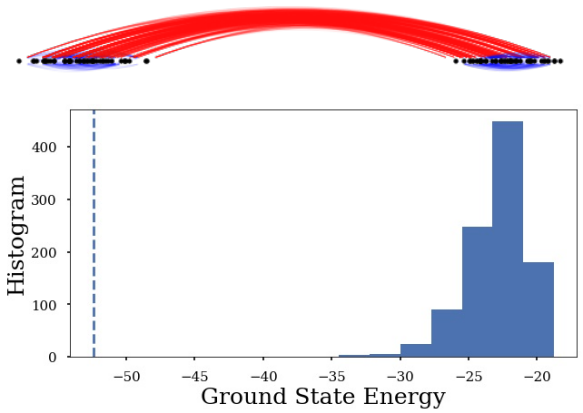


图 3：使用 SHEEP 将双社区 SSBM 嵌入一维空间（上）。零模型 1000 次实现的基态能量直方图，其中 SSBM 的基态能量以虚线标出（下）。

不平衡环的数量，并按环长度进行反向加权。一种更具全局性的度量是挫折指数，它统计最佳二分划分 [40]所对应的挫折边数量。一种介于两种尺度之间的度量 POLE，则基于边符号应与无符号社群结构相关这一假设，计算节点的有符号随机游走与无符号随机游走之间的相关性 [41]。我们的度量同时纳入局部和全局结构，并可用于比较规模和边密度固定的网络。

我们在具有极化结构的合成有符号网络上，对两极化度量进行数值测试。带符号随机块模型（SSBM）是一种合成图，其中有 n 个社区，社区内部的边为正边，社区之间的边为负边。这里，我们展示了社区规模相等的双社区 SSBM 的结果 [50,50]。对于每一对节点，连边概率（正边或负边）均为 0.5。由于这类图显然具有二分划分，因此也满足强平衡。图3展示了 SSBM 的 SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵的第一特征向量）嵌入，红色表示负边，蓝色表示正边。直方图将平衡 SSBM 的基态能量与零模型的 1000 次实现进行了比较。所得两极化度量 $Z(G_{bal})$ 为 -12.24，正确识别出高度显著的两极化结构。接下来，我们以 0.2 的概率翻转 SSBM 中每条边的符号，从而引入噪声。图4展示了噪声图的基态能量及零模型分布。对于 SSBM 的初始实现， $Z(G_{0.8})$ 得分为 -4.87，仍具有显著性。由于图3和图4中的两个 SSBM 具有相同数量的节点和边，因此可以比较它们的两极化得分，并正确得出无噪声图的极化程度更高。

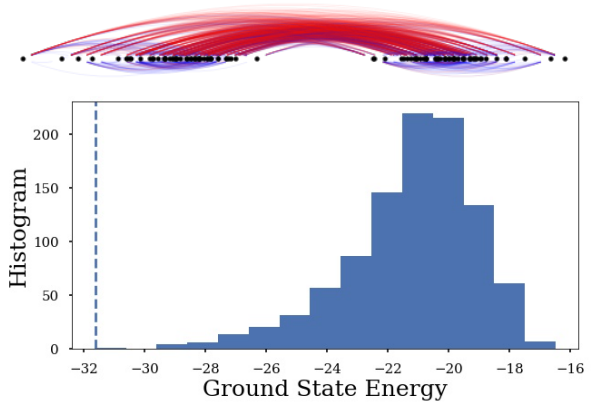


图 4：采用 SHEEP 将边符号以 0.2 的概率翻转的双社区 SSBM 嵌入一维空间（上）。零模型 1000 次实现的基态能量直方图，虚线表示 SSBM 的基态能量（下）。

V. 弱平衡与向高维的推广

在一维情形下，我们可以从强平衡的角度理解图，因为二分划分可以投影到一维直线上。弱平衡图是 k 可聚类的，这意味着它们可以划分为 k 个派系。这也意味着，使用一维投影可能无法表示节点之间的关系。对于含噪声和不平衡图而言，这一点尤为重要；可能需要更多维度，才能确保嵌入中节点之间的距离能够体现一种考虑了全局图结构的邻近度量。

在此，我们基于 n 阶完全图的排斥拉普拉斯矩阵的一个谱结果，提出一种向高维推广的基于能量的方法。通过将式 2 中的哈密顿量改写为距离的函数，我们（1）证明，n-完全负图需要一个 $n-1$ 维嵌入，该嵌入由前 $n-1$ 个特征向量给出；（2）我们认为，对于非完全图，可以通过找出距离哈密顿量随维度变化时的能量最小值，确定最佳维度。

A. 完全图上的结果

高维广义哈密顿量的灵感来自 n完全负图的谱，它可以轻而易举地聚类为 n 个对立派系。直观而言，最优嵌入应将这些 n 个节点置于彼此等距的位置，因为根据式 2，哈密顿量中作用于每个节点的排斥力相等。这些位置可以用一个（平方）距离矩阵 D 表示，其元素为：

$$D_{ij} = a, \forall i \neq j \in \mathcal{V} \tag{14}$$

其中 $D_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2$，且 $a \not\to \infty$ 这是由球面约束所致。在欧几里得空间中排列 n 个等距点需要 $n-1$ 个维度。我们确实可以使用排斥拉普拉斯矩阵恢复这个 $n-1$ 维嵌入，方法如下。与 n完全负图对应的排斥拉普拉斯矩阵形式如下：

$$L_r = \begin{pmatrix} -(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -(n-1) \end{pmatrix}$$

利用 $L_r = -nI + J$，其中 J 是全 1 矩阵，我们得到 L_r 的特征值为

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} .... = \lambda_2 = -n \tag{15}$$

$$\lambda_1 = 0 \tag{16}$$

最小的 $n-1$ 个特征值对应于 $n-1$ 个正交归一特征向量 $\nu_n ... \nu_2$，它们描述了哈密顿量 9 中能量相同的构型。

我们使用 $\mathbf{a}_i = (\nu_n^i, \nu_{n-1}^i, ... \nu_2^i)$ 定义 n 个 $n-1$ 维点。点集 $\mathbf{a}_i$ 定义了一个 $(n-1)$-多胞体，其中每个点到其他点的距离都相等。为此，注意由 $A = \frac{-1}{n} L_r$ 定义的矩阵，其特征值 1 的重数为 $n-1$，特征值 0 的重数为 1。它也是对称矩阵，且与 L_r 具有相同的特征向量，其元素形式如下：

$$A_{ii} = \frac{n-1}{n}$$

$$A_{ij} = \frac{-1}{n}, \forall i \neq j$$

因此，它可以使用非零特征向量进行奇异值分解：

$$A = UU^T \tag{17}$$

其中 $U = (\nu_n, \ \nu_{n-1} ... \nu_2)$。矩阵 A 的元素等价于位置向量$\mathbf{a}_i$的内积，或 $A_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$。由于点积与欧几里得距离之间的关系如下：

$$|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|^2 = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_j - 2(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) \tag{18}$$

由此可得，对于所有 $i \neq j$，$|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|^2 = 2$。我们已经证明，$n$-完全负图的排斥拉普拉斯矩阵的最小特征值的重数，给出了将该图嵌入到 $n-1$ 维空间中的坐标。

B. 高维广义哈密顿量

接下来，我们重新定义式 9 中的一维哈密顿量，使其涵盖高维。我们将证明，负 n-完全图

嵌入在 $n-1$ 维中的基态能量最低。若将式 2 中的哈密顿量重写为距离矩阵的函数，问题会更简单。将特征向量按特征值 $\{\nu_n, \nu_{n-1}, ...\nu_2, \nu_1\}$升序排列。令距离矩阵 $D(k)$对应于使用前 k个特征向量得到的节点位置之间的距离，使得：

$$D(k)_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 = \sum_{l=n}^{n-k}(\sum_{i,j}|\nu_l^i - \nu_l^j|^2) \tag{19}$$

