arXiv:2302.07144v1 [math.SP] 14 Feb 2023

在大型实谱矩阵相空间上线性化 Toda 流和 SVD 流

Ricardo S. Leite、Nicolau C. Saldanha、
David Mart´ınez Torres 和 Carlos Tomei

谨以此文纪念 *Hermann Flaschka*

摘要

我们研究 Toda 流（[9, 15]）和较少为人熟知的奇异值分解流（[4, 14]）的不同相空间。对于 Toda 流，我们处理具有实单特征值的对称和非对称矩阵，这些矩阵还可以具有给定的轮廓。轮廓例如可描述带状矩阵和 Hessenberg 矩阵。对于奇异值分解流，我们假设奇异值均为单值。在所有情形下，我们都构造一个开覆盖及相应的欧几里得空间坐标图。这些坐标图将流线性化，把它们转化为具有常系数和对角矩阵的线性微分系统。通过一种变体构造，可将流转化为匀速直线运动。由于极限点属于相空间，渐近行为便成为一个局部问题。这些构造仅依赖线性代数的基本事实，不涉及辛几何。

关键词：等谱流形、Toda 流、SVD 流、超可积性。**MSC 分类：**65F18；15A29；37J35。

1 引言

Toda 流——一个由 n 个粒子构成的哈密顿系统——由 Hermann Flaschka [9] 引入可积系统领域。他将其表示为 Lax 对，从而在雅可比矩阵上诱导出流 $J(t)$，

$$\dot{J} = [J, \Pi_{\mathfrak{o}}\, J] = [J, -\Pi_{\mathfrak{up}}\, J], \quad J(0) = J_0\,. \tag{1}$$

此处，$\Pi_{\mathfrak{o}}$ 和 $\Pi_{\mathfrak{up}}$ 是与直和 $\mathcal{M} = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{up}$ 相关的投影，其中 $\mathcal{M}$ 是由实 $n \times n$ 矩阵构成的向量空间，$\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{up}$ 分别是斜对称矩阵与上三角矩阵构成的李代数。

在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的标准辛结构，在去除

质心的简单动力学后，会在迹为零的雅可比矩阵上诱导出辛结构。 $J(t)$ 的特征值沿流保持不变，且彼此泊松对易：它们提供了所需的守恒量，从而使该系统完全可积。

这一主题得到了大幅拓展。下面列出一组后续发展的最简概要，这些发展引出了本文所要讨论的问题；更详尽的历史信息请参见 [7] 。Moser [15] 获得了角变量，它们本质上是归一化常数的离散对应物；归一化常数被用作 Schr¨odinger 算子的逆散射变量。Adler [1] 证明，迹为零的雅可比矩阵构成上三角矩阵群的一个余伴随轨道。随后，Deift 等人（[5, 6]）证明了更大余伴随轨道上的 Toda 流具有可积性：首先针对一般的实对称矩阵，继而针对一般的实非对称矩阵。

为固定记号，给定一个实多项式 p，*Toda* 流 是以下微分方程的解（对时间的导数记作点号）

$$\dot{M} \;=\; [M, \Pi_{\mathfrak{o}}\, p(M)], \quad M(0) = M_0\,, \tag{2}$$

其中， $p(M)$ 表示在 $x = M$ 处对多项式 $p(x)$ 求值。

这里我们在具有实单谱的实矩阵（无论是否对称）上引入线性化变量 。第一个例子是雅可比矩阵的双对角变量 [12]。文献 [22] 将其推广到任意非紧实半单李代数的完全旗流形及其黑森堡型子流形。这些参考文献以及本文这篇自包含的论文均不使用辛理论，而是采用线性代数中的经典工具进行构造。

令$\mathbf{GL}$ 表示可逆矩阵群。正交群及其李代数分别记为$\mathbf{O}$ 和 $\mathfrak{o}$。可逆下三角矩阵群和上三角矩阵群（不连通）分别记为$\mathbf{Lo}$ 和$\mathbf{Up}$。单位元的连通分支分别是子群$\mathbf{Lo}^+$ 和$\mathbf{Up}^+$。对角元均等于 1 的下三角幂零群为$\mathbf{Lo}^{\mathbf{1}}$ ，其李代数为 $\mathfrak{lo}^0$。

我们以最简形式给出 Toda 流的线性化；关于基本线性代数术语，请参见附录。令 $M = X^{-1}DX$ 为一个具有实单谱的实可对角化矩阵，其中 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 的各个元素按递减顺序排列。一般而言， X 的$k \times k$ 左上子矩阵的行列式均非零：设它们为正。由QR 分解 $X = \tilde{L}Q$ ($\tilde{L} \in \mathbf{Lo}^+$ 和 $Q \in$ O</style}),

$$M \;=\; X^{-1}DX \;=\; Q^{\top}\tilde{L}^{-1}D\tilde{L}Q \;=\; Q^{\top}(Y + D)Q, \qquad Y \in \mathfrak{lo}^0.$$

再次，根据 LU 分解 $Q = LU$ ($L \in$ **下三角群$^{\mathbf{1}}$** 和 $U \in$ **上三角群**),

$$M \;=\; Q^{\top}(Y + D)Q \;=\; U^{-1}L^{-1}(Y + D)LU \;=\; U^{-1}(Z + D)U, \qquad Z \in \mathfrak{lo}^0. \tag{3}$$

矩阵三元组 $(D,\ Y,\ Z)$ 可还原 M，并且如果 M 按 Toda 流演化，

$$\dot{D}^{\pi} = \dot{Y} = 0\,, \qquad \dot{Z} = [Z, -p(D)]\,.$$

因此，Z 中的元素依照常微分方程 $\dot{z}_{ij} = (p(\lambda_i) - p(\lambda_j))\, z_{ij}$演化：该系统是解耦的。简言之，这就是第3节的内容。

设 D 为一个具有单谱的实对角矩阵。对称和非对称的等谱流形是以下轨道

$$\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}} = \{Q^{\top} D\, Q, Q \in \mathbf{O}\}\,, \quad \mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}} = \{X^{-1} D\, X, X \in \mathbf{GL}\}\,. \tag{4}$$

设 S_n 为 $\{1, 2, \ldots, n\}$的置换对称群。记 $\mathcal{O}$ 表示 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}$ 或 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}$。

定理1。 每个等谱流形都具有一个图册，其坐标图为 $\phi^{\pi}:\ \mathcal{U}_D^{\pi} \subset \mathcal{O} \to \mathbb{R}^N, \pi \in S_n$，$N =$维数 $\mathcal{O}$。以下性质成立。

1. 每个坐标图定义域 $\mathcal{U}_D^{\pi}$ 都是 $\mathcal{O}$的开稠密集。$\mathcal{O}$ 中的每个对角矩阵都属于唯一的 $\mathcal{U}_D^{\pi}$。每个坐标图 ϕ^{π} 都是一个微分同胚。

2. 每个集合 $\mathcal{U}_D^{\pi}$ 在 *Toda* 流下保持不变。在这些变量中（即在坐标图的像中），与多项式 p 相关的 *Toda* 流为

$$(\dot{y}, \dot{z}) = (0, Cz), \quad y \in \mathbb{R}^{N_y}, \quad z \in \mathbb{R}^{N_z}, \quad N = N_y + N_z\,,$$

对于常对角矩阵 C（取决于 p）。如果 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}$，$N_y = 0$。

定理1汇集了第3节中得到的结果。第 3.3 节将这些结果推广到固定型式的矩阵，其定义将在后文给出。坐标图在带状矩阵的子空间上有良好的限制，无论矩阵是否对称。

Toda 流与物理学和数值分析的联系促使人们研究这类流的渐近行为（[18, 8]）。在对称情形下，微分方程的极限点是对角矩阵；在非对称情形下，则是上三角矩阵。由于这些极限点属于某个坐标图域 $\mathcal{U}_D^{\pi}$，收敛问题现在便归结为局部理论。[12]中采用了雅可比矩阵上的双对角变量，来计算最初由 Moser [15] 和 P. Deift（个人通信）得到的托达相移。在 [13], 中，这些变量被用于完整描述经典 Wilkinson 移位策略计算雅可比矩阵特征值的动力学 [16]。

Chu [4] 和 Li [14] 研究了所谓的奇异值分解流，

$$\dot{M} = M\left(\Pi_{\mathfrak{o}}\, p(M^{\top} M)\right) - \left(\Pi_{\mathfrak{o}}\, p(M M^{\top})\right) M, \tag{5}$$

这类流具有保持初始条件奇异值不变的性质。Chu 将这些流与数值算法联系起来，并计算了解的渐近行为。Li 在一个适当的大维辛空间上证明了可积性。正如我们在第4节所展示的，我们的方法也适用于这一情形。

对于 $\Sigma = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n > 0$，集合

$$\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}} = \{Q^\top \Sigma U,\ Q, U \in \mathbf{O}\}$$

由奇异值等于 Σ 的实 $n \times n$ 矩阵组成。

令 $\mathcal{D}^{\mathrm{sgn}} \subset \mathbf{GL}$ 为符号对角矩阵群。

定理2. 集合 $\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$具有一个图册，其坐标图由 $(\pi, \rho, E) \in S_n \times S_n \times \mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}$, $\phi_{\pi,\rho,E}$: $\mathcal{U}_{\pi,\rho,E} \subset \mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}} \to \mathbb{R}^N$, $N =$ 维数 $\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$ 索引。

1. 每个$\mathcal{U}_{\pi,\rho,E}$ 都是 $\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$ 的开子集。每个坐标图都是一个微分同胚。

2. 集合 $\mathcal{U}_{\pi,\rho,E}$ 在 *Toda* 流下是不变的。用这些变量表示，与多项式 p 相关的奇异值分解流为 $\dot{v} = Cv \in \mathbb{R}^N$，其中 C 是一个常对角矩阵（依赖于 p）。

一旦构造出 Toda 流的坐标图，线性化（第 3.2 小节）以及随后转换为匀速直线运动（第 3.4 小节）就很容易了。对于奇异值分解流，也有类似的结果（第4节）。在对定理 1 的略微扩展中，扩大的变量变换纳入了特征值可能发生的变化。因此，可积性（或者更强的超可积性，如 [2]中所述）取决于将欧几里得空间的部分区域限制在适当的子域内；第2节以 3×3 雅可比矩阵为例对此进行了说明，并在第 3.4 小节中给出了证明。

在第2节中，我们给出了关于三维矩阵的一些结果。第3节和第4节包含上述定理的证明。我们还给出了一些几何结果：Toda 流不过是欧几里得空间中的匀速直线运动，并且对于单调多项式 p，按照 [2]的意义，它们是超可积的。在第5节中，我们描述了新的等谱流；这些流可以在线性化坐标中轻松求解，并且还可通过 QR 型步骤在离散时刻实现。

