arXiv:2302.07177v1 [math.GT] 14 Feb 2023

具有适当嵌入锥的可分凸集

PIERRE-LOUIS BLAYAC 和加布里埃莱·维亚吉

Abstract. 本文构造了许多例子：在每个至少为 3 的维数中，扎里斯基稠密的相对双曲群都能作用并除化适当的凸不可约区域。这回答了 Benoist 提出的问题。相对双曲性与非严格凸性体现在区域内一族适当嵌入的锥（点集与椭球的凸包）上。我们的构造在 3 维时最为灵活；在这一维数下，我们给出了一个纯拓扑判据，用以判断紧致三维流形上是否存在一个具有全测地边界、几何性质受控且形变空间较大的凸射影结构。

Contents

1. 引言 12. 证明的要素 133. 凸射影几何 204. 管、锥流形与全测地爆破 265. 凸区域的镶嵌 336. 凸余紧性与相对双曲性 467. 射影粘合 548. 双曲构件 679. 双曲倍体 78参考文献 87

1. Introduction

本文构造了任意维数 $d \geq 3$下被子群 $\Gamma < \mathrm{PSL}_{d+1}\mathbb{R}$ 除的真凸开子集 $\Omega \subset \mathbb{RP}^d$，这些子集具有特殊的几何性质。

一个真凸 子集 $\Omega \subset \mathbb{RP}^d$ 是包含在某个仿射图册 $\mathbb{R}^d$ 中的开子集，在该图册中它是凸且有界的。它带有一个射影对称性群

$$\mathrm{Aut}(\Omega) := \{A \in \mathrm{PSL}_{d+1}(\mathbb{R}) \mid A(\Omega) = \Omega\}$$

以及一种称为希尔伯特度量的 Aut(Ω) 不变芬斯勒度量。

离散无挠子群 $\Gamma < \mathrm{Aut}(\Omega)$ 产生商射影 d-流形

$$M := \Omega/\Gamma.$$

在这些群 Γ中，特别值得关注的是满足以下条件的群： $M = \Omega/\Gamma$是紧致的。如果存在这样的离散子群，则称凸集 Ω 为可除，而群 Γ 作用除以Ω。可除凸集是几何、动力系统和群论的丰富源泉（参见 [13]）。

基本例子包括

- 双曲空间，即 $\mathrm{PO}_0(d,1)$ 的对称空间

$$\mathbb{H}^d = \{[x] \in \mathbb{RP}^d \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_d^2 - x_{d+1}^2 < 0\}.$$

- $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ 对称空间的射影模型

$$\mathrm{SL}_n\mathbb{R}/\mathrm{SO}(n) = \mathrm{PSym}_n^+ = \{[S] \in \mathbb{P}(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})) \mid S \text{为正定}\},$$

其中，$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 是大小为 n 的对称方阵空间。

- 对称空间 $\mathbb{R}^d$ 的一个射影模型

$$\Delta^d = \left\{[x] \in \mathbb{RP}^d \,|x_1, \ldots, x_{d+1} > 0\right\}.$$

（希尔伯特度量不一定与黎曼度量一致。）

可除凸集的研究由 Benz´ecri [14] 发起，并由 Benoist [7–10],大幅拓展，分为两个主要主题：

- 存在性：构造对称情形之外的示例（见表 1）。
- 分类：描述可除凸集、将其除掉的群，以及商射影流形的结构。

我们将在第1.1节回到这个问题。

本文旨在通过展示具有新颖几何特征和群论特征的可除凸集新例子，为第一个目标作出贡献。首先，我们回答 Benoist 的一个问题 [11, 问题。10] （另见 Marquis [46, 开放问题 3]）。

定理 1.1。对于每个 $d \geq 3$，都存在一个可除凸集Ω $\subset \mathbb{RP}^d$，它由一个扎里斯基稠密群 $\Gamma < \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 除掉，且Ω 并非严格凸，即 $\partial\Omega$ 包含非平凡线段。

稍后我们将给出定理1.1 的一个更精确版本（见定理1.3），其中给出的描述类似于 Benoist 的一个结果 [10, 定理 1。1]，该结果涉及 3 维可除凸集的结构（另见 [34,35,67]）。下面我们来说明以下几点。

- 回顾一下，子群 $\Gamma < \mathrm{PSL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 是扎里斯基稠密 的，当且仅当任何一个在 Γ 上取值为零的矩阵元素多项式，在 $\mathrm{PSL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 上也取值为零。

- 非严格凸性源于 Ω 中的适当嵌入的锥，也就是说，它们是 Ω 中一个 $(d-2)$ 维椭球 $H \subset \partial\Omega$（锥的底空间）与一个点 $p \in \partial\Omega$（顶点）的凸包，其相对边界包含于 $\partial\Omega$ 中。在维数至少为 4 时，这些锥的存在也是一项新发现。
- 我们的构造具有相当大的灵活性。例如，若 $d \geq 5$，那么我们可以构造无穷多个不同的可公度类射影流形，它们具有定理中所述的性质。回顾一下，若两个群 Γ，Γ' 存在同构的有限指数子群 $G < \Gamma$，$G' < \Gamma'$，则称它们可公度。特别地，对于每个 $d \geq 5$，都存在无穷多个不同的非严格凸可除凸集，它们由一个扎里斯基稠密群作用而可除。

- Ω 将通过粘合紧致、带全测地边界的凸射影流形来构造，类似于下一个结果中的那些流形。

我们的第二个结果专门针对 3 维情形。在这一维数中，Thurston 的突破性工作使几何与拓扑紧密相连 [59]。我们为一大类具有环面边界的紧致 3 维流形，给出了存在带全测地边界的凸射影结构（及其变形空间）的纯拓扑条件，从而回答了 Ballas、Danciger 和 Lee 提出的问题 [2]（见问题 1.6）。

定理 1.2。考虑：

- 一个紧致、可定向、不可约且无环面的三维流形 M，其边界非空且连通。
- 一条双重不可压缩的分离简单闭曲线 $\alpha \subset \partial M$。

那么，对于所有充分接近 1 的 $a > 1$、$b > 3$ 和 $1 < c < -2 + b^2/2$，双倍 DM 中去掉 α 的开管状邻域 U 后所得补集 $N = DM \setminus U$，都具有一个带全测地边界的凸射影结构；该结构与一个射影环面同构，其整体单值化由 $A = \mathrm{diag}(a, a^{-1}, 1, 1)$ 和 $B = \mathrm{diag}(b^{-1}, b^{-1}, bc, bc^{-1})$ 生成。

稍后我们将陈述定理 1.7，这是定理 1.2的一个更精确的版本，它允许 ∂M中有更多边界分支。随后我们将回顾关于三维流形拓扑的经典结果。

- 回顾一下，M 不可约（分别地，无环面）是指其中不含本质球面（分别地，环面），而 α 双重不可压缩是指它与每个适当地嵌入的本质圆盘、M¨obius 环带及环带都相交。
- 曲线 $\alpha \subset \partial M$ 满足定理 1.2 假设的曲线确实存在，而且在严格意义上数量丰富（这是 Lecuire [42]的工作所得出的结论）。
- 给定 (M, α)，(M', α')，如定理 1.2所述，对边界整体单值化的控制给出了一个同胚 $f : \partial N \to \partial N'$ 满足

闭流形 $N \cup_f N'$ 可以赋予凸射影结构。特别地，双倍 DN 具有凸射影结构。

引言余下部分的结构如下：
(a) 在第 1.1 节中，我们简要回顾可除凸集的分类以及已知的构造实例的方法，从而将我们的工作置于相关背景之中。(b) 在第 1.3 节中，我们给出定理1.3（定理1.1）更精确的表述并加以说明。我们特别详细讨论适当嵌入的锥及其稳定子。定理 1.3 将由定理 1.5 推出，该定理在第1.3节中陈述，它给出了具有全测地边界的紧致凸射影流形（按照的意义，它们是凸余紧的）。(c) 在第1.4 节中，我们给出定理 1.7（定理1.2）的更精确版本，并通过简要回顾三维拓扑中的经典结果，将这一结果置于相关背景之中。

1.1. 分类与已知例子。在介绍我们的新例子及其新颖特征之前，让我们先简要回顾迄今已知的各类例子，以便提供适当的背景。

为此，我们有必要简要回顾可除凸集的一般分类方案（见表1和图1）。

对称 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 半单李群 $\mathrm{Aut}(\Omega) \curvearrowright \Omega$ 传递 [40, 63, 64]		非对称 $\mathrm{Aut}(\Omega) < \mathrm{PSL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 扎里斯基稠密 $\mathrm{Aut}(\Omega) \curvearrowright \Omega$ 适当不连续 [8]	
$\mathbb{R}$-秩 ≥ 2	$\mathbb{R}$-秩 $= 1$	严格凸	非严格凸
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ [22]	$\mathbb{H}^d$ [55]	Ω [26, 36, 37, 39]	Ω [2, 10, 27, 44]

TABLE 1. 不可约可除凸集 Ω 的分类。最后一行列出了一些已知的例子。

分类。 我们来谈谈表格中的一些特点 1：

可约与不可约。如果 Γ_j 对 $\Omega_j \subset \mathbb{RP}^{d_j}$ 而言成立 $j = 1, 2$，那么 $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \mathbb{Z}$ 就成立于这两个集合的凸包

$$\mathcal{CH}(\Omega_1, \Omega_2) \subset \mathbb{RP}^d$$

与 $d = d_1 + d_2 + 1$ 以及其中 $\mathbb{RP}^d = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{d_1+1} \oplus \mathbb{R}^{d_2+1})$。这类例子称为可约。如果一个可除凸域不属于这种形式，它

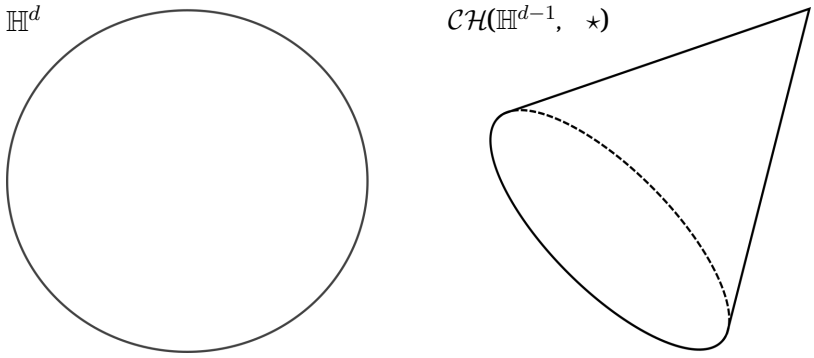


FIGURE 1. 不可约与可约的例子。

是不可约。Vey 证明了 [62]：如果 Γ作用于 Ω 且保持 Ω 不变，那么 Ω 不可约，当且仅当 Γ 是强不可约的（不保持 $\mathbb{R}^{d+1}$的任何有限个子空间的并）。正如我们在定理1.1中所看到的，可约的可除域在我们的构造中自然地以锥的形式出现，也就是椭球与点的凸包。

对称与非对称。正如表1所示，两者之间的二分 y
对称与非对称情形之间的差异源于以下研究工作的结合 [8, 40, 63, 64]。

Ω 的正则性 ∂Ω 与几何。严格凸性可以看作负曲率的一种体现：Benoist 在 [7, 定理 1.1] 中证明，如果 Γ 可除 Ω，那么以下条件等价：

- Ω 是严格凸的。
- Γ是 *Gromov*双曲的。
- ∂Ω 是 $\mathcal{C}^1$。

请回忆，Gromov双曲性是对闭双曲流形的基本群和自由群的几何性质所作的一种群论抽象（参见定义 6.7 和注记 6.8）。

沿着同一方向，Islam [33, 定理 1.6] 证明了更大一类可除凸集具有负曲率的一种弱形式：如果 Γ 可除一个非对称不可约 Ω，那么 Γ 是 轴稳定双曲的 （依 Osin [51]的定义）。

维数2 和3。作为 Benz´ecri 的工作的推论， [14], 每个 2 维可除凸集要么是三角形（因而可约），要么是严格凸的。Benoist 在 [10] 对所有3维不可约非对称非严格可除凸域作出了优美的几何描述，与定理1.3中的描述类似。他还给出了一些例子，后文将会提到。

几何秩一与高秩刚性。与非正曲率黎曼情形一样，对于凸射影流形 $M = \Omega/\Gamma$，Islam 引入了 [33]几何秩一的概念。Zimmer 证明了

在 [70] 关于射影流形的一个高秩刚性结果中（类似于 Ballmann [4] 以及 Burns 和 Spatzier [24]）：若 Ω 不可约且非对称，则它具有几何秩一性质。

例子。现在，我们可以根据迄今为止用于构造这些例子的方法，介绍已知的各类例子。

维数为 $d \leq 6$ 的多面体铺砌与局部到整体凸性：构造作用于真凸域上的群的一种方法，是考虑由多面体 $P \subset \mathbb{RP}^d$的余维 1 面上的反射生成的考克斯特群 Γ。在对 P作出适当的组合与几何假设后，局部到整体凸性论证表明，区域 $\Omega = \Gamma \cdot P$是真凸的，并由 P的副本铺砌而成。这一可追溯至 Poincar´e 的方法，已被 Kac 和 Vinberg[37], 、Benoist [10], 以及 Marquis [44]广泛用于构造维数为 $d \leq 6$ 的不可约可除域，这些域是非对称的。

算术方法。Borel 的一条经典定理 [22]表明，每个半单李群 G 都存在所谓的一致算术格 Γ，它是一个在对称空间 G/K上余紧作用的离散子群 $\Gamma < G$。这意味着每个不可约对称真凸域都是可除的。在双曲空间 $\mathbb{H}^d$ 的情形下，最早的例子归功于 Siegel [55]。

弯曲变形与膨胀。子群 $\Gamma = \Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2 <$ PSL$_{d+1}(\mathbb{R})$ 可以通过一种称为弯曲变形的非常一般的过程进行代数变形：设 $(B_t)_t \subset$PSL$_{d+1}(\mathbb{R})$ 是一条由元素构成、始于恒等元且与 Λ 对易的路径。可以将 $\iota : \Gamma \to$ PSL$_{d+1}(\mathbb{R})$ 的包含映射变形成表示 ρ_t，使其在 Γ_1 上为恒等映射，并将 $\gamma_2 \in \Gamma_2$ 映到$B_t\gamma_2 B_t^{-1}$。根据 Koszul [41] 和 Benoist [9], 的研究，若 Γ 将某个 Ω 分成若干部分，则表示 ρ_t 是单射，且 $\rho_t(\Gamma)$ 将一个真凸区域 Ω_t分成若干部分。此外，根据 E hresmann–Thurston 原理 [58, 第 3],章，商空间 $\Omega_t/\rho_t(\Gamma)$ 与 Ω/Γ微分同胚。

这一构造尤其适用于包含余维 1 子流形 $\Sigma = \mathbb{H}^{d-1}/\Lambda$ 的双曲 d-流形 $M = \mathbb{H}^d/\Gamma$，该子流形将 M 分隔为两个连通分支 $M \smallsetminus \Sigma = M_1 \sqcup M_2$（此类流形可利用上述算术技巧构造）。根据 Seifert–van Kampen 定理，我们可以写成 $\Gamma = \Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$，其中 $\Gamma_j = \pi_1(M_j)$。利用固定 $\mathbb{H}^{d-1}$ 及其关于洛伦兹型的正交补的元素 B 所得到的弯曲变形称为膨胀。Johnson 和 Millson [36] 对这些变形进行了广泛研究。它们可以用于构造任意维数的不可约、非对称严格可除凸域（见 [13,§8.2]）。

请注意，根据 Margulis 超刚性定理（见 [49, 第 16]章），$\mathbb{R}$-秩至少为 2 的可除对称真凸域不能发生变形。

利用膨胀构造，Kapovich [39] 证明，由 Gromov 和 Thurston [32]构造的某些流形允许凸射影

结构。这些流形具有这样的性质：它们允许具有负曲率夹逼的度量，但不允许纯双曲度量（即曲率为常数的度量）。特别是，这些例子是严格凸的，并非对称结构的变形。

其他在凸射影语境中使用鼓胀构造的工作包括 [3, 20, 45]。

曲面。作为对双曲曲面经典 Fenchel–Nielsen 坐标的推广，Choi 和 Goldman [26] 从边界完全为测地线的射影裤子曲面出发，发展了凸射影曲面的粘合构造。他们证明，该构造参数化了所有*Hitchin* 表示 $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{PSL}_3(\mathbb{R})$，这些表示是闭可定向曲面上双曲结构的整体单值化 $\rho_0 : \pi_1(S_g) \to \mathrm{PSO}_0(2,1)$的连续变形，该曲面的亏格为 $g \geq 2$。

三维流形与 *Dehn* 填充。得益于 Thurston 的突破性成果，在 3 维中，我们有多种构造闭双曲三维流形的技术。其中著名的双曲 Dehn 填充定理（见 [58, 第 4]章）允许将非紧致完备有限体积双曲三维流形变形为许多闭双曲三维流形。受 Thurston 理论思想的启发，Ballas、Danciger 和 Lee [2]给出了许多具有非平凡 JSJ 分解的凸射影三维流形实例。另一方面，结合一些 Coxeter 理论，Choi、Lee 和 Marquis [27]构造了若干实例：这些不可约非对称区域在维数 $d \leq 6$ 中可由群作用而分解，且这些群相对于一族 $\mathbb{Z}^2$ 子群是相对双曲的。（另见 Lee、Marquis 和 Riolo 的工作 [43]。）

请注意，这些方法之间实际上存在大量相互作用。同样，我们的构造也得益于这些先前的研究。事实上，为了证明定理1.1，我们将：

- 通过算术方法构造一个具有余维 2 锥奇点的特定双曲流形，它是一个具有全测地边界和角的双曲流形的双倍。
- 通过沿着与奇点相邻的全测地超曲面进行膨胀，将其变形成射影 锥流形 M。
- 运用多面体铺砌的思想，证明 M 中奇点补集是真凸的。
- 将 M 的奇点爆破为全测地边界。

定理 1.1中的闭凸射影实例实际上是上述构造的双倍 DM。

现在我们陈述主要定理的精确版本。

1.2. **具有适当嵌入锥的可分凸集**。

定理 1.3。 对于每个 $d \geq 3$，都存在一个可除凸集 $\Omega \subset \mathbb{RP}^d$，它被一个离散且扎里斯基稠密的子群 $\Gamma < \mathrm{PSL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 所除，且具有以下性质：

(1) Ω 包含一个 Γ-不变族 $\mathcal{C}$，由适当嵌入且闭包两两不交的锥组成，并且 $\mathcal{C}/\Gamma$ 有限。*(2)* 每个锥 $C \in \mathcal{C}$ 的稳定子 Γ_C 在其上余紧地作用，且具有 $\mathbb{Z} \times \Theta_C$的形式，其中 Θ_C 在 C 的底空间 H_C 上适当余紧地作用，而 $\mathbb{Z}$ 因子在其上平凡作用，因此 C/Γ_C 与 $H_C/\Theta_C \times \mathbb{S}^1$微分同胚。*(3)* 群 Γ 相对于 $\{\Gamma_C\}_{C\in\mathcal{C}}$是相对双曲的，其Bowditch 边界 自然地与 $\partial\Omega/_\sim$相识别，其中 $p \sim q$，若 p，则对某个 $C \in \mathcal{C}$有 $q \in C$。*(4)* $\partial\Omega \smallsetminus \bigsqcup_{C\in\mathcal{C}} \bar{C}$ 中的每一点都是极端的，并且 $\mathcal{C}^1$。

我们注意以下内容。

- 相对双曲性是对有限体积双曲流形的基本群的几何性质进行群论抽象的结果。它伴随着一个*Bowditch* 边界的概念（见定义6.7）。

- 注意， $\Gamma_C = \mathbb{Z} \times \Theta_C$ 仅当 $d = 3$时才是阿贝尔的，因为 Θ_C 与 SO($d-2$,1) 的一致格共轭。存在由一个相对于非阿贝尔子群具有相对双曲性的群所除的 Ω（非严格凸）是一个新现象。以下问题仍然未知：**问题1.4**。对于每个 $d > 6$ <style id='13}是否存在一个不可约的可除凸集$\Omega \subset \mathbb{RP}^d$，它是非对称且非严格凸的，并且使得 Γ 相对于一族阿贝尔子群具有相对双曲性？

- 根据对真凸集 Ω 及其适当嵌入的锥的结构描述，上述结果的（3）和（4）部分可以由 [67, 定理1。16] 或 [35, 定理1.3-6]推导出来。我们将给出一个相似但不同的证明，该证明适用于另一组不同的例子（见定理1.5）。

- $\left(\Omega \smallsetminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C\right)/\Gamma$ 的每个分支都具有一个不完备的双曲度量，其完备化是一个双曲锥流形。

现在正式陈述这一构造：所得流形的双倍是定理 /Γ 1.3 中的非严格凸闭凸射影流形 Ω。

1.3. **具有全测地边界的凸余紧流形**。射影空间中的凸余紧性概念由 Danciger、Gu´eritaud 和 Kassel [30]提出。它受克莱因群中相应凸余紧性定义的启发（并将其推广）

（例如参见 [25, 第 3]），并且与高秩李群的 Anosov 子群概念相关（例如参见 [25, 第 7]）。

设 $\Omega \subset \mathbb{RP}^d$ 为开真凸集。设 $\Gamma < \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为离散子群。考虑由每个轨道 $\Gamma\cdot o$ 在 $\partial\Gamma$ 上的聚点组成的完整轨道极限集 $\Lambda \subset \partial\Omega$，其中 $o \in \Omega$（即 $\Lambda = \cup_{o\in\Omega}\Gamma o \cap \partial\Omega$），并令 $\mathcal{CH}(\Lambda)$ 为 Λ在 Ω 中的凸包。若 Γ 在 Ω 上凸余紧地作用，且 $\mathcal{CH}(\Lambda)/\Gamma$ （即凸核）是紧致的，则称之为如此。

与可除性相比，凸余紧性要宽松、灵活得多，而且例子也很丰富（例如参见 [30,31]）。对它的研究是一个非常活跃的研究领域（例如参见 [17,19,34,35,67]）。

如前所述，我们将通过粘合具有全测地边界的紧致凸射影流形，构造定理 1.1中的闭凸射影流形，具体如下。

定理 1.5。对于每个 $d \geq 3$，都存在真凸开集 $\Omega_1,\Omega_2 \subset \mathbb{RP}^d$ 以及离散群 Γ_1, $\Gamma_2 < \mathrm{PSL}_{d+1}(\mathbb{R})$，它们分别保持 Ω_1, Ω_2,，并具有以下性质。令 $\Lambda_j \subset \partial\Omega_j$ 为完整轨道极限集，其在 Ω_j中的凸包为 $\mathcal{CH}_j$。那么

(1) Γ_j 在 $\mathcal{CH}_j \smallsetminus \Lambda_j$上适当地且余紧地作用。*(2)* $\partial\mathcal{CH}_j \smallsetminus \Lambda_j = \bigsqcup_{C\in\mathcal{C}_j} C$ 的连通分支构成一个锥的集族 $\mathcal{C}_j$ （椭球与点的凸包），其闭包两两不交。*(3)* 群 Γ_j 相对于锥 $C \in \mathcal{C}_j$的稳定子族 $\{\Gamma_C\}_{C\in\mathcal{C}_j}$是相对双曲的，其 *Bowditch* 边界为 $\partial\mathcal{CH}_j/\sim$，其中若 $p,q \in C$ 对某个 $C \in \mathcal{C}_j$成立，则 $p \sim q$。*(4)* $\Lambda_j \smallsetminus \bigsqcup_{C\in\mathcal{C}_j} \bar{C}$ 中的每个点都是 Ω_j的极端点和 $\mathcal{C}^1$ 点。*(5)* Γ_1 在 Ω_1 上凸余紧地作用，并且 $\mathcal{C}_1$ 是一个适当嵌入的锥族。*(6)* Γ_2 不在任何真凸开集上凸余紧地作用，并且 $\mathcal{C}_2$ 是 $\partial\Omega_2$ （以及 $\Omega_2 = \mathcal{CH}_2$）的余维 *1* 面族。

一些注记：

- 我们有 $\Gamma_C = \mathbb{Z} \times \Theta_C$，其中 Θ_C在锥的底空间上适当余紧地作用，而 $\mathbb{Z}$ 因子在其上平凡作用。
- 商空间 $M_j = (\mathcal{CH}_j \smallsetminus \overline{\Lambda_j})/\Gamma_j$ 是具有全测地边界的紧致凸射影流形

$$\partial M_j = (\partial\mathcal{CH}_j \smallsetminus \Lambda_j)/\Gamma_j = \bigsqcup_{[C]\in\mathcal{C}_j/\Gamma_j} C/\Gamma_C.$$

- 双倍 DM_1 是一个闭凸射影流形。其万有覆盖 $\Omega_1 \subset \mathbb{RP}^d$ 是定理 1.1中的适当可除凸集。
- 与定理1.3中一样，可以利用 Weisman [67] 以及 Islam 和 Zimmer 的工作 [35] 来简化我们对（3）和（4）的证明，在凸余紧情形下（$j = 1$）。

• 在非凸余紧情形下（$j=2$）：若 $d=3$ 则 $\mathrm{int}(M_2) = \Omega_2/\Gamma_2$ 是一个具有第二类广义尖点的三维流形，依照 [1]。若 $d>3$，则 $\mathrm{int}(M_2) = \Omega_2/\Gamma_2$ 不是具有广义尖点的流形（按照 [1]），尽管它是一个带边界的紧致 d-流形。边界分支的基本群具有与第二类广义尖点群相似的特征，$d-1$ 但并非可解群。

•包含关系 $\Gamma_j < \mathrm{PSL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 在 Weisman 的意义下，在点与超平面的（部分）旗簇上是 扩展几何有限的 [68, 定义 1。3]。对于 $j=1$ 这一点由 Weisman [68,定理 1。12], 证明；对于 $j=2$ 这一点在第 6.6 节中证明。

1.4. **三维几何化**。 定理 1.2是一个几何化定理，它将拓扑信息转化为几何结构。在陈述它的一个精细版本之前，我们先介绍三维拓扑中的一些结构性结果。

根据亚历山大定理（见 [47, 定理 9.2。10]），每个凸射影3-流形 $M=\Omega/\Gamma$ 都是 不可约的，也就是说，它不含本质球面。根据 Jaco、Shalen 和 Johannson 的研究（见 [47, 定理 11.5。1]），M 可以沿着一组本质上唯一确定的 $S\subset M$ 环面和克莱因瓶切分成若干部分

$$M\smallsetminus S = M_1 \sqcup \cdots \sqcup M_r$$

这些部分要么是无环面 的（不含本质环面和克莱因瓶），要么是塞弗特纤维化的（以二维轨形为底空间、纤维为圆的纤维化）。该分解称为 M 的*JSJ* 分解 。

得益于瑟斯顿几何化猜想 [59]，这一重大突破（其证明已由佩雷尔曼完成），我们知道 M 的 JSJ 分解中的每个部分都容许一种局部模型为八种几何之一的齐性黎曼度量（见 [47, 第 12] 章），其中双曲几何尤为重要。根据瑟斯顿关于哈肯流形的双曲化定理（见 [38, 定理 1.43]），每个无环面部分N_j 若满足 $\partial N_j \neq \emptyset$，就容许完备有限体积双曲度量。

凸射影几何与这一图景十分契合：Benoist 证明了 [10, 命题 3.2]，M 的 JSJ 分解只包含无环面部分，且可在几何上实现；这意味着 $S\subset M$ 可以选为全测地的（Ω 中的提升是 Ω 与射影 2-平面的交）。因此，$M\smallsetminus S$ 的每个部分都是一个具有全测地边界的凸射影流形的内部。

问题1.6 (Ballas、Danciger 和 Lee [2])。 假设一个闭的可定向不可约三维流形的 *JSJ* 分解只包含无环面部分。它是否也存在凸射影结构？

在正向方面，Ballas、Danciger 和 Lee [2]提供了一个无限的例子族。我们的第二项贡献是一个庞大且灵活的

受控变形族类别，其中包含三维流形上带有全测地边界的凸射影结构。

定理 1.7。 设 M 是一个边界非空的紧致可定向不可约无环面三维流形 $\partial M = \Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n$。设 $\alpha := \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ 是一个双重不可压缩多曲线，其中 α_j 是 Σ_j中的一条分离简单闭曲线。考虑流形

$$N := DM \setminus U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

通过从 M 的双倍 DM 中移除 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$的一个开管状邻域 $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ 而得到。

那么存在 $\epsilon = \epsilon(M, \alpha) > 0$，使得对于其中每个 (a_j, b_j, c_j)

$$\mathcal{P} := \{(a, b, c) \in (1, 1+\epsilon) \times (3, \infty) \times (1, \infty) \,|\, c \leq -2 + b^2/2\}$$

存在一种定义在N上的带全测地边界的凸射影结构，使得边界 ∂U_j 同构于 $\Delta/\mathbb{Z}A_j \oplus \mathbb{Z}B_j$，其中 $A_j = \mathrm{diag}(a_j, a_j^{-1}, 1, 1)$ $B_j = \mathrm{diag}(b_j^{-1}, b_j^{-1}, b_j c_j, b_j c_j^{-1})$，且 $\Delta = \Delta(e_1, e_2, e_3) \subset \{x_4 = 0\}$ 是标准单形。

双重不可压缩性由 Thurston 提出（参见 [60]），用于研究具有指定尖点的 int(M上几何有限双曲结构的变形。

我们指出：

- 这些 N 上的凸射影结构按照 [30]的意义是凸余紧的（参见第 1.3节）。
- N 上的凸射影结构随参数 $\{(a_j、b_j、c_j) \in \mathcal{P}\}_{j \leq n}$连续变化。
- 满足定理 $\alpha \subset \partial M$ 1.2假设的多曲线确实存在，并且从精确意义上说数量丰富（根据 Lecuire 的工作 [42]）。
- 给定定理 M*1.2*中的（，）（M'，α'）以及边界分支的一个配对 $\{S_j \subset \partial N \leftrightarrow S'_j \subset \partial N'\}_{j \leq r}$，对边界整体单值化的控制使我们得到同胚 f_j： $S_j \to S'_j$，从而可以赋予粘合后的 $N \cup_{f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_r} N'$凸射影结构及全测地边界（若配对涉及 ∂N 和 $\partial N'$的所有连通分支，则边界为空）。
- 特别地， N 的双倍 DN 是一个带有凸射影结构的闭可定向三维流形。