其中， ν_l 是排斥拉普拉斯矩阵的第 l个特征向量。因此， $\mathbf{x}_i$ 是使用前 k 个特征向量构造的第 i个节点的 k 维位置向量。距离矩阵 $D(k)$关于维度呈线性关系，具体而言，若 $D(\nu_l)_{ij} = |\nu_l^i - \nu_l^j|^2$ 是与第 l个特征向量相关联的距离矩阵，则：

$$D(k) = \sum_{l=n}^{n-k} D(\nu_l) \tag{20}$$

式 2 中的哈密顿量可以用距离矩阵 $D(k)$表示：

$$H(D(k)) = \sum_{i,j} A_{ij}^+ D(k)_{ij} + \sum_{i,j} A_{ij}^- D(k)_{ij} \tag{21}$$

其中，在一维情况下，

$$H(D(1)) = \sum_{i,j} A_{ij}^+ D(\nu_n)_{ij} + \sum_{i,j} A_{ij}^- D(\nu_n)_{ij} = \lambda_n \tag{22}$$

该哈密顿量同样关于维度呈线性关系，如下所示：

$$H(D(k)) = \sum_{l=n}^{n-k} H(D(\nu_l)) \tag{23}$$

其中， $H(D(\nu_l))$就是 λ_l，即与第 l个特征向量相关联的特征值。因此，我们有：

$$H(D(k)) = \sum_{l=n}^{n-k} \lambda_l \tag{24}$$

由于线性性质，只要满足 $\lambda_k \leq 0$，作为距离函数的哈密顿量就会随着维度增加而显著降低，因为每增加一个维度，节点之间就能相隔更远。这也可以通过观察距离矩阵的范数会随着维度增加而增大来理解。为了比较不同嵌入维度下得到的能量，一个自然的做法是用距离矩阵的范数对哈密顿量进行归一化，即除以项 $\sqrt{(\sum_{i,j}(D(k)_{ij})^2)}$。最后，我们得到高维广义哈密顿量：

$$\tilde{H}(D(k)) = \frac{\sum_{l=n}^{n-k}\lambda_l}{\sqrt{\sum_{ij}(D(k)_{ij})^2}} \tag{25}$$

回到 n 完全负图的情形，我们将证明高维广义哈密顿量在 $k = n-1$ 维时达到最小值。由于所有可能的边都存在且均为负，

$$H(D(k)) = -\sum_{i,j} D(k)_{ij} = -\sum_{l=n}^{n-k}\sum_{i,j} D(\nu_l)_{ij} = \sum_{l=n}^{n-k}\lambda_l \tag{26}$$

记 $vect(D(k))$为对应于前 k 个特征向量的向量化距离矩阵，不含对角项（其值显然为 0），因此其长度为$n(n-1)$。对于 $k \leq n-1$，由式 25 可得：

$$\tilde{H}(D(k)) = \frac{-kn}{|vect(D(k))|} \tag{27}$$

根据柯西–施瓦茨不等式，

$$vect(D(k)) \cdot \mathbf{1} \leq |\mathbf{1}||vect(D(k))| \tag{28}$$

其中 $vect(D(k)) \cdot \mathbf{1} = \sum_{ij} D(k)_{ij}$ 且 $|\mathbf{1}| = \sqrt{n(n-1)}$。根据式 26， $\sum_{ij} D(k)_{ij} = kn$。接下来，我们结合式 27 和式 28，得到：

$$\tilde{H}(D(k)) = -\frac{kn}{|vect(D(k))|} \geq -\sqrt{n(n-1)} \tag{29}$$

除非一个向量是另一个向量的标量倍数，否则柯西–施瓦茨不等式为严格不等式。如果$vect(D(k))$ 是 $\mathbf{1}$ 的标量倍数，这意味着这些点之间的距离都相等；显然，只有在$k \geq n-1$ 维度时才可能如此。事实上，回顾式 14，在$k = n-1$ 维度下，距离矩阵为：

$$D(n-1)_{ij} = 2, \forall i \neq j \tag{30}$$

使得 $vect(D(n-1)) = 2\mathbf{1}$。由此可得：

$$\tilde{H}(D(k)) \begin{cases} > -\sqrt{n(n-1)}, & \text{for } k < n-1 \\ = -\sqrt{n(n-1)}, & \text{for } k = n-1 \end{cases}$$

或者说，能量恰好在 $k = n-1$ 维度下取得严格最小值，这正是我们需要证明的。

C. 推广至非完全图

借助 n-完全负图的直觉，可以将这一过程数值推广到非完全图，以找到表示邻近节点关系的最佳维度。我们试图最小化文中给出的高维广义哈密顿量

式 25 中的广义哈密顿量，将其视为 k 的函数，从而找到使基态能量最小的嵌入维度。请注意，即使 $\lambda_{k+1} < 0$，增加第 $k+1$ 个维˜ ˜度仍可能因归一化因子而增加能量 $H(D(k+1)) > H(D(k))$。这与 [22] 中提出的想法有关：使用 k 个最小特征向量进行嵌入，其中 k 通过寻找最大的特征值间隙来确定；不过，这里以物理能量函数的形式对这一论点进行了形式化。

一般而言，即使有符号网络具有 n 真实聚类，所需维度k 与 n聚类性之间的关系也很复杂。具体来说，如果派系之间负向作用力的权重有利于较低维度的嵌入，那么就可以在$k < n-1$维空间中表示 n 派系之间的距离。为说明这一点，假设矩阵 D^* 表示使哈密顿量最小化的节点间距离集合。令 D 为将 D^*各项平方后得到的矩阵。根据 Schoenberg 定理（见 [42]），这些距离能够嵌入欧几里得空间的条件是：

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 0 \implies \sum_{i,j} \xi_i \hat{D}_{ij} \xi_j \leq 0 \tag{31}$$

假设 D 满足式 31。定义 $n-1$ 方阵 C^* 如下：

$$C^*_{ij} = \frac{1}{2}(D^{*2}_{in} + D^{*2}_{jn} - D^{*2}_{ij}) \tag{32}$$

那么，欧几里得嵌入所需的最小维度为 [43]：

$$k_{min} = rank(C^*) \tag{33}$$

作为一个更直观的例子，考虑一个包含节点 i、j、k 的 3-完全负图，其边权重定义为使 $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = 2$、$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k| = 3$ 和 $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j| = 5$成为使哈密顿量最小化的距离。尽管有 3 个“派系”，只需一个维度即可完成嵌入，只要将节点 i 放在节点 j 和 k之间。因此，我们再次强调，能量最小化旨在找到能够产生最佳邻近度量的维度，而不是弱平衡聚类的数量。

图5展示了不同社区数量、社区规模和符号翻转概率的符号随机块模型的各种实现对应的归一化能量与维度关系图。图5A展示了边概率为0.5、社区规模在20到50之间随机生成的3社区符号随机块模型中，归一化能量随维度变化的关系。对于10个实现中的每一个，能量都在 $k = 2$处达到最小值，即表示3个社区的预期维度。同样，图5B展示了带噪声的3社区符号随机块模型（边符号翻转概率为0.1）的能量与维度关系图，其中最小值仍在 $k = 2$处取得。图6展示了3社区