研究复特征值或重特征值的情形将会很有意思。

致谢 Tomei 感谢 Luen-Chau Li 分享了许多有趣的信息。Saldanha 衷心感谢 CNPq (306756/2021-8) 的支持，Tomei 则感谢 CNPq (304742/2021-0) 和 FAPERJ (E32/2021CNE) 的支持。

2 记号与 3×3 示例

2.1 记号

本文中的所有矩阵均为实矩阵。矩阵 $M^\top$ 是 M 的转置。记号 **一般线性群**、**下三角群**、**上三角群**、**正交群** 分别表示实$n\times n$ 可逆矩阵、下三角矩阵、上三角矩阵和正交矩阵所构成的（非连通）群。它们各自包含单位元的连通分支分别为 **一般线性群**$^+$、**下三角群**$^+$、 **上三角群**$^+$ 和 **特殊正交群**。此外，**下三角群**^{1} $\subset$**下三角群**$^+$ 是对角元均为 1 的矩阵构成的子群。

令$\mathbf{GL}^{\mathrm{pos}}$ 和$\mathbf{O}^{\mathrm{pos}}$ 表示$\mathbf{GL}$ 和$\mathbf{O}$ 中主子式为正的矩阵集合（主子式是由矩阵前 k行和列中的元素构成的子块的行列式， $k=1,\ldots,n$）。

类似地， $\mathcal{M}$ 是实 $n\times n$ 矩阵构成的向量空间， $\mathcal{S}\subset\mathcal{M}$ 是对称矩阵构成的子空间， $\mathfrak{lo}$, $\mathfrak{lo}^0,\mathfrak{up}$ 而 $\mathfrak{o}$ 是$\mathbf{Lo}$,$\mathbf{Lo}^1$, $\mathbf{Up}$ 和$\mathbf{O}$的李代数。

由 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的所有置换构成的对称群为 S_n。我们用 $\pi_0\in S_n$表示恒等排列。给定一个置换 $\pi\in S_n$，令 P_π 为满足 $P_\pi e_i = e_{\pi(i)}$的置换矩阵，其中（$e_i, i=1,\ldots,n$）是 $\mathbb{R}^n$的标准基。注意到$P_{\pi_1\circ\pi_2}=P_{\pi_1}P_{\pi_2}$。

对角矩阵构成向量空间 $\mathcal{D}\subset\mathcal{M}$。给定一个对角矩阵$D=\mathrm{diag}(d_1,\ d_2,\ \ldots\ldots,\ d_n)$，定义

$$D^\pi = P_\pi^\top D P_\pi = \mathrm{diag}(d_{\pi(1)}, d_{\pi(2)},\ldots,d_{\pi(n)}),\quad \pi\in S_n\,.$$

开凸子集 $\mathcal{D}^{\pi_0}$ 由对角元严格按降序排列的矩阵构成。更一般地，令 $\mathcal{D}^\pi = P_\pi^\top\mathcal{D}^{\pi_0}P_\pi$。

对角元等于 ±1 的对角矩阵群为 $\mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}$。

2.2 3×3 Jacobi 矩阵与 Hessenberg 矩阵

我们首先在熟悉的 Jacobi 3×3矩阵情形下阐述本文的结果，然后再讨论具有实单谱的 3×3 上 Hessenberg 矩阵。Jacobi 矩阵 J 是实对称三对角矩阵，满足 $J_{i+1,\ i}=J_{i,\ i+1}>0$ 其中 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n-1$。若实矩阵 3×3 H 满足 $h_{31}=0$，则称其为 Hessenberg 矩阵。

雅可比矩阵具有单重特征值，且特征向量的首末坐标均非零 [15]。令 $\mathbb{R}^3_{\pi_0}\subset\mathbb{R}^3$ 由严格递减的元素组成， $\mathbb{S}^2_+$ 为 $\mathbb{R}^3$单位球面的（严格）正象限。Moser 考虑了微分同胚

$$\phi: J\in\{\text{Jacobi matrices of trace zero}\}\to((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\ c)\in\mathbb{R}^3_{\pi_0}\times\mathbb{S}^2_+\,,$$

其中 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ 是 J 的特征值， $c=$ （$c_1,\ c_2,\ c_3$） $\in\mathbb{S}^2_+$ 是相应单位特征向量首坐标为正的法向量。

另一种论证 [8] 从 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)\in\mathcal{D}^{\pi_0}$ 和$c=(c_1,\ c_2,\ c_3)^\top$中恢复 J。首先将下面的 3×3 矩阵 V分解为一个

正交矩阵和上三角矩阵的乘积，

$$V = \begin{pmatrix} c & Dc & D^2c \end{pmatrix} = QR, \quad Q \in \mathbf{O}, \quad R \in \mathbf{Up}^+ .$$

令 $J = Q^\top \Lambda Q$：结果表明，元素（i，$i+1$）自动为正。

以下讨论中一个至关重要的事实是，Q 的主子式（因而 $Q^\top$的主子式）均非零。事实上，除去乘以 R的非零对角元这一因子后，这些子式等于 V的子式；通过计算范德蒙德行列式并利用 $c_i \neq 0$，很容易看出它们非零。由于 $Q^\top$ 的列是 J的特征向量，每一列都可以乘以 -1，从而得到 J的另一种谱对角化。我们不采用 Moser 归一化$c_i > 0$，而是要求 $Q^\top \in$ **正交群**^{pos}（因此 $Q \in$ **正交群**^{pos}）。

现在介绍本文中使用的变量，这些变量最初是为 [12]中的三对角矩阵引入的。令 $\mathcal{O}$ 为实对称三对角 3×3矩阵构成的向量空间。设 $T \in \mathcal{O}$ 满足 $T = Q^\top DQ$，其中 $Q \in$ **正交群**^{pos}，$D \in \mathcal{D}^{\pi_0}$。$Q \in$ **正交群**^{pos} 的（唯一）LU 分解为 $Q = LU$，其中 $L \in$ **下三角群**^{1}，$U \in$ **上三角群**$^+$（命题 6.1）。于是有

$$T = U^{-1}L^{-1}DLU ,$$

因此，$B = L^{-1}DL = UTU^{-1}$为下三角矩阵（由第一个等式得出），为上 Hessenberg 矩阵（由第二个等式得出）。于是，B 为下双对角矩阵，且 $\operatorname{diag} B = D$。

根据第 3.3 节，双对角变量（见 [12]）诱导出一个微分同胚

$$\tilde{\phi}_e : \mathcal{O} \cap \{Q^\top DQ, Q \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}, D \in \mathcal{D}^{\pi_0}\} \to \mathbb{R}^3_{\pi_0} \times \mathbb{R}^2 , \quad T \mapsto B .$$

这里，我们将矩阵 B 与一个向量对应，该向量在 $\mathbb{R}^3_{\pi_0}$中包含对角元；并将其与另一个向量对应，后者包含两个非平凡的非对角元 b_{21} 和 b_{32}。此外，Jacobi 矩阵对应于满足 b_{21}，$b_{32} > 0$ 的矩阵。

对角元的不同排列会得到对角矩阵

$$D^\pi = P_\pi^\top DP_\pi = \operatorname{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \lambda_{\pi(3)}), \quad \pi \in S_3 ,$$

其中 S_3 是对称群。根据推论 3.13，$\mathcal{O}$ 中具有单谱的矩阵构成一个流形，其坐标图由排列标记，

$$\tilde{\phi}_\pi : \mathcal{O} \cap \{Q^\top D^\pi Q, Q \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}, D \in \mathcal{D}^{\pi_0}, D^\pi = P_\pi^\top DP_\pi\} \to \mathbb{R}^3_\pi \times \mathbb{R}^2.$$

这里 $\mathbb{R}^3_\pi = \{(x_{\pi(1)}, \ x_{\pi(2)}, \ x_{\pi(3)}) \mid (x_1, \ x_2, \ x_3) \in \mathbb{R}^3_{\pi_0}\}$。此外，$B^\pi = \tilde{\phi}_\pi(T)$ 与 T 一样由 $\pi = e$ 得到，即平凡置换：

$$\tilde{\phi}_\pi(U^{-1}L^{-1}D^\pi LU) = L^{-1}D^\pi L = B^\pi .$$

类似地，谱与某个固定的单谱矩阵 D 的谱相同、具有三对角结构的对称矩阵的等谱集 可以由坐标图覆盖

$$\phi_\pi : \mathcal{O} \cap \{Q^\top D^\pi Q, Q \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}\} \to \mathbb{R}^2,$$

~，它由映射 ϕ_π去掉第一个坐标得到。每个坐标图都是三对角对称等谱流形中的稠密集。图1展示了两个坐标图定义域，分别对应循环记号中的 π_0 和 $\pi_1 =$ (23)，其谱为 $\{7, 5, 4\}$。两种情况下，定义域都是一个有16条边的多边形的内部。每种情况下，都存在一个从紧多边形（包括边界）到等谱流形的连续映射；该映射在多边形内部及边的内部光滑。完整的对称三对角矩阵等谱流形是一个有两个孔的环面（[12, 21]），通过识别任一多边形边界上的线段得到。顶点标签对应对角矩阵：两个坐标图定义域中唯一的顶点都位于中心，分别为 diag(7，5，4) 和 diag(7，4，5)。内部的水平和垂直线段对应某个次对角线元素为零的矩阵。因此，在第二个例子中，连接中心 (7，4，5) 和 (4，7，5) 的水平线段对应满足 $y_{33} = 5$， $y_{32} = y_{23} = 0$ 的矩阵 T。四个象限由次对角线元素符号恒定的矩阵组成。象限 $++$ 包含所有雅可比矩阵。更一般地，次对角线元素均非零的矩阵属于所有坐标图定义域。而莫泽坐标图的定义域则是任一坐标图定义域的正象限。