N 在其内部 int(N) 上具有完备有限体积双曲度量，该度量本身是定义在 $M \setminus \alpha$上的、具有全测地边界的完备有限体积双曲度量的双倍。特别地，它包含 $\partial M \setminus \alpha$ 作为一个全测地嵌入子曲面。

- 我们构造的这一类与 Ballas、Danciger 和 Lee 的那一类 [2]：由于双曲流形 N 包含一个全测地

测地子曲面 $\partial M \setminus \alpha$ 它并非相对于边界无穷小射影刚性，而他们的工作需要满足这一点。

- N 是一个具有 3 型广义尖点的射影流形，这里的定义采用 [1]。允许 $c_i = 1$，便可得到具有 2 型广义尖点的射影流形（不过整体单值化公式会有所变化）。同样也应当可以允许 $a_i = 1$，从而得到 1 型和 0 型尖点（ N上的有限体积双曲度量），但上述参数化可能并不适用于这种情形。事实上，我们应当能够找回 [3, 20, 45]中的构造。

1.5. **具有全测地边界与角的双曲流形**。 正如第 1.1 节末尾所提到的，我们用于构造前述所有定理中例子的基本构件，是具有全测地边界与角的紧致凸双曲流形。若$d = 3$，则我们所需的流形可由 Bonahon 和 Otal 的工作得到 [21]。对于一般情形，我们构造与 Gromov 和 Thurston [32] 以及 Kapovich [39]所研究的类似的算术流形。更具体地说，我们证明：

定理 1.8。 对于每个 $k \geq 3$，都存在：
(a) 一个闭可定向双曲 d 流形 M，其边界由闭连通的全测地超曲面 N_1、$\cdots$、$N_k \subset M$ 组成，这些超曲面沿一个连通的全测地 $(d-2)$ 子流形 $C(= N_i \cap N_j$（当 $i \neq j$）相交，交角为 $\angle_C N_j N_{j+1} = \pi/k$。此外， C 在 M 上的一个循环等距变换 ρ作用下保持不变，且 $\rho(N_j) = N_{j+1}$。***(b)*** 一个紧致凸双曲 d 流形 M'，其边界全测地且带角，每个角的角度为 π/k，并且边界图是二分的。

边界图的顶点是边界的全测地部分，其边是角。要使我们的鼓胀构造奏效，边界图为二分图至关重要，这样我们就能“在巨大的膨胀参数和微小的膨胀参数之间交替”（见第 2 节）。小于 $\pi/4$ 的角点角则允许我们采用三分假设。

（b）的存在性由（a）推出，因为 $M \setminus (N_1 \cup \cdots \cup N_k)$ 的每个连通分支的完备化都满足（b）的所有要求。

概要。本文的组织结构如下。

- 第2节：证明的要素。我们先在 2 维情形下讨论证明的思路和要素，然后再讨论一般情形。
- 第 3节：预备知识。我们回顾凸射影几何中的经典概念。
- 第4节：管、锥流形与全测地爆破。我们定义并分类管，定义锥流形，并描述奇点满足（2.1）的锥流形的全测地爆破。

- 第 5节：凸域的镶嵌。我们阐述局部到全局的凸性论证，该论证保证给定的一族凸集能够镶嵌一个凸域 Ω，随后描述 $\partial\Omega$ 的正则性。

- 第 6节： 凸余紧性与相对双曲性。我们研究带有全测地边界的紧致凸射影流形 M。我们给出充分条件，使 M 成为凸余紧的，使 $\pi_1(M)$ 相对于其边界分支为双曲的，并使 $\pi_1(M)$ 按 Weisman 的意义成为扩展几何有限的 [68]。

- 第 7节： 射影粘合。我们定义带有全测地边界与角的射影流形之间的射影粘合，并说明如何相对于极性对这些粘合进行鼓胀。我们验证射影粘合是锥流形。随后，我们将第 5 节和 6 节中得到的结果转述为射影粘合的语言。

- 第 8节： 双曲构件。我们构造带有全测地边界与角的紧致凸双曲流形，并将对其进行射影粘合和鼓胀，以证明主要定理。特别地，我们证明定理 1.8。

- 第 9节： 双曲倍体。我们将第 7节的结果应用于单个具有全测地边界与角的紧致凸双曲流形的鼓胀双倍粘合这一特殊情形，随后证明定理 1.1、1.2、1.3、1.5 和1.7。

致谢。 感谢 DickCanary、Mitul Islam、FannyKassel、Beatrice Pozzetti、Alan Reid 和 Teddy Weisman 提供了有益的讨论和意见。

感谢 Teddy Weisman 帮助我们制作膨胀示意图；这些图是使用他开发并发布在其网站上的 GeometryTools 软件包绘制的。

Gabriele 感谢 DFG427903332（Beatrice Pozzetti 的 Emmy Noether 项目）以及 DFG 390900948（海德堡结构卓越集群）提供的经费支持。

Pierre-Louis 感谢 2021—2022 年间马克斯·普朗克数学研究所提供的经费支持。

2. Ingredients of the proofs

本节将讨论本文证明的思路和要素。在第 2.1节中，我们研究维数 d等于 2 的特殊情形，然后在第2.2节转向一般情形。

这些证明涉及通过粘合带有全测地边界和角的射影流形而得到的射影锥流形。我们将说明如何将某些射影锥流形的奇点爆破为全测地

边界，以及如何描述某些带有全测地边界和角的射影流形粘合后的几何。

最后，在第 2.3 节中，我们讨论构造所需的双曲构件：在 3 维中，这类对象已由 Bonahon 和 Otal 的工作完成分类 [21]。在高维中，我们使用算术技巧构造它们（定理1.8）。

2.1. **2维中的指导性例子**。 如前所述，定理 1.5 和 1.7 中具有全测地边界的紧致凸射影流形，是通过沿着与锥奇点相邻的全测地超曲面充分膨胀双曲锥流形而得到的。这个双曲锥流形实际上是通过对一个具有全测地边界 N 和 Σ、$\Sigma' \subset \partial N$余维 *2* 角 $\mathfrak{C} \subset \partial N$的紧致凸双曲流形取双倍得到的，见图 2。（$\Sigma$，$\Sigma'$，$\mathfrak{C}$不一定是连通的。）

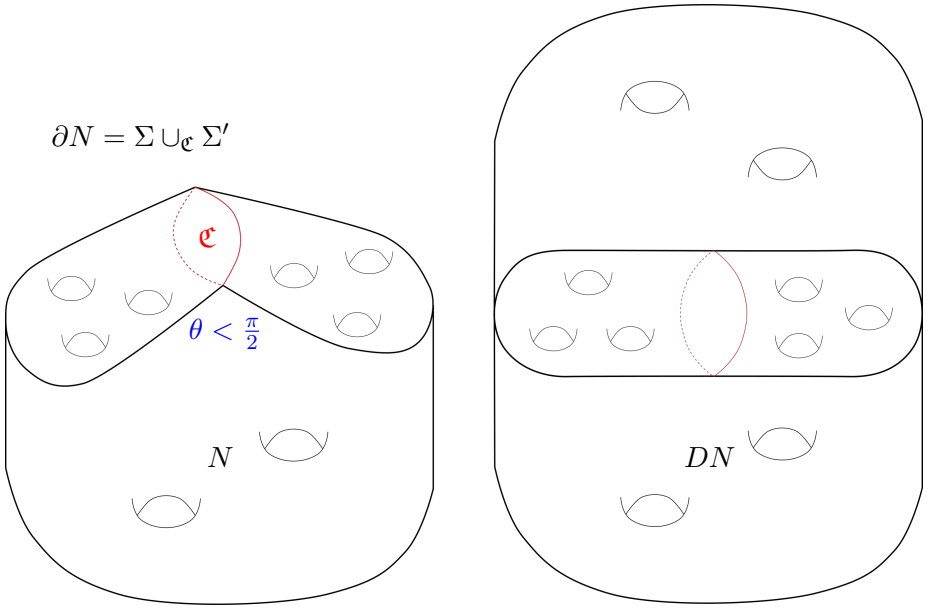


FIGURE 2. 带角双曲流形的双倍。

本节将在较简单但仍然有趣的情形下说明这一鼓胀构造，其中 $d = 2$。在这种情形下，可以为 N 选取一个双曲平面中的紧致四边形，其顶角小于 $\pi/2$ （在维数至少为 3 时，构造一个合适的 N 就没那么显而易见了）。

我们讨论两个典型例子，以说明定理1.5证明中的两个不同问题，即全测地爆破和全局凸性。

2.1.1. 局部模型。 第一个例子是一个双曲扇形 $\Sigma \subset \mathbb{H}^2$，其角度为 $0 < \theta < \pi/2$，由从顶点 v出发的两条测地射线 ℓ_1, ℓ_2 围成。

双倍 $S = D\Sigma$ 是一个双曲锥，其顶点为 v，角度为 2θ。锥点 $S' = S - \{v\}$ 的补集是一个带有不完备双曲度量的穿孔平面。

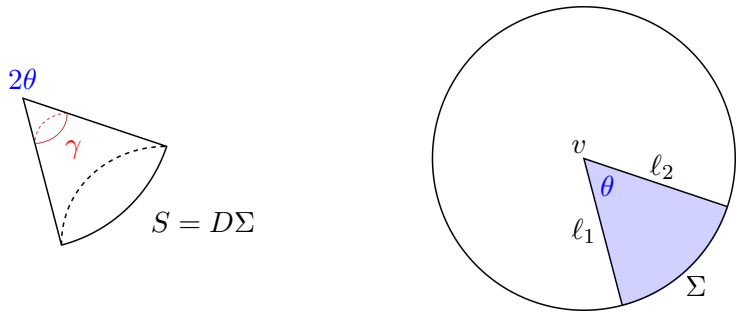


FIGURE 3. 双曲锥：一个扇形的双倍。

~我们将万有覆盖 S' 视为由扇形组成的扇 $\{\Sigma_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$，它提升了 S'的扇形区域，并考虑双曲发展映射 $\mathrm{dev}_0 : \widetilde{S}' \to \mathbb{H}^2$，将 Σ_0 映到 Σ。若 γ 是绕顶点顺时针旋转一周的简单曲线，则其整体单值化由绕顶点 v旋转 $R_{2\theta} \in \mathrm{SO}(2,1)$（角度为$2\theta$）给出。此外，对于每个 j，$\mathrm{dev}_0(\Sigma_j) = R_{j\theta}\Sigma$。

我们通过沿每条边 ℓ_1, $\ell_2 \subset S'$分别进行弯曲变形，对 S' 上的双曲结构作射影变形。回想一下，这些弯曲变形都是膨胀，即具有如下形式。每条直线 $\ell \subset \mathbb{H}^2$ 都有一个对偶点 $\ell^* \in \mathbb{RP}^2 - \mathbb{H}^2$。对于每个 $\mu > 0$，“膨胀”变换$B_{\ell,\,\mu} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ 在表示ℓ 的二维平面 $L \subset \mathbb{R}^3$ 上作位似变换，位似比为 $1/\mu$；在表示 ℓ^*的直线 $L^\perp \subset \mathbb{R}^3$ 上作位似变换，位似比为 μ^2。

我们通过发展映射 dev 描述 S' 上的（膨胀后的）射影结构，该映射将 Σ_0 映到 Σ。我们有 $\mathrm{dev}(\Sigma_1) = B_{\ell_2,\,\mu_2}\mathrm{dev}_0(\Sigma_1)$，且 $\mathrm{dev}(\Sigma_{-1}) = B_{\ell_1,\,\mu_1}\mathrm{dev}_0(\Sigma_{-1})$；$\gamma$ 的膨胀整体单值化（它将 $\mathrm{dev}(\Sigma_{-1})$映到 $\mathrm{dev}(\Sigma_1)$）变化如下

$$R_{2\theta} \rightsquigarrow \rho := B_{\ell_2,\mu_2} R_{2\theta} B^{-1}_{\ell_1,\mu_1},$$

并且对每个 j，$\mathrm{dev}(\Sigma_{2j}) = \rho^j\Sigma$ 和 $\mathrm{dev}(\Sigma_{2j+1}) = \rho^j B_{\ell_2,\,\mu_2} R_\theta \Sigma$。

其思路是，在对 ρ 上的 S' 射影结构施加适当的几何和动力学假设后，该结构是凸的，并且可以将射影锥流形 S 的奇点 v “吹起”为一个全测地圆，它是 S' 的边界。

直观图像如下（见图 4）。注意到 v 是 ρ 的特征向量，其特征值为 μ_1/μ_2。假设

$$\rho \text{ is diagonalizable with eigenvalues } \mu_1/\mu_2 < \mu < \mu', \tag{2.1}$$

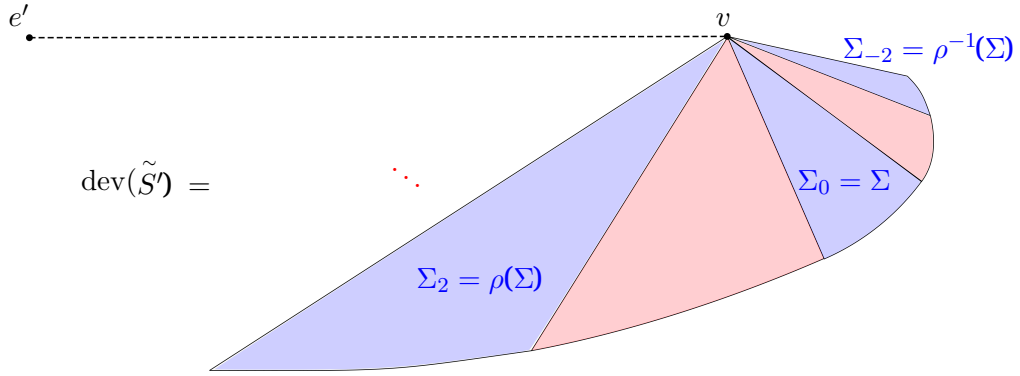


FIGURE 4. 新发展映射 dev 的像。

并将 e, e' 记为 μ, μ'的特征直线。（例如，当 $\theta < \pi/2$、 μ_2和 μ_1^{-1}都很大时，这一点成立。）

$\widetilde{\text{像}}\ \Omega = \mathrm{dev}(S')$ 不与经过 v 且分别包含 e 和 e'的两条直线相交。对于 $j \to \infty$，扇形区域 $\mathrm{dev}(\Sigma_j)$ 累积到线段 $[v, e']$ 上；对于 $j \to -\infty$，则累积到顶点 v 上。真凸子集 $\Omega \cup (v, e')$ 是一个 ρ-不变凸集，其中 ρ 适当不连续地作用。这便得到了所需的全测地爆破

$$\bar{S} := S' \cup ((v, e')/\rho) = (\Omega \cup (v, e'))/\rho$$

变形锥 $S' = \Omega/\rho$的。

定理 1.5 的非凸余紧情形对应于 $\mu = \mu'$和 ρ 在 v的对偶直线上作为抛物变换作用。然后，凸性和全测地爆破的处理方式相同，不过 $\ell = \ell'$和 v 是 $\mathcal{C}^1$ 的一个 ∂点。

2.1.2. 全局凸性。 第二个典型例子是一个双曲凸四边形 $Q = Q(a, b, c, d) \subset \mathbb{H}^2$，其顶点 a, b, c, d处的角分别为 $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi/2$。

双倍 $S = DQ$ 是一个带奇异双曲度量的球面，有四个锥点，其角分别为 2α, 2β, 2γ, 2δ，对应于 Q的顶点 a, b, c, d。去掉锥点 $S' = S \setminus \{a, b, c, d\}$ 后，得到一个有四个挖点的不完备双曲球面。

让我们沿着具有参数 μ_{ab}、 μ_{bc}、 μ_{cd}、 μ_{da} 的四边形各边 ℓ_{ab}、 ℓ_{bc}、 ℓ_{cd}、 ℓ_{da} 鼓胀 S'。假设 μ_{ab}、 μ_{bc}^{-1}、 μ_{cd}、 μ_{da}^{-1} 足够大，使得绕 a、 b、 c、 d 的曲线的全纯单值群 ρ_a、 ρ_b、 ρ_c、 ρ_d 满足 (2.1)。

根据第 2.1.1节， S 存在射影全测地爆破

$$\bar{S} = S' \cup (\mathbb{S}^1_a \cup \mathbb{S}^1_b \cup \mathbb{S}^1_c \cup \mathbb{S}^1_d)$$

其中每个锥点 $v \in \{a, b, c, d\}$ 都被一个全测地边界圆 $\mathbb{S}^1_v$所替代。现在让我们解释为什么 $\bar{S}$ 是凸的。

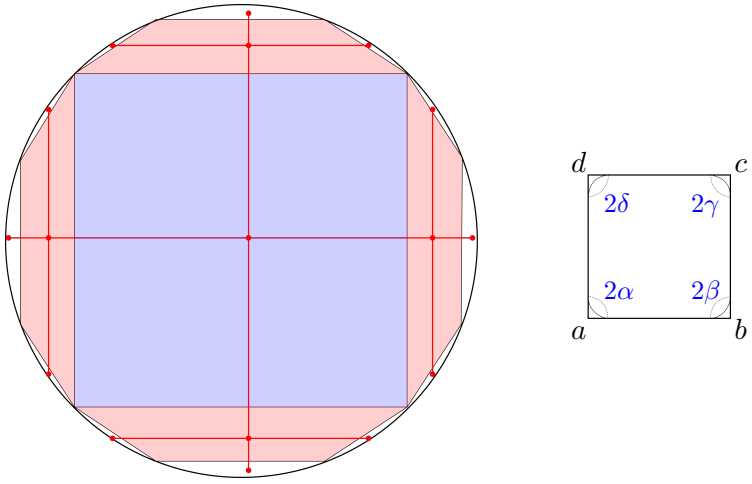


FIGURE 5. S'的万有覆盖。

~描述万有覆盖的一种组合方式 S' 是将其 S' 与 $\mathbb{H}^2$ 通过另一个双曲度量相识别， S' 该度量是完备的且具有有限体积。两个 $Q \smallsetminus \{a, b, c, d\}$ 副本提升为一个理想镶嵌$\mathcal{F}$，其 $\mathbb{H}^2$ 对偶图是一棵正则四价树（见图5）。现在我们描述（鼓胀的）发展映射的像 Ω

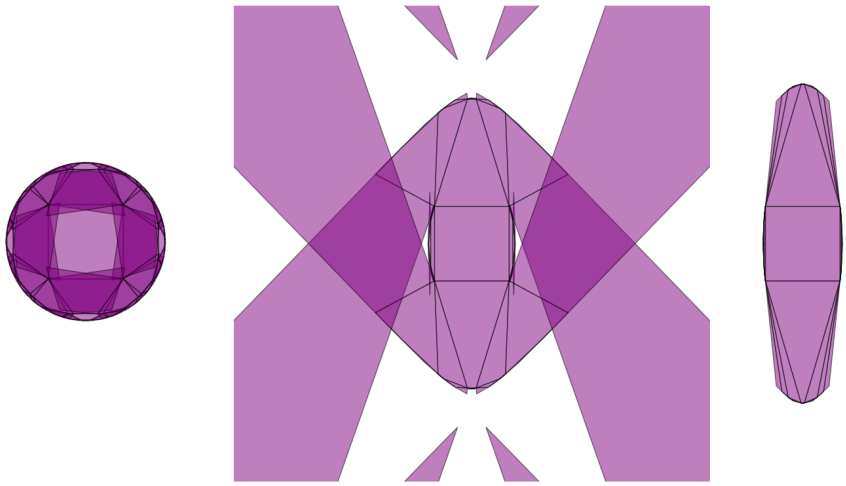
$$\mathrm{dev} : \widetilde{S}' \to \mathbb{RP}^2.$$

~根据局部模型，对于 S'的剖分中每个无穷远顶点，与其相邻的四边形扇在 $\mathbb{RP}^2 - (\ell \cup \ell')$的一个象限内展开为开凸子集，其中 ℓ， ℓ' 是适当的直线。受 Vinberg 的工作启发并由 Benoist 重新审视的局部到整体论证 [65] [12]（见~命题 5.1）保证像 $\Omega = \mathrm{dev}(S')$是真凸域，由剖分中各四边形的像铺砌而成。

2.2. **指导性例子的一种推广**。 第 2.1 节介绍的思想更普遍地适用于具有全测地边界与角的双曲流形的粘合。事实上，我们将在一个更一般的框架中发展这些思想，其中包括：

- 射影锥流形的全测地爆破。
- 适用于一般凸集并集的局部到整体凸性结果。

我们之所以在如此一般的设定下开展研究，主要有三个原因：首先，由于我们使用了两次粘合，且所采用的构件不同，因此在一个能够涵盖这两种构造的抽象框架下进行研究会更为方便。其次，我们认为，在这一一般框架内，某些论证是自然的。最后，我们希望我们的方法能够很好地用于构造许多新的、有趣的射影流形（例如问题 1.4和 1.6中所涉及的流形）。



(A) 没有膨胀。 (B) 适度膨胀。 (C) 大幅膨胀。

FIGURE 6. 构造出 52 个具有不同膨胀参数的瓦片。最后一幅图是凸的。

我们简要介绍主要步骤。

管与锥流形。我们定义一类合适的带锥奇点的射影流形$(M,\ \mathcal{C})$，其范围略广于 [5, 29, 43]中的先前概念。最重要的特征是，每个奇点$\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$ 都有一个邻域 U，其局部模型是一个管。

我们在 $\mathbb{S}^d$ $\mathbb{R}^d$ 的球面中工作（它是 $\mathbb{RP}^d$的双重覆盖）。考虑一个扇形 $\Sigma \subset \mathbb{S}^d$，其边界由两个半球面 $H_1,\ H_2$ 围成，且包含 $\mathbb{S}^{d-2}$。通过 $\alpha \in G$ $\mathbb{S}^d$ 上固定 $\mathbb{S}^{d-2}$的变换群，将H_1 与 H_2 粘合。商空间 $S = \Sigma/\alpha$ 是一个带有奇点 $\mathbb{S}^{d-2} \subset S$的射影流形。我们称它为管，并将其视为一个带有角 $\alpha \in G$的射影锥，类似于角度小于 2π的双曲锥。与双曲情形一样，我们也允许角度大于 2π；为此需修改上述图示，在 G的万有覆盖中取$\alpha \in G$。

对第2.1.1节进行推广后，本文引入的全测地爆破是一种局部构造，适用于角度满足（2.1）的标准管状体（且“角度小于 π”）。它将每个奇点 $\mathfrak{C} \subset M$ 替换为一个具有如下（拓扑）形式的全测地边界分支：$\mathfrak{C} \times \mathbb{S}^1$。

凸域的周期性镶嵌。如第 2.1.2 节所述，考虑一族满足局部凸性性质的凸集（瓦片），这一性质还可通过第 2.1.1 节中的相关考察等方式得到保证。

局部到整体凸性论证确保这一族凸集镶嵌出一个真凸域 Ω。随后，在附加假设下，我们描述 Ω 的边界及其正则性，其中大致可分为三类点。

位于 Ω 内的瓦片的余维 1 面称为墙。首先，对于任意瓦片 D，在 ∂D 中去除墙的闭包后所得的补集包含于 $\partial\Omega$，且其中的点在 ∂D 和 $\partial\Omega$ 中具有相同的正则性。

边界 $\partial\Omega$ 的其余部分由无穷远处的胞腔构成，它们是瓦片序列的豪斯多夫极限。根据铺砌的周期性（在等距变换下只有有限多个瓦片），实质上需要考虑以下两种情形：

(1) 一列望远镜式序列 连续瓦片 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全局交集为空。对应的无穷远处胞腔退化为 $\partial\Omega$ 的一个极点。(2) 一扇 瓦片 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 共享一个余维 2 面 $H \subset \partial\Omega$，且 $\gamma D_j = D_{j+k}$ 对某个 $\gamma \in$ 满足 (2.1) 的 $\mathrm{Aut}(\Omega)$。这两个 对应的无穷远处胞腔分别为 H 和一个余维 1 面$\mathcal{C}H(H, \gamma_+) \subset \partial\Omega$，其中 $\gamma^+ \in \partial\Omega \smallsetminus H$ 是 γ 的吸引不动点（如图4所示）。

除了全测地爆破和周期性铺砌这些思想（它们推广了第 2.1 节的内容），以及第 2.3 节介绍的构造之外，主要定理的证明还将运用收敛作用和几何有限作用理论中的经典论证，来证明有关相对双曲性的论述，如 [34, 35, 67]。

现在我们讨论如何在任意维数下构造具有全测地边界、并沿余维 2 角折叠的双曲流形。

2.3. **双曲构件**。 每个维数下都存在具有全测地边界和角、且形如图 2所示的紧致凸双曲流形。

2.3.1. 维数 $d = 3$。 这是一个特殊情形，得益于 Bonahon 和 Otal 的工作，我们有如下完备的拓扑分类 [21]。简单闭曲线 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \subset \partial M$和角 $0 < \theta_1, \cdots, \theta_k < \pi$，在 M 上具有全测地边界和角的双曲度量边界上，恰好构成折叠（或弯曲变形）轨迹及折叠角，当且仅当

- $\sum_{j\le k} \theta_j i(\alpha_j, \partial A) > 0$ 对于每个正常嵌入本质环带或莫比乌斯带 $(A, \partial A) \subset (M, \partial M)$。
- $\sum_{j\le k} \theta_j i(\alpha_j, \partial D) > 2\pi$ 对于每个正常嵌入本质圆盘 $(D, \partial D) \subset (M, \partial M)$。

这类集合 α_j, θ_j 很常见（例如由 [42] 得到）。请注意，θ_i 是折叠角，而非角点角；后者是 $\pi - \theta_i$。

此外，借助 Choi 和 Series 的工作，我们还可以控制测地角点的长度 $\ell(\alpha_j)$ $\alpha_j \subset \partial M$。 [28]

事实 2.1（Bonahon–Otal [21, 定理 2-3], Choi–Series [28, 定理 A]）。 设 M 是一个带非空边界 $\partial M = \Sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n$的紧致可定向不可约无环面三维流形。设 $\alpha := \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ 是一个双重不可压缩多曲线，其中α_j 是 Σ_j的一条分离简单闭曲线。那么，当$\epsilon > 0$ 充分小时，对于任意长度 ℓ_1、……、 $\ell_n < \epsilon$，都可以在 M 上赋予一个具有全测地边界与角的双曲度量，其角为 α_i，长度为 ℓ_i，且角度至多为 $\pi/4$。

详见第 8.1节。

2.3.2. 维数 $d \geq 4$。 在一般情形下，我们的双曲构件由定理 1.8给出，该定理通过算术方法证明。下面讨论该定理中点 (a) 的流形 M 的构造，情形为 $k = 4$ （其中 M 包含 4 个全测地闭超曲面，它们沿着一个余维二闭子流形相交）。

流形 M 是 $\mathbb{H}^d/G$，其中 G 是的一个适当的有限指数子群

$$G_0 := \mathrm{SO}\left(x_1^2 + \cdots + x_d^2 - \sqrt{2}x_{d+1}^2\right) \cap \mathrm{SL}_{d+1}\left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\right)$$

根据经典事实， G_0 是离散的，而 $\mathbb{H}^d/G_0$ 是紧致的。考虑超平面 $H = \{x_1 = 0\}$、余维 2 平面 $V = \{x_1 = x_2 = 0\}$，以及绕 V 的 $\pi/4$旋转

$$\rho = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \\ & & \mathbb{I}_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_{d+1}\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right).$$

我们利用一个适用于四个超平面 $H_j = \rho^j H$ 及其在 G_0 中的稳定子的乒乓系统，对于 $j \leq 4$ 找到一个子群$Q < G_0$，该子群具有以下性质：

(i) Q 是凸余紧的。(ii) 超平面 H_j 投影为嵌入的紧致超曲面 $N_j \subset \mathbb{H}^d/Q$，它们两两相交仅沿着 V 的投影，而 V 是一个余维二全测地嵌入子流形。

鉴于 (i) 和 (ii)，Bergeron、Haglund 和 Wise G （相对于 Q）所证明的强子群可分性性质 [15] 使我们能够将 $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$ 嵌入到一个有限覆盖 $M = \mathbb{H}^d/G \to \mathbb{H}^d/G_0$中。

3. Convex projective geometry

本节回顾全文中将要用到的两个概念：首先，我们回顾射影空间中凸集的基本结构。然后，我们讨论几何结构，即（G， X）-结构，并介绍带有全测地边界与角的（凸）射影流形。

3.1. **凸域**。我们从关于 $\mathbb{S}^d$ 的凸子集的一些基本概念和术语开始，其中 $\mathbb{R}^{d+1}$ 是射线球面。

定义 3.1（真凸）。 $K \subset \mathbb{S}^d$ 的凸子集是 $\mathbb{R}^{d+1}$中的一个凸锥的像。若凸集 K 的闭包不包含一对对踵点，即 K 的闭包包含于某个仿射图册 $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{S}^d$中，则称其为真凸。

注意，（真）凸子集的交仍然是（真）凸的。因此，总可以定义包含给定真凸集的最小闭凸子集和最小线性子空间。

定义 3.2（凸包）。 如果 $A \subset \mathbb{S}^d$ 包含于某个真凸子集 $K \subset \mathbb{S}^d$中，那么我们可以将 K中 A 的凸包 $\mathcal{CH}(A)$定义为所有包含 A的 K 的闭凸子集的交。

定义 3.3（张成空间与维数）。 凸集 K 的张成空间 $\mathbb{S}(K) \subset \mathbb{S}^d$ 是包含 K的最小线性子空间。我们称 $\dim(\mathbb{S}(K))$ 为 K的维数。 $\mathbb{S}^d$ 中的一维凸子集称为线段。

注意，任意两个非对踵的点 x、 $y \in \mathbb{S}^d$ 都包含在一个唯一的极小（真凸）线段 $[x, y]$ 中。

3.1.1. 拓扑。 凸集 $K \subset \mathbb{S}^d$ 的张成空间 $\mathbb{S}(K)$ 具有如下性质　　y

K 在其中具有非空内部。

定义 3.4（内部与边界）。 我们分别称 $\mathrm{int}^{\mathbb{S}(K)}(K)$ 和 $\partial_{\mathbb{S}(K)}K$ 为 K 的相对内部和相对边界 。