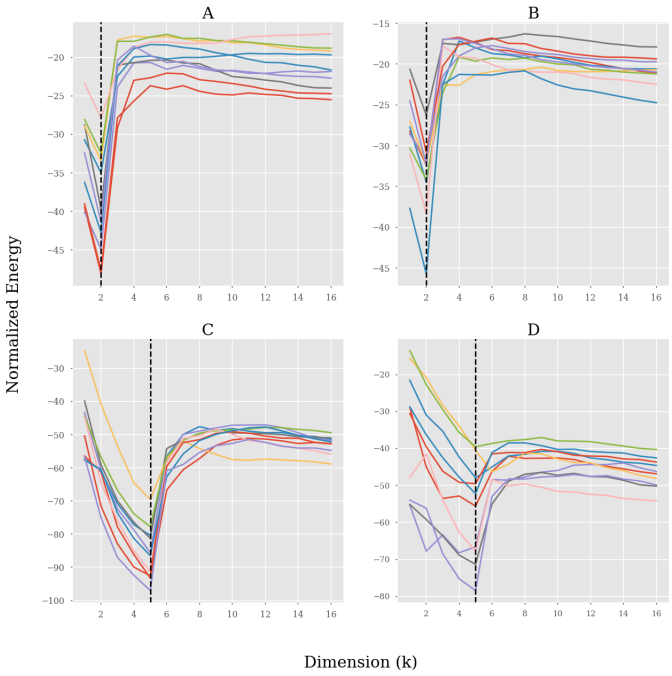


图 5：10 次不同符号随机块模型实现的归一化能量 $\tilde{H}(D(k))$ 与维度 k 的关系。虚线表示能量最小值。A）边概率为 0.5、社区规模在 20 到 50 之间随机生成的 3 社区符号随机块模型。如预期，能量最小值明显出现在 $k = 2$。B）边概率为 0.5、社区规模在 20 到 50 之间随机生成，并以 0.1 的概率发生符号翻转的 3 社区噪声符号随机块模型。对于这些实现，能量最小值仍出现在 $k = 2$。C）边概率为 0.5、社区规模在 20 到 50 之间随机生成的 6 社区符号随机块模型。如预期，能量最小值明显出现在 $k = 5$。D）边概率为 0.5、社区规模在 20 到 50 之间随机生成，并以 0.1 的概率发生符号翻转的 6 社区噪声符号随机块模型。对于大多数实现，能量最小值仍出现在 $k = 5$，但可能因实现中的派系规模和随机变化而有所不同。

符号随机块模型的两个实现的二维SHEEP嵌入，其中边符号分别带有噪声和不带噪声。当符号随机块模型的社区数量增加到6个（如图5C所示）时，对于10个实现中的每一个，最小能量均在维度$k = 5$ 处取得。对于带噪声的6社区符号随机块模型（如图5D所示），大多数实现的能量最小值在 $k = 5$ 处取得，但也可能因派系规模和噪声而有所变化。

六、应用

A. 基于邻近性的节点属性

由于我们构造的哈密顿量是距离的函数，SHEEP 旨在表征节点邻近性，同时考虑局部和全局相互作用。基于这一洞见，我们将展示如何利用 SHEEP 恢复连续节点属性。我们强

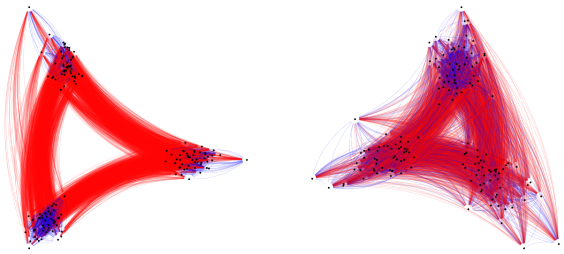


图 6：包含 50 个节点社区、边概率为 0.5 的 3 社区符号随机块模型，使用 SHEEP 进行嵌入（排斥拉普拉斯矩阵的前两个特征向量）。无边符号翻转（左）和符号翻转概率为 0.2（右）。

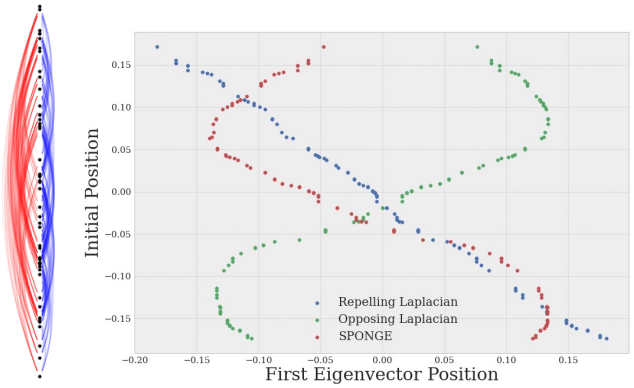


图 7：根据 0.2 的阈值分配边符号后，50 个节点的位置（左）。对于阈值为 0.1 的 100 节点图，将生成的节点位置与 SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵）、对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE 的第一特征向量位置进行对比绘图（右）。初始位置与 SHEEP嵌入位置之间具有很高的相关性。

调，专为聚类设计的嵌入方法尤其擅长预测二元变量（边符号），而 SHEEP 则提供了一种连续度量，用于理解节点关系及其相对极端程度。在附录B中，我们通过若干可视化示例展示了这一区别，这些示例涵盖了不同的合成图，并将 SHEEP 生成的嵌入与另外两种谱方法——对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE [21]——进行了比较。在下一节中，我们将定量评估这些方法在合成生成的有符号网络和实证有符号网络上的表现。

1. *Rankings on Generated Synthetic Graphs*

由于 SHEEP 哈密顿量是距离的函数，因此两节点之间边的符号与嵌入结果中的节点间距离相关。在一维情况下，SHEEP 嵌入生成的位置近似于节点的一种排序：排序中彼此越接近的节点，其正连接越多。在本实验中，我们在 -1 到 1 之间按均匀分布随机放置节点，并将得到的位置向量归一化为 1，由此生成完全有符号图。该符号图以确定性方式构建：若两节点间距离小于选定阈值，则以正边连接，否则边符号为负。图 7（左）展示了 50 个节点的初始分布，边符号根据 0.2 的阈值确定。我们使用排斥拉普拉斯矩阵的第一个特征向量生成一维 SHEEP 嵌入，并通过计算肯德尔秩相关系数，将所得节点排序与初始位置进行比较；下文将其记为 KT相关性。由于将特征向量乘以 -1 会得到相同的特征值，但节点排序相反，因此我们取 KT相关性的绝对值。我们还将 SHEEP 与对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE 进行比较。这两种谱方法原本是为聚类设计的；比较结果发现，我们的方法更善于恢复序数信息。

图 7（右）展示了某次生成的图实现中，节点生成位置与由第一个特征向量确定的位置之间的关系图；该图有 100 个节点，阈值为 $= 0.1$。与对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE 不同，SHEEP 嵌入能够恢复初始节点排序。图 8 和图 9 分别展示了在多次初始节点分布实现以及不同阈值下得到的 KT相关性，对应 $n = 50$ 个和 $n = 100$ 个节点。对于 $n = 100$ 的情况，节点密度更高，因此选取的阈值较低。SHEEP 非常成功地恢复了节点排序，而其他两种谱方法则不然，这证明了我们提出的基于邻近性的嵌入度量的实用性。

2. *Australian Rainfall Correlations*

在本节中，我们在一个具有真实邻近度量的经验有符号图上测试该方法。我们利用澳大利亚不同站点的季节性降雨时间序列（单位：毫米）构建皮尔逊相关矩阵，从而得到一个包含 $n = 305$ 个节点的完全有符号图。我们通过取皮尔逊相关系数的符号来屏蔽边权重幅值，使得对于所有 $(i, j) \in E$、$(i, j) \in [-1, 1]$，均满足这一条件。请注意，皮尔逊相关系数的符号不具传递性，其取值并非简单地由相关系数的幅值决定。因此，所得有符号图并不具有完美的二分划分。 [21], 研究了同一数据集，其中作者使用 $k = 6$ 维嵌入和 $k = 10$ 维嵌入来获得站点聚类，这些聚类与真实地理区域相对应。使用我们维度更高的广义哈密顿方法，我们发现最佳嵌入维度仅为 $k = 1$。直观而言，我们可能会认为，地理位置嵌入的站点需要两个维度；然而，气象学研究表明，澳大利亚气候主要由纬度决定，这是因为一条高压带会在一年中南北移动，影响各季节的降雨模式 $n = 305$ 。由于我们的嵌入方法可用于理解邻近关系和连续的节点属性，因此我们可以将嵌入位置与南北向地理距离进行比较。理想情况下，我们的哈密顿量生成的位置应与站点纬度相关。与合成图实验一样，我们取第一条排斥拉普拉斯特征向量（一维节点位置）与纬度之间 KT相关性的绝对值（纬度与南北向距离近似呈线性关系）。同样，我们将其与对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE 进行比较。