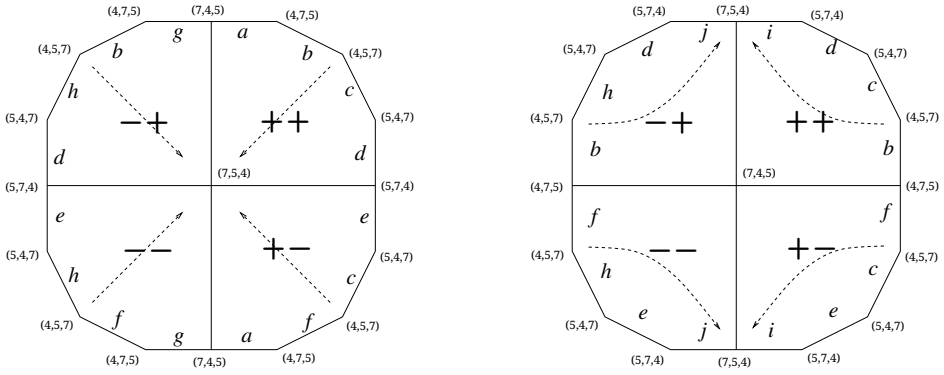

图1：Jacobi 矩阵及更多内容

Toda 流使每个象限的内部、每条边和每个顶点保持不变。众所周知，当 $t \to \infty$ 时，标准托达流（选择 $p(x) = x$，见公式（2））从一个雅可比矩阵出发，会收敛到 (7，5，4)。一些轨道在图中以虚线箭头表示。这个极限点不属于莫泽坐标图的定义域；该坐标图定义在辛流形上，而哈密顿流不可能有吸引子。不过，它是与 π_0 相关的坐标图定义域的中心，却不属于与 π_1 相关的坐标图定义域。我们的坐标图对涉及位移策略 [13] 的数值算法的渐近行为作出了精细描述。

标准 Toda 流下双对角变量的演化（这里为简化起见，

采用平凡置换 $\pi = e$）由定理 3 给出，

$$\lambda_i'(t) = 0\,, \quad b_{21}'(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, b_{21}(t)\,, \quad b_{32}'(t) = (\lambda_3 - \lambda_2)\, b_{32}(t)\,,$$

由此，未来的对角收敛显然成立，且关于 b_{21} 和 b_{32} 的方程是线性且相互解耦的，这一点也随之显而易见。其他几何性质将于第 3.4 小节根据此类公式的简洁性加以证明。

现在我们考虑由 $\mathcal{H}$ 构成的 Hessenberg 矩阵向量空间，将我们的变量（命题 3.1）扩展到 $\mathcal{H}$ 中具有实单谱的矩阵。线性化变量由严格下三角矩阵的对组成，其中第二个矩阵保持在第3.3小节中定义的 Hessenberg 剖面，

$$\tilde{\phi}_\pi^H(X^{-1}\, D^\pi\, X) = \left(D^\pi, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z_{21} & 0 & 0 \\ 0 & z_{32} & 0 \end{pmatrix} \right), \quad X \in \mathbf{GL}^{\mathrm{pos}}.$$

矩阵 Y 和 Z 遵循方程 (3)中的记号。同样根据定理 3，在 Toda 流下的演化为

$$\lambda_i'(t) = 0\,, \quad y_{ij}'(t) = 0 \quad z_{21}'(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, z_{21}(t)\,, \quad z_{32}'(t) = (\lambda_3 - \lambda_2)\, z_{32}(t)\,.$$

对于对称三对角矩阵，$y_{ij} = 0$、$z_{21} = b_{21}$ 和 $z_{32} = b_{32}$。

3 Toda 流的线性化

对于实流形 M 的一个开子集 U，若其维数为 n，则欧几里得坐标图是一个微分同胚 $\phi : U \to \mathbb{R}^n$。

3.1 等谱流形的欧几里得坐标图

在本小节中，我们固定 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n) \in \mathcal{D}^{\pi_0}$。定义对称和一般等谱集，

$$\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}} = \{Q^\top\, D\, Q, Q \in \mathbf{O}\} \subset \mathcal{S}\,, \quad \mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}} = \{X^{-1}\, D\, X, X \in \mathbf{GL}\} \subset \mathcal{M}\,. \tag{6}$$

等谱集 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}$是光滑流形，分别是**正交群 O** 和**一般线性群 GL**在伴随作用下的轨道。我们定义了图册，其欧几里得坐标图可将 Toda 流及其某些推广线性化。

回忆一下 $D^\pi = P_\pi^\top D P_\pi = \mathrm{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \ldots\ldots, \lambda_{\pi(n)})$，并令

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}} &= \{Q^\top\, D^\pi\, Q, Q \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}\} \subset \mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}, \\ \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}} &= \{X^{-1}\, D^\pi\, X, X \in \mathbf{GL}^{\mathrm{pos}}\} \subset \mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}. \end{aligned} \tag{7}$$

设 $M \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$。由命题 6.1（Schur），

$$M = Q^\top (Y + D^\pi) Q\,, \quad Q \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}, \quad Y \in \mathfrak{lo}^0\,. \tag{8}$$

考虑 LU 分解 $Q = LU$，其中 $L \in$ **下三角群**^{1}，$U \in$ **上三角群**$^+$，并记

$$L^{-1}(Y + D^\pi)L = Z + D^\pi\,, \quad Z \in \mathfrak{lo}^0, \tag{9}$$

使得 $M = U^{-1}(Z + D^\pi)U$。

命题 3.1（和 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}$的欧几里得坐标图）。子集 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}} \subset \mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}$和 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}} \subset \mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}$是开且稠密的。它们覆盖 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}$:

$$\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}} = \bigcup_{\pi \in S_n} \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}}\,, \quad \mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}} = \bigcup_{\pi \in S_n} \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}\,.$$

对于方程（8）和（9）中的 Y 和 Z，映射

$$\phi_{D^\pi}^{\mathbf{O}} : \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}} \to \mathfrak{lo}^0\,, \quad S \mapsto Z, \qquad \phi_{D^\pi}^{\mathbf{GL}} : \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}} \to \mathfrak{lo}^0 \times \mathfrak{lo}^0\,, \quad M \mapsto (Y, Z)$$

是微分同胚。矩阵 $M \in \mathcal{U}_\pi^{\mathbf{GL}}$是对称矩阵（分别为上三角矩阵）当且仅当 $Y = 0$（分别为 $Z = 0$）。

这些坐标图为光滑流形 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}$提供了一个图册。我们将坐标图的取值（如 Y 和 Z）或它们的元素称为变量。在第 3.2 小节中，我们将得到 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}}$中流的公式，以（$Y$，$Z$）变量表示。

证明。 根据等式 (7)以及子集 $\mathbf{O}^{\mathrm{pos}} \subset$**O** 和**一般线性群**$^{\mathrm{pos}} \subset$**一般线性群**的开性，坐标图定义域是开集。稠密性源于 $\mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}\mathbf{O}^{\mathrm{pos}} = \{EQ, E \in \mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}, Q \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}\} \subset$ **O** 和 $\mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}$**一般线性群**$^{\mathrm{pos}} \subset$ **一般线性群**的稠密性。坐标图定义域覆盖相应流形这一事实，来自矩阵的 (PLU) 分解（见附录）。

我们证明坐标图的光滑可逆性。设 D^π、Y 和 Z 如上：我们求出 M（求出 S 的情形为 $Y = 0$）。我们首先说明，存在唯一的 $L \in$ 下三角群^1，使得 $Z + D^\pi = L^{-1}(Y + D^\pi)L$。写作 $L(Z + D^\pi) = (Y + D^\pi)L$，并利用 D^π 谱的简单性：在此方程中令第 (2, 1)、(3, 2).....(n, $n-1$) 个元素相等，可得 $n-1$ 个元素 $L_{(k,k-1)}$。对后续次对角线重复此过程，直到算出 L。现在分解$L = QR$，其中 $Q \in$ 属于正交群^{pos}，$R \in$ 属于上三角群$^+$，因此 $Q = LU$ 属于 $U = R^{-1} \in$ 上三角群$^+$。如方程 (8) 和 (9) 所示，令$M = Q^\top(Y + D^\pi)Q = U^{-1}(Z + D^\pi)U$。

方程 $M = Q^\top(Y + D^\pi)Q$ 意味着，当且仅当 $Y = 0$时，M 是对称的。同样，$M = U^{-1}(Z + D^\pi)U$ 是上三角的，当且仅当 $Z = 0$。 □

注记 3.2. 分解 $M = U^{-1}(Z + D)U$，$U \in$ **上三角群** $Z \in \mathfrak{lo}^0$ 并不唯一，因此无法恢复 Z：对于任意可逆对角矩阵 E,

$$M = (U^{-1}E^{-1})(E(Z + D)E^{-1})(EU) = (U^{-1}E^{-1})(EZE^{-1} + D)(EU)\,.$$

明确说明矩阵对其特征值的依赖关系很方便。考虑具有简单实谱的矩阵开集：

$$\mathcal{O}^{\mathbf{O}} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}^{\pi_0}} \mathcal{O}_D^{\mathbf{O}} \subset \mathcal{S}\,, \qquad \mathcal{O}^{\mathbf{GL}} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}^{\pi_0}} \mathcal{O}_D^{\mathbf{GL}} \subset \mathcal{M}\,. \tag{10}$$

第一个子集是稠密的，而第二个不是：具有单谱和复特征值的矩阵属于其补集的内部。我们在 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}$中构造坐标图：这些坐标图定义域

$$\mathcal{U}_\pi^{\mathbf{O}} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}^{\pi_0}} \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}} \subset \mathcal{O}^{\mathbf{O}}\,, \quad \mathcal{U}_\pi^{\mathbf{GL}} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}^{\pi_0}} \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}} \subset \mathcal{O}^{\mathbf{GL}}$$

显然覆盖这些集合

$$\mathcal{O}^{\mathbf{O}} = \bigcup_{\pi\in S_n} \mathcal{U}_\pi^{\mathbf{O}}\,, \quad \mathcal{O}^{\mathbf{GL}} = \bigcup_{\pi\in S_n} \mathcal{U}_\pi^{\mathbf{GL}}\,.$$

命题 3.3（线性化变量）。对于 $\pi\in S_n$，映射

$$\tilde{\phi}_\pi^{\mathbf{O}} : \mathcal{U}_\pi^{\mathbf{O}} \to \mathcal{D}^\pi \times \mathfrak{so}^0\,, \quad S \mapsto (D^\pi, Z),$$

$$\tilde{\phi}_\pi^{\mathbf{GL}} : \mathcal{U}_\pi^{\mathbf{GL}} \to \mathcal{D}^\pi \times \mathfrak{so}^0 \times \mathfrak{so}^0\,, \quad M \mapsto (D^\pi, Y, Z)$$

是微分同胚。

证明。由于特征值是单的，特征值的梯度非零，$\mathcal{D}^{\pi_0}$ 与 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}$ 横截，且映射定义良好：我们考虑它的逆映射。假设给定了 D^π，Z 和 Y，并寻找满足$L(Z+D^\pi) = (Y+D^\pi)L$的 $L \in$ **下三角群**[1] 。由 D^π的谱的单纯性可知，解存在且唯一：L 的元素沿次对角线逐一计算，从最靠近对角线的次对角线开始，正如命题 3.1 的证明中所述。现在分解$L = QR$，其中 $Q \in$ **正交群**^{pos}、$R \in$ **上三角群**$^{+}$，并令 $M = Q^\top(Y + D^\pi)Q$。 □