从拓扑上看，$(\mathrm{int}^{\mathbb{S}(K)}(K) \cup \partial_{\mathbb{S}(K)}K,\ \partial_{\mathbb{S}(K)}K)$ 这一对总是与 $(D,\ \partial D)$ 同胚，其中 D 是维数为 $\dim(K)$ 的欧几里得圆盘。

3.1.2. 边界的结构。 真凸集 K 的相对边界具有分层结构。

定义 3.5（支撑超平面）。 具有非空内部的凸子集 $K \subset \mathbb{S}^d$ 的支撑超平面，是指与 K 的闭包仅在 ∂K 处相交的超平面。

对于每个点 $\xi \in \partial K$ ，总存在一个经过 ξ 的支撑超平面，但它不一定唯一。

定义 3.6（$\mathcal{C}^1$-点）。 存在唯一支撑超平面的点 $\xi \in \partial K$ ，记作 $T_\xi \partial K$，称为 $\mathcal{C}^1$-点。

下面的判据有时会很有用。

事实 3.7. 假设 K 张成 $\mathbb{S}^d$。考虑两个子空间 $\mathbb{S}(V)$ $\mathbb{S}(W) \subset \mathbb{S}^d$，它们的并集张成 $\mathbb{S}^d$，且 $\mathbb{S}(V) \cap \mathbb{S}(W)$ 与 K 的内部相交，并且 $x \in \mathbb{S}(V) \cap \mathbb{S}(W) \cap \partial K$。那么 x 在 ∂K 中是 $\mathcal{C}^1$，当且仅当它在 $\partial K \cap \mathbb{S}(V)$ 和 $\partial K \cap \mathbb{S}(W)$ 中均为 $\mathcal{C}^1$ 。

定义 3.8 (面)。 设 $K \subset \mathbb{S}^d$ 是一个具有非空内部的凸集，且 $\xi \in \partial K$ 是一个边界点。该凸子集

$$F_K(\xi) := \overline{K} \cap \bigcap_{H \text{ supporting at } \xi} H$$

是 K 中 ξ 的闭面 （其相对内部是 ξ 的开面 ）。注意，它包含于 ∂K 中。每个面都有一个维数 $\dim(F_K(\xi))$ 和一个余维 $\operatorname{codim}(F_K(\xi)) = \dim(\mathrm{K}) - \dim(F_K(\xi))$。

定义 3.9 （极端与严格凸）。 如果 $F_K(\xi)$ 缩减为一个点，那么 ξ 就称为极端。如果每个边界点都是极端的，或者等价地， ∂K 中不存在非平凡线段，那么 K 就称为严格凸。

3.1.3. 对称性。 群 $\mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 通过线性同构作用于射线球面 $\mathbb{S}^d$ 。给定一个真凸子集 $K \subset \mathbb{S}^d$，我们定义以下自然的对称群：

定义 3.10 （自同构）。 设 $K \subset \mathbb{S}^d$ 是一个开真凸子集。 K 的射影自同构群为

$$\mathrm{Aut}(K) := \{A \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}) \mid A(K) = K\}.$$

我们将通过 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 的扎里斯基闭包来衡量其大小：

定义 3.11 （扎里斯基稠密）。 $\mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 上的扎里斯基拓扑是这样一种拓扑：其闭子集是矩阵元素中多项式零点集的交。

在这种拓扑下，若子集 $\Gamma < \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 满足：任何一个在 Γ 的元素上取值为零的矩阵元素多项式，在 $\mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 中所有矩阵上都取值为零，则称其扎里斯基稠密。

注意，子群 $\Gamma < \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 的扎里斯基闭包始终是一个李子群。类似于李群中格的概念，我们有如下定义：

定义 3.12 （可除）。 若 $\mathrm{Aut}(K)$ 包含一个子群 Γ ，它在 K 上适当不连续地、自由地且余紧地作用，则称开真凸子集 $K \subset \mathbb{S}^d$ 是可除的。

我们的目标是构造具有特殊几何性质的区域 K ，使得 K 是可除的，并且 Γ（即使其可除的群）尽可能大，也就是说，它在扎里斯基意义下稠密。

3.1.4. 希尔伯特度量。 每个适当凸集 $K \subset \mathbb{S}^d$ 都自然地带有一个 $\mathrm{Aut}(K)$-不变度量，称为希尔伯特度量；其几何特征与边界 ∂K的正则性密切相关。

定义 3.13（希尔伯特度量）。在 K 上的希尔伯特度量 定义如下：考虑 x, $y \in K$。设 a, b为由 x, y 张成的射影直线与 ∂K 的交点，其中 a 位于 x 一侧，而 b 位于 y一侧。定义为

$$d_K(x,y) := \frac{1}{2}\log([a,x,y,b]),$$

其中 $[a,x,y,b]$ 表示由x交比y在射影直线上张成的空间上的交比，经正规化使得 $[0,1,t,\infty] = t$。

经典事实是，$d_K(\bullet, \bullet)$定义了一个诱导标准拓扑的度量，且其度量球是紧致的。因此，由于射影自同构群保持希尔伯特度量，作用 Aut(K) $\curvearrowright K$ 是适当的。

希尔伯特度量有若干有用的一般性质，我们将多次加以利用。首先，注意到 $d_K(\bullet, \bullet)$关于包含关系是单调的，也就是说，若 $K \subset K'$，则对所有 x, $y \in K \subset K'$，都有 $d_K(x, y) \geq d_{K'}(x, y)$。其次，$d_K$ 总可以通过如下定义扩展为 $K \times K$上的下半连续函数$_-$ $_-d_{\bar{K}}(\bullet, \bullet)$:

- $d_{\bar{K}}(x, y) = \infty$若 x和 y位于不同的面中。
- $d_{\bar{K}}(x, y) = d_F(x, y)$ 若 x和 y共享同一个开面 F。

3.2. **几何结构**。现在我们引入本文的第二个关键概念，即几何结构，尤其是具有全测地边界与角的射影结构。

设 G 为一个李群。设 $G \curvearrowright X$ 为流形 X上的一个传递且有效作用。有效是指，若 g, $g' \in G$ 在 X的某个开集上一致，则二者相等。

定义 3.14（（G, X）-结构）。拓扑空间 M 上的（G, X）-结构 是一个图册

$$\mathcal{A} = \{\phi_j : U_j \subset M \to V_j \subset X\}_{j\in J}$$

使得每个坐标图变换 $\phi_i\phi_j^{-1}$都是某个变换$g_{ij} \in G$的限制。

通过对局部图表进行解析延拓的标准过程，M 上的每个 (G, X)-结构都有一个关联的发展映射

$$\mathrm{dev} : \tilde{M} \to X,$$

$\tilde{}$其中 M 是 M的万有覆盖，并且有一个全纯变换表示

$$\rho : \pi_1(M) \to G.$$

发展映射是一个局部同胚，它相对于覆盖变换群作用 $\pi_1(M) \curvearrowright M$是 ρ-等变的。

定义 3.15 （可均匀化性与完备性）。如果发展映射 dev： $M \to X$ 是一个嵌入，则 (G, X)-流形 M 在 X 中是可均匀化的。在这种情况下，我们将 M 认作商空间 $\mathrm{dev}(M)/\rho(\pi_1(M))$，其中 $\rho : \pi_1(M) \to G$ 是整体单值化表示。

~如果 M 是可一致化的，且 $\mathrm{dev}(M) = X$，我们称 M 是<样式 id='6'>完备的。

关于该主题的更多内容，请参见 [58, 第 3] 章。

3.2.1. 射影结构。射影结构对应于二元组 $(\mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}), \mathbb{S}^d)$。我们还将考虑局部模型为 $\mathbb{S}^d$ 中的片段（如半球和半半球）的射影结构。它们定义如下。

定义 3.16 （射影结构）。在 M 上具有<样式 id='7'>全测地边界 和<样式 id='9'>角 的<样式 id='5'>射影结构，是一个取值于 $\mathbb{S}^d \cap \{x_1, x_2 \geq 0\}$ 的图册的极大图册，其坐标图变换由 $\mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 中元素的限制诱导。

该图册在 M 上诱导出一个相容的带边界和角的 d-流形结构，其中

- 内部 $\mathrm{int}(M)$ 由那些在某个（因而也在每个）局部图册下映射到 $\mathbb{S}^d \cap \{x_1, x_2 > 0\}$ 的点组成。
- 边界 ∂M 是那些在某个（因而也在每个）局部图册下映射到 $\mathbb{S}^d \cap \{x_1 = 0\} \cup \mathbb{S}^d \cap \{x_2 = 0\}$ 的点的集合。
- 角的并集 $C \subset \partial M$ 由那些在某个（因而也在每个）局部图册下映射到 $\mathbb{S}^d \cap \{x_1 = x_2 = 0\}$ 的点组成。
- 墙 是 $\partial M \setminus C$ 的一个连通分支，而角 是 C的一个连通分支。

为使术语简洁，本文中我们将用*b*-流形 （分别用*bc*-流形）代替具有全测地边界的射影流形（分别代替具有全测地边界和角的射影流形）。

设 dev： $\tilde{M} \to \mathbb{S}^d$ 为 bc-流形 M的发展映射。

定义 3.17 （凸射影流形）。若 bc-流形的发展映射是一个嵌入（在 $\mathbb{S}^d$ 中可一致化），且其像在 $\mathbb{S}^d$ 中是凸的（分别为真凸的），则称其为凸的（分别为真凸的）。

在第7节中，我们将说明如何将若干凸 bc-流形组装成一个单一的奇异对象，即带有锥奇点的射影流形。我们将在下一节（第4节）中正式定义并分析这类对象，并解释它们为何对我们的研究非常有用：在满足适当的（局部）几何条件时，可以从射影锥流形中去除奇点，并以全测地边界取而代之。

3.2.2. 双曲结构。双曲流形提供了一类特别灵活且丰富的射影结构。我们将在主要定理的证明中将它们用作构造的基石。

定义 3.18（双曲空间）。令 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ 表示二次型

$$\langle\bullet,\bullet\rangle := x_1^2 + \ldots + x_d^2 - x_{d+1}^2$$

在 $\mathbb{R}^{d+1}$上。双曲 d空间 $\mathbb{H}^d$ 可描述为

$$\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{S}^d \,|\langle x, x\rangle < 0, x_{d+1} > 0\}.$$

注意， $\mathbb{H}^d$ 是 $\mathbb{S}^d$的真凸子集。

其对称群为 $\mathrm{SO}_0(d,\ 1)\ <\ \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$，即二次型的线性等距变换群的（恒等分支）。其希尔伯特度量来自一个完备的 $\mathrm{SO}_0(d,\ 1)$-不变黎曼度量，该度量在点 $x \in \mathbb{H}^d$ 处由二次型$\langle\bullet,\bullet\rangle$ 在切空间 $T_x\mathbb{H}^d = x^\perp$上的（正定）限制定义。

$\mathbb{H}^d$ 的全测地子空间恰好都是形如 $\mathbb{S}(V) \cap \mathbb{H}^d$ 的集合，其中 $V \subset \mathbb{R}^d$ 是线性子空间。因此，在 $\mathbb{H}^d$ 中，相对于黎曼度量而言测地凸的概念与在 $\mathbb{S}^d$中凸的概念相同。

定义 3.19（凸双曲流形）。凸双曲流形是凸子集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{H}^d$ 关于保持 $\mathcal{C}$的离散无挠子群 $\Gamma < \mathrm{SO}_0(d,1)$ 的商空间 $M = \mathcal{C}/\Gamma$ 。

我们还将利用以下有用的判据：

事实 3.20。设 $\Gamma < \mathrm{SO}(d,1)$ 是一个有限生成离散子群。以下条件等价：

- 点 $o \in \mathbb{H}^d$ 的轨道 Γo 是 $\mathbb{H}^d$的一个拟凸子集。
- 存在一个 Γ-不变凸子集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{H}^d$ ，使得 $\mathcal{C}/\Gamma$ 是紧致的。

我们回顾一下，如果存在常数$R > 0$ ，使得对于任意 $x,\ y \in S$ 测地线段 $[x, y] \subset \mathbb{H}^d$ 都包含在 S的 R-邻域内，则称子集 $S \subset \mathbb{H}^d$ 是拟凸的。

定义 3.21（全测地边界与角）。若凸双曲流形 $M = \mathcal{C}/\Gamma$ 的边界 ∂M 分解为一族全测地余维 1 子流形，并且这些子流形沿全测地余维 2 子流形相交，则称其具有全测地边界与角。

请注意，根据定义 3.16，具有全测地边界与角的凸双曲流形也是具有边界与角的凸射影流形。

4. Tubes、 cone-manifolds、 and totally geodesic blowup

本节旨在将锥流形（仅具有余维 2 的奇点）的概念从双曲情形推广到射影情形。射影锥流形已在 [5,29,43,53]中得到研究。请注意，Riolo-Seppi [53, 定义 53] 允许存在任意余维的奇点，尽管他们还有其他类型的限制。

我们的论述与 [43, 定义 21], 最为相似，但会稍微一般化一些。事实上，在 [43] 中，射影奇点（本质上）由圆上的射影结构（等价地，由 $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$万有覆盖中的一个共轭类）决定；而在我们的情形中，它们可以（大致）由 $\mathbb{S}^d$中$\mathbb{S}^{d-2}$ 的稳定子之万有覆盖里的共轭类参数化。

我们证明，根据这个共轭类的类型，相应的奇点存在全测地爆破。这是本节的主要结果。

4.1. 管与锥流形。

我们首先研究射影锥流形奇点的局部模型，并将其称为管。

我们将 $\mathbb{R}^{d-1}$ 视为 $\mathbb{R}^{d+1}$的一个子空间，将 $\mathbb{S}^{d-2}$ 视为 $\mathbb{S}^d$的相应子空间，并将 $\mathbb{S}^1$ 视为 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^{d+1}/\mathbb{R}^{d-1})$，即包含 $\mathbb{S}^{d-2}$ 的半超球面集合。注意，我们有一个自然映射

$$\mathbb{S}^d \smallsetminus \mathbb{S}^{d-2} \to \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}(\mathbb{R}^{d+1}/\mathbb{R}^{d-1})$$

将点 $x \in \mathbb{S}^d \smallsetminus \mathbb{S}^{d-2}$ 映射到经过x 和 $\mathbb{S}^{d-2}$的唯一半超球面。

定义 4.1 （万有分歧覆盖）。 考虑

$$\mathbf{B} = \{(H, x) \in \tilde{\mathbb{S}}^1 \times (\mathbb{S}^d \smallsetminus \mathbb{S}^{d-2}) : \ x \in \pi(H)\},$$

其中 $\pi : \tilde{\mathbb{S}}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是 $\mathbb{S}^1$的万有覆盖。 $\mathbb{S}^d$ 沿 $\mathbb{S}^{d-2}$ 的万有分歧覆盖是空间（赋予商拓扑）

$$\mathbf{B} \sqcup \mathbb{S}^{d-2} = \{(H, x) \in \tilde{\mathbb{S}}^1 \times \mathbb{S}^d : \ x \in \pi(H)\}/_\sim,$$

其中对所有 $H, H' \in \tilde{\mathbb{S}}^1$ 和 $x \in \mathbb{S}^{d-2}$，$(H, x) \sim (H', x)$。

注意，自然投影 $\mathbf{B} \to \mathbb{S}^d \smallsetminus \mathbb{S}^{d-2}$ 是一个（万有）覆盖。

定义 4.2 （结构群）。有一个自然的群 Aut(B)作用于$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{B} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$，其元素由以下形式的变换构成

$$g = \begin{pmatrix} \mu^{-1} A & C \\ 0 & \mu^{(d-1)/2} \tilde{B} \end{pmatrix}$$

其中：

- $\mu > 0$.
- $\tilde{B} \in \widetilde{\mathrm{SL}}^{\pm}_2(\mathbb{R})$.

- $A \in \mathrm{SL}^{\pm}_{d-1}(\mathbb{R})$.
- $C \in \mathrm{Mat}_{2,d-1}(\mathbb{R})$.

我们采用以下约定：对于所有 $\widetilde{B}' \in \widetilde{\mathrm{SL}}^{\pm}_2(\mathbb{R})$ 和 $C' \in \mathrm{Mat}_{2,\,d-1}(\mathbb{R})$，$C' \cdot \widetilde{B}' := C' \cdot B'$，其中 $B' \in \mathrm{SL}^{\pm}_2(\mathbb{R})$ 是 $\widetilde{B}'$ 的投影。

注意，投影 $\mathbf{B} \to \widetilde{\mathbb{S}}^1$ 关于 $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathbf{B})$ 和 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的 $\widetilde{\ }$作用以及投影 $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathbf{B}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是等变的。

利用这个投影，我们定义扇形区域和墙：

定义 4.3（扇形区域与墙）。扇形区域 是$\mathbf{B}$ 在$\mathbf{B} \to \widetilde{\mathbb{S}}^1$下某个区间的原像。$\mathbf{B} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 的扇形区域是 $\mathbb{S}^{d-2}$ 与$\mathbf{B}$的一个扇形区域的并。一个扇形区域的墙是中对应区间端点的原像。

现在我们可以定义管了：

定义 4.4（管）。管 是通过一个形如以下形式的 $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathbf{B})$ 元素，将$\mathbf{B} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 的一个紧致扇形的墙识别而得到的空间：

$$g = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & C \\ 0 & \mu^{\frac{d-1}{2}}\widetilde{B} \end{pmatrix}.$$

管的奇异轨迹 是 $\mathbb{S}^{d-2}$ 在商空间中的像，而光滑部分 是奇异轨迹的补集。

子午线 是管的光滑部分的基本群的一个生成元。注意，它的整体单值化为 g 或 g^{-1}。 $\widetilde{\ }$管的 SL_2角 是 B 的 GL_2 共轭类。

注意，管的光滑部分 T 自然地纤维化在一个射影圆上

$$T \to C,$$

$\widetilde{\ }$其整体单值化由管的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-角给出。该丛的纤维是经过奇异轨迹的超平面。

管之间有如下自然的等价概念：

定义4.5（管的同构）。设 $T \cup \mathbb{S}^{d-2}$ 和 $T' \cup \mathbb{S}^{d-2}$ 是管，其光滑轨迹 $T \to N$ 和 $T' \to N'$ 具有相应的纤维化。管之间的一个同构 是指一个同胚 $T \cup \mathbb{S}^{d-2} \to T' \cup \mathbb{S}^{d-2}$，它诱导出如下图表

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & N' \end{array}$$

其中水平箭头是射影同构。

管 $T \cup \mathbb{S}^{d-2}$ 的自同构 是一个同构 $T \cup \mathbb{S}^{d-2} \to T \cup \mathbb{S}^{d-2}$。我们将自同构群记为 $\widetilde{\mathrm{Aut}}(T)$。

现在我们可以给出射影锥流形的定义了。我们将在第7.1.2节看到一些例子，其中我们将证明，任何对具有全测地边界与角的射影流形进行的粘合，都是一个射影锥流形。

定义 4.6（射影锥流形）。一个锥流形 由以下数据组成：

- 一个拓扑流形 M。
- 一个余维二子流形 $\mathfrak{C} \subset M$（即奇异轨迹）。
- 对每个连通分支 $C \subset \mathfrak{C}$，选定一个管 T_C。
- 一个坐标图图册 $\{\phi_x\}_{x\in M}$，满足：若 x 位于光滑部分$M \setminus \mathfrak{C}$，则 ϕ_x：$U_x \subset M \setminus \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathbb{S}^d$；若 $x \in C \subset \mathfrak{C}$，则$\phi_x$：$U_x \hookrightarrow T_C$，使得 $U_x \subset M \setminus (\mathfrak{C} \setminus C)$和 $\phi_x^{-1}(\mathbb{S}^{d-2}) = U_x \cap C$。
- 如果 $U_x \cap U_y \neq \emptyset$，那么要么 x，$y \in C \subset \mathfrak{C}$ 对某个 C 成立，且过渡映射 $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$是 T_C的某个自同构的限制；要么 $U_x \cap U_y \subset M \setminus \mathfrak{C}$ 且 $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$是射影的。

锥流形的奇异轨迹具有自然的射影结构。

现在我们根据整体单值化对管进行分类。

4.2. **可均匀化性与完备性**。请注意，一般而言，管的光滑部分的射影结构在 $\mathbb{S}^d$中并不可均匀化。不过，它在 $\mathbb{S}^d \setminus \mathbb{S}^{d-2}$的万有覆盖中可均匀化。这是因为维数为 1 的闭射影流形在 $\mathbb{S}^1$的万有覆盖中可均匀化，正如 [5, § 3.31], 所述，其中描述了 $\mathbb{S}^1$ 上的所有射影结构。

命题 4.7。设 $T \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 是一个管，其光滑部分 T 纤维化到射影圆 N 上。那么：

(1) T 和 N 分别可在 $\mathbf{B}$ 和 $\widetilde{\mathbb{S}}^1$ 中一致化。选取像为 $\widetilde{T} \subset \mathbf{B}$ 和 $\widetilde{N} \subset \widetilde{\mathbb{S}}^1$、整体单值化由 $g \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ 生成且固定 $\mathbb{S}^{d-2}$ 的发展映射。则 $T \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 是 $\mathbf{B} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 的扇形 $\widetilde{T} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 关于 $g\mathbb{Z}$ 的商空间。

(2) 我们有一一对应

$$\{\text{Tubes}\}/\text{isom.} \quad \simeq \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{Z} < \mathrm{Fix}_{\mathrm{Aut}(\mathbf{B})}(\mathbb{S}^{d-2}) \\ \text{with non-trivial angle} \end{array} \right\} / \mathrm{Aut}(\mathbf{B})\text{-conj.}$$

$$[T] \quad \mapsto \quad [g\mathbb{Z}]\,.$$

此外，存在两种互不相交的情况。

- T 在 $\mathbf{B}$ 中完备：$\widetilde{N} = \widetilde{\mathbb{S}}^1$ 和 $\widetilde{T} = \mathbf{B}$。
- T在 $\mathbb{S}^d \setminus \mathbb{S}^{d-2}$中可一致化：$\widetilde{N} \subset \widetilde{\mathbb{S}}^1$ 单射地投影到 $I \subset \mathbb{S}^1$ 两个非椭圆型SL_2-角的不动点之间的一个区间

$h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$（其迹为正）。若 h 是双曲型，则 I 是真凸的。若 h 是抛物型，则它是一个半圆。

注记 4.8（Barbot–Bonsante–Schlenker [5, §3.3。1]）。在命题 4.7的情形下，令 $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 为 $_2$的 SL 角，g 投影为 $h \in \mathrm{SL}_2$(ℝ。以下是经典结果。

- 若 h 是椭圆型的，即 $-2 < \mathrm{tr}(h) < 2$ 或 $h = \pm\mathbb{I}_2$，则 h 在 $\tilde{S}^1$ 上自由、适当地且余紧地作用，因此 T 在 $\mathbf{B}$ 中完备。
- 若 $\mathrm{tr}(h) \leq -2$ 且 $h \neq -\mathbb{I}_2$，则 h 在 $\tilde{S}^1$ 上自由、适当地且余紧地作用，因此 T 在$\mathbf{B}$ 中完备。
- 若 $\mathrm{tr}(h) \geq 2$ 且 $h \neq \mathbb{I}_2$，则它在 $\tilde{\mathbb{S}}^1$ 中恰有一个提升 $h_0 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，其不动点位于 $\tilde{\mathbb{S}}^1$ 中。– 若 $h = h_0$，则 h 在 $\tilde{\mathbb{S}}^1$ 的任意两个不动点之间的区间上自由、适当地且余紧地作用；该区间投影到 $\mathbb{S}^1$ 的一个区间上，且投影是单射，因此 T 在 $\mathbb{S}^d \smallsetminus \mathbb{S}^{d-2}$ 中可一致化。– 否则，$\tilde{h}$ 在 $\tilde{\mathbb{S}}^1$ 上自由、适当地且余紧地作用，因此T 在$\mathbf{B}$ 中完备。

命题 4.7的证明。**性质（1）**。和 T 以及 N的发展映射构成如下图表，它是一个丛态射。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{N} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{S}}^1 \end{array}$$

换言之，映射 $T \to \mathbf{B}$ 在每个纤维上都是一个嵌入（该纤维是 $\mathbb{S}^d$ 的半超球面）。因此，$\tilde{T}$ 在$\mathbf{B}$ 中的可一致化性或完备性，由 $\tilde{N}$ 在 $\tilde{\mathbb{S}}^1$ 中的可一致化性或完备性推出。出于同样的原因，$\tilde{T}$ 在 $\mathbb{S}^d \smallsetminus \mathbb{S}^{d-2}$ 中的可一致化性或完备性，由 $\tilde{N}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 中的可一致化性或完备性推出。后者在 $\tilde{\mathbb{S}}^1$ 中总是可一致化的，因为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的任意局部同胚都是单射。

命题4.7末尾的二分法是注记 4.8 以及以下事实的直接推论：T的可一致化性或完备性由 N的可一致化性或完备性推出。

性质（2）。最后，让我们验证一一对应关系。

断言 1。将 Ψ的同构类与 T 的共轭类相关联的映射是良定义的。

断言的证明。根据定义，如果两个管 $T \cup \mathbb{S}^{d-2}, T' \cup \mathbb{S}^{d-2}$ 等价，那么它们之间的同构决定了射影同构 $\tilde{T} \subset \mathbf{B} \to \tilde{T}' \subset \mathbf{B}$ 和 $\tilde{N} \subset \tilde{\mathbb{S}}^1 \to \tilde{N}' \subset \tilde{\mathbb{S}}^1$，它们适合于

交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{T} & \longrightarrow & \widetilde{T}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{N} & \longrightarrow & \widetilde{N}'. \end{array}$$

这样的同构可延拓为丛$\mathbf{B} \to \widetilde{\mathbb{S}}^1$的一个自同构：我们在局部进行讨论。在足够小的扇形区域上，射影同构$\phi : \widetilde{T} \to \widetilde{T}'$ 下降为 $\mathbb{S}^d$中以 $\mathbb{S}^{d-2}$为中心的扇形区域之间的射影同构。在 $\mathbb{S}^d$ 上，任意两个开子集之间的射影同构都是某个全局射影变换的限制。在我们的情形中，扇形区域之间的射影同构的唯一延拓必须固定$\mathbb{S}^{d-2}$。因此，它提升为$\mathbf{B}$ 的一个自同构，并且在这个小扇形区域上与 ϕ 一致。由解析延拓可知，它们处处一致。这意味着 T, T' 的全纯单值群在 $\mathbf{Aut(B)}$ 中共轭。□

断言2。映射 Ψ是双射。

断言的证明。我们构造一个逆映射。设 $g\mathbb{Z} <\mathbf{Fix}^{\mathrm{Aut}(\mathbf{B})}(\mathbb{S}^{d-2})$为由一个元素 g 生成的无限循环子群，该元素具有非平凡的角$\sim \quad \sim h \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$。

考虑区间 $I = [x, \widetilde{h}x] \subset \widetilde{\mathbb{S}}^1$ ，其中 x 不是 $\widetilde{h}$的不动点（参见注记 4.8）。令 $S \subset \mathbf{B}$ 为对应的扇形。那么管$T = S/g$ 在 $g\mathbb{Z}$ 的作用下映射到 Ψ。不难验证， T 的同构类不取决于共轭类中 $\mathbb{Z}$ 代表元的选取、生成元 $g \in \mathbb{Z}$ 以及点 x的选取。□

这就完成了命题的证明。 □

稍后（定理9.1的证明，第 9.2.2 节）我们将需要以下关于在 $\mathbb{S}^d \setminus \mathbb{S}^{d-2}$ 中可一致化的管的技术性刻画。

引理 4.9。 在命题 *4.7* 和注记 *4.8*的情形下， T 在 $\mathbb{S}^d \setminus \mathbb{S}^{d-2}$ 中可一致化，当且仅当 $h \neq \mathbb{I}_2$, $\mathrm{tr}(h) \geq 2$，且 $[x, \widetilde{h}x] \subset \widetilde{N}$投影到 $\mathbb{S}^1$ 中的某个真凸线段上，其中 $x \in \widetilde{N}$。

证明。 注记 4.8 表明，如果 T在 $\mathbb{S}^d \setminus \mathbb{S}^{d-2}$ 中可一致化，则 $\mathbf{tr}(h) \geq \widetilde{2}$，且 $h \neq \mathbb{I}_2$ 的任意线段 N 都投影为 $\mathbb{S}^1$的适当凸线段。

反过来，假设 $\mathbf{tr}(h) \geq 2$ 且 $h \neq \mathbb{I}_2$。将 $\widetilde{\mathbb{S}}^1$ 与 $\mathbb{R}$ 认同，使得 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$（角为 θ ）在 $\mathbb{R}$ 上作为平移作用，其形式为 $\tau^{\theta+2n\pi}(x) = x + \theta + 2n\pi$，其中整数 n。于是 $\widetilde{h} = \tau^{2n\pi}\widetilde{h}_0$，其中 $\widetilde{n}$为整数，且 h_0 由注记 4.8得出。

$\widetilde{}$经过共轭后，不妨假设 h_0 固定 $\mathbb{R}$ 中 π 的每个倍数（如果 $\widetilde{h}$ 是双曲的，那么 h_0 有更多不动点），并保持 π 的两个相邻倍数之间的每个区间。

如果 T 在 $\mathbb{S}^d \smallsetminus \mathbb{S}^{d-2}$ 中不可一致化，那么 $n \neq 0$。设 $n \geq 1$。考虑 $x \in \mathbb{R}$，设其位于 $[m\pi,(m+1)\pi]$ 中。于是 $h(x) \geq h(m\pi) = (m+2n)\pi \geq x+\pi$，因此 $[x, \tilde{h}x]$ 在 $\mathbb{S}^1$ 中的投影不是真凸的。□

4.3. 全测地爆破。 我们的目标是将射影锥流形的奇点替换为全测地边界分支。这并非总是可行。我们描述一族管，使得这一过程能够实施。

定义 4.10（特殊管）。考虑一个整体单值化属于 Aut(B)、由以下元素生成的管

$$g = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & C \\ 0 & \mu^{(d-1)/2}\widetilde{B} \end{pmatrix}$$

其中 $\mu \geq 1$。令 $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 为 $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的投影。

当且仅当满足以下条件时，该管称为特殊

- 它在 $\mathbb{S}^d$ 中可一致化（这意味着 B 是双曲的或抛物型的）。
- $\mu^{(d-1)/2}B$ 的所有特征值都大于 μ^{-1}。