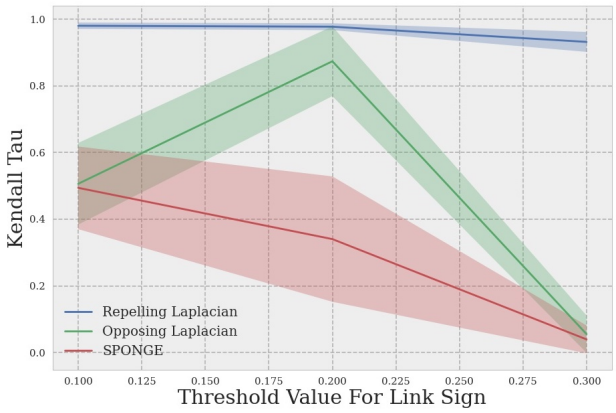


图 8：N = 50个节点；初始排名与 SHEEP、对立拉普拉斯矩阵及 SPONGE 排名之间的平均 KT相关性，基于 100 次实现。阴影区域表示标准误。SHEEP 优于其他专为聚类设计的方法。

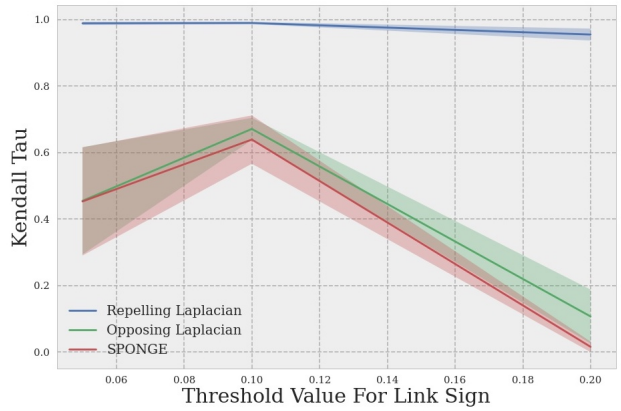


图 9：N = 100 个节点；初始排名与 SHEEP、对立拉普拉斯矩阵及 SPONGE 排名之间的平均 KT相关性，基于 100 次实现。阴影区域表示标准误。再次表明，SHEEP 优于其他专为聚类设计的方法。

点需要两个维度；然而，气象学研究表明，澳大利亚气候主要由纬度决定，这是因为一条高压带会在一年中南北移动，影响各季节的降雨模式 [44]。由于我们的嵌入方法可用于理解邻近关系和连续的节点属性，因此我们可以将嵌入位置与南北向地理距离进行比较。理想情况下，我们的哈密顿量生成的位置应与站点纬度相关。与合成图实验一样，我们取第一条排斥拉普拉斯特征向量（一维节点位置）与纬度之间 KT相关性的绝对值（纬度与南北向距离近似呈线性关系）。同样，我们将其与对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE 进行比较。

如表 I 所示，与对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE 的第一特征向量相比，排斥拉普拉斯矩阵（SHEEP）的第一特征向量具有最高的序数相关性

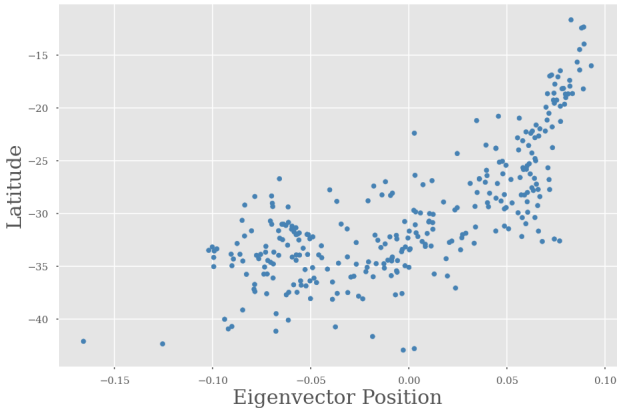


图 10：站点纬度与 SHEEP 嵌入位置的关系，位置由排斥拉普拉斯矩阵的第一特征向量得到。边权重使用符号函数进行掩码处理，(i, $j \in [-1, 1]$. KT相关性为 0.744。

与站点纬度的相关性。值得注意的是，与第一特征向量相比，SPONGE 的第二特征向量与纬度的相关性更高。正如我们将在接下来的示例中看到的，SPONGE 最佳特征向量的位置会因网络而异，因此在没有真实邻近信息的情况下，很难确定该选择哪个特征向量。图 10 展示了每个站点的 SHEEP 嵌入位置与纬度的关系，直观呈现了节点属性与嵌入之间的关系。即使没有边权重信息，SHEEP 仍能与纬度保持良好的相关性。

B. 节点极端性度量

1. *Signed Configuration Model*

在本节中，我们论证，在最优嵌入维度下，节点到原点的距离可以衡量该节点的“极端主义”或冲突性。一般而言，嵌入中节点到原点的距离既取决于局部指标（如节点的正度数和负度数），也取决于更全局的属性（如图的结构）。例如，如附录图17所示，SHEEP会将那些与其他派系之间负边较少的节点放置得更靠近原点。因此，到原点的距离由图的簇结构以及节点间负交互的强度共同决定。当图结构是随机的，我们预计局部指标和全局指标会趋于一致。我们使用有符号图配置模型，研究节点在SHEEP嵌入中到原点的距离与净度数（负度数减去正度数）之间的关系。配置模型是一种随机图模型，由给定的度数序列构建而成

表 I：澳大利亚降雨相关网络中 L_r (SHEEP)、 L_o、SPONGE 的特征向量与纬度之间的 KT相关性

KT. Corr. with Latitude	$\lambda^{r}_{n=305}$	$\lambda^{o}_{n=305}$	$\lambda^{sponge}_{n=305}$	$\lambda^{sponge}_{n=304}$
	0.744	0.719	0.178	0.733

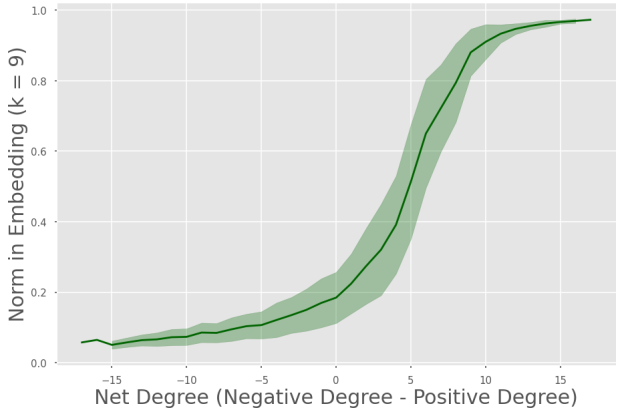


图 11：在有符号网络配置模型的 100 次实现中，SHEEP 嵌入中到原点的平均距离（ $k = 9$ 维中的范数）与节点净度数的关系，其中 $k = 9$ 是最优嵌入维度。阴影区域表示标准差。负边相对较多的节点距离原点更远。

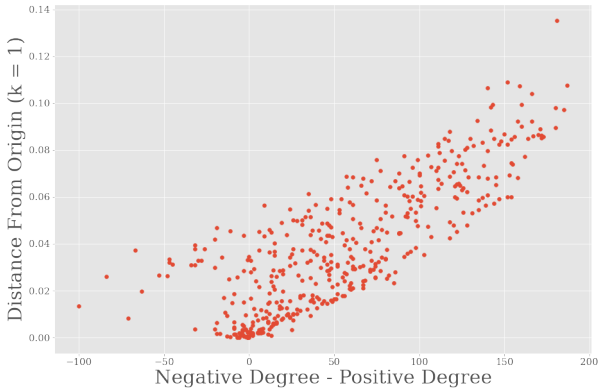


图 12：第114届国会中，到原点的距离（一维 SHEEP 嵌入）与净度数的关系。KT相关性弱于随机合成图上的相关性（ 0.614），这表明除净度数外，图结构也会影响节点的“极端主义”。