3.2 线性化变量中的 Toda 流

我们求得向量场在 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}} \subset \mathcal{M}$到 $\mathcal{D}^\pi \times \mathfrak{so}^0 \times \mathfrak{so}^0$下的推前。更确切地说，对于矩阵 $M \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$ 的变分 $\dot{M}$，我们计算命题 3.3 中线性化变量（D^π，Y，Z）的变分. . D^π，Y和 Z。

设 $\pi\in S_n$和 $M\in\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$。根据命题 6.1（Schur），对于 $Q\in$**正交群**^{pos}，$Y\in\mathfrak{so}^0$，$M = Q^\top(Y+D^\pi)Q$。

命题 3.4（切空间的分解）。令 $M\in\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$、$D^\pi$、$Q$、$Y$ 如 $\dot{}$ 中所述。则对于 $M\in\mathcal{M}$，存在唯一的分解

$$\dot{M} = \left(Q^\top \dot{D}^\pi Q\right) + \left(Q^\top \dot{Y} Q\right) + \left([M,\ Q^\top \dot{Q}]\right),$$

其中三个加项分别属于以下（依赖于 M 的）实向量空间，

$$C = \{Q^\top E Q,\ E \in \mathcal{D}\},\ V = \{Q^\top N Q,\ N \in \mathfrak{lo}0\},\ W = \{[M, A],\ A \in \mathfrak{o}\},$$

使得 $\mathcal{M} = C \oplus V \oplus W$。映射

$$\dot{M} \in \mathcal{M} \mapsto (\dot{D^\pi}, \dot{Y},\ Q^\top \dot{Q}) \in \mathcal{D} \times \mathfrak{lo}^0 \times \mathfrak{o},$$
$$B \in \mathfrak{o} \mapsto [Y + D^\pi, B] \in \tilde{W}\text{是同构。}$$

证明。 由于 $M = Q^\top (Y + D^\pi) Q, Q \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}},\ Y \in \mathfrak{lo}^0$，取导数，

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \dot{Q}^\top (Y + D^\pi) Q + Q^\top \dot{D^\pi} Q + Q^\top \dot{Y} Q + Q^\top (Y + D^\pi) \dot{Q} \\ &= Q^\top \dot{D^\pi} Q + Q^\top \dot{Y} Q + [M, Q^\top \dot{Q}]\end{aligned}$$

由于 $Q^\top \dot{Q} \in \mathfrak{o}$，这三个加项分别属于 C, V和 W。我们验证分解的唯一性。记

$$W = \{[M, A],\ A \in \mathfrak{o}\} = \{Q^\top [Y + D^\pi, B] Q,\ B \in \mathfrak{o}\}.$$

消去由 Q 给出的共轭后，我们证明对于

$$\tilde{C} = \mathcal{D},\quad \tilde{V} = \mathfrak{lo}_0,\quad \tilde{W} = \{[Y + D^\pi, B],\ B \in \mathfrak{o}\}.$$

设 $\tilde{L} \in \mathfrak{lo}^0$：我们先证明，对于未知量 $B \in \mathfrak{o}$，方程

$$[Y + D^\pi, B] = \tilde{L} \tag{11}$$

从而得到 $B = 0$。如命题 3.1 中所述，比较各条次对角线上的元素，并利用 D^π 具有单谱，可知 B 的严格上三角元素（因而其严格下三角元素也）均为零：B 是一个对角矩阵。由于 $B \in \mathfrak{o}$，我们必须有 $B = 0$。

特别地， V 与 W 的交是平凡的。同样， C 与 W 的交也是平凡的，且 $B \in \mathfrak{o} \mapsto [Y + D^\pi, B] \in W$ 是一个同构。□

考虑与直和 $\mathcal{M} = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{up}$ 相关的投影 $\Pi_{\mathfrak{o}}$ 和 $\Pi_{\mathfrak{up}}$。回顾与多项式 p 相关的 Toda 流的公式（2）。

定理 3（Toda 流线性化）。 集合 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$ 在 *Toda* 流 $\dot{M} = [M, \Pi_{\mathfrak{o}} p(M)]$ 下是不变的。在 线性化变量 （D^π、 Y、 Z） 中，

$$\dot{D^\pi} = 0,\quad \dot{Y} = 0,\quad \dot{Z} = [Z, -p(D^\pi)]\,. \tag{12}$$

特别地，解 $M(t)$ 是全局定义的：若 $M(0) \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$，则对于所有$t \in \mathbb{R}$，都有 $M(t) \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$。

注3.5。方程 Z 显然可解，因为 $D(t)$ 是常矩阵，其元素由 M_0 的谱按某种顺序组成：

$$Z(t) = \exp(tp(D^\pi))\ Z_0\ \exp(-tp(D^\pi))\,,\ z_{ij}(t) = z_{ij}(0)\ \exp(t(p(\lambda_{\pi(i)}) - p(\lambda_{\pi(j)}))).$$

因此，在这样的变量中，Toda 流以依赖于（常数）特征值的乘法因子解耦。

证明。为简化思路，我们考虑 $\pi = \pi_0$ 并写作 $D^\pi = D$。取 $M \in \mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{D^\pi}$。令 $A = A(M) = \Pi_{\mathfrak{o}} p(M) \in \mathfrak{o}$。由于 $M = [M, A] \in W$，命题 3.4 中 M在子空间 C、V、W中的唯一分解，

$$\dot{M} \;=\; \left(Q^\top \dot{D}^\pi Q\right) + \left(Q^\top \dot{Y} Q\right) + \left([M, \Pi_{\mathfrak{o}}\ Q^\top \dot{Q}]\right),$$

给出

$$Q^\top \dot{E} Q = 0 = \dot{E}\,, \quad Q^\top \dot{Y} Q = 0 = \dot{Y}\,, \quad Q^\top \dot{Q} = \Pi_{\mathfrak{o}}\ Q^\top \dot{Q} = A.$$

现在我们通过先计算 $\dot{L}$，来计算 $\dot{Z}$，其中 $Z + D = L^{-1}(Y + D)L$。定义与直和 $\mathcal{M} = \mathfrak{lo}^0 \oplus \mathfrak{up}$相关的投影 $\Pi_{\mathfrak{lo}^0}$和 $\tilde{\Pi}_{\mathfrak{up}}$；读者˜不应将 $\Pi_{\mathfrak{up}}$ 与 $\Pi_{\mathfrak{up}}$混淆，正如方程（1）中那样。

由于 $Q = LU$对于 $Q \in$ **正交群**^{pos}、$L \in \mathbf{L^1}$、$U \in$ **上三角群**，我们有 $\dot{Q} = \dot{L}U + L\dot{U}$ 然后

$$L^{-1}\,\dot{L} \;=\; L^{-1}\,\dot{Q}\,U^{-1} - \dot{U}U^{-1} \;=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\left(L^{-1}\,\dot{Q}\,U^{-1}\right).$$

由于 $\dot{Q} = QA$和 $UMU^{-1} = Z + D = L^{-1}(Y + D)L$（见方程（9）），我们有

$$\begin{aligned} L^{-1}\,\dot{L} \;&=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\left(L^{-1}\,Q\,A\,U^{-1}\right) \;=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\left(U\,A\,U^{-1}\right) \\ &=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\left(U\ (\Pi_{\mathfrak{o}} p(M))\,U^{-1}\right) \;=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\left(U\,((p(M) - \Pi_{\mathfrak{up}}\,p(M))\ U^{-1}\right) \\ &=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\left(U\ p(M)\ U^{-1}\right) \;=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\,p(U\ M\ U^{-1}) \;=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\,p(Z + D) \\ &=\; p(Z + D) - \operatorname{diag} p(Z + D) \;=\; p(Z + D) - p(D)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

对 $Z + D = L^{-1}(Y + D)L$ 求导，由 $\dot{Y} = \dot{D}^\pi = 0$ 可得，

$$\dot{Z} \;=\; (\dot{Z + D}) \;=\; [Z{+}D, L^{-1}\dot{L}] \;=\; [Z{+}D, p(Z{+}D){-}p(D)] \;=\; [Z, -p(D)]\,. \tag{14}$$

该论证表明，线性化变量中的解 $M(t)$ 由方程（12）给出。由于 $p(D(t))$ 是一个常对角矩阵，$Z(t) \in \mathfrak{lo}$：该解在 $\mathcal{U}_{\text{一般线性群}_{D^{\pi_0}}} \subset \mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{\pi_0}$ 中全局定义。其他置换的计算类似。

□

注 3.6。该定理适用于 $\mathcal{U}^{\mathbf{O}}_{D^\pi}$ 中的对称矩阵：当 $Y = 0$ 时，它们是一个特例。

注记 3.7。方程（14）中的前几个公式与 Toda 流的原始方程类似。到方程末尾，Z 的方程变成了一组具有常系数的线性解耦微分方程。

注记 3.8。 L 的各项也会线性化；对于对称矩阵 M，它们会解耦。事实上，由公式（13）可得，

$$L^{-1}\,\dot{L} \;=\; p(Z+D)-p(D) \;=\; L^{-1}p(Y+D)L-p(D)\,,$$

因此，对于 Toda 演化下的常矩阵 Y 和 D，

$$\dot{L} \;=\; p(Y+D)\,L - L\,p(D)\,.$$

特别地，由命题 3.1 可知，若 M 为实对称矩阵，则有 $Y=0$ 和$L=[L,-p(D)]$。不过，矩阵 Z 作为坐标系还有一项额外优势，我们将在第 3.3 小节中探讨：它们以自然的方式与轮廓相关。

注 3.9。 在数值分析中，考虑时间依赖的演化 $\dot{M}=[M,\Pi_{\mathfrak{o}}p(M;t)]$,很常见，其中 p的系数依赖于 t（一个典型例子是在每次 QR 迭代 [16, 13]时改变移位参数）。定理陈述中的公式很容易调整，以处理这一更一般的情形：在线性化变量中（D^{π}，Y，Z），

$$\dot{D}^{\pi} \;=\; 0, \quad \dot{Y}=0\,, \quad \dot{Z}=[Z,-p(D^{\pi};t)]\;,$$

$$Z(t)=\exp\left(\int_0^t\; p(D^{\pi};s)\;ds\right)\;Z_0\;\exp\left(-\int_0^t p(D^{\pi};s)\;ds\right)\;.$$

我们使用上述公式计算沿轨道的极限。请注意，只要初始条件具有实单谱，该结果也适用于非对称矩阵。回想一下，$D=D^{\pi_0}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n)$，$\lambda_1>\ldots>\lambda_n$。