后者等价于

$$\mu^{d+1} - \mu^{(d+1)/2} \operatorname{tr} B + 1 > 0. \tag{4.1}$$

注意，上述结论意味着 $\mu > 1$。因此，在管的整体单值化的两个生成元中，只有一个满足这一性质。我们称这样的生成元为特殊生成元。

继续讨论之前，我们先作如下简单观察。

注记 4.11。注意，对于任意 $g \in$Aut(B)，如果 g 保留B的一个扇形 S，那么它会保留该扇形的每一条墙。换言之，定义该扇形的 $\widetilde{\mathbb{S}}^1$ 中的区间 I 的端点都是 g的不动点。

如果扇形 S 足够小，更确切地说，如果 I 投影到 $\mathbb{S}^1$ 的一个凸真区间（允许半圆），那么 g 在 I 的内部适当不连续地作用，因此端点 H^+ 中的一个在 I 中是吸引的（对任意 $H \in I$ 和 $n \to \infty$），另一个在 I 中是排斥的（对任意 $H \in I$ 和 $n \to -\infty$）。注意，如果 I 是半圆，那么 H^+ 在 $\mathbb{S}^1$ 中不是吸引不动点。

对应的墙也采用相同的术语。

下一个命题描述特殊管的爆破。

命题 4.12。 考虑一个特殊管 $T \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$，其光滑部分为 T，特殊生成元为 g，并采用定义*4.10*中的记号。根据命题 *4.7*，$T \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 是一个由 $g\mathbb{Z}$ 对扇形 $\tilde{T} \sqcup \mathbb{S}^{d-2} \subset \mathbb{S}^d$取商得到的空间。

令 H^+、H^- 为 g-不变的吸引墙和排斥墙T（见注 *4.11*）。注意，H^+ 包含一个不动点 $x^+ \in \mathbb{S}^d$，它是 g的对应于 g最高特征值的不动点。于是：

(1) $g\mathbb{Z}$ 在其上自由作用且适当不连续地作用

$$\widetilde{T} \sqcup \left(H^+ \smallsetminus (\mathbb{S}^{d-2} \cup \{x^+\}) \right).$$

(2) 商空间 T 是一个带有全测地边界的紧致射影流形，其内部与光滑部分 T同构，且该同构可延拓为一个连续的满射 $\bar{T} \to T \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$。
(3) 每个管状区域同构 $T \sqcup \mathbb{S}^{d-2} \to T' \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 都可延拓为带有全测地边界 $T \to T'$的射影流形之间的同构。

证明。 **性质（1）**。令

$$\bar{S} := \widetilde{T} \sqcup \left(H^+ \smallsetminus (\mathbb{S}^{d-2} \cup \{x^+\}) \right).$$

注意，关于特殊管整体单值化的假设意味着，存在一个固定 $\mathbb{R}^{d-1}$ 的基变换，使得 g 可表示为如下形式的矩阵

$$g = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & & \\ & \mu^{(d-1)/2}\lambda & \\ & & \mu^{(d-1)/2}/\lambda \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & & \\ & \mu^{(d-1)/2} & 1 \\ & & \mu^{(d-1)/2} \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda > 1/\lambda > 1/\mu$ 或 $\mu > 1$。第一种情况对应于 B 为双曲型，而第二种情况对应于 B 为抛物型。注意， $x^+ = [e_d]$ 和H^+是张成空间 Span$\{e_1, \cdots, e_d\}$中的一个半超球面。

现在证明该作用在 S 上是适当不连续的。

在 B 为双曲的情形下，通过初等计算即可证明， g在空间 $\mathbb{S}^d \smallsetminus$(张成空间$\{e_1, \cdots, e_{d-1}, e_{d+1}\}$) $\cup \{\pm[e_d]\}$) 上的作用是适当不连续的。

我们给出一个也适用于抛物型情形的更一般论证：考虑一个收敛到 $x \in S$ 的序列 $x_n \in T$，以及一个趋于 $k = \pm\infty$ 的整数序列k_n。我们必须证明， $g^{k_n} x_n$ 会离开 S 中的每个紧致集。根据 $k = +\infty$ 或 $-\infty$, 以及 x 是位于 T 还是 H^+，共有四种情形。

令 $H_n \in \mathbb{S}^1$ 为 x_n的投影，将其视为包含$\mathbb{S}^{d-2}$且收敛到 H的半超球面。令 $C \subset \mathbb{S}^d$ 为与 $\mathbb{S}^{d-2}$互补的 g不变 1-球面。

（1）如果 $k = \infty$ 和 $x \in H^+$，则不难验证， $g^{k_n} H_n$ 收敛于 H^+, 而 $g^{k_n} x_n$ 聚积于 $H^+ \cap C = \{x^+\}$。（2）如果 $k = \infty$ 和 $x \in \widetilde{T}$，则 $g^{k_n} x_n$ 收敛于 x^+。（3）如果 $k = -\infty$ 和 $x \in H^+$，则 $g^{k_n} x_n$ 收敛于从 x^+ 看向 $\mathbb{S}^{d-2}$ 上 x 的立体投影。（4）如果 $k = -\infty$ 和 $x \in \widetilde{T}$，则 $g^{k_n} H_n$ 收敛于 H^-，而 $g^{k_n} x_n$ 聚积于 H^-。

至此，作用的适当性证明结束。

性质（2）。投影 $\bar{T} \to T \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 通过对映射 $\bar{S} \to \widetilde{T} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 进行下降构造得到；该映射将每个 $x \in H^+$ 映射到其在 $\mathbb{S}^{d-2}$ 视角下的立体投影 x^+。为证明所得映射是~连续的，可以验证：对于收敛于 $x_n \in T$ 的任意序列$x \in H^+ \smallsetminus (\mathbb{S}^{d-2} \cup \{x^+\})$，其投影为 $H_n \in \mathbb{S}^1$，满足 k_n 的整数序列 g^{k_n} 将 x_n 带回到 $\widetilde{T} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$ 的紧基本域中，并且 $-\infty$收敛于 $-\infty$，然后应用上面的点（3）即可。

性质（3）。最后，考虑一个管状区域同构 $T \sqcup \mathbb{S}^{d-2} \to T' \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$。正如我们在命题 4.7的证明中所见，所诱导的射影~ ~同构 $T \subset \mathbf{B} \to T' \subset \mathbf{B}$ 是元素 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ ~的限制。最后，只需验证 ϕ 将 T~的吸引壁映射到 T'的吸引壁。□

定义 4.13（全测地爆破）。沿用命题 4.12中的记号，π： $\bar{T} \to T \cup \mathbb{S}^{d-2}$ 称为全测地爆破，属于 $T \cup \mathbb{S}^{d-2}$。

带有特殊奇点的锥流形的全测地爆破，是在管状区域的坐标图中对奇异轨迹的每个分支进行局部爆破而得到的，并要求坐标图之间的变换是管的自同构。根据命题 4.12，由于爆破在自同构下保持不变，这一过程与坐标图的选取无关。

5. Tessellations of convex domains

本节的关键结果是命题5.1。该命题给出了若干条件，使凸瓦片的并具有可均匀化性和凸性。

我们将在第7.1节看到，这一结果可用于证明真凸射影流形粘合后的流形具有可均匀化性和凸性。原因在于，真凸射影流形粘合后的万有覆盖，可以描述为这些凸射影流形的万有覆盖的粘合。

这一现象在第 2 节和图 5和6中有所展示。

5.1. 局部到整体凸性命题。

现在陈述本节的关键结果，该结果基于 Vinberg 的一个想法 [65, §3], 由 Benoist 重新探讨 [12, §1。5]。

命题 5.1。设 $\mathcal{G}$ 是一个连通图，其顶点集为 $\mathcal{V}$，边集为 $\mathcal{E}$。假设每个顶点 $v \in \mathcal{V}$ 都关联一个具有非空内部的闭凸子集$D_v \subset \mathbb{S}^d$ 。并假设：

(1) $F_e := D_v \cap D_w$ 是 D_v 的余维1 面，并且对于任意边$e = [v, w] \in \mathcal{E}$， D_w 都满足： ∂F_e 中的每个点都包含在 $\mathbb{S}^d$ 的某个半空间的边界上，且该半空间包含 $D_v \cup D_w$。

(2) 对于任意路径 $p=(v_1,v_2,\dots,v_n)\subset\mathcal{G}$，若对于每个 i，$F_p:=D_{v_1}\cap\cdots\cap D_{v_n}$都是 D_{v_i} 的余维2 面，则存在 $\mathbb{S}^d$ 的一个半空间，该半空间包含 $D_{v_1}\sqcup\cdots\sqcup D_{v_n}$，且其边界包含$F_p$。

令 $\sim$ 为 $\bigsqcup_{v\in\mathcal{V}}D_v\times\{v\}$ 上满足以下条件的最小等价关系：当 v 和 w 相邻且 $x=y$ 时，x、v（$\sim(y$、$w)$）。记商空间为 X。则自然投影映射

$$\pi:X\to\mathbb{S}^d$$

是单射，且其像为凸集。

命题 5.1 的证明推迟到第 5.2 节。

推论 5.2。 在命题 *5.1*的设定下，图 $\mathcal{G}$ 是一棵树。

证明。反设存在一个非平凡的环 $(v_1,\dots,v_n)\subset\mathcal{G}$，其中 $v_n=v_1$。令 $\mathcal{G}'$ 为顶点为 $1,\dots,n$ 的图，并且对每个 $1\le i<n$，从 i 到 $i+1$ 连一条边。对每个顶点 i，关联凸集 $D_i:=D_{v_i}$。可以验证，$\mathcal{G}'$ 仍满足命题 5.1 的假设。然而，显然 $\bigsqcup_{1\le i\le n}D_i\times\{i\}/_\sim\to\mathbb{S}^d$ 不是单射，因为 D_1 的内点 $x=D_n$ 的内点是 $(x,1)$ 和 (x,n) 的像，而这两者在 $\sim$ 下并不等价。□

定义 5.3 (粘合工具包)。 $(\mathcal{G},(D_v)_{v\in\mathcal{V}})$ 的数据若满足命题 5.1 的条件 1 和 2，则称为粘合工具包。为简化记号，我们将 $X=\bigsqcup_{v\in\mathcal{V}}D_v\times\{v\}/_\sim$ 与其在 π下的像等同起来。此外，命题 5.1 表明，粘合工具包由凸集族 $\{D_v\}_{v\in\mathcal{V}}$决定。因此，我们将每个顶点 $v\in\mathcal{V}$与其对应的凸集 D_v等同起来。

定义 5.4 (胞腔、墙、分层)。 形如 D_v 且满足$v\in\mathcal{V}$（分别地，形如 $D_v\cap D_w$ 且满足 $v,\ w\in\mathcal{V}$ 相邻；分别地，形如 $\cap_{v\in A}D_v$ 且满足 $A\subset\mathcal{V}$大小至少为 2）的凸集称为胞腔 （分别称为墙、分层）。余维为 2 的层称为角。

注记 5.5。 在命题 5.1的证明中，将证明对于任意测地线（D_1，……，D_n）$\subset\mathcal{G}$以及任意一对（x，y）$\in D_1\times D_n$，存在一条线段$[x,y]$，它依次经过 D_1，……，D_n，也就是说，存在按此顺序排列的x_1，……，$x_{n-1}\in[x,y]$，使得对于任意 $x_i\in D_i\cap D_{i+1}$，$1\le i\le n$。

注记 5.6。 注意，命题 5.1 有如下推论。考虑两个闭凸集 D，$D'\subset\mathbb{S}^d$，它们交于一个余维 1 面$F=D\cap D'$。那么，$D\cup D'$ 是凸的，当且仅当 ∂F 中的每一点都位于 $\mathbb{S}^d$ 的某个半空间的边界上，而该半空间包含 $D\cup D'$。

5.2. **命题 5.1 的证明**。 本节将阐述 Vinberg 的论证。粗略地说，只要沿余维 1 面和余维 2 面具有局部凸性，就足以证明凸瓦片之并的凸性。

命题 5.1 的证明。我们称 线段 为子集 $s \subset X$，若 π 在 s 上的限制是单射，且 $\pi(s)$ 是 $\mathbb{S}^d$的一条线段。为了证明 π 是单射且具有凸像，只需证明 X 中的每一对点都可以用一条线段连接。

对于所有的 $v \in \mathcal{V}$ 和 $x \in D_v$（分别地，$A \subset D_v$），我们将 $x|v$（分别地，$A|v$）记作从 $(x,\ v)$（分别地，$A \times \{v\}$）到 X 中的投影。

令 $X' \subset X$ 为 $\bigsqcup_{v\in\mathcal{V}}$ 在 $\mathrm{int}(D_v) \times \{v\} \sqcup \bigsqcup_{e\in\mathcal{E}} \mathrm{int}(F_e) \times e$ 上的投影。如果 X 赋予商拓扑，则

事实 5.7。 π 是一个连续映射，X' 是一个开子集，并且将 π 限制到 X' 所得的映射是一个局部同胚。

对任意路径 $p = (v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots,\ v_n) \subset \mathcal{G}$，记 $F_p := D_{v_1} \cap \cdots \cap D_{v_n}$。

固定一条路径 $p = (v_1,\ v_2、\ \ldots\ldots、\ v_n) \subset \mathcal{G}$ 并令 $D_i := D_{v_i}$ 对每个 i。记 S_p 为点对的集合 $(x,\ y) \in D_1 \times D_n$，其中 $x|v_1$ 与 $y|v_n$ 可以通过 X 的线段依次经过 $D_1|v_1$、$D_2|v_2$、……、$D_n|v_n$连接（见注记5.5）。

事实 5.8。 S_p 是 $D_1 \times D_n$的闭子集。

记 G_p 为点对的集合 $(x,\ y) \in$ 的内部D_1的内部D_n，满足：$x \neq -y$ 且对于任意满足 F_q余维至少为 3 的子路径 $q \subset p$，张成空间 $\mathrm{Span}(x,\ y) \cap F_q = \emptyset$。

事实 5.9。 G_p 是$\mathrm{int}(D_1) \times \mathrm{int}(D_n)$的开、稠密且连通的子集。

现在进入主要环节，它利用了假设（1）和（2）。记 $F_i = D_i \cap D_{i+1}$ 对任意 $1 \leq i < n$。

引理 5.10。对于任意 $(x, y) \in G_p$，X 中从 $x|v_1$ 到 $y|v_n$并依次经过 $D_1|v_1$、……、$D_n|v_n$ 的任意线段都包含于

$$\mathrm{int}(D_1)|v_1 \cup \mathrm{int}(F_1)|v_1 \cup \mathrm{int}(D_2)|v_2 \cup \cdots \cup \mathrm{int}(F_{n-1})|v_{n-1} \cup \mathrm{int}(D_n)|v_n.$$

证明。设 s 是从 $x|v_1$ 到 $y|v_n$ 并依次经过$D_1|v_1$、……、$D_n|v_n$的一条线段。按此顺序取 $z_1|v_1$、……、$z_{n-1}|v_{n-1} \in s$，使得对任意 $1 \leq i < n$都有 $z_i|v_i = z_i|v_{i+1} \in F_i|v_i$。只需证明对任意 $1 \leq i < n$，$z_i \in \mathrm{int}(F_i)$。反设对于某个 i，有 $z_i \in \partial F_i$。不妨设对于任意 $1 \leq j < i$，$z_j \in \mathrm{int}(F_j)$。取$a \in]z_{i-1},\ z_i[\subset \mathrm{int}(D_i)$，其中可能需要使用记号 $z_0 := x$。另设$z_n := y$。

若 $z_i \neq z_{i+1}$，则根据假设（1），我们可以找到一个闭半空间$H \subset \mathbb{S}^d$，它包含 $D_i \cup D_{i+1}$，且其边界包含 z_i。我们有$z_{i+1} \in H$ 且 $a \in \mathrm{int}(H)$，因为 $a \in \mathrm{int}(D_i)$。因此 $z_i \in]a,\ z_{i+1}[\subset \mathrm{int}(H)$，这就产生了矛盾。

因此，$z_i = z_{i+1}$。设 $i+1 < j \leq n$ 满足 $z_i = z_{i+1} = \cdots = z_{j-1} \neq z_j$。令 $q = (v_i,\ v_{i+1},\ \ldots\ldots,\ v_{j-1}) \subset p$。根据定义，$z_i \in F_q$，其余维为 2，因为 $(x,\ y) \in G_p$。根据假设 (2)，存在一个闭

半空间 $H \subset \mathbb{S}^d$，它包含 $D_i \cup \cdots \cup D_{j-1}$，且其边界包含 z_i。我们有 $z_j \in D_{j-1} \subset H$，并且 int($D_i$) $\subset$ int(H)，因此$z_i \in]a, z_j[\subset$ int(H)，这就产生了矛盾。□

事实5.7、5.8 和 5.9，以及引理5.10具有如下推论。

推论 5.11。 $G_p \cap S_p$ 是 G_p中的开闭集。因此，如果它非空，则$S_p = D_1 \times D_n$。

我们证明：如果 $G_p \cap S_p$ 非空，那么对于任意满足 $v_{n+1} \neq v_{n-1}$的延拓 $q = (p, v_{n+1})$， $G_q \cap S_q$ 也非空。

令 $F_n := D_n \cap D_{n+1}$。由维数的原因，我们可以找到（x， y） $\in$int（D_1）$\times$int（F_n），使得 $x \neq -y$，并且对于满足$F_{q'}$ 的任意子路径$q' \subset q$，Span（x，y）$\cap F_{q'} = \emptyset$，其中$F_{q'}$ 的余维至少为 3；同时，Span（x， y）与 F_n横截。于是，从 $x|v_1$ 到 $y|v_n$ 依次经过$D_1|v_1$、.....、 $D_n|v_n$ 的任意线段（由推论 5.11 可知其存在）都可以延拓到点$y'|v_{n+1} \in$ int（D_{n+1}）$|v_{n+1}$，使得 $x \neq -y'$。容易验证（x， y'） $\in S_q \cap G_q$，因此它非空。

□

5.3. **的几何** X。本节中，我们固定一个粘合工具包$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，其中 $X = \bigcup_{D \in \mathcal{V}} D$。

现在我们来描述凸集 X的几何。具体而言，我们将边界分层与胞腔的形状联系起来。事实证明，面有三种不同类型：

(i) 瓦片的某些面也是 X的面。(ii) 共享公共余维 2 面的瓦片扇的极限。(iii) 包含无穷多个两两不相交墙的瓦片望远镜式序列的极限。

我们将在本节稍后定义它们，并在周期性的附加假设下详细分析后两种类型；例如，当铺砌在一个余紧地作用于 X上的群 Γ 作用下保持不变时，就满足这一假设。

5.3.1. 的内部 X。先从 X的内部开始。

命题 5.12。的内部 X 是

$$\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \text{int}(D_v) \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \text{int}(F_e).$$

证明。 当 $\mathcal{G}$ 为有限集时显然。在一般情况下，将 $\mathcal{G}$ 写成有限子图递增序列 $\mathcal{G}_n$ 的并，并对每个 n 令 $X_n := \bigcup_{v \in \mathcal{V}_n} D_v$。由于 int($X$) $= \bigcup_n$int(X_n)，证明完毕。□

推论 5.13。 X 中任何与一面墙有非平凡交集的线段，都必须包含在该墙内。

证明。 考虑一条线段 s 与一面闭墙有非平凡交集 W。显然$^{-}$， $s \subset \mathrm{Span}(W)$。根据命题 5.12， $\partial W \subset \partial X$因此 $\mathrm{Span}(W) \cap X = W$，故 $s \subset W$。 □

现在我们转而讨论边界 ∂X。

5.3.2. 中胞腔的边界 ∂X。 我们首先证明， X 的某些面与瓦片的面相对应。

引理 5.14。 考虑一个胞腔 $D \in \mathcal{V}$。那么

- $F \cap D$ 是 D 的闭面，对于 X 的任意闭面 F 都成立$^{-}$。
- 如果 F 是 D 的一个闭面，且不与任何闭墙相交，那么$^{-}$它也是 X的一个闭面。

证明。 第一条显然成立。

考虑 D 的一个闭面 F，它不与任何闭墙相交。令 F'为包含 F的 $\bar{X}$的闭面。注意到 $F' \cap D = F$。反设存在 $x \in F' \smallsetminus F$。取 $p \in \mathrm{int}(D)$。根据命题 5.12， $[p, x[$ 与 ∂D 在某个 D的闭墙W的相对内部相交。由点 y 构成的非空子集 $A \subset F'$满足 $[p, y]$与 W 相交；显然，该子集是闭的，且与 F不相交。由 F'的连通性，要完成证明，只需验证 A 是开集。特别地，只需验证对于任意 $y \in A$， $[p, y]$ 与 $\mathrm{int}(W)$相交。若非如此，根据命题 5.12， $[p, y]$ 将在 y 处与 ∂W 相交，但这样一来y 就会属于 D，进而属于 $W \cap F$，这显然矛盾。□

推论 5.15. 考虑两个不同的相邻胞腔 D、 $D' \in \mathcal{V}$。

- 如果 x 是 ∂D 的一个极点，且不在闭墙上，那么它也是 ∂X 中的极点。
- 如果 $x \in D \cap D'$ 是 $D \cup D'$ 的一个极点，且不在闭分层上，那么它也是 ∂X 中的极点。

证明。 第一条结论直接应用引理5.14。

第二条结论是第一条结论的应用。事实上，将 $\mathcal{G}$ 商空间化，并以单个顶点 $D \cup D'$ 替换 D 和 D' 后得到的树 $\mathcal{G}'$ 也给出一个粘合工具包，其中 $D \cap D'$ 不是墙。□

最后，为了识别 $\partial X \smallsetminus X$ 的 $\mathcal{C}^1$ 点，我们可以使用以下结果。

事实 5.16. 考虑两个不同的相邻胞腔 $D, D' \in \mathcal{V}$。

- 如果 x 是 ∂D 闭墙之外的一个 $\mathcal{C}^1$ 点，那么它也 $\mathcal{C}^1$ 在 ∂X中。
- 如果 $x \in D \cap D'$ 是 $\partial (D \cup D')$ 中的一个 $\mathcal{C}^1$ 点，那么它也 $\mathcal{C}^1$ 在 ∂X中。

证明。 这是一个直接推论，基于一个众所周知的观察：对于任意两个嵌套的适当凸开集 $\Omega \subset \Omega'$ 和 $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'$，如果 x 在 $\partial\Omega$ 中，则它也在 $\partial\Omega'$ 中。□

5.3.3. 在 ∂X 胞腔边界的补集中。接下来，我们考察边界中并非来自瓦片的面的部分。它自然源自瓦片序列的聚点；我们将这些点恰当地视为图 $\mathcal{G}$ 无穷远边界上的点。

回想一下， $\mathcal{G}$ 是一棵树，因此它有一个自然的无穷远边界 $\partial_\infty \mathcal{V}$：由射线按等价关系构成的集合，若两条射线在某个时刻之后重合，则它们等价。我们设 $\mathcal{V} := \mathcal{V} \sqcup \partial_\infty \mathcal{V}$，这是一个具有自然拓扑和凸性概念的空间。

每个点 $\xi \in \partial_\infty \mathcal{V}$ 都对应一个无穷远处的胞腔。

引理 5.17。 考虑一条射线 $\xi = \{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \partial_\infty \mathcal{V}$。紧凸集序列 D_n 和 $D_n \cap D_{n+1}$ 都收敛到同一个闭凸子集 $D(\xi) \subset \partial X$，称为无穷远处的胞腔。

证明。 令 K 为序列 $x_n \in D_n$的聚点集合。我们需要验证， K 中的任意点也是某个序列 $y_n \in D_n \cap D_{n+1}$的极限。考虑 $x \in K$，它是 x_k 的极限，其中 $x_k \in \text{int}(D_{n_k})$ 且 n_k递增。对每个 k，考虑线段 $[x_k, x_{k+1}]$ 与依次 $D_{n_k} \cap D_{n_k+1}$、……、 $D_{n_{k+1}-1} \cap D_{n_{k+1}}$的交点 y_{n_k}、……、 $y_{n_{k+1}-1}$。序列 y_n 收敛到 x，这正是所需。□

注记 5.18。 需要提醒的是：

- 可能存在这样的情况： $D(\xi) \subset X$。
- 可能存在这样的情况： $D(\xi) = D(\eta)$，对于不同的 ξ， $\eta \in \partial_\infty \mathcal{V}$。
- 也可能出现这样的情况： $D(\xi)$ 不是 X的面。

命题 5.19. 我们有：

(1) 对于每个点 $x \in X \setminus X$ ，都存在唯一的 $\xi \in \partial_\infty \mathcal{V}$ 使得$x \in D(\xi)$。*(2)* 考虑一条测地射线 $\xi = \{D_n\}n \in \mathbb{N} \in \partial_\infty \mathcal{V}$，那么存在 N使得

$$D(\xi) \cap X = \bigcap_{n\geq N} D_n.$$

此外， $D(\xi) \cap X$ 是 $D(\xi)$的一个闭面。

证明。 **性质（1）**。固定 $D \in \mathcal{V}$。取 $x \in X \setminus X$ 以及由 U_n 组成的（递减）真凸邻域的一个可数基，其中这些邻域是 x 在 $\mathbb{S}^d$中的邻域。对于每个 n，令 $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}$ 为所有与 U_n相交的顶点所组成的集合。由于 U_n 是真凸的， $\mathcal{V}_n$ 是 $\mathcal{V}$的凸子集。令 D_n 为 D 在 $\mathcal{V}_n$中的最近点投影，且该投影位于 $\mathcal{G}$ 中。由于 $\mathcal{V}_n$ 非递增， D_n 必位于从 D出发的 $\mathcal{G}$ 的一条测地射线上。对每个 n选取 $x_n \in D_n \cap U_n$ 。于是 x_n 趋于x。 $x \notin X$ 这一事实意味着， D_n 在某个时刻之后并非常值，因此，包含 D_n 的测地射线是无限的，并表示某个$\xi \in \partial_\infty \mathcal{V}$，其胞腔 $D(\xi)$包含 x。此外，如果 D'_k 在 x 上聚积，那么对于某个发散序列 n_k，有$D'_k \in \mathcal{V}_{n_k}$，且 D'_k 收敛到 ξ。

性质（2）。集合 $\bigcap_{n\geq N} D_n$ 的序列按包含关系非递减，并且在某个时刻之后保持不变。因此，只需验证任意$x \in D(\xi) \cap X$ 都位于某个 N中。取包含 x 的 $D \in \mathcal{V}$，并取$x_n \in D_n$ 收敛到 x。存在 N，使得对于每个 $n \geq m \geq N$， D_m 都位于从 D 到 D_n 的测地线段上。对于所有 $n \geq m \geq N$，取$y_{n,\,m} \in [x, x_n] \cap D_m$。注意到 $y_{n,\,m} \in D_m$ 对每个 m都收敛到 x，因此 $x \in D_m$。

反设 $D(\xi) \cap X$ 不是 $D(\xi)$的一个面，即存在 $x, y \in D(\xi) \setminus X$ 以及 $z \in]x, y[\cap D_n$，其中某个 n成立。取 $p \in \operatorname{int}(D_n)$。根据注 5.5，任意 $q \in \bigcup_{k>n} D_k$ 都使 $[p, q]$ 与 $D_n \cap D_{n+1}$ 相交。取极限后，$[p, x]$（分别是 $[p, y]$）与 $D_n \cap D_{n+1}$ 相交于 $x' \neq x$（分别是 $y' \neq y$）。根据命题 5.12，这两个交点位于$D_n \cap D_{n+1}$的相对内部。$D_n \cap D_{n+1}$ 的张成空间与由 p、x、y张成的平面相交成一条直线，该直线经过 x'、y'、z。但这三点不共线，矛盾。□

正如我们已经观察到的，瓦片序列大致可分为两种不同类型：瓦片扇和瓦片望远镜式序列。现在我们将详细分析这两种情况。

5.4. **瓦片扇**。非正式地说，瓦片扇是由共享一个公共余维 2 面的连续瓦片构成的无限序列。我们假设该序列在某个特殊射影变换下具有周期性，并描述这种瓦片扇所对应的无穷远处的胞腔。见图4。

5.4.1. 重新审视条件 *2* 。首先，我们讨论周期瓦片扇的凸性判据。为此，我们在这一特殊情形下考察命题 2中的条件（5.1）。

命题 5.20。设$(D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是由$\mathbb{S}^d$ 中的闭凸子集构成的序列，且这些子集具有非空内部，使得：
(a) 它们都共享一个张成 $\mathbb{S}^{d-2} \subset \mathbb{S}^d$的余维2 面 E 。***(b)*** 任意两个连续的区域 D_n 和 D_{n+1} 沿着一个余维 ***1*** 面 F_n相交，其中 $F_n \neq F_{n-1}$。

对于每个 n，考虑 D_n 在圆 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^{d+1}/\mathbb{R}^{d-1}) = \mathbb{S}^1$ 上的投影 D'_n。那么，$\mathbb{S}^{d-2}$ 包含在包含$\bigcup_n D_n$ 的 $\mathbb{S}^d$ 的某个半空间的边界中，当且仅当 $\Omega := \bigcup_n D'_n$ 包含在一个半圆内。

现在假设存在 $g \in$ 一般线性群$_{d+1}(\mathbb{R})$ 和 $T > 0$，使得对每个 n 都有 $gD_{n+T} = D_n$。令 $g' \in$一般线性群$(\mathbb{R}^{d+1}/\mathbb{R}^{d-1})$ 为作用在$\mathbb{S}^1$上的诱导变换。那么，Ω 包含在一个半圆内，当且仅当

(i) $|\det(g')|^{-1/2} g' \neq \mathbb{I}_2$ 和 $\operatorname{tr}(|\det(g')|^{-1/2} g') \geq 2$。
(ii) $D'_0 \cup \cdots \cup D'_{T-1}$ 不与 g'的任何特征直线相交。

证明。 $\mathbb{S}^{d-2}$ 包含在 $\mathbb{S}^d$的某个半空间的边界中，且该半空间包含 $\bigcup_n D_n$ ，当且仅当 $\Omega' := \bigcup_n D'_n$ 包含在某个半圆内；这一点显然。

假设 Ω' 包含于一个半圆中（它是 $\mathbb{S}^1$ 的一个真、开且凸的凸子集）。

我们来证明性质 (i)+(ii)。由于 Ω' 具有 g'-不变性，并且没有$\mathrm{tr}(h) < 2$ 的变换 $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 会保持 $\mathbb{S}^1$ 的一个真凸子集，因此必有 $\mathrm{tr}(|\det(g')|^{-1/2}g') \geq 2$。由于 $g'D'_n = D'_{n+T}$，我们还有$|\det(g')|^{-1/2}g' \neq \mathbb{I}_2$ ，并且 Ω' 不包含 g' 的不动点，即其特征直线。