，其中每条边的“半边”都以相同的概率进行配对 [45]。

对于有符号图配置模型，我们生成两个包含 50 个节点的配置模型，其度序列由 1 到 20 之间的随机整数构成。将第二个模型的邻接矩阵减去第一个模型的邻接矩阵，得到一个随机有符号网络。在配置模型的 5000 次实现中，使用 SHEEP 得到的最常见最优嵌入维度为 $k = 9$ 。对于 $k = 9$ 为最优嵌入维度的配置模型，我们进行 100 次实现；针对每个节点，计算其净度数以及到原点的距离，后者对应其 9 维位置向量的范数。图 11 展示了各净度数对应的平均距离，阴影区域表示 100 次实现中的标准差。我们清楚地观察到二者呈递增关系：负边比例较高的节点更加“极端”，因此距离原点更远。正如下一节所述，当图并非随机图而是具有某种结构（例如派系）时，范数仍然可以衡量极端主义，且无法直接由净度数解释。

2. *Continuous Political Ideology*

在此，我们考察一个具有连续真实值节点属性的实证网络，这有助于更好地理解节点“极端主义”度量。我们选取一个有符号网络，用来表示美国众议院不同届国会议员之间的关系（此处重点考察第110届和第144届国会）。该数据集来自 [6]。在这个有符号网络中，正（负）边表示两位议员共同提案的法案数量在统计上显著多于（少于）随机情况下的预期。由于我们关注的是较近几届国会，而 Aref等人在 [6] 中指出，这些届国会沿民主党—共和党路线呈现高度两极分化，因此最优的 SHEEP 嵌入维度为 $k = 1$也就不足为奇。由于 SHEEP 表示邻近关系，我们希望了解嵌入能否在连续尺度上还原议员的政治意识形态，并考察嵌入中到原点的距离是否与政治极端主义相对应。按照 [6]，中的建议，我们使用 Nokken-Poole（NP）意识形态评分作为真实值，该评分将每位国会议员置于从 $+1$ （保守派）到 -1（自由派）的连续尺度上。这一评分在政治学中经常使用，它通过三步多维尺度分析法得出，该方法基于议员在特定届国会中的投票习惯，并以最大化其效用为目标 [46, 47]。Nokken-Poole评分是二维的，但第一维通常被视为代表左—右光谱上的政治意识形态。

第110届国会会议构成了一个包含$n = 452$ 个节点的符号图。表 II 比较了通过 SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵的第一个特征向量）、对立拉普拉斯矩阵

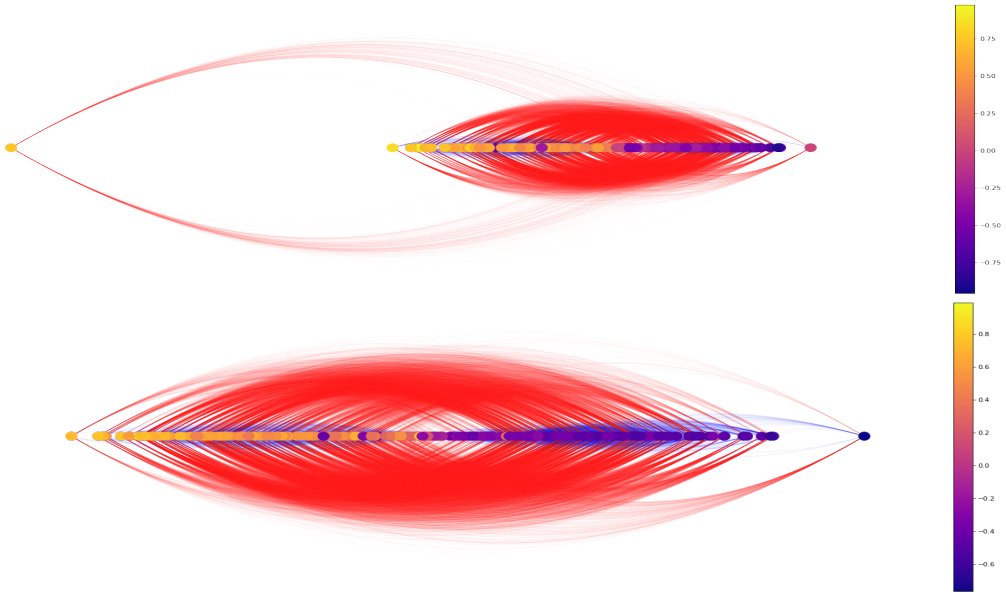


图 13：第110届国会（上）和第114届国会（下）符号网络的一维 SHEEP 嵌入。节点颜色表示从 [6] 获得的 Nokken-Poole政治意识形态评分。

和 SPONGE 得到的位置之间的 KT相关性。对于以 Nokken-Poole评分表示的意识形态，SHEEP嵌入与所选邻近度量的相关性最高。在这种情况下，SPONGE 的一个特征向量与 NP评分的相关性更高。在前十个最小特征向量中，第六个与 NP评分的 KT相关性最高。不过，正如我们将在第二种国会选择中看到的，随着网络变化，SPONGE 中表现最佳的特征向量的位置也会改变。图 13（上）展示了 SHEEP 得到的网络一维嵌入，其中节点根据 Nokken-Poole评分着色。

第114届国会形成了一个包含$n = 446$ 个节点的符号图。表 III 比较了第114届国会中，SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵的第一个特征向量）、对立拉普拉斯矩阵和 SPONGE 得出的节点位置之间的 KT 序数相关性。再次，SHEEP 与 Nokken-Poole评分的序数相关性最高。在最小的前十个特征向量中，SPONGE 的第三个特征向量与 NP评分的相关性最高。与第110届国会的网络相比，SPONGE 中最佳邻近信息所对应的位置发生了变化；而对于排斥拉普拉斯矩阵，该信息仍包含在第一个特征向量中。若不知道真实评分，想要确定 SPONGE 特征向量集合中<wbr>何处会出现邻近信息并非易事。对此，SHEEP 更具优势，因为该信息包含在嵌入方法判定为最优的前 k 个特征向量中。图 13（下）展示了该网络的一维 SHEEP 嵌入，其中节点再次按照 Nokken-Poole评分着色。

由于第114届国会的最优嵌入维度为 $k = 1$，KT相关性直接展示了使用 NP 评分时节点到原点的距离与其政治极端主义之间的关系。由于该网络具有结构，与有符号网络配置模型的情况不同，到原点的距离无法直接用净度数来解释。图 12 展示了第114届国会网络中各节点到原点的距离与净度数之间的关系。KT相关性低于随机图实验中的相关性，也低于使用 NP 评分得到的相关性，这表明 SHEEP嵌入中节点到原点的距离所包含的信息不止是局部信息。

七、结论

本文介绍了 SHEEP，这是一种谱嵌入算法，用于在有符号网络中寻找节点之间的邻近关系。该方法基于一个受物理启发的模型：我们构造一个哈密顿量，为图中的正边和负边分别赋予吸引力与排斥力。我们证明，哈密顿量与图的排斥拉普拉斯矩阵存在内在联系，而寻找最低能量构型可归结为一个特征向量问题。通过矩阵扰动理论，我们证明，所得基态能量（即最小特征值）是衡量图的双极化结构的一种统计指标。我们将结果推广到高维，提出一种基于能量的方法，用于确定网络的最优嵌入维度。我们还提出将该指标用于恢复基于邻近性的连续节点属性，并展示 SHEEP 嵌入