命题 3.10 (渐近行为)。 考虑初始条件 $M(0)\in\mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{D^{\pi}}$,$\pi\in S_n$。令 $p:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 D 的特征值处取不同的值，使得$p(\lambda_{\pi(1)})>\ldots>p(\lambda_{\pi(n)})$。于是有

$$\lim_{t\to\infty}M(t)=(\phi^{\mathbf{GL}}_{\pi})^{-1}(D^{\pi},Y(0),0),\qquad \phi^{\mathbf{GL}}_{\pi}(M(0))=(D^{\pi},Y(0),Z(0))\,. \quad (15)$$

证明。由注 3.5 中 $Z(t)$ 的表达式可知，$Z(t)\to 0$，因为$Z(t)\in\mathfrak{lo}$，且 $Y(t)$ $D(t)$ 保持不变。由命题 3.1 可知，$(D(0)$ $Y(0),0)$ 对应于上三角矩阵 $M(0)=U^{-1}(0+D(0))U$。 □

注 3.11。 特别地，对于非对称（分别为对称）初始条件，Toda 流的平衡点是上三角矩阵（分别为对角矩阵）。一种常见情形是 p 为严格递增函数且 $\pi=\pi_0$，例如标准托达流 $p(x)=x$。

一个有趣的事实是，这类收敛轨道的渐近行为——它们必然是流的守恒量——自然地与变量Y相关。标准 Toda 流的渐近行为在域 $\mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{\pi_0}$上给出一个投影 $(D,\ Y,\ Z)\mapsto(D,\ Y,\ 0)$。

3.3 轮廓

在第2节中，我们声称，3×3 对称三对角矩阵的等谱集以及更大的上 Hessenberg 矩阵等谱集都是流形，Toda 流与这些流形相切；并且，对称三对角矩阵的等谱流形可由 Toda 流的线性化坐标图覆盖。现在，我们将这一结果推广到具有比 Jacobi 和上 Hessenberg 示例更一般剖面的等谱矩阵。

给定一组数对 $S = \{(i,\ j)\ \ i \geq j,\quad i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$，由 S 生成的剖面 p 是数对的集合

$$\mathrm{p} = \{(i, j) \mid \exists\ (i', j') \in \mathrm{p},\ i \leq i', j \geq j'\}\,.$$

令 $V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}} \subset \mathcal{M}$ 为由矩阵 $E_{ij} = e_i \otimes e_j$ 张成的子空间，其中 $(i,\ j) \in \mathrm{p}$，并设 $V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}} = V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}} \cap \mathcal{S}$。因此，例如，实上 Hessenberg 矩阵和对称三对角矩阵的子空间分别等于由集合 $S = \{(2,\ 1),\ (3,\ 2) \ldots,\ (n,\ n-1)\}$ 生成的轮廓 p 对应的子空间 $V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 和 $V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}}$。

子空间 $V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 的一个重要代数性质是，它们是李代数 $\mathfrak{up}$ 伴随作用的模。由表达式 $\dot{M} = [M, \Pi_{\mathfrak{o}}\, p(M)]$ 可知，Toda 流 (2) 与向量空间 $\mathcal{M}$ 中的任意一个 $\mathfrak{o}$-模都相切，例如与对称矩阵的向量空间 $\mathcal{S}$ 相切。这就是 Toda 流定义在紧等谱流形 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_D$ 上的原因。但从另一种表达式 $\dot{M} = [M, -\Pi_{\mathfrak{up}}\, p(M)]$ 也可知，Toda 流与 $\mathcal{M}$ 中任意一个 $\mathfrak{up}$-模子空间都相切，例如子空间 $V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$。也就是说，如果一个矩阵属于 $V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$，那么它在 Toda 流作用下的演化始终留在 $V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 中。因此，对于任意给定的单谱和轮廓，子集 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_D \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 以及 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_D \cap V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$ 在 Toda 流下是不变的。

与 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_D$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_D$ 的情形不同，后两者是群作用的轨道，而要证明 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_D \cap V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_D \cap V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 是流形则没有简单的论证。假设谱为单谱很重要：与具有特征值 0 和 1 的实 3×3 对称三对角矩阵相关的等谱集，其中 0 的重数为 2，是一个八字形（两个圆在一点相连）。文献[20]证明，具有固定单谱的对称三对角矩阵构成一个流形。轨道 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_D$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_D$ 确实与 $V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}}$ 和 $V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 横截，但我们更倾向于在轨道的线性化变量中检验横截性。我们证明，线性化变量在子空间 $V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}}$ 和 $V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 上的限制性质良好。

命题 3.12 ($\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 的欧几里得坐标图)。集合 $\mathcal{U}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$（分别为 $\mathcal{U}$ 一般线性群 $D^\pi \cap V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$）是 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_D \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$（分别为 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_D \cap V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$）中的开稠密子集。其限制映射

$$\phi^{\mathbf{O}}_{D^\pi} : \mathcal{U}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}} \to \mathfrak{lo}^0 \cap V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}}, \quad S \mapsto Z,$$
$$\phi^{\mathbf{GL}}_{D^\pi} : \mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}} \to \mathfrak{lo}^0 \times \left(\mathfrak{lo}^0 \cap V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}\right), \quad M \mapsto (Y, Z)$$

是微分同胚，因此为 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}_{\mathrm{p}}$和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$提供了带有欧几里得坐标图的图册。

证明。 我们对 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_{D} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 证明该结论，另一种情形类似。考虑满足 $S \in \mathcal{U}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 的 $\pi \in S_n$，并按照通常的约定记为：

$$S = Q^\top D Q = U^{-1} L^{-1} D L U = U^{-1}(Z + D)U.$$

于是 $USU^{-1} = Z + D$。由于 $S \in V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$，且 $V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$在 **上三角群**的共轭作用下保持不变，因此我们也必须有 $USU^{-1} = Z + D \in V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$，从而 $Z \in \mathfrak{lo}^0 \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$。因此，$\phi^{\mathbf{O}}_{D^\pi}$ 的限制将 $\mathcal{U}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 微分同胚地映到 $\mathfrak{lo}^0 \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 上。由于 $\mathfrak{lo}^0 \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 是一个向量空间，我们为 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_{D} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 构造了欧几里得坐标图。 □

回到 3×3 的例子，我们考虑上 Hessenberg 矩阵。坐标图定义域 $\mathcal{U}_{\text{正交群}}{}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$微分同胚于 $\{(z_{21}, z_{32})\} \sim \mathbb{R}^2$，而 $\mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$ 微分同胚于 $\{(y_{21}, y_{31}, y_{32}, z_{21}, z_{32})\} \sim \mathbb{R}^5$。

显然，坐标图在剖面上的限制仍然良好。

推论 3.13 (Toda 流在 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$ 上线性化)。 对称和非对称 ***Toda*** 流保持集合 $\mathcal{U}^{\mathbf{O}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{S}}{}_{\mathrm{p}}$ 和 $\mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{D^\pi} \cap V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$ 不变，并在线性化变量 (D^π, Z) $Z \in \mathfrak{lo} \cap V^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{p}}$ 和 (D^π, Y, Z) $Y \in \mathfrak{lo}^0$，$Z \in \mathfrak{lo}^0 \cap V^{\mathcal{M}}_{\mathrm{p}}$ 中线性化。

证明。 结论由定理 3 和命题 3.12 得出。 □

显然，线性化变量（命题 3.3）在剖面上的限制也成立。

3.4 Toda 流作为直线运动，超可积性

我们构造流形 $\mathcal{O}^{\mathbf{O}} \setminus \mathcal{D}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}} \setminus \mathfrak{up}$ 的一个开半空间覆盖，使其具有以下性质。每个半空间在任意 Toda 流作用下均保持不变。对于单调多项式 p，相应的 Toda 流变为直线运动（沿任意直线的速度相同）。

选取一个置换 $\pi \in S_n$ 和一个指标 $(i_0,\ j_0)$ $i_0 > j_0$。对于矩阵 $M \in \mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{\pi} \subset \mathcal{O}^{\mathbf{GL}}$，考虑线性化变量 $(D^\pi,\ Y,\ Z)$。对于一个符号 $\sigma \in \{+1, -1\}$，定义开集

$$\mathcal{H}_{\pi,(i_0,j_0),\sigma} \ = \ \{M \in \mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{\pi} \mid \sigma z_{i_0 j_0} > 0\} \ .$$

不交并 $\mathcal{H}_{\pi,\ (i_0,j_0)\ +1} \cup \mathcal{H}_{\pi,\ (i_0,j_0)\ -1} \subset \mathcal{U}^{\mathbf{GL}}_{\pi}$是一个开稠密子集。

给定一个单调多项式 p，在 $\mathcal{H}_{\pi,\ (i_0,j_0)\ \sigma}$ 中定义新变量 $w_{ij},\ \ i > j$:

$$w_{i_0,j_0} \ = \ \frac{\log |z_{i_0 j_0}|}{p(\lambda_{i_0}) - p(\lambda_{j_0})},$$

$$w_{i,j} = \frac{z_{ij}}{|z_{i_0 j_0}|^{\varepsilon}}, \qquad (i,j) \neq (i_0, j_0)\,, \quad \varepsilon = \frac{p(\lambda_i) - p(\lambda_j)}{p(\lambda_{i_0}) - p(\lambda_{j_0})}\,.$$

坐标 $(D^\pi,\ Y,\ W)$ 给出了从 $\mathcal{H}_{\pi,\ (i_0,j_0)\,\sigma}$ 到 $\mathcal{D}^\pi \times \mathfrak{lo} \times \mathfrak{lo}$ 的一个微分同胚。图 2 描述了这些变量。

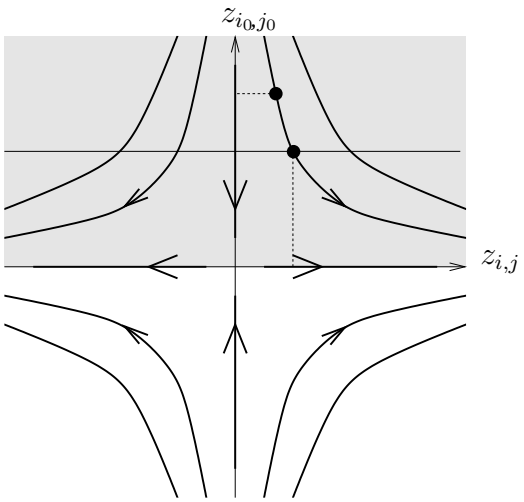

图 2：开集 $\mathcal{U}_\pi$，或者更准确地说，固定谱下的一个截面；我们使用 z_{ij} 作为坐标。半空间 $\mathcal{H}_{\pi,\ (i_0,j_0)\,+1}$ 以二维上半平面的形式表示。纵轴对应 $z_{i_0,\ j_0}$，而 $w_{i_0,\ j_0}$ 是 $z_{i_0,\ j_0}$的函数。横轴对应所有其他的 $z_{i,\ j}$。坐标 $w_{i,\ j}$ 通过沿轨道运动直至与水平超平面 $z_{i_0,\ j_0} = 1$ 相交，再读取 $z_{i,\ j}$的新值而得到。