现在假设性质 (i)、(ii) 成立。

证明 Ω' 包含在一个半圆内。由于 $\mathrm{tr}(|\det(g')|^{-1/2}g') \geq 2$， g' 的特征线要么确定一个半圆，要么确定一条唯一的凸线段。由于 Ω' 不与 g' 的任何特征线相交，且 Ω' 是连通的，因此它必定包含在 $\mathbb{S}^1$ 去掉 g'的特征线后所得的某个分支中。□

注记 5.21。 在命题5.20的设定下，若 Ω 包含在一个半圆内，则：

- 若 $\mathrm{tr}(|\det(g')|^{-1/2}g') = 2$，则 Ω 是由 g' 的唯一特征直线界定的两个半圆之一。
- 若 $\mathrm{tr}(|\det(g')|^{-1/2}g') > 2$，则 Ω 是由 g' 的两条特征线界定的四个象限之一。

5.4.2. 瓦片扇的无穷远处的胞腔。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}、\mathcal{E})$ 是一个具有 $X = \bigcup_{D\in\mathcal{V}} D$ 的粘合工具包。

取 $\mu > 1$ 和 $\lambda \geq 1$ ，并根据 $\lambda > 1$ 或 $\lambda = 1$，令其为

$$g := \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\mu^{\frac{d-1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1}\mu^{\frac{d-1}{2}} \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{\frac{d-1}{2}} & 1 \\ 0 & 0 & \mu^{\frac{d-1}{2}} \end{pmatrix}.$$

下面描述瓦片扇的无穷远处的胞腔：

命题 5.22。 设 $\mathcal{S}$ 是一个角。假设：

- $\mathcal{S} \subset \mathbb{S}^{d-2}$。
- 满足 $\mathcal{S} \subset D$ 的 $D \in \mathcal{V}$ 集合是一条双无限路径 $(D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$。
- $gD_n = D_{n+m}$ 对于任意 n，存在某个 $m > 0$。

令 $\xi : = \{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \partial_\infty\mathcal{V}$。那么存在 $\alpha, \beta \in \{\pm 1\}$ ，使得：

(1) D（ξ）是 $\mathcal{S}$ 的凸包，且具有 $\alpha e_d\mathbb{R}_+$。*(2)* 如果 X 是真凸的或 $\lambda > 1$，那么 D（ξ）是 X 的一个闭面。*(3)* 如果 $\lambda > 1$ ，那么 X 包含于 D（ξ）与 $\beta e_{d+1}\mathbb{R}_+$ 的凸包中。

证明。 **性质（1）**。对于任意一般的 $x \in \mathbb{S}^d$，序列 $g^n x$ 趋于$e_d\mathbb{R}_+$ 或 $-e_d\mathbb{R}_+$。我们可以假设，对于某个 $x \in$ ，极限为 $e_d\mathbb{R}_+$ ，且 $e_d\mathbb{R}_+$ 属于 D_0的内部。

这意味着 $\mathcal{S}$ 与 $e_d\mathbb{R}_+$ 的凸包包含于 $D(\xi)$ 中，因此 $\mathbb{S}^{d-1}$ 是包含 $D(\xi)$ 的 X 的支撑超平面。

根据命题 5.19的性质（2）， $\mathcal{S} \subset \mathbb{S}^{d-2}$ 是 $D(\xi)$ 的一个闭面。因此$\mathbb{S}^{d-2} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 是 $D(\xi)$ 的一个支撑超平面，它位于由 $\mathbb{S}^{d-2}$ 所界定且包含 $e_d\mathbb{R}_+$的 $\mathbb{S}^{d-1}$ 闭半空间

对于任意 $x \in D(\xi) \setminus \{e_d\mathbb{R}_+\}$， $g^{-n}x$的极限 y属于 $\mathbb{S}^{d-2} \cap D(\xi) = \mathcal{S}$（因为显然 $D(\xi)$ 是 g 不变的），并且 $x \in [y, e_d\mathbb{R}_+[$。因此， $D(\xi)$ 是由 $\mathcal{S}$ 和 $e_d\mathbb{R}_+$ 构成的凸包。

性质（2）。假设存在 $x \in \mathbb{S}^{d-1} \setminus D(\xi)$，位于¯某个胞腔 $D(v)$ 中，且满足 $v \in \mathcal{V} \setminus \{\xi\}$。我们来证明 X 不是真凸的，并且 $\lambda = 1$。设 $\eta = \{D_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \partial_\infty\mathcal{V}$ 和 $X' := \bigcup_n D_n$，使得 $X' = X' \cup D(\xi) \cup D(\eta)$。取 $y \in \text{int}(\mathcal{S})$。

¯我们可以假设 $x \in X'$。事实上，若非如此，则考虑¯ v 在 $\mathcal{V}$中到 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的最近点投影 D_k， 以及 D_k 到 v、位于 $\mathcal{V}$中的一条测地路径（v_m）$_{0\le m\le M}$， 其中 $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。$[y, x]$ 在 D_k 中的最后一个点属于 $D_k \cap D$（v_1），而它与 D（ξ）不相交。因此，我们可以用这个最后的点代替 x。

根据命题 5.12， x 不属于 $\mathbb{S}^{d-2}$。此外， x 不属于 $\text{int}(H)$，否则 $[x, y]$ 将与 $D(\xi) \setminus X$相交，这不可能，因为¯在 $D(\xi) \setminus X$ 中， X 的补集是凸的。

¯因此， $g^n x$ 趋于 $-e_d\mathbb{R}_+$，故属于 X'，因为这个集合是 g-不变的。因此， X 不是真凸的。此外， $\lambda = 1$ 根据命题 5.20。

¯**性质（3）**。最后，我们可以假设 X 包含于由 $\mathbb{S}^d$ 界定且 $\mathbb{S}^{d-1}$ 包含于其中的半空间 $e_{d+1}\mathbb{R}_+$。我们来证明，¯在 $\lambda > 1$的条件下， X 包含于由 K 和$D(\xi)$ 以及 $e_{d+1}\mathbb{R}_+$的凸包中。反设存在 $x \in X \setminus K$。¯首先注意到，根据下文引理5.23 可知。

¯如前所述，取 $v \in \mathcal{V}$ 使得 $x \in D(v)$，即 v 在 $\mathcal{V}$中到 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的最近点投影 D_k，并取一条测地路径$(v_m)_{0\le m\le M}$，它在 $\mathcal{V}$中从 D_k 连接到v，其中 $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。可以找到 $y \in \partial D(\xi) \setminus \partial\mathcal{S}$ 使得 $[x, y[$¯与 K不相交。 $[y, x]$ 在 X'中的最后一点 z属于 $D_k \cap D(v_1)$¯，后者与 $\partial D(\xi) \setminus \partial\mathcal{S}$不相交。因此 $z \neq y$，故 $z \in]y,\ x]$，于是 $z \in X' \setminus K$，这显然荒谬。□

引理 5.23。考虑 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ 和

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

设$\Omega \subset \mathbb{S}^d$ 为一个 g-不变的适当凸开集。则其沿平行于 $[e_{d+1}]$ 的方向在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的投影包含于$\Omega \cap \mathbb{S}^{d-1}$中，而后者是 $\partial\Omega \cap \mathbb{S}^{d-2}$ 与 $[e_d]$的凸包。

证明。 考虑 $x = [x_1, \dots, x_{d+1}] \in \Omega$。若 x 属于Ω或 $\mathbb{S}^{d-1} \setminus \{[e_d]\}$，则对某个 $1 \leq i \leq d-1$有 $x_i \neq 0$。因此在这种情况下，当 n趋于无穷时，$g^{-n}x$ 收敛到$[x_1, \dots, x_{d-1}, 0, 0]$，且该极限必属于$\partial\Omega \cap \mathbb{S}^{d-2}$。这说明 $[x_1, \dots, x_d, 0]$ 属于 $\partial\Omega \cap \mathbb{S}^{d-2}$与 $[e_d]$的凸包。□

5.5. **瓦片望远镜**。 现在我们转向第二类序列，称为瓦片望远镜。通俗地说，瓦片望远镜是由连续瓦片组成的序列 D_n ，其中有无穷多个墙$D_m \cap D_{m+1}$ 两两不相交。

同样，我们将假设满足某些周期性条件，即在射影变换意义下，至多只有有限个（或紧致多个）由四个连续瓦片组成的构形 $D_n, D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+3}$ ，其中墙$D_n \cap D_{n+1}$ 和 $D_{n+1} \cap D_{n+2}$ 不相交。

在这种情况下，$(D_n \cap D_{n+1}$,Ω $D_{n+2} \cap D_{n+3})$构成我们所说的可见三元组。

定义 5.24 （可见三元组）。 一个可见三元组是由（非空）紧致真凸集构成的三元组 (L, K, M)，满足 $L, M \subset K$、 $L \cap M = \emptyset$，并且从 L 到 M 的 K 的任意线段都与 K的内部相交。

瓦片望远镜的无穷远处胞腔的分析，依赖于可见三元组的一种收缩性质，我们现在来讨论它。

5.5.1. 可见三元组的收缩。可见三元组的集合带有豪斯多夫拓扑。若紧子集的序列 $C_n \subset \mathbb{S}^d$ 收敛到紧子集 $C \subset \mathbb{S}^d$，则以下两个条件成立：

- 若序列 $x_{n_j} \in C_{n_j}$ 收敛到 $x \in \mathbb{S}^d$，则 $x \in C$。
- 对于每个 $x \in C$，都存在一个收敛到它的序列 $x_n \in C_n$。

这以一种自然的方式在三元组空间上诱导出豪斯多夫拓扑。

引理 5.25。设 $\mathcal{K}$ 是可见三元组的一个紧集。那么存在 $\lambda > 1$，使得以下结论成立。设有一个真凸开集 Ω、一个点 $x \in \Omega$、两条从 x 出发的 Ω 射线 r、r'、两个超平面 H、H'，以及一个闭凸子集 $K \subset \Omega$ 和 $\bar{}$，满足：

- $(H \cap \Omega \ \bar{K}, \ H' \cap \Omega) \in$ 一般线性群$_{d+1}(\mathbb{R}) \cdot \mathcal{K}$。
- 射线 r （分别为 r'）首先与 $H \cap \Omega$ 交于 y （分别为 y'），随后与 $H' \cap \Omega$交于 z （分别为 z'）。

然后 $d_\Omega(z, z') \geq \lambda d_\Omega(y, y')$。

证明。 我们可以假设， $\mathcal{K}$ 是给定三元组 (L, K, M) 的一个很小的邻域。固定一个包含 K 的仿射图 $\mathcal{A}$，并在其上取欧几里得距离$d_{\mathcal{A}}$。我们可以假设，对于每个 $(L', K', M') \in \mathcal{K}$，该仿射图都包含 K'。

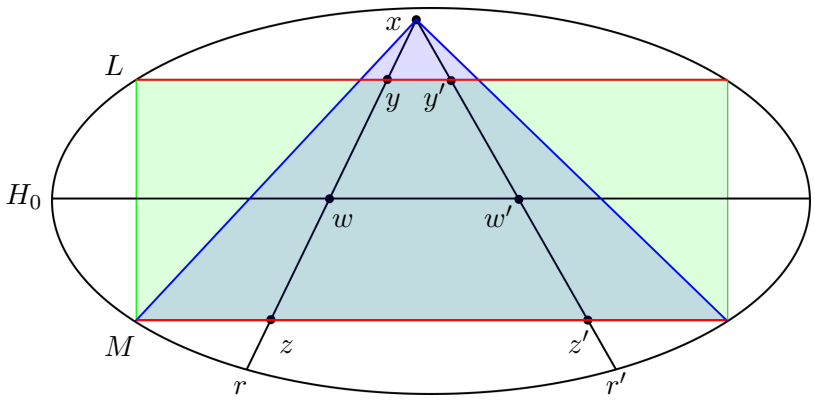


FIGURE 7. 可见三元组的收缩。

令 $H_0 \subset \mathbb{S}^d$ 为分隔 L 和 M 的超平面。我们可以假设，对于每个 $(L', K', M') \in \mathcal{K}$，它都分隔 L' 和 M'。

令 $\epsilon > 0$ 为 $d_{\mathcal{A}}$ 中一点与 $H_0 \cap \partial K'$ 中一点之间的最小距离，其中前者属于 $H_0 \cap \mathrm{Conv}(L', M')$，后者对应于 $(L', K', M') \in \mathcal{K}$；并令 D 为 K' 的最大可能 $d_{\mathcal{A}}$ 直径。根据 [16]（另见 [18, 事实 2.1.3]），存在一个 $\lambda > 1$，它取决于 ϵ 和 D，使得对于任意 $(L', K', M') \in \mathcal{K}$，记 Ω_1（分别记 Ω_2）为 $H_0 \cap \mathrm{Conv}(L', M')$（分别为$H_0 \cap K'$）的相对内部，则对所有 $x, y \in \Omega_1,$，有

$$d_{\Omega_1}(x, y) \geq \lambda d_{\Omega_2}(x, y).$$

考虑一个适当凸开集 Ω、一个点 $x \in \Omega$、从 x出发的 Ω 的两条射线 r，r'、两个超平面 H，H'，以及一个闭凸子集 $K' \subset \bar{\Omega}$，并记 $L' := H \cap \Omega$ 和 $M' := H' \cap \Omega$

- $(L', K', M') \in$ 一般线性群$_{d+1}(\mathbb{R}) \cdot \mathcal{K}$。
- 射线 r（分别为 r'）先与 $\mathrm{int}(L')$ 相交于 y（分别为 y'），随后与 $\mathrm{int}(M')$ 相交于 z（分别为 z'）。

记 Ω_0（分别为 Ω_1，、Ω_2，、Ω_3）为 $H_0 \cap \mathrm{Conv}(x, M')$ 的相对内部（分别为 $H_0 \cap \mathrm{Conv}(L', M')$、$H_0 \cap K'$、$H_0 \cap \Omega$ 的相对内部）。注意到

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3.$$

因此，将 w 和 w' 分别记为 Ω 中 $_0$ 关于 z和 z' 从 x观察到的立体投影，利用注记3.13 可得

$$\begin{aligned} d_\Omega(z, z') = d_{\Omega_0}(w, w') \geq d_{\Omega_1}(w, w') &\geq \lambda d_{\Omega_2}(w, w') \\ &\geq \lambda d_{\Omega_3}(w, w') \geq \lambda d_\Omega(x, x'). \end{aligned}$$ □

5.5.2. 中的可见三元组 X。设 $X = \bigcup_{v \in \mathcal{V}} D_v$ 为如上所述经适当地镶嵌的凸集。现在我们来说明如何在其中找到可见三元组。

假设每个瓦片 D_v 都具有以下性质：

(1) 任意（至少两个）墙的交要么为空，要么是一个角。(2) 任何接触墙的闭真面都包含在某个墙中（该墙可能不同）。(3) 任何余维至少为 2 且接触角的闭真面都包含在某个角中。

我们有如下结论：

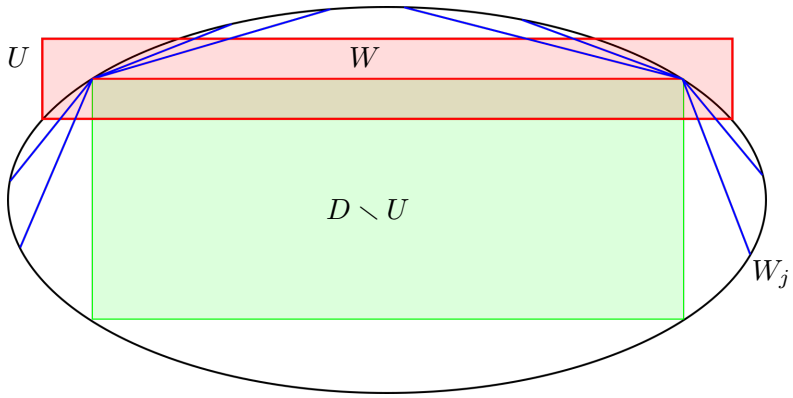


FIGURE 8. X中的可见三元组。

引理 5.26。 设 $D \subset X$ 是一个瓦片。设 W 是 D的一面墙。考虑 $\mathbb{S}^d$ 中的 W 的一个开邻域 U，使得 $D \setminus U$ 是凸的。则：

- 与 W相邻且不包含于 U中的墙 W_1、…、W_n 只有有限多个。
- （W、K、$D \setminus U$）对每个满足内点$(W_j) \subset$ 内点(K) 的凸紧集 $K \subset X$，以及每个 $j \leq n$，都是一个可见三元组。

证明。 与 U相邻但不包含在其中的墙 $W_1, \ldots, W_n$ 只有有限个。事实上，若存在无限序列的这类墙，它们便会聚集到一个与 W 相接触但不包含在其中的闭余维 ≥ 2 面 F 上。根据假设，该面将包含在与 W相邻的墙 W'中。由于 F与角 $W \cap W'$相接触，因此它必定包含在该角中，这就矛盾了。

要完成证明，我们只需证明：任意从 W 到$D \setminus U$ 的线段 s，对某个 i，都会与 int(D) 或 int(W_i) 相交。若 $s \subset \partial D$，则根据假设，它包含在一面与 W 相邻、但不包含在 U中的墙内。因此，对某个 i，有$s \subset W_i$。反设 $s \subset \partial W_i$，则它包含在 D 的一个余维至少为 2、且与 $W \cap W_i$相接触的面中，因而包含在其中。这就矛盾了。□

我们还需要以下技术引理。

引理 5.27。 对于 W 的任意邻域 U，都存在一个更小的邻域 U'，使得 $D \setminus U'$ 包含所有不包含于 U 且与 W 不相邻的墙。

证明。 反设结论不成立，则存在一个无限的墙序列，其极限落在余维≥ 2面 F上，并与W 相交，但不包含于 U中。这与引理5.26的证明中指出的一样，是不可能的。 □

5.5.3. 瓦片望远镜的极点。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个粘合工具包，其中 $X = \bigcup_{D\in\mathcal{V}} D$。

命题 5.28。 假设所有分层的余维均为 *2*，并且存在一个可见三元组的紧集 $\mathcal{K}$，使得以下条件成立：对于任意路径 $\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{V}$，使得 $A \cap B$ 和 $C \cap D$ 不相交，¯存在一个凸紧子集 $K \subset X$，使得

$$(A \cap B, K, C \cap D) \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R}) \cdot \mathcal{K}.$$

那么，任何不与 X 相交的无穷远处的胞腔都是一个极端 $\mathcal{C}^1$ 点。

证明。 考虑射线 $\xi = \{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \partial_\infty\mathcal{V}$，使得 $D(\xi) \cap X = \emptyset$。

我们来证明 $D(\xi)$ 退化为一个点。

反设并非如此。取 $x \in \mathrm{int}(D_0)$ 以及p，$p' \in \mathrm{int}(D(\xi))$，记 r 和 r' 为 Ω 的两条射线：$= \mathrm{int}(X)$，分别从 x 出发并分别终止于 p和 p'。对所有n，k，令 $F_n^k := D_n \cap \cdots \cap D_{n+k}$。令 y_n （分别地，y'_n）表示 r （分别地，r'）与 $\mathrm{int}(F_n^1)$ 的连续交点。

断言 1。 序列 $d_\Omega(y_n, y'_n)$ 非递减，并且有上界 $d_{\mathrm{int}(D(\xi))}(p, p') < \infty$。

断言的证明。 我们先处理单调性：考虑由 P、r、r'张成的二维平面，以及交 $X \cap P$。令 $[a_n, a'_n]$为由 y_n、y'_n 张成的射影直线与 X的交点。注意到我们有 $F_n^1 \cap P = [a_n, a'_n]$，并且根据构造，$F_m^1 \cap P = [a_m, a'_m]$包含于以 x 为顶点、由直线 $[x, a_n]$ 和 $[x, a'_n]$界定的锥内。由 $[a_m, a'_m]$ 张成的直线与该锥的交是更长的线段$[b_m, b'_m]$。根据交比的标准性质，我们得到$[b_m, y_m, y'_m, b'_m] = [a_n, y_n, y'_n, a'_n]$。根据包含下的单调性（见定义 3.13），我们还得到 $[b_m, y_m, y'_m, b'_m] \leq [a_m, y_m, y'_m, a'_m]$。至此，断言中的单调性部分得证。

上界由希尔伯特距离向边界的延拓的半连续性得出（参见定义 3.13）。□

令 $\lambda > 1$ 为引理 5.25中的常数。为了导出矛盾，只需证明以下结论：

断言 2。对于任意 n，存在 $m \geq n$，使得 $d_\Omega(y_m, y'_m) \geq \lambda d_\Omega(y_n, y'_n)$。

断言的证明。取 $n \in \mathbb{N}$。由于 $D(\xi)$ 与 X 不相交，存在$k \geq 2$ 使得 F_{n+1}^k 为空。取其为最小的，这意味着 $F_{n+1}^{k-1} \neq \emptyset$。

若 $k=2$，则 $F_n^3=\emptyset$。令 $m=n$。

如果 $k\geq 3$，那么 $F_{n+1}^{k-1}=F_{n+2}^{k-2}=\cdots=F_{n+k-2}^2$（因为所有分层的余维都是 2），并且 $F_{n+k-2}^3=F_{n+1}^k=\emptyset$。令 $m=n+k-2$。

令 $\mathcal{V}'$ 为包含 D_{m+1} 的 $\mathcal{V}\setminus\{D_m,D_{m+3}\}$ 分支。根据假设，存在一个包含$D_{m+1}\cup D_{m+2}$ 的真凸紧集 $K\subset\bigcup\mathcal{V}'$，使得

$$(D_m\cap D_{m+1},K,D_{m+2}\cap D_{m+3})\in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})\cdot\mathcal{K}.$$

根据引理 5.25，我们得到

$$d_\Omega(y_{m+2},y'_{m+2})\geq\lambda d_\Omega(y_m,y'_m)\geq\lambda d_\Omega(y_n,y'_n).$$

□

断言 3. 点 $D(\xi)$ 是极端的。

¯断言的证明。这直接源于 $X\setminus D(\xi)$ 是凸的这一事实。□

称 p 是 $\mathcal{C}^1$ 等价于（例如参见 [18, 命题 5.4。8]）：对于 Ω 中任意两条以 r, r' 为端点的射线，其距离下确界 $\inf\{d_\Omega(x,x'):(x,x')\in r\times r'\}$ 为零；证明方法与上文几乎相同。□

6. Convex-cocompactness and relative hyperbolicity

本节的目标有三方面：我们将确立本文所构造的凸射影流形（可能带有全测地边界）的三项几何性质，即：

(a) 凸余紧性。(b) 相对双曲性。
(c) 扩展几何有限性。

现在陈述这些结果。稍后我们将给出相关术语的精确定义。

我们首先确立的性质是凸余紧性。以下结果对于专家而言可能是众所周知的，因为其证明遵循经典策略。请注意，对我们而言，b-流形这一术语指的是具有全测地边界的射影流形。

命题 6.1。设 M 是一个紧致适当凸 *b*-流形，其万有覆盖为 $\tilde{M}\subset\mathbb{S}^d$。假设 $\tilde{M}$ 中每个接触墙的闭包的真面都属于该墙。则 $\pi_1(M)$ 在任何包含 M 的 ˜ 不变适当凸开集上均凸紧地作用。

注记 6.2。在命题 6.1的情形下，并不总是存在˜一个包含 M的不变适当凸开集。例如，若 M 是定理$_2/\Gamma_2$ 1.5中得到的流形 Ω，则 $\pi_1(M)=\Gamma_2$ 不能

在任意真凸开集 Ω 上朴素凸余紧地作用（参见第6.1节中朴素凸余紧性的定义）。

我们考虑的第二个性质是相对双曲性。根据所考虑的流形是否带边界，分为两种情况。

定理 6.3。设 M 是一个带有普遍覆盖 $\tilde{M} \subset \mathbb{S}^d$的紧致适当凸 b-流形。假设：

- M 的所有墙都有两两不交的闭包。
- ∂M 中不属于闭墙的任意点都是极端点。

那么 $\pi_1(M)$ 相对于其各个墙的基本群是相对双曲的，且其Bowditch 边界与如下商空间等变同胚$Y := \partial M/\sim$ 该商空间由将闭墙收缩为点得到。

相对双曲性是对几何有限双曲流形基本群的一种群论推广；在这种情况下，Bowditch 边界对应于通常的极限集（更多细节见第 6.2节）。

上述定理可视为 Weisman 非常一般的研究成果的推论 [67, 定理 1。16] 也可视为 Islam 和 Zimmer 的研究成果的推论 [35, 定理 1.3，6], 但仅适用于 $\pi_1(M)$ 为凸余紧的特殊情形。不过请注意，我们将在凸余紧性不成立的情况下应用此定理（见上文注记 6.2）。事实上，我们将利用另一种性质：也就是说，我们希望据以证明相对双曲性的子群具有余维 1。定理 6.3 的证明策略与 Weisman 和 Islam–Zimmer 的研究思路相同，而他们的研究又受到更早期成果的启发。

当 M 为闭时，相对双曲性由以下结果得出：

事实 6.4 (Weisman [67, 定理 1。16])。设 $M = \Omega/\Gamma$ 是一个闭且适当地嵌入的凸射影流形。考虑闭、全测地、嵌入且两两不交的超曲面 $W_j = C_j/\Gamma_j \subset M$ 其中 $C_j = \Omega \cap H_j$ 由 H_j射影超平面构成， $\Gamma_j =$稳定子$_\Gamma(H_j)$，且 $j = 1 \dots n$。假设：

- Γ 的平移像在 Ω 中的 C_j 的闭包两两不交。
- 位于这些平移像闭包之外的 $\partial\Omega$ 中的任意点都是极端点。

那么 Γ 相对于 Γ_1、...、Γ_n 是双曲的，并且 *Bowditch* 边界与商空间 $Y := \partial\Omega/\sim$ 等变同胚；该商空间由对每个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $j = 1 \dots n$ 收缩 $\gamma\partial C_j$ 得到。

我们要考察的最后一个性质是扩展几何有限性，这是 Weisman 近期提出的概念 [68, 定义 1.3]。半单李群的扩展几何有限离散子群推广了秩一半单李群（如 SO(n，1)）的几何有限离散子群这一类。

具体而言，根据定义，所有扩展几何有限群都相对于某些真子群是相对双曲的。

令 $\mathcal{F}$ 为由满足 $x \in H$ 的 $\mathbb{RP}^d$ 中点与超平面组成的对 (x, H) 的部分旗簇。

命题 6.5。在定理 *6.3* 和事实 *6.4*的设定下， Γ 在 $\mathcal{F}$ 上的作用是 扩展几何有限的，依照 *[68, 定义13]*。

事实6.4 的设定以及具有凸余紧性的定理6.3 的设定下的扩展几何有限性 早已在 [68,定理 112]中有所论述。

6.1. 凸余紧性。考虑一个真凸开集 $\Omega \subset \mathbb{S}^d$，以及一个保持它不变的离散群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}^{\pm}_{d+1}(\mathbb{R})$。

若存在 Ω 的一个 Γ-不变凸子集，使得 Γ 在其上余紧地作用，则称 Γ 在 Ω 上的作用是朴素凸余紧的。在这种情况下，如果 Ω 不是严格凸的，那么这样的凸集未必总有一个最小者，这与双曲几何中的凸余紧性不同。原因之一是，轨道 $\Gamma \cdot x$ 中点的聚点集可能取决于 Ω 的选择 $x \in$（例如，当 Ω 是 $\mathbb{S}^2$ 中的一个三角形，且 Γ 由一个无限阶非近端元素生成时）。基于这个原因以及其他原因（将在 [30], 中解释），这种凸余紧性概念似乎并非最佳；因此，人们引入了另一种概念，如下所述。

Γ的完整轨道极限集 是对所有 $x \in \Omega$ 的轨道 $\overline{\Gamma \cdot x}$的聚点集取并所得，即 $\cup_{x\in\Omega}\overline{\Gamma x} \cap \partial\Omega$。

定义 6.6 （Danciger–Gu´eritaud–Kassel [30, 定义 1.11]）。若 Γ 在 Ω 上的作用满足：完整轨道极限集在 Ω 中的凸包非空，且其被 Γ 的商空间紧致，则称该作用为凸余紧 。

关于凸余紧性的更多细节和例子，请参阅 [30, §1.4–1.6–1.7–4.1–10.7]和 [31] 。

命题 *6.1*的证明。设 Ω 是一个不变适当凸开集~，包含 M 和 $\Gamma = \pi_1(M)$。令 Λ 为完整轨道极限集。

~凸集 M 是其内部与可数多个余维 1 面的相对内部（其全测地边界）的并。~ ~ ~ ~因此 $\partial_i M = (\partial M) \smallsetminus M$ 是紧致的，而 M 的闭包是 $\partial_i M$的凸包~。此外，由 M 的紧致性容易验证， $\partial_i M \subset \Lambda \subset \partial\Omega$。

为了证明该命题，现在只需证明任意 $\xi \in \Lambda$ lies ~in $\partial_i M$。反设 $\xi \notin \partial_i M$。存在 $x \in \Omega$ 以及一个序列 $\gamma_n \in \subset \Gamma$，使得 $\gamma_n x$ 收敛到 ξ。~在 M的内部选取 y。考虑 a， $b \in \partial\Omega$，以及墙 M上的 z，使得 a， y， z， x， b依此顺序共线。取一个子列后，

不妨假设

$$\gamma_n(a,y,z,x,b) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\alpha,\eta,\zeta,\xi,\beta) \in \partial\Omega \times \partial_i\tilde{M} \times \partial_i\tilde{M} \times \partial\Omega \times \partial\Omega.$$

由于 $\xi \notin \partial_i M$，因此可以验证 α，η，ζ，ξ，β两两不同。

令 K 为 $\tilde{M}$ 在 $\mathbb{S}^d$ 中的闭包，并令 $f: K \to \partial\tilde{M}$ 将每个 p 映射到 K 中 $[\xi,p]$ 的入口点。由凸性可知，该映射是连续的。此外，对于 M内部的每个 p，$f(p)$ 都属于 M的一面；由连续性和连通性可知，它们都属于同一面 W。再由连续性可知，$f(\eta) \in \partial W \cap [\zeta,\xi]$。