表 II: L_r (SHEEP)、 L_o、SPONGE 的特征向量与美国众议院网络第110届国会的 Nokken-Poole 意识形态分数之间的 KT 相关性

	$\lambda^{r}_{n=452}$	$\lambda^{o}_{n=452}$	$\lambda^{sponge}_{n=452}$	$\lambda^{sponge}_{n=447}$
KT. Corr. with NP Ideology Score	**0.684**	0.003	0.005	0.639

表 III: L_r （SHEEP）、 L_o、SPONGE 与 Nokken-Poole 意识形态分数在美国众议院网络（第114届国会）的特征向量之间的 KT 相关性

	$\lambda^{r}_{n=446}$	$\lambda^{o}_{n=446}$	$\lambda^{sponge}_{n=446}$	$\lambda^{sponge}_{n=444}$
KT. Corr. with NP Ideology Score	**0.697**	0.021	0.433	0.626

该嵌入能够在合成网络和实证网络中再现序数信息。我们还表明，在最优嵌入维度下，节点到原点的距离可作为衡量节点“极端主义”的指标，它既与净度数等局部信息有关，也与图的全局结构有关。总体而言，这项工作丰富了不断发展的谱方法研究，为理解符号网络并通过考虑多尺度信息来刻画节点关系作出了贡献。

未来的研究方向包括探索将 SHEEP 应用于符号社交媒体数据集，以便对节点邻近性和节点极端性指标作出新颖诠释。还可以对该方法进行修改，使其在稀疏网络上的表现更佳，例如通过正则化 [48]。此外，扩展该方法，使其能够适应边的数量和密度变化，将有助于其应用于时序符号网络。在这种情况下，理解节点间邻近性的动态变化可能是未来研究的一个富有意义的领域。

致谢

SB 得到了英国工程与自然科学研究委员会资助项目 EP/W523781/1 的支持。RL 的工作得到了英国工程与自然科学研究委员会资助项目 EP/V03474X/1 和 EP/V013068/1 的支持。我们感谢 [21] 的作者提供澳大利亚降雨相关性数据集的使用权限。

[1] M. Newman, *Networks: An Introduction*（牛津大学出版社，英国牛津，2010）。[2] F. Heider, 《心理学杂志》**21**, 107（1946）。[3] F. Harary, 《密歇根数学杂志》**2**，143（1953）。[4] D. Cartwright 和 F. Harary, 《心理学评论》**63**, 277（1956）。[5] J. A. Davis, 《人际关系》**20**，181（1967）。[6] S. Aref 和 Z. P. Neal, 《科学报告》**11**，1（2021）。[7] V. A. Traag 和 J. Bruggeman, 《物理评论E》**80**，036115（2009）。[8] P. Doreian 和 A. Mrvar, 《社会网络》**31**，1（2009）。[9] J. Cao、Y. Fan 和 Z. Di，arXiv 预印本 arXiv:1810.10481（2018）。[10] J. Tang、Y. Chang、C. Aggarwal 和 H. Liu, ACM 计算机调查 **49**（2016），10.1145/2956185。[11] S. Zhang、H. Chen、X. Ming、L. Cui、H. Yin 和 G. Xu，载于 *Proceedings of the 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* 2021 2223（），第 – 2231 页。[12] F. Fouss、M. Saerens 和 M. Shimbo, *Algorithms andmodels for network data and link analysis*（剑桥大学出版社，2016）。[13] P. Doreian 和 D. Krackhardt, 《数学社会学杂志》**25**，43（2001）。[14] G. Shi、C. Altafini 和 J. S. Baras, 《SIAM 评论》**61**，229（2019）。[15] J. Kunegis、S. Schmidt、A. Lommatzsch、J. Lerner、E. W. De Luca 和 S. Albayrak，载于 *Proceedings of the 2010 SIAM international conference on data mining*（工业与应用数学学会，2010）第559–570页。[16] A. Fox、T. Manteuffel 和 G. Sanders, 《SIAM 科学计算杂志》**39**，S945（2017）。[17] L. Ou、Y. Hou 和 Z. Xiong, 《当代数学》，409（2021）。[18] P. Anchuri 和 M. Magdon-Ismail，载于 *2012 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining* 2012 235 242（IEEE，）第 – 页。[19] K.-Y. Chiang、J. J. Whang 和 I. S. Dhillon，载于 *Proceedings of the 21st ACM international conference on Information and knowledge management* 2012 615 624（）第 – 页。[20] H. Xiao、B. Ordozgoiti 和 A. Gionis，载于 *Proceedings of The Web Conference 2020* 2020 362 372（）第 – 页。[21] M. Cucuringu、P. Davies、A. Glielmo 和 H. Tyagi，载于 *The 22nd International Conference on Artificial Intelligence and Statistics* 2019 1088 1098（机器学习研究论文集，）第 – 页。[22] A. Knyazev，载于 *2018 Proceedings of the Seventh SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing*（工业与应用数学学会，2018）第11–22页。[23] Y. Tian 和 R. Lambiotte，arXiv 预印本 arXiv:2212.10158（2022）。[24] A. Fox、G. Sanders 和 A. Knyazev，载于 *2018 IEEE High Performance extreme Computing Conference (HPEC)*（IEEE, 2018）第1–7页。[25] F. Bonchi、E. Galimberti、A. Gionis、B. Ordozgoiti 和 G. Ruffo，载于 *Proceedings of the 28th acm international conference on information and knowledge management*（2019）第961–970页。[26] R.-C. Tzeng、B. Ordozgoiti 和 A. Gionis, 《神经信息处理系统进展》

《神经信息处理系统进展》33，10974（2020）。[27] X. He、H. Du、X. Xu 和 W. Du，IEEE计算社会系统汇刊 7，696（2020）。[28] P. Eades， *Congressus Numerantium*，42，*149-160.*，Congressus Numerantium 42，149（1984）。[29] T. M. Fruchterman 和 E. M. Reingold，《软件：实践与经验》21，1129（1991）。[30] T. Kamada、S. Kawai， *et al.*，《信息处理快报》31，7（1989）。[31] A.-M. Kermarrec 和 A. Moin，（2011）。[32] A. Noack，《图算法与应用》11，453（2007）。[33] C. De Bacco、D. B. Larremore 和 C. Moore，《科学进展》4，eaar8260（2018）。[34] T. Kawamoto、M. Ochi 和 T. Kobayashi，arXiv 预印本 arXiv:2208.12933（2022）。[35] U. Brandes、D. Fleischer 和 J. Lerner，IEEE《可视化与计算机图形学汇刊》12，1486（2006）。[36] U. Brandes 和 J. Lerner，《信息可视化》7，34（2008）。[37] J. Leskovec、D. Huttenlocher 和 J. Kleinberg，载于 *Proceedings of the SIGCHI conference on human factors in computing systems* 2010 1361 1370 （）第 – 页。[38] M. Szell 、 R. Lambiotte 和 S. Thurner，《美国国家科学院院刊》107，13636（2010）。[39] A. Kirkley、G. T. Cantwell 和 M. E. J. Newman，《物理评论 E》99（2019），10.1103/physreve.99.012320。[40] S. Aref 和 M. C. Wilson，《复杂网络期刊》7，163（2019）。[41] Z. Huang、A. Silva 和 A. Singh，arXiv 预印本 arXiv:2110.09899（2021）。[42] E. Bogomolny、O. Bohigas 和 C. Schmit，arXiv 预印本 arXiv:0710.2063（2007）。[43] M. M. Deza、M. Laurent 和 R. Weismantel，*Geometry of cuts and metrics* 2 1997 ，第卷（Springer，）。[44] E. Deacon，《澳大利亚物理学杂志》6，209（1953）。[45] M. Newman， *Networks*（牛津大学出版社，2018）。[46] R. Carroll、J. B. Lewis、J. Lo、K. T. Poole 和 H. Rosenthal，《政治分析》17，261（2009）。[47] T. P. Nokken 和 K. T. Poole，《立法研究季刊》29，545（2004）。[48] T. Qin 和 K. Rohe，《神经信息处理系统进展》26（2013）。[49] S. Akbari、H. Maimani 和 P. L. Majd，Filomat 32，5817（2018）。