定理4 (直线运动)。 在与单调多项式 p 相关联的 *Toda* 流下，

$$\dot{D}^\pi = 0, \quad \dot{Y} = 0, \quad \dot{w}_{i_0,j_0} = 1, \quad \dot{w}_{i,j} = 0,\ (i,j) \neq (i_0,j_0)\,.$$

因此，这样的流在 $\mathcal{H}_{\pi,\ (i_0,j_0)\,\sigma}$ 中是超可积的。

流在维数为 d 的流形上超可积，意味着存在 $d-1$ 个函数独立的守恒量。

证明。 这一结果是方程（3.5）的一个直接推论。 □

这些变量很好地限制于对称情形。事实上，开集

$$\mathcal{H}^{\mathrm{O}}_{\pi,(i_0,j_0),\sigma} = \mathcal{H}_{\pi,(i_0,j_0),\sigma} \cap \mathcal{O}^{\mathrm{O}} \subset \mathcal{U}^{\mathrm{O}}_\pi$$

定义 $\mathcal{O}^{\mathrm{O}} \setminus \mathcal{D}$ 的一个开覆盖。对于指标 (i_0, j_0)，按上述方式定义 w_{ij}。直线运动与上述相同，当然，区别在于我们不需要 Y。

同样，变量也可以很好地限制到轮廓上：如推论 3.13 所示，只需舍弃不属于该轮廓的变量 (i,j)。例如，对于$n\times n$对称三对角矩阵，线性化变量为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 和 $z_{21},z_{32},\ldots,z_{n,n-1}$。我们采用一种简单的表示法，根据线性化变量来表示 Jacobi 矩阵，这些变量已在 [12] 中讨论过。

命题 3.14。对于任意坐标图 $\phi^{\mathbf{O}}_{D^\pi}$，变量 (y_{ij},z_{ij})中的雅可比矩阵对应于 $j\neq i-1$ 和 $z_{i,i-1}>0$的元素 $y_{ij}=0,\ z_{ij}=0$。

证明。令 $\pi\in S_n$ 和 D^π 如常。根据为对称三对角矩阵 T, $y_{ij}=0$, $z_{ij}=0$ 构造 Z 的方式，对于 $j\neq i-1$ 和 $z_{i,i-1}=0$ 当且仅当$T_{i,i-1}=0$。剩下要证明的是 $z_{i,i-1}$ 与 $T_{i,i-1}$ 的符号相同。只需证明在 $D^\pi=\operatorname{diag}(\lambda_{\pi(1)},\ldots,\lambda_{\pi(n)})$附近这一点成立。忽略轮廓（因为线性化变量只是将范围限制为轮廓，如第 3.3 节所述），我们考虑形如 $Q^\top D^\pi Q$ 的矩阵，其中 Q 接近 I，即单位矩阵。用 ϵ 表示关于 $\|Q-I\|$的低阶项。对于 $Q=I+A+\epsilon, A\in\mathfrak{o}$,

$$Q^\top D^\pi Q=(I-A+\epsilon)D^\pi(I+A+\epsilon)=D^\pi+[D^\pi,A]+\epsilon\,.$$

设 $Q=LU$，$\in$**下三角群**[1]，$U\in$**上三角群**。那么 $L=I+\Pi_{\mathfrak{lo}^0}A+\epsilon$和

$$Z+D^\pi=L^{-1}D^\pi L=(I-\Pi_{\mathfrak{lo}^0}A)D^\pi(I+\Pi_{\mathfrak{lo}^0}A)=D^\pi+[D^\pi,\Pi_{\mathfrak{lo}^0}\ A]+\epsilon\,.$$

$[D^\pi,A]$和 $[D^\pi,\Pi_{\mathfrak{lo}^0}\ A]$的严格下三角部分相同，尤其是它们各项的符号也相同。□

由此可得，半空间 $\mathcal{H}^{\mathbf{O}}_{\pi,\ (i_0,i_0-1)\ \sigma}$是由满足$\sigma T_{(i_0,i_0-1)}>0$的矩阵 T构成的集合。雅可比矩阵的集合是半空间 $\mathcal{H}^{\mathbf{O}}_{\pi,\ (i_0,i_0-1)\ +1}$的交，其中 $i_0=2,\ \ldots\ldots,\ n$。图 2 展示了 $n=3$的一个这样的半空间。第一象限是雅可比矩阵的集合。更一般地说，雅可比矩阵将覆盖第一卦限。在所有情况下，这个卦限都是变量 $w_{i,\ i-1}$的笛卡尔积，这意味着对于单调多项式 p，在雅可比矩阵集合中也具有超可积性。标准 Toda 流（其中 $p(x)=x$）在 $n\times n$ 雅可比矩阵上的超可积性归功于 Agrotis 等人 [2]。

4 线性化 SVD 流

Chu [4] 考虑了上双对角矩阵上的微分方程 M ,

$$\dot{M}=M\ \left(\Pi_{\mathfrak{o}}\,p(M^\top M)\right)-\left(\Pi_{\mathfrak{o}}p(MM^\top)\right)\ M\,,\tag{16}$$

对于特殊情形 $p(x)=x$。投影 $\Pi_{\mathfrak{o}}$ 在方程（1）中定义。Chu 证明，对于正交矩阵 $\tilde{Q}(t)$ $\tilde{U}(t)$，有 $M(t)=\tilde{Q}^\top(t)M(0)\,\tilde{U}(t)$，因此

$M(t)$ 和 $M(0)$ 的奇异值相等。事实上，对于奇异值分解表示$M(0) = Q_0^\top \Sigma U_0$，我们得到

$$M(t) = \tilde{Q}^\top(t)\, Q_0^\top \Sigma U_0\, \tilde{U}(t) = Q^\top(t)\, \Sigma\, U(t)\,.$$

Chu 还证明了，一般而言，当 $t \to \infty$ 时，我们有 $Q(t)\, U(t) \to I$。

Li [14] 研究了作用于（一般）非对称矩阵的光滑函数 $f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$。与特殊情形 $p(x) = \log x$ 相关的时间一映射 $M(0) \mapsto M(1)$ 是用于计算矩阵奇异值分解表示的**零位移奇异值分解算法** [10]。随后，他得到了这类方程在 **一般线性群** 中某个初始条件开集上的完全可积性。他所采用方法中的一项重要任务，是确定适当的辛结构。

本节中，我们为这类流定义线性化变量。

4.1 具有给定奇异值的矩阵流形

设 Σ 为具有简单、严格正谱的实对角矩阵。定义

$$\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}} = \{Q^\top\, \Sigma\, U,\ \ Q, U \in \mathbf{O}\}\,.$$

计算奇异值的标准算法是在$\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$ [10] 内进行迭代。

对于 $M = Q^\top \Sigma U \in \mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$，$Q$，$U \in$ **正交群**，写作 $M = (Q^\top \Sigma Q)(Q^\top U) = SW$ 对于$S = Q^\top \Sigma Q \in \mathcal{O}_\Sigma^{\mathbf{O}}$ 以及 $W = Q^\top U \in$ **正交群**。以下结果是众所周知的极分解唯一性（见附录）。

命题 4.1。 映射 $(S, W) \in \mathcal{O}_\Sigma^{\mathbf{O}} \times$**正交群** $\mapsto M \in \mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$是一个微分同胚。

该结果为 $\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$提供了一个图册，但我们考虑一种更为均衡的构造，即使用坐标图定义域 $\mathcal{U}_{\text{正交群}D^\pi}$和 $\mathcal{U}_{D^\rho}^{\mathbf{O}}$（对于排列 π，$\rho \in S_n$）来构造等谱对称流形 $\mathcal{O}_{\Sigma^2}^{\mathbf{O}}$。

回顾一下，$\mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}$ 是实符号对角矩阵群。对于置换矩阵 P_π、P_ρ 和 $E \in \mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}$，定义

$$\mathcal{U}_{\pi,\rho,E} = \{M \in \mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}} \mid M = Q_\pi^\top P_\pi^\top\, \Sigma E\, P_\rho U_\rho\,,\ Q_\pi, U_\rho \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}\}\,.$$

命题4.2。 集合 $\mathcal{U}_{\pi,\rho,E}$ 覆盖 $\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}}$：$\mathcal{O}_\Sigma^{\mathrm{svd}} = \bigcup\ \mathcal{U}_{\pi,\rho,E}$。映射$_{\pi,\rho,E}$

$$\tilde{\phi}_{\pi,\rho,E} : \mathcal{U}_{\pi,\rho,E} \to \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}} \times \mathcal{U}_{D^\rho}^{\mathbf{O}},\ M \mapsto (S_\pi, S_\rho) = (Q_\pi^\top \Sigma^\pi Q_\pi, U_\rho^\top \Sigma^\rho U_\rho)$$

是微分同胚，$\phi_{\pi、\rho、E}: \mathcal{U}_{\pi、\rho、E} \to \mathfrak{lo}^0 \times \mathfrak{lo}^0$、$M \mapsto (\phi_{D^\pi}^{\mathbf{O}}(S_\pi)\ \phi_{D^\rho}^{\mathbf{O}}(S_\rho)\qquad)$.