线段 $[\eta, f(\eta)]$ 非平凡，包含于 ∂M中并与 W相切，因此必包含于 W中。于是 $\xi \in$张成空间 W。

这很荒谬：Span(ξ，y) $\cap$张成空间 $W = \{\xi\}$因此 $f(y) \notin W$。 □

6.2. **Yaman 对相对双曲性的刻画**。现在我们给出按照 Yaman 的相对双曲性工作定义。这并非最初的定义；最初的定义由 Bowditch 提出 [23]。文献中有许多种定义；下面这一种与 Bowditch 的定义等价。

定义 6.7（相对双曲性 [69, 定理 0.1]）。设 Y为一个紧致可度量空间，Γ 为一个离散群，并通过同胚作用于 Y。

- 若 Γ 在 Y的不相同三元组集合上适当地作用，则称该作用为收敛作用 。
- 若存在序列 $\gamma_n \in \Gamma$ 和$a \neq b \in Y$，使得 $\gamma_n x \to a$ 且对任意 $y \neq x$均有 $\gamma_n y \to b$，则称点 $p \in Y$为圆锥型 。
- 若点 $p \in Y$ 的 $\mathrm{Stab}_\Gamma(p)$ 是无限群，且适当地作用于 $Y \smallsetminus \{p\}$，则称其为抛物型点。
- 若抛物点 $p \in Y$ 的 $\mathrm{Stab}_\Gamma(p)$ 在 $Y \smallsetminus \{p\}$上余紧作用，则称其为有界 抛物点。
- 若该作用是收敛作用，且所有点都是圆锥型或有界抛物型，则称该作用为几何有限 。

假设该作用是几何有限的，且所有抛物点的稳定子群都是有限生成的，那么

(1) Γ 关于抛物点的稳定子群是相对双曲 的。(2) Y 是*Bowditch* 边界。

注记 6.8. 在定义 6.7的设定中，若 一致 且 Y 的所有点都是圆锥型，则该作用称为。此时 Γ 是双曲空间，且 Y 是其 Gromov 边界。

现在让我们来考虑凸射影情形。

固定一个真凸开集 $\Omega \subset \mathbb{S}^d$、一个闭子集 $F \subset \Omega$，以及一个保持 Ω 和 F 的离散子群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}^{\pm}_{d+1}(\mathbb{R})$。（在我们的情形中，$F$

总是为 $\partial\Omega$，但命题6.10 和第 6.6节中除外。）固定一个 Γ-不变等价关系 $\sim$，定义在 F 上，并且是闭的（也就是说，$\{(x,y) \in F^2 : x \sim y\} \subset F^2$ 是闭的），且满足 $Y := F/_\sim$ 至少包含 3 个点。

我们称

- F 满足凸性条件，如果它包含所有满足 $x, y \in F$的线段 $[x,y] \subset \partial\Omega$。
- F 满足可见性条件，即它包含所有与之相交的 $\partial\Omega$的线段。
- $\sim$ 满足可见性条件，如果 $[x,y] \subset \partial\Omega$蕴含 $x \sim y$ 对所有$x, y \in F^2$成立。

这些假设意味着 F 的凸包与Ω相交。

事实 6.9 (Islam–Zimmer [35, 命题8.1-2])。 若 F上的凸性条件和 $\sim$ 上的可见性条件均满足，则 Y 是一个紧致可度量空间， Γ 在其上的作用是收敛作用。

根据这一事实，要得到相对双曲性，还需要理解圆锥型点和有界抛物点。

6.3. **锥性**。 考虑上一节中的 Ω、 F、 Γ、 $\sim$ 和 $Y := F/_\sim$ 。

我们首先给出一个关于锥性的判据。它类似于实双曲几何中的一个经典判据（例如，参见 [61, 第 75] 页的讨论），其风格也类似于 Islam 和 Zimmer 的一个结果 [35, 命题 8.4]，以及 Weisman 的一个证明 [68, 命题 8.17] 背后的论证。

对于任意 $p \in Y$，用 $\mathrm{Sing}_p \subset T^1\Omega$ 表示满足 v^+， $v^- \in p$ 的单位切向量 v 的集合。此外，令 $\mathrm{Sing} := \bigcup_{p\in Y} \mathrm{Sing}_p$，它是 $T^1\Omega$ 的一个闭子集。

命题 6.10. 假设 F 满足凸性条件，且 $\sim$满足可见性条件。考虑 $p \in Y$、 $x \in p \subset F$ 和 $v \in T^1\Omega$，它在 x 处指向前方，在 $y \in F$ 处指向后方，且满足 $y \not\sim x$。当且仅当 v 的正向测地轨道在 $T^1\Omega/\Gamma$ 中的投影与 $(T^1\Omega \setminus$ 奇异集$)/\Gamma$的某个紧子集有无限多个交点时， p 是圆锥型的。

证明。 假设 v 的正向测地轨道的投影无限多次与（$T^1\Omega \setminus$ 奇异集）$/\Gamma$的某个紧子集相交，也就是说，存在$\gamma_n \in \Gamma$，且 t_n 趋于无穷，使得 $\gamma_n\phi_{t_n}v$ 收敛到 $w \notin$ 奇异集。这意味着 $\gamma_n x$ 和 $\gamma_n y$ 分别收敛到 $x' := w^+$ 和$y' := w^- \in F$，其中 $x' \not\sim y'$。只需证明，对于任意 $z \in F \setminus p$， $\gamma_n z$ 在 $[y']$ 上聚集。抽取一个子列后，不妨假设 $\gamma_n z$ 收敛到 z'。只需验证 $[y', z'] \subset \partial\Omega$。我们可以假设 $[y,z]$ 与Ω相交。于是只需验证 $\gamma_n\phi_{t_n}v$ 的基点到 $\gamma_n[y,z]$ 的希尔伯特距离趋于无穷；换句话说，

也就是说， $\phi_{t_n} v$ 到 $[y,z]$ 的距离趋于无穷。这是由 $z \not\sim x$ 这一事实得出的（这意味着 z 和 x 不具有相同的面）。

假设 p 是圆锥型的：存在发散的 $\gamma_n \in \Gamma$ 和 $a \neq b \in Y$，使得当 $\gamma_n p$ 趋于 a 时， $\gamma_n q$ 趋于 b ，对任意 $q \in Y \smallsetminus \{p\}$均成立。取一个子列后，不妨假设 $\gamma_n x$ 和 $\gamma_n y$ 分别收敛到 $x' \in a$ 和 $y' \in b$。线段 $[x', y']$ 与Ω相交，因为 $x' \not\sim y'$。因此存在 $t_n \in \mathbb{R}$，使得 $\gamma_n \phi_{t_n} v$ 收敛到某个单位切向量 w。由于 γ_n 发散，序列 t_n 在 $\{\pm\infty\}$上聚集。再取一个子列后，不妨假设 t_n 收敛。若反设其极限为 $-\infty$，那么根据本证明的第一步，对任意 $c \in Y \smallsetminus \{y\}$ ，序列 $\gamma_n c$ 都会收敛到 a，这就矛盾了。□

6.4. **抛物性的技术引理。**

事实 6.11. 设 Ω 是一个适当凸开集，且自同构序列 $g_n \in$ 一般线性群$_{d+1}(\mathbb{R})$ 收敛到一个非可逆非零矩阵 g。那么 g 的核与像与 Ω 相交，但不与 Ω相交。

引理 6.12. 设 $\Omega \subset \mathbb{S}^d$ 是一个适当凸开集，$F \subset \partial\Omega$ 是一个满足可见性条件的闭子集（它包含与其相交的 $\partial\Omega$ 的所有线段），且 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 是保持 F 不变的闭子群。

令 $X \subset \mathbb{S}^d$ 为 Ω 在 F 中各点处的支撑超平面的并集（它是闭集）。令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{S}^d \smallsetminus X$ 中包含 Ω 的连通分支。它是开、凸的，且在 Γ 作用下不变，并包含 $\Omega \smallsetminus F$。那么：

- 要么 Γ 在 $\mathcal{O}$ 上适当地作用，并且 Γ 对 $\mathcal{O}$ 的每个紧子集的轨道都在 F 上聚集，
- 或 F 退化为一个点，并且 Γ 由一个秩一自同构虚生成（按 *Islam* 的含义）*[33, 定义 6。2]*。

证明。考虑一个发散序列 $g_n \in \Gamma$ ，使得 $\|g_n^{\pm 1}\|^{-1} g_n^{\pm 1}$收敛到一个非零、不可逆矩阵 $g_{\pm}$。根据事实6.11，以下四个紧凸集非空且包含于 $\partial\Omega$。

$$\emptyset \neq I_- := \mathrm{Im}(g_-) \cap \overline{\Omega} \subset K_+ := \mathrm{Ker}(g_+) \cap \overline{\Omega} \subset \partial\Omega$$

$$\emptyset \neq I_+ := \mathrm{Im}(g_+) \cap \overline{\Omega} \subset K_- := \mathrm{Ker}(g_-) \cap \overline{\Omega} \subset \partial\Omega$$

让我们证明：如果 Γ 不是由秩一元素虚生成的，那么 K_- 和 K_+ 包含于 F 中。譬如，假设 K_+ 不包含于 F 中。那么，根据 F 上的可见性条件，这两个 $\partial\Omega$ 的紧凸子集不相交。按照 K_+ 的定义，这意味着，当 $t \to \infty$时，$g_n F$趋于 $g_+(F) \subset I_+$ 。但是，对于所有 n 都有 $g_n F = F$ ，因此 $F \subset I_+$，从而根据 F上的可见性条件， $I_+ = K_- = F$。这意味着 I_-和 K_- 不相交，因此 I_- 拥有一个与 $K_- = F$ 不相交的紧凸邻域U ，使得当 n 充分大时，$g_n^{-1} U \subset U$。根据布劳威尔

不动点定理， g_n有一个不动点 $x \in U$，并且还有一个 $y \in F$。根据 [17, 推论 6。9]， g_n 是一个秩一自同构，而 $F = \{y\}$，因此 Γ是一个固定 y的秩一群。这意味着 Γ 由 g_n 虚生成，依据 [19, 命题 2。4]。

现在假设 K_- 和 K_+ 包含于 F中。考虑一个收敛序列 $x_n \in \mathcal{O}$，其极限为 $x \in \mathcal{O}$，并证明 $g_n x_n$ 收敛到 F中的一点。考虑 $y \in K_+$。核 $\mathrm{Ker}(g_+)$包含于 Ω 在 K_+ 处的一个支撑超平面中，因此它不与 $\mathcal{O}$ 相交（根据定义），于是当 $n \to \infty$时， $g_n x_n$ 趋于 $g_+ x$。根据 $\mathcal{O}$的定义，射线 $[x, y) \subset \mathcal{O}$在 $\smallsetminus F$ 处某一点进入 Ω。由于 $y \in K_+$，我们有 $g_+ x = g_+ x' = \lim_n g_n x' \in \Omega \cap \mathrm{Im}(g_+) = \overline{K_+}$。□

引理 6.12具有如下推论，其中利用了定理 6.3 中的假设：我们希望据此证明相对双曲性的子群具有余维 1；我们回顾一下，这一假设弥补了凸余紧性的缺失。

推论 6.13。考虑一个真凸开集 Ω、一个闭子集 $F \subset \partial\Omega$ （带有可见性条件）、一个离散群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 保持 F，一个Γ-不变的闭等价关系 $\sim$ 在 F 上，且该等价关系至少有三个等价类并满足可见性条件（见第 *6.2*节），以及 $Y := \partial\Omega/_\sim$。

取一点 $y \in Y$，将其视为 $\partial\Omega$ 的闭子集，且它不被 Γ 中的秩一元素固定（例如，当 y 至少包含三个点时）。则 y 是一个抛物点。

此外，假设：

- $F = \partial\Omega$。
- $\partial\Omega \smallsetminus y$ 同胚于 $\mathbb{R}^{d-1}$ 的有限个不交并（例如，当 y 是 $\partial\Omega$ 的一个面时）。
- $\mathrm{Stab}_\Gamma(y)$ 的虚上同调维数等于 $d-1$（例如，当 y 是一个面，且 $\mathrm{Stab}_\Gamma(y)$ 在该面上适当余紧地作用时）。

那么 y 是有界抛物型。

证明。引理 6.12 告诉我们 $\mathrm{Stab}_\Gamma(y)$ 在 $F \smallsetminus y$ 上适当不连续地作用。

反设两点 x， $x' \in Y \smallsetminus \{y\}$ 由 $x_n \in Y \smallsetminus \{y\}$ 动态关联，其中 $x_n \in Y \smallsetminus \{y\}$ 收敛到 x （相对于 Y的拓扑）， $\gamma_n \in \mathrm{Stab}_\Gamma(y)$ 发散，而 $\gamma_n x_n$ 收敛到 x'。

任取一个序列 $(p_n)_n \in \prod_n x_n$。根据 Y上的商拓扑的定义，经过抽取子序列后，我们可以假设它收敛到 $p \in x \subset \partial\Omega \smallsetminus y$，且 $\gamma_n p_n$收敛到 $p' \in x' \subset \partial\Omega \smallsetminus y$。这意味着 $\mathrm{Stab}_\Gamma(y)$ 在 $\partial\Omega \smallsetminus y$ 上的作用不是适当的，这与假设矛盾。

推论的最后一个结论可直接由以下众所周知的事实得出：上同调维数为 $d-1$ 且在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 上适当地作用的离散群必定余紧地作用。例见 [57]。□

6.5. **定理6.3 和事实6.4的证明**。我们将同时证明这两个结果。在事实、……、$W_n \subset \sim M$ 的情形中，我们将超曲面6.4称为“墙”，并将它们在 M中的提升也称为“墙”。

~点 Y 要么对应于 ∂M 的一个极点，要么对应于 ∂M 的一个形如 $W \cap \partial M$ 的闭 ~ ¯ ~ ~子集，其中 W 是 M的一面墙。

根据事实6.9， Y 是紧致可度量的，且 $\pi_1(M)$的作用是一个收敛作用。

~根据推论6.13， Y 中对应于 M 的每个点都是有界抛物型的。

因此，根据相对双曲性的工作定义，只需~检验每个 $x \in \partial M$ 位于闭墙之外的点都投影到 Y的一个圆锥点，使用命题6.10。

为 M 的墙固定紧致两两不交邻域。另取一个点 p，使其位于 M 的内部。

根据命题 6.10，只需检查 M 中的射线 $[p, x)$ 的投影是否会无穷多次经过我们所固定邻域的补集。反设不存在这种情形：存在 $q \in [p, x)$，使得 $[q, x)$ 包含于某个墙的邻域的一个提升 U 中；记 $W \subset U$ 为该墙的提升。

令 $q_n \in [q, x)$ 收敛于 x。由于稳定子 $\mathrm{Stab}_\Gamma(W)$ 作用在 W 及 U 上是余紧的，存在一个发散序列 $g_n \in \mathrm{Stab}_\Gamma(W)$，使得 $g_n q_n$ 保持在 U 的一个紧集 K 中。

不妨抽取一个子列，使得 $\|g_n\|^{-1} g_n$ 收敛~于矩阵 g。根据引理 6.12，若 Ω 是 M 的内部，则 $\mathrm{Ker}(g) \cap \Omega$ 和 $\mathrm{Im}(g) \cap \Omega$ 均包含于 W中，而该集合不包含 x。因此 $g_n q_n$趋于 gx，这也是 $g_n x$ 的极限，因而属于 W的相对边界，而该相对边界不与 K相交：矛盾。

6.6. **扩展几何有限性**。考虑一个真凸开集 $\Omega \subset \mathbb{S}^d$、一个满足可见性条件的闭子集 $F \subset \Omega$（它包含所有与其相交的 $\partial\Omega$ 的线段），以及一个离散子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$，它保持$F$不变。固定一个 Γ-不变的闭等价关系 $\sim$，其定义在 F 上，且至少有三个等价类并满足可见性条件（见第 6.2节），并且 $Y := F/\sim$。

用 $\mathbb{RP}^{d*}$ 表示 $\mathbb{RP}^d$ 的超平面集合。令 $F^* \subset \partial\Omega^*$ 表示与 F 相交的支撑超平面集合。注意， F^* 是一个满足可见性条件的闭子集，并且带有一个自然的 Γ-不变闭等价关系，且满足可见性条件（$H \sim H'$ 若存在 $x \in H \cap F$ 和 $x' \in H' \cap F$，使得 $x \sim x'$），因此映射 $F^*/\sim \to Y$ 良定义；当 $x \in H$ 时，该映射将 $[H]$ 映射到 $[x]$，并且是一个同胚。

令 $\mathcal{F} \subset \mathbb{RP}^d \times \mathbb{RP}^{d*}$ 为由满足条件 $x \in H$ 的对 (x, H) 构成的部分旗簇。设 $\Lambda := (F \times F^*) \cap \mathcal{F}$。我们有一个自然的 Γ-等变满射

连续映射 ϕ：$\Lambda \to Y$，将 $(x,\ H)$ 映至 x 的等价类。此映射可延拓为映射 $\phi_1 \times \phi_2$：$F \times F^* \to Y$。

我们的假设意味着 ϕ 是对踵的：任意两点（$x,\ H$），（$x',\ H'$）$\in\Lambda$ 若其在 ϕ 下的像不同，则它们是对踵的，也就是说，$x \notin H'$ 且$x' \notin H$。

定义 6.14（Weisman [68, 定义 1。2]）。映射 ψ：$\Lambda \to Y$ 若将 Γ 在 Y 上的收敛作用延拓，则对每个 $z \in \Lambda$，都存在一个开子集$C_z \subset \mathcal{F}$ 包含 $\Lambda \smallsetminus \psi^{-1}(z)$，使得每个发散序列 $\gamma_n \in \Gamma$都存在一个子列 γ_{n_k} 和 $z_\pm \in Y$，使得 $\gamma_{n_k} K$ 对每个紧子集$\psi^{-1}(z_+$均收敛于 $K \subset C_{z_-}$。

引理 6.15。映射 ϕ 将 Γ 在 Y上的收敛作用延拓。

证明。对于任意 $z \in Y$，令 $A_z \subset \mathbb{RP}^d$（分别为 $A_z^* \subset \mathbb{RP}^{d*}$）表示集合中包含 Ω（分别包含 Ω^*）的连通分支；该集合是（开且凸的）x（分别为 H）的集合，并且对于任意 $(x,\ H)$，$\in \phi^{-1}(z)$ 时满足 $x \notin H'$（分别为 $x' \notin H$）。

考虑一个发散序列 $g_n \in \Gamma$。

抽取一个子列后，不妨设 $\|g_n^{\pm 1}\|^{-1} g_n^{\pm 1}$收敛于矩阵 $g_\pm$。令 $K_\pm = \mathrm{Ker}(g_\pm) \cap \partial\Omega$ 以及 $I_\pm = \mathrm{Im}(g_\pm) \cap \partial\Omega$（注意 $I_\pm \subset K_\mp$）。

根据事实 6.11，对于每个 $x \in\Omega$，序列 $g_n^{\pm 1} x$ 趋于 $g_\pm x \in I_\pm$。特别地，这对 x 的凸包中的任意 F都适用，而 Γ的不变性 F 意味着它与 $K_\pm$相交，因此根据 F上的可见性条件，它包含该集合。

$\sim$ 上的可见性条件意味着，ϕ 会将所有满足 $x \in K_\pm$ 位于 $z_\mp \in Y$ 上同一点的点对 $(x, H) \in \Lambda$ 映到一起。

让我们验证 $g_+ A_{z_-} \subset I_+$，由此可知，对于任意紧子集 $K \subset A_{z_-}$，$g_n K \to \phi_1^{-1}(z_+)$。取 $x \in A_{z_-}$ 和 $y \in K_+$。根据 A_{z_-} 的定义，线段 $[x, y]$ 与 Ω 在某点 p 相交。现在，x 和 p 在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的任意提升之差都是 $\mathrm{Ker}\, g_+$ 中的向量，因此 $gx = xp \in I_+$。

一个对偶论证（涉及 g_n^{-1}）保证，对于任意紧子集 $K \subset A_{z_-}^*$，轨道 $g_n K$ 会在 $\phi_2^{-1}(z_+)$ 上聚积；该集合是 Ω 在 $\phi_1^{-1}(z_+)$ 处的支撑超平面集。

总之，对于任意紧子集 $K \subset (A_{z_-} \times A_{z_-}^*) \cap \mathcal{F}$，轨道 $g_n K$ 会在 $\phi^{-1}(z_+)$ 上聚积，即 ϕ 将 Γ 在 Y 上的收敛动力学延伸了。□

推论 6.16. 如果 Γ在 Y 上的作用是几何有限的，如定理 *6.3* 和事实 *6.4*中的情形，那么 Γ 在 $\mathcal{F}$ 上的作用（按定义）是意义下的扩展几何有限，见 *[68, 定义 1。3]*。

7. Projective gluings

本节将介绍一种粘合构造，其输入由带有全测地边界和角的射影流形组成，而其

输出是一个凸实射影锥流形。将前几节的条件转化为粘合语言，可得：

- 我们确定了何时可以将粘合后的射影锥流形的奇点吹起为全测地边界分支。
- 我们描述了所得凸区域的形状，尤其刻画了边界的平坦区域以及极端点和 $\mathcal{C}^1$ 点。

7.1. 粘合。 我们先介绍一些关于粘合的拓扑预备知识。

定义 7.1（粘合）。给定一族 b-流形 $\mathcal{M}$，粘合 是一个光滑对合 $f : \partial\mathcal{M} \to \partial\mathcal{M}$，它不保持任何边界分支不变。我们将 $\mathcal{M}$ 关于等价关系 $x \sim f(x)$（其中 $x \in \partial\mathcal{M}$）取商所得的空间记为 $\mathcal{M}_f$。

每个分支 $M \subset \mathcal{M}$ 都可以看作 $\mathcal{M}_f$ 的一个浸入的余维 0 子流形，称为胞腔。类似地，每个边界分支$W \subset \partial\mathcal{M}$ 都投影到 $\mathcal{M}_f$ 的一个嵌入的余维一子流形，称为墙。胞腔图是这样一种图：其顶点是胞腔，边是墙（一面墙连接两个相邻胞腔）。

7.1.1. 万有覆盖。设 $\mathcal{M}$ 是一族 b-流形，f 是对边界的粘合。假设该粘合 $\mathcal{M}_f$ 是连通的。现在我们来描述它的万有覆盖

$$\pi : \widetilde{\mathcal{M}}_f \to \mathcal{M}_f.$$

胞腔内部的原像和墙的原像~给出 $\mathcal{M}_f$的一个自然分解

$$\widetilde{\mathcal{M}}_f = \bigsqcup_{M\subset\mathcal{M}} \pi^{-1}(\mathrm{int}(M)) \sqcup \bigsqcup_{M\subset\mathcal{M}} \pi^{-1}(\partial M).$$

分解成若干胞腔，这些胞腔是流形带边界，并覆盖 $\mathcal{M}_f$ 的胞腔（即 $\mathcal{M}$的分支）。

将这个分解实现为 $\mathcal{M}$的一个覆盖 $\mathcal{N}$的粘合会很方便。现在我们更正式地说明如何做到这一点。

覆盖 $\mathcal{N}$ 是一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_f \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{M} & \xrightarrow[\pi_f]{} & \mathcal{M}_f \end{array}$$

~ ~更准确地说，$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_f \times \mathcal{M}$ 是满足 $\pi(x) = \pi_f(y)$ 的对偶 $(x,\ y)$ 的集合。容易验证，第二坐标投影 $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 是一个覆盖。

于是， $\mathcal{M}_f$ 可自然地与 $\mathcal{N}_g$ 相对应，其中 g 是$\partial\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap$上的对合，满足对于任意 $(x,\ y)$，$g(x,\ y) = (x,\ f(y))$。

一般而言， $\mathcal{N}_g = \mathcal{M}_f$ 的胞腔和墙（即 $\mathcal{N}$ 和$\partial\mathcal{N}$的分支）并非 $\mathcal{M}_f$中相应胞腔和墙的万有覆盖的副本。现在我们证明，当粘合满足π_1-单射性质时，情况确实如此。

方便的是，这可以用空间图理论来解释，参见 Scott 和 Wall [54]：设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{N}_g = \mathcal{M}_f$ 的胞腔图（顶点是 $\mathcal{N}$ 的分支，而边是 $\mathcal{N}_g$ 中 $\partial\mathcal{N}$各分支的像）。

事实 7.2。 如果 $\mathcal{M}$ 的边界具有 π_1-单射性，那么 $\mathcal{G}$ 是一棵树，并且 $\mathcal{M}_f$ 的每个胞腔和墙（即 $\mathcal{N}$ 和 $\partial\mathcal{N}$的每个分支）都是单连通的。

证明。 $\mathcal{M}$ 的每面墙都有一个管状邻域，因此 $\mathcal{M}_f$ 是与 $\mathcal{M}$ 、 f 及其胞腔图相关联的空间图的一种实现，参见 Scott 和 Wall [54, 第 155]页。根据 Scott 和 Wall 的说法，这意味着 $\mathcal{M}_f$ 的基本群同构于相应群图的基本群；Scott 和 Wall 在 [54, 命题 3.6] 中证明了每个胞腔和墙的基本群都是单射的（另见 [56, §5 推论 1]）。由此可知， $\mathcal{N}$ 和$\partial\mathcal{N}$ 的每个分支都是单连通的。

$\mathcal{G}$ 是树这一事实源于 $\mathcal{M}_f$ 也是一个以图 $\mathcal{G}$为底层图的空间图的实现。事实上，由于 $\mathcal{M}_f$ 的每个胞腔都是单连通的， $\mathcal{M}_f$ 的基本群（平凡群）根据 [56, p. 61]与 $\mathcal{G}$ 的基本群一致。□

从现在起，我们所考虑的粘合总是满足π_1事实7.2 中的单射条件，这要归功于以下经典事实。

事实 7.3。 适当凸 b-流形的任意墙都是 π_1-单射的。

证明。 设 M 是一个适当凸 b-流形，其万有覆盖为 $\tilde{M}$。 $\tilde{M}$ 中任一墙在 $\tilde{M}$ 中的每个提升，都经由发展映射同胚映射到某个超平面的凸子集上。因此，它是单连通的。□

7.1.2. 射影粘合。 接下来，我们在粘合上引入几何结构：

定义 7.4 （射影粘合）。 设 $\mathcal{M}$ 是一组 b-流形。射影粘合 是由粘合数据 f 以及 $\mathcal{M}_f$ 上的一个射影结构组成的，该结构在 $\mathcal{M}$ 的每个分支上限制为相应的射影结构。

并非所有粘合都允许存在相容射影结构；即使存在，也不一定唯一。例如，注意到如果存在相容射影结构，那么 $f : \partial\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是射影（$d-1$）流形之间的同构（但一般来说，这并非充分条件）。

7.1.3. 可容许粘合。 现在我们来讨论具有全测地边界与角的射影流形的粘合。其定义如下：

定义 7.5（可容许粘合）。设 $\mathcal{MC} = \{\mathbb{M}_j\}_{j\in J}$ 是一族光滑部分为 $\mathcal{M} = \{M_j \subset \mathbb{M}_j\}_{j\in J}$ 的 bc-流形。若对于 $\mathcal{M}$ 的每个角 $\mathfrak{C}$，我们都能找到胞腔 $\mathbb{M}_1$、$\cdots$、$\mathbb{M}_m \subset \mathcal{MC}$，使得每个 $\mathbb{M}_i$ 都有一个角 $\mathfrak{C}_i$（其中 $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}$）和两面相邻壁 W_i^- 与 W_i^+，并且满足以下条件，则称 $\mathcal{M}$ 的射影粘合f 是可容许的

- $fW_i^+ = W_{i+1}^-$对每个 i都成立。
- $f_{|W_i^+}$ 可延拓为一个同胚 $f_{|\mathfrak{C}_i}$： $\mathfrak{C}_i \to \mathfrak{C}_{i+1}$。
- $f_{|\mathfrak{C}_{m-1}} \circ \cdots \circ f_{|\mathfrak{C}_1} \circ f_{|\mathfrak{C}_0}$是 $\mathfrak{C}_0$ 上的恒等映射。

（所有指标均视为模 m。）我们将 $\mathcal{MC}$ 关于对所有 $x \in \partial\mathcal{M}$ 的关系 $x \sim f(x)$ 的闭包取商空间，记为 $\mathcal{MC}_f$。

$\mathcal{MC}_f$ 的一个角 或奇点 是 $\mathcal{MC}$中一个角的投影。按照上一段所述，选取 $\{(\mathbb{M}_i,\ W_i^{\pm},\ \mathfrak{C}_i)\}_{i\le m}$ 称为$\mathcal{MC}_f$中该角的胞腔序 。

可容许粘合给出了射影锥流形的自然实例：

引理 7.6。 设 $\mathcal{MC}$ 是一族光滑部分为$\mathcal{M}$的 *bc*-流形。设 f 是一个可容许粘合。那么 $\mathcal{MC}_f$ 是一个锥流形（定义 *4.6*）。

证明。 固定一个角 $\mathfrak{C}$。令 $\{(\mathbb{M}_i,\ 墙_i^{\pm},\ \mathfrak{C}_i)\}_{i\le n}$ 为 $\mathfrak{C}$的胞腔序。

可以找到 $\mathfrak{C}$ 的一个开邻域 V，满足以下条件：

- V 不与任何其他奇点相交。
- $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ 其中每个 V_j都是 $\mathfrak{C}$的提升$\mathfrak{C}_j \subset \mathbb{M}_j$ 的管状邻域。
- $W_j^{\pm} := V_j \cap 墙_j^{\pm}$是$墙_j^{\pm}$中 $\mathfrak{C}_j$ 的管状邻域。~
- V的万有覆盖 V可以分解为若干万有覆盖 $\widetilde{V}_1$、$\cdots$、$\widetilde{V}_n$通过 f_i粘合而成：$\widetilde{W}_i^+ \to \widetilde{W}_{i+1}^-$使得对于任意 $x \in \mathfrak{C}_1$，$f_n \circ \cdots \circ f_1(x) = \widetilde{x}$。
- $\pi_1(\mathfrak{C})$自然作用于 $\widetilde{\mathfrak{C}}$ 和 $\widetilde{V}$，以及所有的 $\widetilde{\mathfrak{C}}_i$、$\widetilde{V}_i$和 $\widetilde{W}_i^{\pm}$，使得对于任意 i 和 $x \in \widetilde{W}_i^+$，$\alpha(f_i(x)) = f_i(\alpha(x))$。