附录

A. 排斥拉普拉斯谱结果：证明

定理1. 对于满足 $E^+, E^- \neq \emptyset$ 条件的 n 阶完全符号图，排斥拉普拉斯矩阵的最小特征值为 $\lambda_n \geq -n.$

证明： 从所有边均为负边的 n 阶完全图开始，其对应的排斥拉普拉斯矩阵形式如下：

$$\hat{L}_r = \begin{pmatrix} -(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -(n-1) \end{pmatrix}$$

特征值为：

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} .... = \lambda_2 = -n \tag{34}$$

$$\lambda_1 = 0 \tag{35}$$

集合 $\{G^n\}$ 中的任何其他图，都可以通过依次将一条边（$i,\ j$）的符号从负变为正得到。假设我们选择的图 G_1^n 有一条正边。不失一般性，我们可以假设这条边连接节点 $i = 1$ 和 $j = 2$。对于任何其他边（$i,\ j$），以下证明在左侧和右侧分别乘以置换矩阵 P 后仍然成立；这不会改变所得特征值，这是由式 10 中给出的排斥拉普拉斯矩阵的正交分解所致。

$$L_r^{G_1^n} = \hat{L}_r + L^{shift} \tag{36}$$

其中：

$$L^{shift} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 L^{shift} 显然是半正定的，其特征值 0 的重数为 $n-1$，特征值 $\lambda_1(L^{shift}) = 4$。由于式 36 中涉及的所有矩阵都是实对称矩阵，因此也是厄米矩阵，我们可以对两个矩阵之和应用韦尔不等式，得到：

$$\lambda_n(\hat{L}_r) + 0 \leq \lambda_n(L_r^{G_1^n}) \tag{37}$$

或者等价地，

$$-n \leq \lambda_n(L_r^{G_1^n}) \tag{38}$$

这里回顾一下，λ_n 是该矩阵的最小特征值。这个论证可以归纳应用于集合 $\{G^n\}$ 中任意具有多于一条正边的图，直接推出n完全有符号图的基态能量下界为 $-n$。

定理 2。设有一个强平衡图 $G \in \{G^n\}$，图 G 的节点可以划分为两个集合 V_1 和 V_2，其中 V_1、$V_2 \neq \emptyset$。每个集合内部的节点由正边相连，而连接两个集合的边为负边。排斥拉普拉斯矩阵的最小特征值为 $\lambda_n = -n.$

证明： 由于 G 是一个完全图，因此有 V_1V_2 条负边。我们希望找到与 $\hat{L}_r^G$ 的最小特征值相关联的特征向量 ν，将其记为 λ_n。我们还知道，拉普拉斯矩阵 L_r^G有一个对应于向量 $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$的 0 特征值。由于 L_r^G的特征向量彼此正交，并且假设 $\lambda < 0$，因此我们有以下两个条件

:

$$\sum_i \nu_i^2 = 1 \tag{39}$$

$$\sum_i \nu_i = 0 \tag{40}$$

为了最小化与正边相关的能量，设 $\nu_i = x_1, \forall i \in V_1$ 和 $\nu_i = x_2, \forall i \in V_2$。根据上述条件，我们有

$$V_1(x_1)^2 + V_2(x_2)^2 = 1 \tag{41}$$

$$V_1 x_1 + V_2 x_2 = 0 \tag{42}$$

基态能量:

$$E^0_{bal} = \nu^T L^{\tilde{G}}_r \nu = -V_1 V_2 (x_1 - x_2)^2 = \lambda_n \tag{43}$$

使用条 件（方程 41 和 42）以及 $V_1 + V_2 = n$，我们有 :

$$E^0_{bal} = \lambda_n = -n \tag{44}$$

根据定理1，这是最小特征值。

~ ~**定理 3.** 考虑一个强平衡图 $G \in \{G^n\}$，其图 G 的节点可以划分为两个集合 V_1 和 V_2，其中 V_1、$V_2 \neq \emptyset$。通过切换两条边的边符号，在图中引入挫折。当图足够大，使得 $n > 4$，且 V_1、$V_2 > 2$时，基态能量严格增加$E^0_{frus} > E^0_{bal}$。

证明: 不失一般性，假设 $|V_1| \geq |V_2|$。接下来，我们对与正边和负边符号切换相关的哈密顿量引入一个扰动。假设节点为 $i = 0$、1、$2 \in V_1$和$i = 3 \in V_2$，并切换边 (0、1) $= 1$ 和 (2、3) $= -1$的符号。那么，这个“切换”扰动对应的矩阵为:

$$L^{switch} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

我们可以很容易地计算出， L^{switch} 的特征值为 -4、4 和 0，其中 0 的重数为 $n-2$。取 μ_n、$\mu_{n-1}...\mu_1$ 为相应的特征向量，并按照特征值递增的顺序排列。这些向量张成 $\mathbb{R}^n$，因为 L^{switch} 是对称的。注意， $\mu_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$(1、$-1$，0，0...0) 对应于特征值 -4。最后，~ 受挫图的拉普拉斯矩阵为:

$$L_r = L^{\tilde{G}}_r + L^{switch} \tag{45}$$

~我们称该图为“受挫”的，因为这两项 L^G_r 和 L^{switch} 无法同时最小化。为说明这一点，令 ν_n 为平衡图在式 11 中取得最小值所对应的特征向量，其形式为 ν_n = (x_1、x_1、x_1、x_2，.....), 与前文一样，每个节点都根据其派系归属被赋予位置 x_1 或 x_2。显然， ν_n 与 μ_n 正交。此外， L^{switch} 会使能量增加$\nu_n^T L^{switch} \nu_n = +2(x_1 - x_2)^2$。我们要证明，受挫拉普拉斯矩阵的基态能量大于 $-n$。这需要以下三个结果，其中第一个是由 [49]中证明的一个定理得出的:

1. 平衡图的对立拉普拉斯矩阵的谱等价于无符号图的谱。

2. 无符号完全图的谱中，最小特征值为 0，其余所有特征值均为 n，重数为 $n-1$

3. $L_o = L_r + 2D^-$

由此可知，平衡图的对立拉普拉斯矩阵的第二小特征值为 n。若 V_2 中的一个节点与另一派系 V_1的所有成员都以负边相连，则 $2D^-$ 的最大可能取值为 $2V_1$。根据结果 3 中给出的关系应用韦尔不等式，可求得平衡图 λ_{n-1}的排斥拉普拉斯矩阵第二小特征值的界：

$$\lambda_{n-1} \geq n - 2V_1 \tag{46}$$

回顾平衡图的 $\lambda_n = -n$ 。我们使用式 46 对平衡图基态与第一能级之间的“能隙”进行近似，并定义 $\nabla E = \lambda_{n-1} - \lambda_n \geq 2($ $n - V_1)$。

接下来，令 α_n 为式 45 中受挫拉普拉斯矩阵基态对应的特征向量。 α_n 可以用平衡拉普拉斯矩阵的特征向量分解，形式如下：

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \nu_i \tag{47}$$

我们还可以利用 ν_n 与 μ_n 正交这一事实，定义 $\mathbb{R}^n$的一组新标准正交基。这组新的标准正交基 $\{x_n, x_{n-1}...x_1\}$ 具有 $x_1 = \nu_n$ 和 $x_n = \mu_n$。现在，我们还可以用这组新基表示 α_n：