$\phi_{D^\pi}^{\mathbf{O}}$ 和 $\phi_{D^\rho}^{\mathbf{O}}$ 是定义在 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{U}_{D^\rho}^{\mathbf{O}}$ 上的线性化坐标图，对应命题 3.1 中定义的 Toda 流。回忆一下 $\Sigma^\pi = \Pi_\pi^\top \Sigma \Pi_\pi$。

证明。设 $M \in \mathcal{O}_{\Sigma}^{\mathrm{svd}}$。则 $M = \tilde{Q}^{\top}\Sigma\tilde{U}$，$\tilde{Q}$，$\tilde{U} \in$ **正交群**。根据 (PLU分解)（见附录），如同命题 3.1 的证明中所述，存在置换矩阵 P_{π} 和 P_{ρ}，分别作用于 $\tilde{Q}^{\top}$ 的列和 U的行˜ ˜ ˜，并且 E_Q，$E_P \in \mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}$，使得

$$\tilde{Q}^{\top} = Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}\tilde{E}_Q\,, \quad \tilde{U} = \tilde{E}_U P_{\rho}U_{\rho}, \qquad Q_{\pi}, U_{\rho} \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}\,.$$

因此 $M = Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}\tilde{E}_Q\ \Sigma\ \tilde{E}_U P_{\rho}U_{\rho} = Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}\tilde{\Sigma}\ EP_{\rho}U_{\rho}$，对于 $E \in \mathcal{D}^{\mathrm{sgn}}$，证明了覆盖性质。现在我们证明，对于给定的 π，ρ 和 E 和 $M \in \mathcal{U}_{\pi,\ \rho,\ E}$，分解

$$M = Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}\ \Sigma E\ P_{\rho}U_{\rho}\,, \qquad Q_{\pi}, U_{\rho} \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}\,, \tag{17}$$

是唯一的。记

$$M = \big(Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}\ \Sigma P_{\pi}Q_{\pi}\big)\big(Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}E\ P_{\rho}U_{\rho}\big) = \big(Q_{\pi}^{\top}\Sigma^{\pi}Q_{\pi}\big)\big(Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}E\ P_{\rho}U_{\rho}\big) = S_{\pi}W_{\pi}.$$

因此，对 ˆ Q_{π}, ˆ$U_{\rho} \in$ **正交群**^{pos}，另一个分解 $M =$ ˆ$Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}\ \Sigma E\ P_{\rho}$ ˆU_{ρ} 给出 ˆ ˆ ˆ ˆ$M = S_{\pi}W_{\pi}$，并且由命题 4.1 可得 $S_{\pi} = S_{\pi}$，$W_{\pi} = W_{\pi}$。明确地说，

$$Q_{\pi}^{\top}\Sigma^{\pi}Q_{\pi} = \hat{Q}_{\pi}^{\top}\Sigma^{\pi}\hat{Q}_{\pi}\,, \quad Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}E\ P_{\rho}U_{\rho} = \hat{Q}_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}E\ P_{\rho}\hat{U}_{\rho}\,.$$

ˆ ˆ 由第一个等式，因为 Q_{π}，$Q_{\pi} \in$ **正交群**^{pos}，可得 $Q_{\pi} = Q_{\pi}$。由第二个等式，ˆ$U_{\rho} = U_{\rho}$。因此，分解 (17) 确实是唯一的。

对于 $M \in \mathcal{U}_{\pi,\ \rho,\ E}$，该分解得到了定义坐标图 ˜ 所需的全部矩阵$\phi_{\pi,\ \rho,\ E}$：它定义良好且光滑。满射性显而易见。单射性则由分解式 (17) 的唯一性得出。□

4.2 线性化变量中的奇异值分解流

对于多项式 p 和 q，微分方程 (16) 的一个扩展为

$$\dot{M} = M\ \big(\Pi_{\mathrm{o}}\, p(M^{\top}M)\big) - \big(\Pi_{\mathrm{o}}\ q(MM^{\top})\big)\ M\,. \tag{18}$$

对于 $M \in \mathcal{U}_{\pi,\ \rho,\ E}$，当 $M = Q_{\pi}^{\top}P_{\pi}^{\top}\ \Sigma E\ P_{\rho}U_{\rho}$ 时，我们有

$$W_{\pi} = MM^{\top} = Q_{\pi}^{\top}(\Sigma^{\pi})^2Q_{\pi} = S_{\pi}^2\,, \quad W_{\rho} = M^{\top}M = U_{\rho}^{\top}(\Sigma^{\rho})^2U_{\rho} = S_{\rho}^2$$

于是，方程 (18) 导出在 $\mathcal{O}_{\Sigma^2}^{\mathrm{O}}$ 上的两个解耦 Toda 流，

$$\dot{W}_{\pi} = [W_{\pi}, \Pi_{\mathrm{o}}\ q(W_{\pi})]\,, \quad \dot{W}_{\rho} = [W_{\rho}, \Pi_{\mathrm{o}}\ p(W_{\rho})]\,,$$

这些流可在第 3.2 节中线性化。将奇异值分解流嵌入一组直线运动中，便可仿照第 3.4 小节中的构造。我们不讨论与轮廓相关的问题。

5 扩展演算

我们介绍两类流，它们在使其线性化的坐标中有显式解。第一类包括 Toda 流，并允许 QR 步。此类流与数值计算的相关性尚未得到充分确立。

对于 $C \in \mathfrak{lo}$，定义扩展演算

$$\mathcal{C}_Q(M,C) = Q^\top C Q\,, \quad \mathcal{C}_L(M,C) = L^{-1}CL\,, \quad \mathcal{C}_U(M,C) = U^{-1}CU\,.$$

这里，我们假设 $M \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$，因此这些分解

$$M = Q^\top(Y+D)Q\,, \quad Z + D = L^{-1}(Y+D)L\,, \quad M = U^{-1}(Z+D)U$$

定义 Q，L 和 U。为方便起见，我们在 D^π 中省略对 π 的依赖。这些定义扩展了标准函数演算：

$$p(M) = \mathcal{C}_Q(M, p(Y+D)) = \mathcal{C}_U(M, p(Z+D))\,, \quad p(Z+D) = \mathcal{C}_L(Z, p(Y+D))\,.$$

用此记号表示的 Toda 流变为

$$\dot{M} \;=\; [M, \Pi_{\mathfrak{o}}\, \mathcal{C}_Q(M, p(Y+D))] \;=\; [M, \Pi_{\mathfrak{o}}\, \mathcal{C}_U(M, p(Z+D))]\;.$$

并且我们考虑一个自然的更大类。

命题 5.1（一些可显式求解的流）。设 $C \in \mathfrak{lo}$ 和 $M_0 \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$ 为常矩阵。方程的解 $M(t)$

$$\dot{M} = [M, \Pi_{\mathfrak{o}}\, \mathcal{C}_Q(M,C)]\,, \quad M(0) = M_0 \tag{19}$$

在 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$ 中全局定义。在线性化坐标中，我们有 $D(t) = D(0), Y(t) = Y(0)$ 以及

$$Z(t) + D = L^{-1}(t)(Y+D)(0)L(t)\,, \qquad L(t) = \exp(tC)\; L(0)\exp(-t\,\mathrm{diag}\, C)\,.$$

证明。沿用定理 3 的证明，并由公式（13）可得，

$$\begin{aligned} L^{-1}\,\dot{L} \;&=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\,\left(U\;(\Pi_{\mathfrak{o}}\,\mathcal{C}_Q(M,C))U^{-1}\right) \;=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\,\left(U\;\mathcal{C}_Q(M,C)U^{-1}\right) \\ &= \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\,\left(U\;Q^\top C Q U^{-1}\right) \;=\; \Pi_{\mathfrak{lo}^0}\,\left(L^{-1}CL\right) \\ &= L^{-1}CL - \mathrm{diag}(L^{-1}CL) \;=\; L^{-1}CL - \mathrm{diag}\, C. \end{aligned}$$

因此 $\dot{L} = L(L^{-1}CL - \mathrm{diag}\; C) = CL - L\mathrm{diag}\; C$，从而得到陈述中 $L(t)$ 的公式。其他结论显而易见。 □

注 5.2。容易得到 $Q^\top \dot{Q} = \Pi_{\mathfrak{lo}^0} Q^\top C Q$。特别地，根据 $M(t)$ 的舒尔分解，该方程也可显式求解。

这里还有另一组可以用线性化变量轻松描述的流。

命题 5.3. 对于 $C \in \mathfrak{lo}$ 和 $M_0 \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$，其解为

$$\dot{M} = [M, \mathcal{C}_Q(M, C)]\,, \quad M(0) = M_0\,. \tag{20}$$

在 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$ 中是全局定义的。对于线性化变量 $(D(t)\ Y(t)\ Z(t))$，

$$\dot{D}^\pi = 0\,, \quad \dot{Y} = [Y + D, C]\,, \quad \dot{Z} = [Z + D, \mathcal{C}_L(M, C)]\,.$$

备注 5.4. $Y(t)$ 的微分方程的解为

$$Y(t) = \exp(-tC)\ \Big(Y_0 + \int_0^t \exp(-sC)[D, C]\ \exp(sC)\ ds\ \Big)\ \exp(tC)\,.$$

对于 $C = E_{ij} = e_i \otimes e_j = e_i e_j^\top$，$Y(t) = Y_0 + t[Y_0 + D, E_{ij}] - t^2 (Y_0)_{ij} E_{ij}$。对于$C = E_{ii}$，$Y(t) = \big(I + (e^{-t} - 1)E_{ii}\big)\ Y_0\ \big(I + (e^t - 1)E_{ii}\big)$。

证明。由于该微分方程是一个 Lax 对，$D = 0$。照例，写作$M = Q^\top (Y + D) Q$。现在求导可得

$$\begin{aligned}
\dot{M} &= \dot{Q}^\top (Y + D) Q + Q^\top\ \dot{Y}\ Q + Q^\top (Y + D) \dot{Q} \\
&= Q^\top\ (Q\dot{Q}^\top)(Y + D)\ Q + Q^\top\ \dot{Y}\ Q + Q^\top\ (Y + D)\ (\dot{Q}Q^\top)\ Q \\
&= Q^\top \Big([(Y + D), \dot{Q}Q^\top] + \dot{Y} \Big)\ Q
\end{aligned}$$

将方程 (20) 写成 $\dot{M} = Q^\top [Y + D, C] Q$，得到

$$[Y + D, C] = [Y + D, \dot{Q}Q^\top] + \dot{Y}\,.$$

写作 $C = C - \operatorname{diag} C = \Pi_{\mathfrak{lo}^0} C$，使得

$$[Y + D, \hat{C}] + [Y + D, \operatorname{diag} C] = [Y + D, \dot{Q}Q^\top] + \dot{Y}\,.$$

设 $\tilde{V} = \mathfrak{lo}^0$ 和 $\tilde{W}$ 为命题 3.4 的证明中定义的子空间。我们有 $[Y + D, \operatorname{diag} C] = [Y, \operatorname{diag}\ C] \in \mathfrak{lo}^0$, $[Y + D, \hat{C}]$, $\dot{Y} \in \mathfrak{lo}^0$因此$[Y + D, \dot{Q}Q^\top] \in \mathfrak{lo}^0 = \tilde{V}$。我们还有 $[Y + D, \dot{Q}Q^\top] \in \tilde{W}$，因此根据命题 3.4，必有

$$[Y + D, \dot{Q}Q^\top] = 0\,, \quad \dot{Y} = [Y + D, C]\,.$$

由方程 (11)，$\dot{Q}Q^\top = 0$，故 $\dot{Q} = 0$。特别地，对于 $Q = LU$，必有 L 和 U 为常数。为求得 Z的演化，对$Z + D = L^{-1}(Y + D)L$ 求导，并利用 $\dot{L} = 0$:

$$\dot{Z} = [Z + D, L^{-1}\dot{L}] + L^{-1}\dot{Y}L] = 0 + L^{-1}[Y + D, C]L = [Z + D, L^{-1}CL]\,,$$