~我们的目标是找到一个管 T 和一个局部同胚 $V \to T$，使其在光滑部分上是射影的，并且相对于态射$\pi_1(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Aut}(T)$ 是等变的。

固定一个发展映射 $\mathrm{dev}^1 : \widetilde{V}_1 \to \mathbb{S}^d$，它将 $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ 映到 $\mathbb{S}^{d-2}$。根据归纳法，$\mathcal{M}_f$ 上的射影结构为每个 $i \le n$ 确定一个发展映射 $\mathrm{dev}^i : \widetilde{V}_i \to \mathbb{S}^d$，使得 $\mathrm{dev}^{i-1} = \mathrm{dev}^i \circ f_{i-1}$ 在 $\widetilde{W}_{i-1}^+$上成立。它还确定了 $\widetilde{V}_1$ 的一个新发展映射，其形式为 $\mathrm{dev}^{n+1} = g \circ \mathrm{dev}^1$，其中 $g \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$，使得 $\mathrm{dev}^n = \mathrm{dev}^{n+1} \circ f_n$ 在 $\widetilde{W}_n^+$ 上成立。

断言1。 g 固定了 $\mathbb{S}^{d-2}$中的每个点。

断言的证明。对于每个 $x \in \mathfrak{C}_1$ 我们有

$$\begin{aligned} g\,\mathrm{dev}^1(x) &= \mathrm{dev}^{n+1}(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1(x)) \\ &= \mathrm{dev}^{n}(f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1(x)) \\ &= \mathrm{dev}^1(x). \end{aligned}$$

□

将 V缩小后，不妨假设对于每个 $1 \leq i \leq n+1$，dev^i 的像都包含在 $\mathbb{S}^d$ 中由 $\mathrm{dev}^i(\tilde{W}_i^-)$ 和 $\mathrm{dev}^i(\tilde{W}_i^+)$ 张成的半超平面之间的扇形 S_i 内。我们选取第一个扇形的一个提升 $\tilde{S}_1 \subset \mathbf{B} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$，由此通过归纳法确定 $S_2, \ldots, S_{n+1}$到扇形$\tilde{S}_2, \ldots, \tilde{S}_{n+1} \subset \mathbf{B} \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$的提升。于是 dev^i 以唯一的方式提升为 $\tilde{\mathrm{dev}}^i\colon \tilde{V}_i \to \tilde{S}_i$.~ ~类似地， g 提升为唯一的 $\tilde{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$，它将 S_1 映射到 S_{n+1} （并固定$\mathbb{S}^{d-2}$）。

令 T 为管

$$T := \tilde{S}_1 \cup \cdots \cup \tilde{S}_n / \sim$$

其中 $\sim$ 通过 $\tilde{g}$ 将由 $\tilde{\mathrm{dev}}^1(\tilde{W}_1^-)$ 张成的 $\tilde{S}_1$ 的墙与由 $\tilde{\mathrm{dev}}^n(W_n^+)$ 张成的 S_n 的墙~ ~ ~识别。记 π_T: $S_1 \cup \cdots \cup S_n \to T$ 为商投影。我们有如下结论:

命题 2。映射 $F\colon \tilde{V} \to T$ 满足：对所有 i 和 $\sim x \in V_i$， $F(x) = \pi_T(\tilde{\mathrm{dev}}^i(\alpha x))$。该映射良定义，且是保持射影结构的局部嵌入。

令 $\mathrm{hol}\colon \pi_1(\mathfrak{C}) \to \mathrm{SL}_{d+1}\mathbb{R}$ 为 dev^1，的整体单值化，它提升为 $\tilde{\mathrm{dev}}^1$ 的整体单值化 $\tilde{\mathrm{hol}}\colon \pi_1(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$。对于任意 $\alpha \in \pi_1(\mathfrak{C})$，新的发展映射 $\tilde{\mathrm{dev}}^1 \circ \alpha$ 按照上述归纳法确定了 $\tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_n, \tilde{V}_1$ 的新的发展映射，记作 $\tilde{\mathrm{dev}}^i \circ \alpha_\circ$ 另一方面，发展映射 $\tilde{\mathrm{hol}}(\alpha) \circ \tilde{\mathrm{dev}}^1$ 显然确定了发展映射 $\tilde{\mathrm{hol}}(\alpha) \circ \tilde{\mathrm{dev}}^i$。我们验证:

断言 3。 $\tilde{\mathrm{hol}}(\alpha)$ 是 T 的自同构。

断言的证明。 由于 $\tilde{\mathrm{dev}}^1 \circ \alpha = \tilde{\mathrm{hol}}(\alpha) \circ \tilde{\mathrm{dev}}^1$, ，我们有 $\tilde{\mathrm{dev}}^i \circ \alpha = \tilde{\mathrm{hol}}(\alpha) \circ \tilde{\mathrm{dev}}^i$ 对所有 $2 \leq i \leq n+1$ 都成立。因此，$\tilde{\mathrm{hol}}(\alpha)$ 保持每个$\sim S_i$ 不变。此外，它与 $\tilde{g}$ 交换，因为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{hol}}(\alpha) \circ \tilde{g} \circ \tilde{\mathrm{dev}}^1 &= \tilde{\mathrm{hol}}(\alpha) \circ \tilde{\mathrm{dev}}^{n+1} = \tilde{\mathrm{dev}}^{n+1} \circ \alpha \\ &= \tilde{g} \circ \tilde{\mathrm{dev}}^1 \circ \alpha = \tilde{g} \circ \tilde{\mathrm{hol}}(\alpha) \circ \tilde{\mathrm{dev}}^1. \end{aligned}$$

因此，$\tilde{\mathrm{hol}}(\alpha)$ 给出了 T 的自同构 $\phi(\alpha)$。 □

显然， ϕ 是一个态射。最后，我们检查:

断言 4。 $F \circ \alpha = \phi(\alpha) \circ F$。

~　　~断言的证明。设 $x \in V$。我们有 $x \in V_i$，其中某个 i。那么 $\alpha(x)$ 也属于 V_i，并且根据定义

$$F(\alpha(x)) = \pi_T(\tilde{\mathrm{dev}}^i(\alpha x)) = \pi_T(\tilde{\mathrm{hol}}(\alpha)\tilde{\mathrm{dev}}^i(x)) = \phi(\alpha)\pi_T(\tilde{\mathrm{dev}}^i(x)). \quad \square$$

至此，引理的证明完成。 $\square$

7.2. 极性与膨胀。 我们描述极性的概念，以及与极性相适配的粘合。它们构成通过鼓胀过程得到的单参数族。本节旨在阐释这一图景。

设 $\mathcal{MC}$ 为一族 bc-流形。设 f 为 $\mathcal{M}$的一个粘合。

定义 7.7（极性）。墙 $W \subset \mathcal{M}$ 的一个极点 是指：对于$\mathbb{S}^d$中 W 的每个射影图表，都指定 $\mathbb{RP}^d$ 中一个横截于该图表之像的点，且该点与过渡映射相容。

每个发展映射 $\tilde{W} \to \mathbb{S}^d$ 都会产生一个整体单值化不变的极性。

若一个射影粘合 $\mathcal{M}_f$ 满足：对于任意发展映射 $\tilde{\mathcal{M}}_f \to \mathbb{S}^d$ 和任意墙 $W \subset \partial\mathcal{M}$，$W$ 和 fW 的相应极性重合，则称其适配于给定的极性。

注记 7.8。如果 $\mathcal{M}$ 的所有墙都存在极性，那么存在一个适配于这些极性的射影粘合，当且仅当 f 是 $(d-1)$ 维射影流形之间的射影同构，并且对于任意墙 $W \subset \partial\mathcal{M}$，记 W（分别为 fW）的膨胀特征 为 ρ（分别为 ρ'），有 $\rho = \rho' \circ f_*$。

膨胀特征定义如下：对于每个墙 $W \subset \partial\mathcal{M}$和发展映射 dev：$\tilde{W} \to \mathbb{S}^d$，其像张成 $V \subset \mathbb{R}^{d+1}$，$W$ 的膨胀特征 是由整体单值化表示诱导的 $\pi_1(W)$ 到一般线性群$(\mathbb{R}^{d+1}/V)$ 的表示的行列式。它是一个实特征，与 dev 的选择无关。

如果 $\mathcal{M}$ 是双曲的，那么膨胀特征均为平凡，极性是洛伦兹双线性形式下的正交子空间，而唯一的双曲粘合与这组选定的极性相适应。

如果 $\mathcal{M}_f$ 是流形 M的双，且M 的所有边界分支都存在极性，那么就存在一种与这些极性相适应的自然射影粘合。

最后，我们来回顾一下膨胀的定义。

定义 7.9（膨胀）。假设 $\mathcal{M}$ 的每面墙都存在极性，并且 $\mathcal{M}_f$ 存在与这些极性相适应的射影粘合，其图册为 $\mathcal{A}$。设$(\mu_W)_{W\subset\partial\mathcal{M}}$是一族正实参数。$\mathcal{M}_f$沿这些极性、参数为$(\mu_W)_{W\subset\partial\mathcal{M}}$的膨胀是包含以下坐标图的射影粘合。

对于任意点 $p \in \mathcal{M}_f$（它是 $\bar{p} \in W \subset M \subset \mathcal{M}$ 和 $f(\bar{p})$ 的像）$\in fW \subset M' \subset \mathcal{M}$，以及定义在足够小的

邻域 $U \sqcup U' \subset M \sqcup M'$ 上的任意图册 $B \circ \phi_{|U} \cup B' \circ \phi_{|U'}$，映射 B 是膨胀后的图册，其中 B'（分别为 ϕ）是固定 $U \cap W($ $\phi)$（分别为 $U' \cap fW(\mu_W^{-1})$）且特征值为 μ_{fW}^{-1}（分别为 μ_W^d ）的线性变换，并且也固定极性，其特征值为 μ_{fW}^d（分别为 ）。

7.3. 拼接的凸性。 在描述了 bc-流形的可容许粘合如何产生射影锥流形之后，我们现在转而探讨如何确定这种流形（的光滑部分）何时是凸的，以及它分解为拼接块后何时对应于 $\mathbb{S}^d$ 中某个凸域的周期镶嵌。

为此，我们采用可容许射影粘合的术语，重新审视前几节的结果，并回顾 7.1 节。

首先，我们考察单个瓦片 $\mathbb{M} \in \mathcal{MC}$，这是一个真凸 bc-流形，其万有覆盖为 $\tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{S}^d$，并研究它的几何性质。我们描述它满足命题 5.1 的条件。

7.3.1. 余维*1*和余维*2*分层。 设 $\mathbb{M}$ 是一个真凸 bc-流形，其万有覆盖为 $\tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{S}^d$。首先，我们必须确保墙 $\tilde{}$ 和 $\mathbb{M}$ 的角对应于 $\mathbb{M}$ 的面。

定义 7.10（完备的壁与角）。 $\mathbb{M}\tilde{}$的墙（分别为角）称为完备的，若 $\mathbb{M}$ 中的任意一个提升都由一个完整的余维 1 面（分别为余维 2 面）构成。

墙与角的完备性并不难验证：

事实7.11。 有如下结论：

- 任何关于双曲度量完备的凸双曲 *bc*-流形，其墙与角也完备，意义如前一定义所述。
- 任何紧致 的适当凸 *bc*-流形都有完备的墙与角。

证明。 证明分为关于（$d-2$）和（$d-1$）流形的若干断言。第一个断言是经典结果，此处不予证明。它意味着完备凸双曲 bc-流形具有完备角。

断言 1。 任何在度量意义下完备的双曲（$d-2$）-流形，在（G， X）-结构意义下也完备：发展映射是映射到 $\mathbb{H}^{d-2}$ 上的双射。

接下来我们介绍关于双曲流形的另一个经典结果。它意味着完备凸双曲 bc-流形具有完备墙。

断言 2。 设 N 是一个边界全测地的完备双曲（$d-1$）流形，其万有覆盖为 $\tilde{N} \subset \mathbb{H}^{d-1}$。那么， $\tilde{N}$ 是由 $\tilde{N}$ 的墙所界定的 $\mathbb{H}^{d-1}$ 的最大凸子集。

现在我们转向这一事实的第二点。以下经典事实表明，紧致适当凸 bc-流形具有完备角。为方便读者，我们回顾一下证明。

断言3。设 Ω/Γ 是一个闭凸射影（$d-2$）流形。那么，在$\mathbb{S}^{d-2}$的 Γ-不变真凸开子集之中，Ω在包含关系下是极大的。

证明。设 Ω′ 是 Γ-不变的，且包含 Ω。只需证明 Ω 在 Ω′ 中是闭的。设 $x \in \Omega'$ 是 $x_n \in \Omega$ 的极限。由紧致性，存在 $\gamma_n \in \Gamma$，使得 $\gamma_n x_n$ 收敛到 $y \in \Omega$。由于 Γ 在 Ω′ 上适当地作用，序列 γ_n在 Γ 和 $x \in$Ω 中收敛。□

最后，最后一个断言蕴含紧致真凸 bc-流形具有完备墙。

断言4。设 N 是一个带全测地边界的紧致真凸射影（$d-1$）流形，其万有覆盖为 $\tilde{N} \subset \mathbb{S}^{d-1}$，全纯-~同胚为 $\Gamma < \mathrm{Aut}(\mathrm{int}(N))$。那么，int($N$) 在由 $\tilde{N}$ 的墙的张成空间所界定的 Γ-不变真凸开子集之中是极大的。

证明。令 Ω $=$ int($\tilde{N}$)，并令 Ω′ $\subset \mathbb{S}^{d-1}$ 为 Γ-不变、开、适当地凸，且由 N 的墙的张成空间所界定。只需证明 Ω 在 Ω′ 中是闭的。令 $x \in$Ω′ 为 $x_n \in \Omega$ 的极限。由紧致性，存在~$\gamma_n \in \Gamma$，使得 $\gamma_n x_n$ 收敛到某个 $y \in N$。由于 Γ 在 Ω′ 上适当地作用，若 $y \in$Ω，则 γ_n 在 Γ 中收敛，且 $x \in \Omega$。假设 y 位于 N 的一面墙 ~ ~ ~W 中（即 $N \cap \partial N$ 的一个分支）。

~考虑一个以 y 为中心且包含于 N中的小闭半球 B，其边界分解为 $\partial B = (B \cap W) \sqcup \Sigma$，其中 $\Sigma \subset$ Ω。可以验证，当 n 足够大时，$\gamma_n x_n \in$ int(B)，且希尔伯特距离$d_{\Omega'}$($\gamma_n x_n$，Σ) 有一个与 n无关的下界 ϵ。注意，$d_{\Omega'}$ ($\gamma_n x_n$，$\gamma_n x$) $= d_{\Omega'}$(x_n，x) 趋于零，因此当 n 足够大时小于 ϵ。于是 $\gamma_n x \in$ int(B)；否则 $[\gamma_n x_n, \gamma_n x]$ 会穿过 Σ（它不能穿过 $B \cap W$），且长度至少为 ϵ。因此 $x \in$ Ω。□

至此，事实的证明就完成了。 □

7.3.2. 幽灵分层。设 $\mathbb{M}$ 是一个真凸 bc-流形，我们现在假设它具有完备的墙与角，它们将提升为万有覆盖 $\tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{S}^d$ 的余维 1 和余维 2 的面。

接下来要讨论的问题是，可能存在并非来自角的余维 2 面。

~**定义 7.12**（幽灵角）。$\mathbb{M}$ 的一个幽灵分层是一个面，它是至少两个闭墙的交，但不是闭角。若其余维为 2，则称为幽灵角。

注记7.13。以下是幽灵分层的一个例子：令 $C \subset \mathbb{R}^3$ 为由向量 $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$，满足 $v_1, v_2, v_3 > 0$或 $v_1, v_2 > 0 = v_3$ 或 $v_1, v_3 > 0 = v_2$，并令 $T := \mathbb{S}(C)$。那么，$\{[e_1]\}$是 T 的一个幽灵角，也是其在任意具有正递减对角元的对角矩阵作用下的紧致商空间 M。此外，$T \cup \{[e_1]\}$ 是一个具有完备墙与角且没有幽灵角的适当凸 bc-流形；但由于它是紧致的，M 不能描述为从一个具有完备墙与角且没有幽灵角的适当凸 bc-流形中去掉角所得的补集。

再次，在双曲情形下，有一个简单的判据可以检验是否不存在幽灵分层：

事实 7.14。设 $\mathbb{M}$ 是一个完备凸双曲 *bc*-流形。那么：

- 任何幽灵层的维数均为 *0*。
- 若 $\mathbb{M}$ 是紧致的，则不存在幽灵层。

证明。万有覆盖 $\mathbb{M}$ 是双曲空间 $\mathbb{H}^d$ 的一个具有非空内部的闭凸子集。设 S 是一个幽灵层。

它是 $\tilde{\mathbb{M}}$ 的一个真面，且位于 $\partial\tilde{\mathbb{M}} \smallsetminus \tilde{\mathbb{M}} \subset \partial\mathbb{H}^d$ 中，因此是一个点，因为 $\mathbb{H}^d$ 是严格凸的。

反设 $\mathbb{M}$ 是紧致的。那么存在 $r > 0$，使得对于 $\mathbb{H}^d$ 中任意半径为 r 的球 B，如果 B 与 $\tilde{\mathbb{M}}$ 的两面墙相交，那么 $\tilde{}$ 这两面墙共用一个角，且 B 不与其他墙相交。固定 $p \in \mathbb{M}$。

如果有三面墙与 S 相邻，那么以 $[p, S$ 中靠近 S）的某点为中心、半径为 r 的任意球都会与这三面墙相交，这与 r 的定义矛盾。

$\tilde{}$ 因此，S 是 $\mathbb{M}$ 的两面墙 $\overline{W_1, W_2}$ 的交点 $W_1 \cap W_2$。和之前一样，以 $[p, S$ 中靠近 S）的某点为中心、半径为 r 的任意球都会与$\tilde{}$这两面墙 W_1 和 W_2 相交，使得 S 成为 $\mathbb{M}$ 的一个实际角，这显然荒谬。□

7.3.3. 局部凸性。现在，我们可以将命题 5.1 的局部凸性条件翻译出来。

定义 7.15（包含条件）。设 M 是一个真凸 b-流形。我们称与 M $\tilde{}$ $\tilde{}$ 的墙 W 相关联的极点满足包含条件：对于 M 中 W 的任意提升 W，以及任意发展映射 dev：$\tilde{M} \to \mathbb{S}^d$，dev 的像都包含于 dev($W$) 与该极点的凸包中。

事实 7.16。设 $\mathcal{M}$ 是一组带有满足包含条件的极点的真凸 *b*-流形，并考虑一种相容的射影粘合。则万有覆盖中任意两个相邻胞腔的并集都是凸的。

证明。这是注记5.6的推论。 □

对于凸双曲流形，包含条件源于对角的角度假设。

事实 7.17。 设 $\mathbb{M}$ 是一个完备双曲 *bc*-流形， W 是一面墙，并且所有相邻角的角度均不超过 $\pi/2$。则 W 的双曲极点满足包含条件。

证明。 假设 $\tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{H}^d$ 和 $\tilde{W} \subset \mathbb{H}^{d-1}$。设 $p \in \mathbb{S}^d$ 是两个双曲极性中的一个，使得 $\tilde{\mathbb{M}}$ 与锥 $C = \mathcal{CH}(p, \mathbb{H}^{d-1})$ 相交。设 $X \subset \mathbb{H}^d$ 是以 $\mathbb{H}^{d-1}$ 为边界且包含 $\tilde{\mathbb{M}}$ 的半空间。

事实 7.17是以下经典事实的推论：

- X 关于 $\mathbb{H}^{d-1}$ 和 p 满足包含条件，即 $X \subset C = \mathcal{CH}(\mathbb{H}^{d-1}, p)$。

- 对于任意 $x \in \mathbb{H}^{d-1}$，经过 x 和 p 的射影直线与 $\mathbb{H}^d$恰好交于一条测地线，这条测地线垂直于 $\mathbb{H}^{d-1}$ 并经过 x。

事实上，设 $\{W_i\}_i$ 为与W相邻的 $\mathbb{M}$ 的墙的集合。对于每个i，令 $H_i =$ 张成空间$(\tilde{W}_i) \cap \mathbb{H}^d$，令 $H_i' \subset \mathbb{H}^d$ 为在 $\tilde{W} \cap \tilde{W}_i$处垂直于$\mathbb{H}^{d-1}$ 的超平面，并令 X_i 和 X_i' 为边界为 H_i和 H_i' 且包含 $\mathbb{M}$的半空间。

那么 $Y' := X \cap \bigcap_i X_i'$是 W在 $\mathbb{H}^{d-1}$上的正交投影的原像，并且它相对于 $Y' \cap \mathbb{H}^{d-1} = \tilde{W}$满足包含条件，即 $X' \subset \mathcal{CH}(\tilde{W}, p)$。

此外， Y'包含 $Y := X \cap \bigcap_i X_i$包含 $\mathbb{M}$，因为所有与 W 相邻的角的角度都不超过 $\pi/2$。因此， $\mathbb{M}$ 也必须满足包含条件。□

7.3.4. 全局凸性。 现在我们使用前几节中引入的术语，重新表述命题 5.1 。

定理 7.18。 设 $\mathcal{MC}$ 为一族 *bc*-流形。设 f 为 $\mathcal{M}_f$上的一个射影粘合。假设：

(1) $\mathcal{M}_f$ 是连通的。*(2)* 所有胞腔都是真凸的，具有完备的墙与角（定义 *7.10*），且没有幽灵角（定义 *7.12*）。*(3)* 万有覆盖中任意两个相邻胞腔的并集都是凸的（例如，当存在满足包含条件的极点时即可满足）。*(4)* 每个奇点都可在中一致化（见命题 *4.7*）。

那么 $\mathcal{M}_f$ 是凸的。

证明。 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 为与 $\mathcal{M}_f$的粘合相关联的胞腔图，其中每个 $v \in \mathcal{V}$ 对应于 $\mathcal{M}_f$ 的一个胞腔，每个 $e \in \mathcal{E}$ 对应于 $\mathcal{M}_f$ 的一面（参见定义 7.1 和第7.1.1节）。固定一个发展映射

$\widetilde{\mathcal{M}}_f \to \mathbb{S}^d$，对每个 $v \in \mathcal{V}$，令 D_v 为发展映射将 v映到 $\mathbb{S}^d$ 中的像的闭包。

只需检查 $(\mathcal{G}, \{D_v\}_{v\in\mathcal{V}})$ 满足命题 5.1的假设，即它是一个粘合工具包（定义 5.3）。注意， $\mathcal{G}$ 的连通性直接由性质（1）得出。

命题 （1）的假设5.1。这是由以下事实得出的： $\mathcal{M}$ 的墙是完备的（性质（2））以及性质（3）。

命题 5.1 的假设（2）。设 $p = (v_1, v_2, \dots, v_n) \subset \mathcal{G}$是一条路径，满足对于每个 i， $F_p := D_{v_1} \cap \cdots \cap D_{v_n}$是 D_{v_i}的一个余维 2 面。由于 $\mathcal{M}$ 没有幽灵角（性质（2）），$\mathrm{int}(F_p)$ 是 $\mathcal{MC}_f$的一个角的提升。因此， p 可延伸为一条双无限路径 $q = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，使得 $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} D_{v_k} = F_p$。于是，由命题 4.7，性质（4）推出序列 $(D_{v_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足命题 5.20 的假设；根据该命题的结论， F_p 包含于 $\mathbb{S}^d$ 的一个半空间的边界中，且该半空间包含 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_{v_k}$，这正是命题 5.1 所要求的。□

7.4. **粘合的全测地爆破**。正如引理7.6所示，容许的射影粘合会产生射影锥流形。因此，正如第4节所证明的，在角的子午圈整体单值化满足适当条件时，我们可以将每个奇点爆破为一个全测地边界分支，并且还可以根据角的几何对这些分支作出明确描述。下一定理将阐述这一内容。

定理 7.19。 在定理*7.18*的设定下，进一步假设

- $\mathcal{M}_f$ 是真凸的（例如，若其中一个胞腔具有不可约整体单值化）。
- 的每个奇点 $\mathcal{MC}_f$ 都是特殊的（定义 *4.10*）。

则有以下结论：

(1) 奇点的全测地爆破 N （定义 $\mathcal{MC}_f$ *4.13*）具有完备墙，且没有幽灵角。若$\mathcal{M}$ 中的每个胞腔都没有幽灵分层，则 N也没有幽灵分层。

(2) 对于 W 的每一面墙 N，爆破角 $\mathfrak{C}$ 存在一个 $\widetilde{}$的开发映射 $\widetilde{N}$，将 W 映到$\mathrm{Conv}(\mathfrak{C}, [e_d])$ 的内部，并且 $\pi_1(W)$ 的整体单值化由该角的整体单值化生成

$$\gamma \in \pi_1(\mathfrak{C}) \longmapsto \begin{pmatrix} \phi(\gamma)^{-1}\rho'(\gamma) & \\ & \phi(\gamma)^{\frac{d-1}{2}}\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$$

以及子午线的

$$\begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & & \\ & \mu^{\frac{d-1}{2}}\lambda & \epsilon \\ & & \mu^{\frac{d-1}{2}}\lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}),$$

其中 ρ' 是一个态射， ϕ 是一个正特征， $\lambda \geq 1$, $\epsilon = 1$ 若 $\lambda = 1$, 否则为 0 ，且 $\mu > \lambda^{\frac{d+1}{2}}$ 。*(3)* 若 $\lambda > 1$ ，则 $[e_{d+1}]$ 给出 W 的一个极性，该极性满足包含条件。

证明。 我们从描述将 W 映到凸包($\mathfrak{C}$， $[e_d]$)的 N 发展映射开始。

根据引理 7.6， $\mathcal{MC}_f$ 是一个锥流形： $\mathfrak{C}$ 中的每一点都有一个邻域，可嵌入到管 $\mathbb{T} = T \sqcup \mathbb{S}^{d-2}$中。因此，我们可以找到 $\mathfrak{C}$ 的一个管状邻域 $\mathbb{U} \subset \mathcal{MC}_f$ ，以及一个发展映射 $\mathbf{dev}_1 : \mathbb{U} \to \mathbb{T}$，其整体单值化属于 $\mathbb{T}$的自同构群。由于 $\mathcal{M}$ 的每个胞腔都是真凸的， $\mathfrak{C}$ 在 $\mathbb{S}^{d-2}$ 中可一致化，因此 $\mathbf{dev}_1$ 在 $\tilde{\mathfrak{C}}$上是单射。适当缩小 $\mathbb{U}$ 后，我们可以假设 $\mathbf{dev}_1$ 是单射，这就将 $\mathbb{U}$ 识别为 $\mathbf{dev}_1(\mathbb{U})$ 的一个子集: $= \mathbb{V} \subset \mathbb{T}$ （注意， $\mathbb{V}$ 是 $\mathbb{U}$的万有覆盖，但光滑部分 V 并非光滑部分 U 的万有覆盖）。

令 π： $T^b \to \mathbb{T} = T \cup \mathbb{S}^{d-2}$ 为 $\mathbb{T}$ 的全测地爆破。根据定义， V^b 对 $\mathbb{V}$ 的全测地爆破为 $\pi^{-1}(\mathbb{V})$。此外， U^b 对 $\mathbb{U}$ 的全测地爆破的万有覆盖存在一个发展映射，记为 $\mathbf{dev}_2$： $\tilde{U}^b \to V^b$，其整体单值化由 $\mathbb{T}$ 的自同构组成。

存在一个发展映射 $\mathbf{dev}_3$： $\tilde{T}^b \to \mathbb{S}^d$，将边界映射到 $\mathbf{Conv}(\mathbb{S}^{d-2}, [e_d])$ 上，使得子午线的整体单值化具有如下形式

$$g = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & & \\ & \mu^{\frac{d-1}{2}}\lambda & \epsilon \\ & & \mu^{\frac{d-1}{2}}\lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}),$$

其中，当 $\lambda = 1$ 时 $\lambda \geq 1$、 $\epsilon = 1$ ，否则为 0；并且 $\mu \gg \lambda^{\frac{d+1}{2}}$ ，因为根据假设， $\mathcal{MC}_f$ 的每个奇点都是特殊的。

映射 $\mathbf{dev}_2$ 可提升为发展映射 $\mathbf{dev}_4$： $\tilde{U}^b \to \mathbb{S}^d$。

将 $\mathbf{dev}_4$ 限制在 $\mathcal{M}_f$ 的一个胞腔 X 上时（ $\mathbb{X}$ 的光滑轨迹，它是 $\mathcal{MC}$ 中一个胞腔的万有覆盖），可将其延拓为 $\mathbb{X}$ 的发展映射 $\mathbf{dev}_5$ ，将 $\tilde{\mathfrak{C}}$ 映射到 $\tilde{C} \subset \mathbb{S}^{d-2}$ 上，而后者最终与 X 无关。

映射 $\mathbf{dev}_4$ 将 $\tilde{U}^b$ 的边界映到凸包（$\tilde{C}$， $[e_d]$），且子午线的整体单值化为 g，而 $\mathfrak{C}$ 的整体单值化属于 **Aut(B)**，并与 g可交换，因此它保留 $\mathbb{S}^{d-2}$ 和 $[e_d]$ 以及张成空间（$[e_d]$， $[e_{d+1}]$）。由于此整体单值化还必须保留映射 $\mathbf{dev}_5$ 对 $\mathbb{X}$ 中与 相邻的墙的像 $\mathfrak{C}$，它必须固定张成空间（$[e_d]$， $[e_{d+1}]$）中的每一点，因此必为定理7.19所述的形式。

根据命题 1 的5.22，凸包(C， $[e_d]$) 对应于相关粘合工具包 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 的一个无穷远处的胞腔。命题 5.22的性质 2还指出，这样的无穷远处的胞腔是∂N的一个完整闭面，这意味着 N 具有完备墙。

根据命题 1 的5.19 以及上述内容， N(N的至少两个闭墙的交) 实际上是的至少两个角的交 $\mathcal{MC}_f$。这意味着 N 没有幽灵角；此外，如果 $\mathcal{M}$ 没有幽灵层，那么它也完全没有幽灵层。