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \tag{48}$$

利用基向量的正交性，可得 $d_1 = c_n$。由此，我们得到以下两种分解：

$$\alpha_n = c_n \nu_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \nu_i \tag{49}$$

$$= c_n \nu_n + \sum_{i=2}^{n-1} d_i x_i + d_n \mu_n \tag{50}$$

为方便记号，令 $\alpha'_n = \alpha_n - d_n \mu_n$。式 45 中受挫拉普拉斯矩阵对应的基态能量为：

$$E^0_{frus} = \alpha_n^T L_r^{\tilde{G}} \alpha_n + \alpha_n^T L^{switch} \alpha_n \tag{51}$$

利用式 49 化简右侧第一项，并利用式 50 化简第二项：

$$E^0_{frus} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i + d_n^2(-4) + {\alpha_n}'^T L^{switch} \alpha'_n \tag{52}$$

根据构造， α'_n 与 μ_n 正交，因此它可以用 μ_{n-1}， $\mu_{n-2}...\mu_1$展开；它们是 L^{switch} 的特征向量，对应的特征值均大于或等于 0。由于式 52 中的第三项必定大于或等于 0，因此当 d_n^2 最大时， E^0_{frus} 最小。由式 50， $d_n^2 \leq 1 - c_n^2$。

$$E^0_{frus} \geq \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i - 4(1 - c_n^2) \tag{53}$$

现在，我们可以利用能隙从下方界定基态能量：

$$E^0_{frus} \geq c_n^2(-n + 4) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2(-n + \nabla E) - 4 \tag{54}$$

施加条件 $n > 4$ 和 $V_1, V_2 > 2$，使得每个派系都拥有两个以上成员。然后，$\nabla E > 4$，由于 $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$，严格不等式成立：

$$E^0_{frus} > -n = E^0_{bal} \tag{55}$$



图14：具有二分划分且满足强平衡的100节点完全图所生成的嵌入。从左到右：SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵）、对立拉普拉斯矩阵、SPONGE



图15：具有二分划分且满足强平衡的 [50,50] 带符号随机块模型所生成的嵌入。从左到右：SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵）、对立拉普拉斯矩阵、SPONGE

B. 聚类与邻近性：示例说明

1. *Complete Strong Balanced Graph (Bi-Partition)*

我们从一个具有完美二分划分的 $n = 100$ 节点完全图开始，该图也满足强平衡。由于存在二分划分，只需一个维度即可表示这些图。如图14所示，正如预期的那样，在这个最简单的情形中，各种嵌入方法生成的嵌入完全相同。

2. *Non-Complete Strong Balanced Graph (Bi-Partition)*

这里，我们将讨论推广到非完全图，采用一个包含两个各有50个节点的社区的带符号随机块模型，其亲和矩阵形式为 [[0.5, 0.5], [0.5, 0.5]], ，其中社区间（社区内）的边为负（正）。由于存在二分划分，该图也满足强平衡。如图15所示，SHEEP和SPONGE的嵌入再次十分相似。对立拉普拉斯矩阵生成了一个二分划分，其中节点的位置被分配在 [-1, 1], 之间，具体取决于其所属的聚类。

3. *Non-Complete Strong Balanced Graph: Edge Density*

为研究嵌入距离与节点关系之间的关系，我们引入一种遵循强平衡的改进的带符号随机块模型。SSBM 中的每个带符号社区都分为两组节点：第一组与其他社区相连的边密度为 0.7（全部为负边），第二组与其他社区相连的边密度为 0.3（全部为负边）。本质上，这两个带符号社区各自被分为两组，负边存在的概率各不相同。由于仍然存在二分划分，这个图也遵循强平衡。在图16中，绿色节点的负边密度较低，而黑色节点的负边密度较高。与图14一样，对立拉普拉斯矩阵得到的划分与完全图的情形相同。在 SHEEP 生成的嵌入中，绿色节点（即负边较少的节点）比黑色节点更靠近原点，这有助于更直观地理解节点的“极端主义”度量。这表明，与 SPONGE 和对立拉普拉斯矩阵相比，排斥拉普拉斯矩阵的嵌入距离更能体现节点关系的强度，并将边的存在（或缺失）纳入考量。



图16：满足强平衡的带二分划分的分组带符号随机块模型所得到的嵌入。与黑色节点相比，绿色节点的负边较少。从左到右：SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵）、对立拉普拉斯矩阵、SPONGE

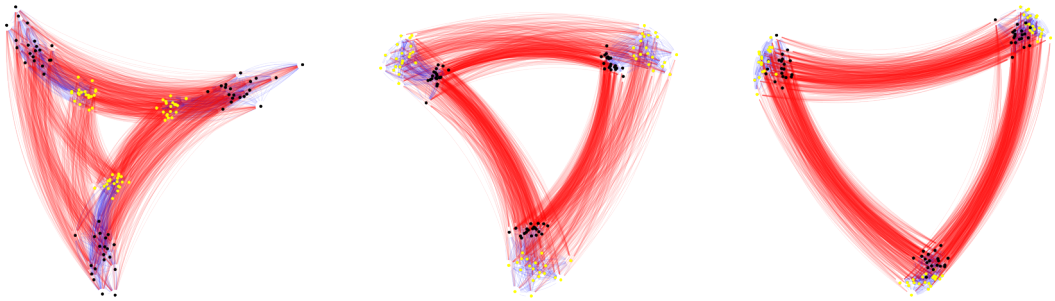


图17：遵循弱平衡的三路划分分组带符号随机块模型所产生的嵌入。与黑色节点相比，黄色节点的负边更少。从左到右：SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵）、对立拉普拉斯矩阵、SPONGE

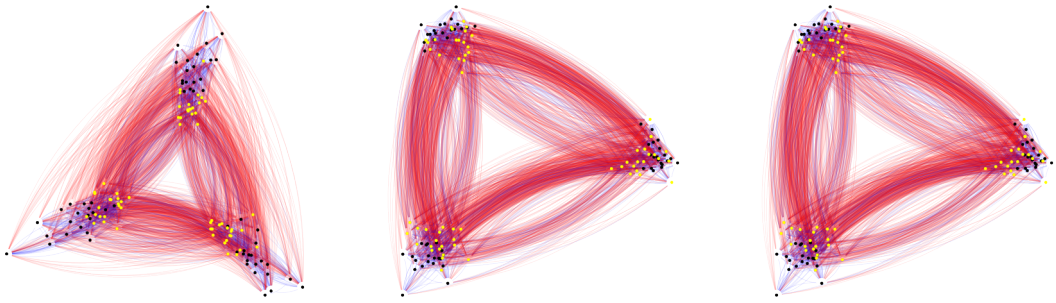


图18：遵循弱平衡的三路划分分组带符号随机块模型所产生的嵌入。黄色节点与对立派系之间存在正边的概率为0.2%，而黑色节点与对立派系之间则只有负边。从左到右：SHEEP（排斥拉普拉斯矩阵）、对立拉普拉斯矩阵、SPONGE

4. Weak Balanced Graph: Edge Density

在这里，我们将上述想法推广到弱平衡的情形：如图17所示，采用一个包含3个社区、每个社区有2组节点的带符号随机块模型。与黑色节点相比，黄色节点与其他社区之间的负边密度较低。只有在 SHEEP 生成的嵌入中，黄色节点才显得更靠近原点，这表明与黑色节点相比，这些组之间的负向关系较弱。

5. Weak Balanced Graph: Edge Signs

在图18的最后一个示例中，我们选择了一个需要 $k = 2$ 维度且遵循弱平衡的网络。我们使用了一个每个社区包含2个组的3社区符号随机块模型（SSBM）。我们没有改变负边的密度，而是在每个带符号社区的一些节点的边符号上引入噪声。第一组节点（黑色节点）以100%的概率具有正确的符号，而第二组节点（黄色节点）与其他派系建立正连接的概率为20%。同样，只有在SHEEP生成的嵌入中，黄色节点才显得彼此距离更近，并且更靠近原点，这表明与黑色节点相比，这些组之间的负向关系较弱。SHEEP生成的嵌入提供了邻近信息，能够识别每个派系中更“极端”或更“中立”的成员，并直接建立嵌入距离与节点关系之间的联系。