完成证明。 □

在数值分析中，Toda 流是保持谱不变的矩阵迭代的插值。实际算法通过迭代来描述。

典型的例子是 QR-步。取一个可逆矩阵$M = M_0$，写出它的 QR 分解 $M_0 = Q_0 R_0$，并令

$$M_1 = R_0 Q_0 = Q_0^\top M_0 Q_0 = R_0 M_0 R_0^{-1}\,.$$

一种简单的方法是用 *Semenov- Tian-Shanski* 公式 [17]（也称为 [18, 19]）来寻找该流的解。具体来说，对于一个常矩阵 X，考虑其 QR 分解

$$e^{tX} = [e^{tX}]_Q [e^{tX}]_R = Q(t)\ R(t)$$

并验证共轭 $M(t) = Q^\top(t) M(0) Q(t)$ 是否定义了一个真正的流。例如，特殊情形 $X = \log M_0$ 会产生标准 Toda 流，$\dot{M} = [M, \Pi_{\mathfrak{o}}\, M]$，$M(0) = M_0$。事实上，由公式可得，

$$M(1) = [e^{\log X}]_Q [e^{\log X}]_R = [M_0]_Q [M_0]_R = Q_0 R_0 = M_1\,.$$

另一个有趣的例子见于 [6]中的定理7。注意，X 可能不与 M_0 对易，因此，通过 $[e^{tX}]_Q$（如我们所考虑的）或通过 $[e^{tX}]_R$ 进行共轭，可能会导出不同的流。

命题5.5. 方程（*19*）也可由下式求解：

$$M(t) = Q_e(t)^\top M_0 Q_e(t)\,,\quad \textit{where}\ \ e^{t\mathcal{C}_Q(M_0,C)} = Q_e(t) R_e(t),\ Q_e \in \mathbf{O}\,, R_e \in \mathfrak{up}\,.$$

证明。设 $M_e(t) = Q_e(t)^\top M_0 Q_e(t)$：我们必须证明 $M_e(t)$ 满足方程（19）。对 $M_e(t)$ 求导，得到 $\dot{M}_e = [M_e, Q_e^\top \dot{Q}_e]$。对给出 $Q_e R_e$ 的分解求导（如定理 3 的证明中所示），得到 $Q_e^\top \dot{Q}_e = \Pi_{\mathfrak{o}}\, Q_e^\top C_Q(M_0,\ C) Q_e$。相加可得，

$$M_e = [M_e, \Pi_{\mathfrak{o}}\, Q_e^\top C_Q(M_0, C) Q_e] = [M_e, \Pi_{\mathfrak{o}}\, C_Q(M_e, C)]\,,\quad M_e(0) = M_0\,,$$

这就是方程（19）。由唯一性可知，$M(t) = M_e(t)$。 □

6 附录：一些基本线性代数

以下线性代数中的事实众所周知（[11]）。

(PLU) 对于 $X \in$ **一般线性群**，存在 $\pi \in S_n$、$L \in$ **下三角群**^{1}，$U \in$ **上三角群** 使得 $X = P_\pi LU$。

以下标准矩阵分解均唯一且光滑。（LU）对于 $X \in$ **一般线性群**^{pos}，存在 $L \in$ **下三角群**^{1}，$U \in$ **上三角群**$^+$，使得 $X = LU$。（QR）对于 $X \in$**一般线性群**，存在 $Q \in$ **正交群**、$R \in$ **上三角群**$^+$，使得 $X = QR$。

（极分解）对于 $M \in$ **一般线性群**，存在 P 正定对称、$Q \in$ **正交群**，使得 $M = PQ$。

舒尔分解也有类似的结果（[11]），但在下方的命题中，我们只给出符合本文目的的特定形式，并对 QR分解稍作修改。集合 $\mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}}$ 和 $\mathcal{U}_{\pi}^{\mathbf{GL}}$ 在等式 (7) 中定义。

命题 6.1. 以下分解均唯一且光滑。

(QR) 对于 $X \in$ **一般线性群**^{pos}，$X = QR$，其中 $Q \in$ **正交群**^{pos} 且 $R \in$ **上三角群**$^{+}$。类似地，$X = LQ$，对于 $L \in$ **下三角群**$^{+}$，且 $Q \in$**正交群**^{pos}。

(Schur) 设 $\pi \in S_n$ 和 D 为具有单谱的实对角矩阵。令$D^\pi = \pi^\top D\pi$。对于 $S \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{O}}$，$S = Q^\top D^\pi Q$，其中 $Q \in$**正交群**^{pos}。对于 $M \in \mathcal{U}_{\text{一般线性群}D^\pi}$，$M = Q^\top (Y + D^\pi)Q$，其中 $Q \in$ **正交群**^{pos}，$Y \in \mathfrak{lo}^0$。

证明。为方便读者，我们简要说明其存在性和唯一性。

对于 QR分解 $X = LQ$，对 X 的各行应用格拉姆–施密特算法。为证明唯一性，设 $X = L_1Q_1 = L_2Q_2$，使得 $Q_2Q_1^{-1} = L_2^{-1}L_1$。左边（分别为右边）是正交（分别为下三角）矩阵：它们必定等于一个对角矩阵 E，其对角元的模为 1。由于 Q_1, $Q_2 \in$ **正交群**^{pos}，我们有 $E = I$，即单位矩阵，唯一性遂得证。分解 $X = QR$ 的情形也类似处理。

M 为实对称矩阵时，M 的舒尔三角化可归结为谱定理。一般而言，对于 $M \in \mathcal{U}_{D^\pi}^{\mathbf{GL}}$，我们有 $M = P^{-1}D^\pi P$，其中 $P \in GL^p$，而 QR分解给出 $P = LQ$，其中 $L \in$ **下三角群**，且 $Q \in O^s$。因此，对于 $Y \in \mathfrak{lo}^0$，有 $M = Q^\top L^{-1}D^\pi LQ = Q^\top(Y + D^\pi)Q$。为证明唯一性，设 $M = Q_1^\top(Y_1 + D^\pi)Q_1 = Q_2^\top(Y_2 + D^\pi)Q_2$，并且对于 $Q = Q_2Q_1^\top$，

$$Q(Y_1 + D^\pi) = (Y_2 + D^\pi)Q\,.$$

令矩阵元素 $(1, n)$ 相等，并利用 D^π 的谱的简单性，可得 $Q_{1,n} = 0$。令矩阵元素 $(1, n-1)$ 和 $(2, n)$ 相等，可知 Q 的相应元素也为零。沿着次对角线依次推下去，可得 Q 是对角矩阵。由于 $Q_1, Q_2 \in \mathbf{O}^{\mathrm{pos}}$，必有 $Q_1 = Q_2$，因此 $Y_1 = Y_2$。若 $M = S$ 是对称的，则必有 $L = 0$。 □

参考文献

[1] Adler, M. 关于形式伪微分算子的迹泛函及 Korteweg-de Vries 型方程的辛结构，《数学发明》50, 219–248, 1978/79。

[2] Agrotis, M. A., Damianou, P.A., Sophocleous, C, 《Toda 晶格是超可积的》，《物理学 A》365，235-243，2006。

[3] Bloch, A. M., Flaschka, H. 和 Ratiu, T.，《紧李代数中雅可比矩阵等谱流形的凸性定理》，《杜克数学杂志》61，41-65，1990。[4] Chu, M.，《一种求双对角矩阵奇异值分解的微分方程方法》，《线性代数及其应用》80，71-80，1986。[5] Deift, P., Li, L.C., Nanda, T., Tomei, C.，《一般轨道上的 Toda 流是可积的》，《纯粹与应用数学通讯》39，183–232，1986。[6] Deift, P., Li, L.C., Tomei, C.，《矩阵分解与可积系统》，《纯粹与应用数学通讯》42，443–521，1989。[7] Deift, P., Li, L. C. Li, Spohn, H., Tomei, C. 和 Trogdon, T.，《外部强迫下的开Toda链》，《纯粹与应用泛函分析》7，第3期，2022。[8] Deift, P., Nanda, T., Tomei, C.，《对称特征值问题的微分方程》，《SIAM数值分析杂志》20，1-22，1983。[9] Flaschka, H.，《Toda 晶格，I》，《物理评论B辑》9，1924-1925，1974。[10] Golub, E. 和 Van Loan, C.，《矩阵计算》，约翰斯·霍普金斯大学，2013。[11] Horn, R. A. 和 Johnson C.R.，《矩阵分析》，第二版，剑桥，2013。[12] Leite, R., Saldanha, N., Tomei, C.，《三对角等谱流形图册》，《线性代数及其应用》429，387–402，2008。[13] Leite, R., Saldanha, N., Tomei, C.，《采用位移策略的对称特征值问题动力学》，IMRN 2013，4382–4412，2012。[14] Li, L.C.，《一般辛叶上的奇异值分解流完全可积》，《数学进展》128，82-118，1997。[15] Moser, J.，《指数势作用下直线上的有限多个质点》，载于：《动力系统理论与应用》，（编者：J. Moser）467-497，纽约，1975。[16]Parlett, B.，《对称特征值问题》，普伦蒂斯-霍尔计算数学丛书，普伦蒂斯-霍尔公司，恩格尔伍德克利夫斯，1980。[17] Semenov-Tian-Shanski, M.，《什么是经典R矩阵？》，《功能分析及其应用》259-272，1984。[18] Symes, W.，《 QR 算法与有限非周期Toda晶格的散射》，《物理学D辑》275-280，1982。

[19] Symes, W.，《哈密顿群作用与可积系统》，Physica 1D，339-374，1980。[20] Tomei, C.，《等谱三对角矩阵流形的拓扑》，《杜克数学杂志》51，981-996，1984。[21] Tomei, C.，《Toda 晶格：过去与现在》，《几何与力学杂志》5，511–530，2013。[22] Torres, D. M. 和 Tomei, C.，《适用于 Toda 流的图册》，即将在 IMRN 发表，doi:10.1093/imrn/rnac210

Ricardo S. Leite，数学系，UFES，费尔南多·法拉利大道 514 号，Vit´oria，ES 29075-910，巴西 Nicolau C. Saldanha 和 Carlos Tomei，数学系，里约热内卢天主教大学，R. Marquˆes de S. Vicente 225 号，里约热内卢，RJ 22451-041，巴西 David Mart´ınez Torres，应用数学系，建筑学部，马德里理工大学，胡安·德·埃雷拉大道 4 号，马德里 28040，西班牙
ricardo.leite@ufes.br saldanha@puc-rio.br carlos.tomei@puc-rio.br dfmtorres@gmail.com