每个 N 位于双曲 SL_2角奇点上方的墙都存在满足包含条件的极点，这直接推论自命题3的性质5.22。 □

注记 7.20。 在定理7.19的设定下，如果每个奇点都有双曲 SL_2角，那么 P 的双倍 N 承载凸实射影结构。

7.5. **粘合的边界分层**。 最后，在对通过适当的可容许粘合得到的凸实射影锥流形的奇点进行膨胀后，我们希望描述其万有覆盖的几何。为此，我们必须理解边界分层。我们借助第5 节中开展的工作来完成这一点，如下一个结果所述：

定理 7.21。 在定理 *7.19*的设定下，假设：

- 对于每个胞腔 $M \subset \mathcal{M}$ 及其万有覆盖 $\tilde{M}$，凡是与墙相接的非平凡面都包含在一面墙中。
- 对于每个胞腔 $M \subset \mathcal{M}$ 及其万有覆盖 $\tilde{M}$，凡是与角相接的非平凡面，要么是与该角相邻的一面墙，要么包含在该角中。
- 不存在幽灵分层。
- $\mathcal{MC}_f$ 是紧致的。

那么，相应的粘合工具包满足命题 *5.28*的假设，因此，任何不是全测地爆破之墙的无穷远处的胞腔 N都由一个极端 $\mathcal{C}^1$ 点组成。

证明。 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是与 $(\mathcal{M}, f)$ 相应的粘合工具包，因此 $\tilde{M}_f = \mathring{X}$其中 $X := \bigcup_{D\in\mathcal{V}} D$。下面说明如何由引理 5.26 和 5.27以及紧致性假设推出上述定理。

通过采用合适的参数化，在 $\mathcal{MC}_f$ 上固定一种延伸 $\mathcal{M}_f$ 光滑结构的光滑结构。同时固定一个黎曼度量。

群 $\Gamma := \pi_1(\mathcal{M}_f)$ 作用于有序对 (D, W) 的集合上，其中 D 是 $\mathcal{G}$ 的一个胞腔，W 是一面相邻的墙。由于 $\mathcal{MC}_f$ 是紧致的，该作用有有限个代表元 (D_1, W_1) ..... (D_n, W_n)。

固定 i。对于 D_i 中每个与 W_i 不相邻的墙 W，以 $\mathrm{Stab}_\Gamma(W_i)$-等变的方式，选取一条从 W_i 到 W 的线段，使其在黎曼度量下长度最短；用 v_W 表示该线段的起始向量（与 W_i 横截），用 $y_W \in W$ 表示其终点。由 $\mathcal{MC}_f$ 的紧致性，我们可以找到一个由与 W_i 横截的向量构成的紧集 K，以及一个集合 $\mathcal{W}_i$，其中包含 D_i 中与 W_i 不相邻的墙 W 的 $\mathrm{Stab}_\Gamma(W_i)$-代表元，使得

$v_W \in K$ 对于任意 $W \in \mathcal{W}_i$。于是存在一个开邻域 U_i 属于W_i，使得 $y_W \notin U_i$ 对于任意 $W \in \mathcal{W}_i$。由引理 5.27，我们可以找到一个开邻域 U_i'属于 W_i，使得 $D_i \smallsetminus U_i'$是凸的，并包含墙于 $\mathcal{W}_i$。由引理 5.26，$(W_i, X, D_i \smallsetminus U_i')$是收缩的。

由紧致性可知，D_i 中邻接于 W_i的墙只有有限多个 $\mathrm{Stab}_\Gamma(W_i)$-代表元 $\{W_{i,j}\}_j$。固定 j。令$D_{i,j}$ 为邻接于$W_{i,j}$和$\mathfrak{C}_{i,j} := W_i \cap W_{i,j}$、且不同于$D_i$ 的胞腔。对于$W_{i,j}$ 中除$\mathfrak{C}_{i,j}$以外的每个角 $\mathfrak{c}$，以 $\mathrm{Stab}_\Gamma(W_i, \mathfrak{C}_{i,j})$-等变的方式，选取一条从$\mathfrak{C}_{i,j}$ 到 $\mathfrak{c}$、且在黎曼度量下长度最短的线段；将该线段的起始向量（横截于$\mathfrak{C}_{i,j}$）记为 $v_\mathfrak{c}$，终点记为 $y_\mathfrak{c} \in \mathfrak{c}$。

由紧致性可知，我们可以找到一个由与$W_{i,j}$相切且横截于$\mathfrak{C}_{i,j}$ 的向量构成的紧集 K，以及一个集合$\mathcal{C}_{i,j}$。其中，$\mathcal{C}_{i,j}$ 是$W_{i,j}$ 中除$\mathfrak{C}_{i,j}$ 以外的角 $\mathfrak{c}$ 的 $\mathrm{Stab}_\Gamma(W_i, \mathfrak{C}_{i,j})$-代表元，并满足对任意$\mathfrak{c} \in \mathcal{C}_{i,j}$，都有 $v_\mathfrak{c} \in K$。于是存在 W_i 的一个开邻域$U_{i,j}$，使得对任意$\mathfrak{c} \in \mathcal{C}_{i,j}$，都有 $y_\mathfrak{c} \notin U_i$。根据引理 5.27，我们可以找到 W_i 的一个开邻域$U'_{i,j}$，使得$D_i \cup D_{i,j} \smallsetminus U'_{i,j}$ 是凸的，并包含邻接于$\mathcal{C}_{i,j}$中某个角、且不同于$W_{i,j}$的墙。根据引理 5.26，$(W_i, X, (D_i \cup D_{i,j}) \smallsetminus U'_{i,j})$是一个可见三元组。

现在我们不再固定 i，j，并令 $\mathcal{K}$ 为形如$(W_i, \bar{X}, M)$的可见三元组集合，其中 $M \subset D_i \smallsetminus U_i'$或$(D_i \cup D_{i,j}) \smallsetminus U'_{i,j}$对某个 i，j成立。

设 A，B，C，D 是 $\mathcal{G}$的胞腔路径，且 $A \cap B \cap C \cap D$ 为空。

- 若 $A \cap B \cap C$ 为空，则执行以下操作。找出 i 和 $g \in \Gamma$，使得$(B, A \cap B) = g(D_i, W_i)$。找出 $W \in \mathcal{W}_i$ 和 $h \in \mathrm{Stab}_\Gamma(W_i)$，使得 $B \cap C = ghW$。然后$(A \cap B, X, C \cap D) \in ghK$；
- 若 $B \cap C \cap D$ 为空，则将上一条应用于路径D, C, B, A，从而$(C \cap D, X, A \cap B) \in$一般线性群$_{d+1}(\mathbb{R}) \cdot \mathcal{K}$；
- 若 $A \cap B \cap C$ 和 $B \cap C \cap D$ 非空，则执行以下步骤。找出 i 和 $g \in \Gamma$，使得 $(B, A \cap B) = g(D_i, W_i)$。找出 j 和$h \in \mathrm{Stab}_\Gamma(W_i)$，使得 $B \cap C = hgW_{i,j}$ 和 $A \cap B \cap C = gh\mathfrak{C}_{i,j}$。找出 $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}_{i,j}$ 和 $k \in \mathrm{Stab}_\Gamma(W_i, \mathfrak{C}_{i,j})$，使得 $B \cap C \cap D = ghk\mathfrak{C}$。于是 $(A \cap B, X, C \cap D) \in ghk\mathcal{K}$。□

8. Hyperbolic building blocks

本节构造双曲构件，作为证明定理 1.1 和 1.2时所需的输入。特别地，我们描述 Bonahon 和 Otal 的结果 [21] 并证明定理 1.8。

8.1. 维数 $d = 3$。

在维数 $d = 3$ 中，构造块的选择具有很大的灵活性。

8.1.1. 三维流形拓扑。 Bonahon 和 Otal 的研究表明，在紧致三维流形（M， ∂M）上，存在一种凸双曲度量，其全测地边界沿某些角发生弯折，且折叠轨迹与一条多曲线重合$\alpha = \alpha_1 \sqcup \cdots \sqcup \alpha_n \subset \partial M$这一问题可归结为一个明确的纯拓扑问题 [21]。

在陈述他们的结果之前，我们先简要回顾三维拓扑中的必要术语和概念。更深入的讨论请参见 [47, 第 9]章。

定义 8.1 （不可约）。 若一个可定向三维流形 M 的每个嵌入的二维球面 $\mathbb{S}^2 \subset M$ 都围成一个三维球 $\mathbb{B}^3 \subset M$，则称其为不可约。

定义 8.2 （无环面）。 若一个可定向不可约三维流形 M 中的每个嵌入的 π_1-单射二维环面 $\mathbb{T}^2 \subset M$ 都与 ∂M的某个分支同位，则称其为无环面。

定义 8.3 （双重不可压缩）。 设 M 是一个边界为 $\partial M \neq \emptyset$的紧致三维流形。本质多重曲线 $\alpha = \alpha_1 \sqcup \cdots \sqcup \alpha_n \subset \partial M$称为双重不可压缩，如果：

(1) 对于
$$\sum_{j \leq n} i(\alpha_j, \partial A) > 0$$
每个正常嵌入本质环带或 Möbius 带（A， ∂A） $\subset$（M， ∂M）。

(2) 对于
$$\sum_{j \leq n} i(\alpha_j, \partial D) > 2$$
每个正常嵌入本质圆盘（D， ∂D） $\subset$（M， ∂M）。

这里， i（•， •）表示 ∂M 上闭曲线之间的几何交数 （见 [47, 第 8]章）。

双重不可压缩多曲线这一概念由 Thurston 在 [60]中引入。众所周知，双重不可压缩多曲线十分常见；事实上，在 ∂M 上的射影测地层空间中存在一个开集 $\mathcal{O} \subset \mathcal{PML}$ （见 Lecuire [42]），其中每条多曲线$\alpha \in \mathcal{O}$ 都满足这一性质。关于（射影）测度层状结构的介绍，见 [47, 第 8] 章。

8.1.2. 带指定角的凸双曲三维流形。 在 (M， ∂M) 上存在双曲结构，这是 Thurston 双曲化定理的推论：

事实 8.4 (Thurston，参见 [38, 定理1。43])。 设 M 是一个边界 $\partial M \neq \emptyset$ 非空的紧致可定向不可约无环面三维流形。设T 是 ∂M 的所有环面分支之并。那么 $M - T$ 具有有限体积的完备凸双曲结构，即 $M - T$ 是

同胚于商空间 $\mathcal{C}/\Gamma$，其中 $\mathcal{C} \subset \mathbb{H}^3$ 是一个 Γ-不变凸集，且 $\Gamma <$同构群$^+(\mathbb{H}^3)$ 是一个离散无挠子群。

如果 M 具有事实 8.4 中所述的有限体积凸双曲度量，那么它具有一个由此类度量构成的大型变形空间。

特别是，Bonahon 和 Otal 证明了：

事实 8.5 (Bonahon–Otal [21, 定理 2])。设 M 是一个边界非空的紧致可定向 3-流形 $\partial M \neq \emptyset$，满足 M 不可约且无环面。设 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n \subset \partial M$ 为一条多曲线，并设 θ_1、$\cdots$、$\theta_n \in [0, \pi]$为一组角。假设以下性质成立：

(1) 我们有

$$\sum_{j \leq n} \theta_j i(\alpha_j, \partial A) > 0$$

对于每个正常嵌入本质环带或莫比乌斯带$(A, \partial A) \subset (M, \partial M)$。

(2) 我们有

$$\sum_{j \leq n} \theta_j i(\alpha_j, \partial D) > 2\pi$$

对于每个正常嵌入本质圆盘$(D, \partial D) \subset (M, \partial M)$。

设 $\mu \subset \alpha$ 为角为 π的曲线子集。那么，$M - \mu$上存在一个凸双曲度量，且在同痕意义下唯一，使得

- 每条曲线 $\alpha_j \subset \alpha - \mu$ 都是测地线。
- $\partial M - \alpha$ 的每个分支的闭包都是全测地的。
- α_j 的相邻分支之间的折叠角为 $\pi - \theta_j$，其中对象为 $\alpha - \mu$。

- 每条曲线 $\alpha_j \subset \mu$ 都是一个秩一尖点。

事实 8.5 的表述没有采用定理 2 中使用的相同语言，[21], 但与之等价。我们采用了适合本文的语言来表述。

赋予 M 这样的双曲度量后，它便是一个具有全测地边界、指定角 $\alpha_j \subset \partial M$ 及角度 θ_j的双曲三维流形。

显然可以验证，若多曲线 $\alpha = \alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_n$ 是双重不可压缩的，则只需选取非常接近 θ_j 的角 π，即可确保事实 8.5的要求也得到满足。

请注意，事实 8.5 保证了角处角度的选择具有一定自由度。这一重要特性将用于在选择全测地边界环面的射影结构和整体单值化时提供一定程度的灵活性 T_j 定理 1.2中。

8.1.3. 变形空间。 在 M 上具有全测地边界和角，或在多曲线 $\alpha = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ 处具有秩一尖点的双曲度量的同痕类空间，带有一种自然拓扑；该拓扑由整体单值表示 ρ 的代数收敛拓扑诱导而来： $\pi_1(M, \star) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$，其中 $\star \in \mathrm{int}(M)$ 是固定的基点。Bonahon 和 Otal 的下一个结果根据角度的收敛对度量的收敛作出了简明描述：

事实 *8.6*（*Bonahon–Otal* [21, 定理。 24]）设 $\alpha = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n \subset \partial M$ 是一条双重不可压缩多曲线。将每个在 M 上、边界为全测地边界并在多曲线 α 处带有角，或带有秩一尖点的双曲度量，映射到其折叠角 $(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in (0, \pi]^n$ 的映射，是到开多胞体 $P_\alpha \subset (0, \pi]^n$ 上的一个同胚。那些在曲线 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_k}$ 处带有秩一尖点的度量所构成的像，包含于满足 $\theta_{j_1}, \cdots, \theta_{j_k} = \pi$ 的子集内。

再次强调，事实 8.6 的表述并非字面上与 [21, 定理。 24],相同，但与之等价。

使用另一组参数，Choi 和 Series [28] 证明，边界折叠轨迹的长度给出了 Bonahon 和 Otal [21]所研究的同一度量空间的局部参数化。

事实 8.7 (Choi–Series [28, 定理 A]). 设 $\alpha = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n \subset \partial M$ 为一条双重不可压缩多曲线。将 M 上每个在多曲线 α 处具有全测地边界与角或秩一尖点的双曲度量映射到折叠长度 $(\ell_1, \cdots, \ell_n) \in [0, \infty)^n$ 的映射是单射局部同胚。那些在曲线 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_k}$ 处具有秩一尖点的度量之像包含于满足 $\ell_{j_1}, \cdots, \ell_{j_k} = 0$ 的子集中。

事实2.1引言中的内容是事实8.6 和8.7 的组合（注意，折叠角等于 π 减去角点角）。

8.2. **维数** $d \geq 3$。 本节证明定理1.8。

为方便读者，我们简要回顾一下目标：我们希望找到一个闭双曲 d流形 M，其中包含 k 全测地连通嵌入超曲面 N_1， $\cdots$， N_k 它们两两相交于 $C = N_i \cap N_j$一个（固定的）余维 2 连通全测地子流形，并且对于每个 $j \leq k$ （指标模 k），交角均为 $\angle N_j N_{j+1} = \pi/k$ 。此外，我们希望这些超曲面 N_j 两两等距，且由 M 的一个循环等距变换 ρ 相互联系；该变换逐点固定 C，并将 ρ（N_j）映射到 $= N_{j+1}$。

当维数为 $d \geq 4$时，双曲 d-流形中的全测地超曲面图案可以通过算术技巧和算术格的可分性性质构造出来，方法与 Gromov-Thurston [32]和 Kapovich [39]所采用的方法相同；事实上，我们的构造正是受此启发。设

需要指出的是，虽然我们无法很好地控制这些例子的拓扑和几何性质，但关键的是，我们可以确保满足以下两项性质：图案及交处的角均受到控制。

我们的策略如下：对于每个 k，我们考虑一个明确给出的余紧算术格 $G < \mathrm{SO}_0(d,1)$，它由一个合适的二次型定义q。我们首先明确构造一个凸余紧子群 $Q < G$，使得 $\mathbb{H}^d/Q$ 按构造包含所需构型，其中的 k 全测地嵌入超曲面 N_1、$\cdots$、N_k 恰好沿一个余维 2 的全测地角相交，$C = N_1 \cap \cdots \cap N_k$ 其角度为$\angle N_j N_{j+1} = \pi/k$。然后，我们利用 Bergeron、Haglund 和 Wise 所证明的 G 的强可分离性 [15]，将 $N_1 \cup \cdots \cup N_k$ 嵌入到 $\mathbb{H}^d/G$的一个有限覆盖中。

我们先介绍一些标准算术流形，它们是构造的起点。

8.2.1. 由二次型得到的算术流形。从现在起，设 $k \geq 2$为一个固定整数。

考虑数域 $F := \mathbb{Q}(\cos(\pi/k), \sin(\pi/k))$。它是 $\mathbb{Q}$ 的全实扩张，也就是说，每个域嵌入 $F \to \mathbb{C}$ 的像都包含于 $\mathbb{R}$ 中。我们用 $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ 表示 $r = \deg(F/\mathbb{Q})$ 个实嵌入 $\sigma_j\colon F \to \mathbb{R}$，其中 σ_1 是平凡嵌入 $\sigma_1(x) = x$，对每个 $x \in F$ 均成立。

令 $\mathcal{O} \subset F$ 为该域的整数环。一个标准事实是，每个 $x \in F$ 都可以写成 $x = \frac{a}{b}$，其中 $a \in \mathcal{O}$ 且 $b \in \mathbb{N}$。

引理 8.8。存在 $\tau \in \mathcal{O}$ 使得

(1) $F = \mathbb{Q}(\tau)$。*(2)* $\tau = \sigma_1(\tau) > 0$。*(3)* 对每个 $j \geq 2$, $\sigma_j(\tau) < 0$。

证明。取 τ_1、$\cdots$、$\tau_r \in F$，使得 $\sigma_j(\tau_j)$ 两两不同，且 $\sigma_1(\tau_1) > 0$，并且对每个 $j > 1$, $\sigma_j(\tau_j) < 0$。令 $\epsilon > 0$ 小于 $\min_{j \leq r}\{|\sigma_j(\tau_j)|\}$ 和 $\min_{i<j}\{|\sigma_i(\tau_i) - \sigma_j(\tau_j)|\}$。根据弱逼近定理（见 [48, 第 7.20] 定理），对 r 绝对值 $|\bullet|_j := |\sigma_j(\bullet)|$ 应用该定理，可得 $\tau \in F$ 使得 $|\sigma_j(\tau) - \sigma_j(\tau_j)| < \epsilon$。根据我们对 ϵ 的选择，$\sigma_1(\tau)$ $\cdots$、$\sigma_r(\tau)$ 两两不同；特别地，τ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 $r = \deg(F/\mathbb{Q})$，这意味着 $F = \mathbb{Q}(\tau)$。此外，根据我们对 ϵ 的选择，对每个 $j > 1$，还有 $\sigma_1(\tau) > 0$ 且 $\sigma_j(\tau) < 0$。□

考虑惯性指数为 $(n, 1)$ 的二次型

$$q(x) := x_1^2 + \ldots + x_d^2 - \tau x_{d+1}^2.$$

令 $\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$ 为保持双曲面的、系数在 $\mathcal{O}$ 中的 q 的保定向等距变换群

$$\mathbb{H}^d := \{x \in \mathbb{R}^{d,1} \,|\, q(x) = -1, x_{d+1} > 0\}.$$

引理 8.9. $\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}} < \mathrm{SO}(q)$ 是离散的，并在 $\mathbb{H}^d$ 上余紧地作用。

证明. 这来自所谓的限制标量构造（参见[12, 练习 5§2.1]），该构造要求二次型

$$q^{\sigma_j} := x_1^2 + \ldots + x_d^2 - \sigma_j(\tau) x_{d+1}^2.$$

对于 $j > 1$， q^{σ_1} 的惯性指数为（d，1）（由引理8.8保证）。□

我们将研究闭的定向双曲 d-流形，它们是 $\mathbb{H}^d$ 被 $\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$的无挠有限指数子群商掉后得到的。这类群由塞尔伯格引理和马尔采夫定理保证大量存在（见 [50]）。$\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$ 群还具有强得多的子群可分性性质，稍后我们将用到这些性质：

事实 8.10 (Bergeron–Haglund–Wise [15, 定理 1。4])。 存在一个无挠有限指数子群 $G < \mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$，使得其每个凸余紧子群 G 都是可分的。

固定这样一个 $G < \mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$。

我们简要回顾可分性的定义：

定义 8.11 （可分的）。 群 A 的子集 $S \subset A$ 称为可分的，如果对于每个 $g \in A - S$，都存在一个有限指数子群 $A' < A$，使得 $S \subset A'$ 且 $g \notin A'$。

考虑超平面

$$H := \{x \in \mathbb{R}^{d,1} \,|x_1 = 0\}$$

以及余维 2 平面

$$V := \{x \in \mathbb{R}^{d,1} \,|x_1 = x_2 = 0\}.$$

令 ρ 为绕 V 的 π/k 旋转

$$\rho := \begin{pmatrix} \cos(\pi/k) & -\sin(\pi/k) & \\ \sin(\pi/k) & \cos(\pi/k) & \\ & & \mathbb{I}_{d-1} \end{pmatrix}.$$

注意， $\rho \in \mathrm{SO}(q)_F$。这意味着：

引理 8.12. 子群

$$G \cap \rho G \rho^{-1} \cap \cdots \cap \rho^{2k-1} G \rho^{-(2k-1)}$$

在 G 中具有有限指数，并且被 ρ 正规化。

证明。 回想一下，每个 $x \in F$ 都可以写成 $x = \frac{a}{b}$，其中 $a \in \mathcal{O}$ 是 F 的整数环，且 $b \in \mathbb{N}$。对于每个 $1 \leq j \leq 2k$，将 ρ^j 的每个元素写成 $\mathcal{O}$ 中的一个元素与 $\mathbb{N}$ 中的一个元素之比，并令 $D \subset \mathbb{N}$ 为分母的有限集合（注意，对于每个 $0 \leq j \leq 2k$，都有 $\rho^{-j} = \rho^{2k-j}$）。令 $\delta \in \mathbb{N}$ 为 D 中所有元素的乘积。

令 $I < \mathcal{O}$ 为由 δ^2 生成的理想。

特别地，由于 $\mathcal{O}$ 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-模（见 [48, 推论 2。30]），$\mathcal{O}/I$ 是有限环 $\mathbb{Z}/\delta^2\mathbb{Z}$ 的有限扩张，因此它本身也是有限环。

考虑 G 的同余子群

$$G_\delta := \ker(G < \mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}} \to \mathrm{SL}_{n+1}(\mathcal{O}/I)).$$

G_δ 在 G 中的指数有限。每个矩阵 $A \in G_\delta$ 都可以写成 $A = I + B$，其中 B 的每个元素都具有 $\delta^2 u$ 的形式，其中某个 $u \in \mathcal{O}$。因此，矩阵 $\rho^j A \rho^{-j} = I + \rho^j B \rho^{-j}$ 的系数属于 $\mathcal{O}$，并保持 q 不变。换言之，由 ρ^j 共轭所诱导的单射同态为 $G_\delta \to \mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$。

注意，$\rho^j G_\delta \rho^{-j} < \mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$ 作为 $\mathrm{SO}(q)$ 中的余紧子群，在 $\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$ 中的指数有限。

由于交 $G \cap \rho G \rho^{-1} \cap \cdots \cap \rho^{2k-1} G \rho^{-(2k-1)}$ 包含有限指数子群 $G_\delta \cap \rho G_\delta \rho^{-1} \cap \cdots \cap \rho^{2k-1} G_\delta \rho^{-(2k-1)}$ 的交，因此它在 G 中的指数有限。□

请回忆，可分性会传递到子群，这意味着，如果 S 在 A 中可分，且 $B < A$，那么 $S \cap B$ 在 B中可分。因此，至多将G 替换为引理 8.12所给出的交，我们可以假设 G 由 ρ正规化。从现在起，我们假设情况确实如此。

8.2.2. 乒乓论证。现在我们构造一个凸余紧子群 $Q < G$，使得 $\mathbb{H}^d/Q$ 包含所需的超曲面配置。

请回忆，$H \subset \mathbb{H}^d$ 是超平面 $\{x \in \mathbb{R}^{d,1} \,|\, x_1 = 0\}$。

令 K 表示等距变换群 $K := G \cap \mathrm{SO}(q|_H)_{\mathcal{O}}$，其中我们将 $\mathrm{SO}(q|_H)_{\mathcal{O}}$ 视为自然包含于 $\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$之中的子群。注意，$K$ 在 H 上余紧作用，因为 $\mathrm{SO}(q|_H)_{\mathcal{O}}$ 在 H 上余紧作用（由引理 8.9），且K 是其中的有限指数子群。

我们有：

命题 8.13。存在一个有限集合 $A \subset K$，使得对于 $T < K$ 的每个有限指数子群，当满足 $T \cap A = \emptyset$ 时，都有如下结论：群

$$Q = \langle T_1, \cdots, T_k \rangle < G,$$

其中 $T_j := \rho^j T \rho^{-j}$ 保持超平面 $H_j := \rho^j H$ 不变，具有以下性质：

(1) 它是凸余紧的。*(2)* 投影 $\pi : H_j \to \mathbb{H}^d/Q$ 诱导一个嵌入 $H_j/T_j \to \mathbb{H}^d/Q$。*(3)* 对每个 $1 \le i < j \le k$，都有 $H_i/T_i \cap H_j/T_j = V/P$，其中 $P =$ 稳定子$_T(V)$。

证明。证明的思路是构造一个适用于群 $T_1, \cdots, T_k$和超平面 $H_1, \cdots, H_k$的合适乒乓系统。

群 Q 是 G 的子群，因为 G 被 ρ 和 $T < G$正规化。

我们先考虑一个非常大的 $R > 0$，之后再根据需要对其进行调整。

首先，我们选取一个有限指数子群 $T < K$，使得

$$d_{\mathbb{H}^d}(V, \alpha V) \geq R.$$

对于每个 $\alpha \in T - P$，都有 $P = \mathrm{Stab}_T(V)$。

我们可以利用超平面可分性来找到这样的子群：令 $W \subset V$ 为 P 在 V 上作用的一个紧基本域。考虑有限集

$$A_R = \{\gamma \in K - P \mid d_{\mathbb{H}^d}(W, \gamma W) < R\}.$$

根据 [15, Lem.1.7]，子群 $P < K$ 是可分的，因此存在一个包含 P 的有限指数子群 $T < K$，并且满足 $T \cap A_R = \emptyset$。这样的子群满足该假设：若对于某个 $\gamma \in T - P$，有 $d_{\mathbb{H}^d}(V, \gamma V) \leq R$，则对于某个 $\alpha, \beta \in P$，有 $d_{\mathbb{H}^d}(\alpha W, \gamma\beta W) \leq R$，从而 $d_{\mathbb{H}^d}(W, \alpha^{-1}\gamma\beta W) \leq R$。因此，根据我们对 A_R 的选择，可得 $\alpha^{-1}\gamma\beta \in P$，进而得到 $\gamma \in P$，这与初始假设矛盾。

考虑包含 V 的两个超平面 H'_j, H''_j，它们与 H_j 形成 $\pi/2k$ 角。超平面 H'_j, H''_j 将 $\mathbb{H}^d$ 分成四个象限。考虑包含 H_j 的两个相对闭象限的并集 U_j。注意，由角度假设可知，对于每个 $i < j$，都有 $U_i \cap U_j = V$。特别地，扇形 $U_1, \cdots, U_k$ 的内部两两不相交。

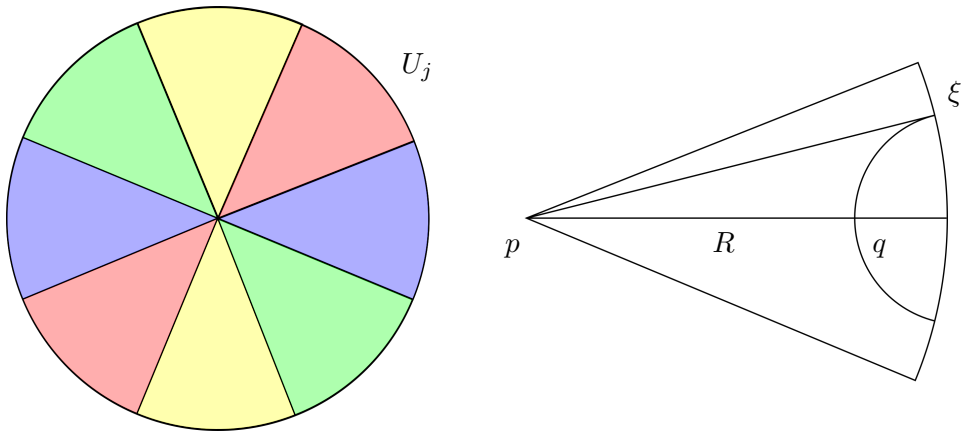


FIGURE 9. 乒乓系统。

我们将这些扇形用作乒乓系统。

断言 1。我们有：

(i) 若 $\beta \in P$，则 $\beta(U_j) = U_j$。(ii) 令 R 足够大。若 $\alpha_i \in T_i - P$ 且 $i \neq j$，则 $\alpha_i(U_j) \subset \mathrm{int}(U_i)$。

断言的证明。第一部分显而易见。

对于第二部分，考虑 H_i，H_j，$\alpha_i H_j$。我们需要以下结果：

引理 8.14. 存在一个二维平面 $Z \subset \mathbb{H}^d$，它与它们全部正交相交。

证明。我们在射影模型 $\mathbb{H}^d \subset \mathbb{RP}^d$中进行论证。

稍微滥用一下记号，除非没有必要，否则我们不区分 $\mathbb{H}^d$ 的全测地子空间与相应的 $\mathbb{RP}^d$线性子空间。此外还要记住，每个线性子空间$L \subset \mathbb{RP}^d$都有一个对偶 $L^* \subset \mathbb{RP}^d$，它对应于关于二次型 q的正交子空间$L^\perp$。

二维平面 $Z \subset \mathbb{H}^d$ 与超平面 $H \subset \mathbb{H}^d$ 正交，当且仅当 Z经过对偶点 H^*。

设 x_i、x_j、$\alpha_j x_i$ 是 H_i、H_j、$\alpha_j H_i$的对偶点。令

$$Z := \mathrm{Span}\{x_i, x_j, \alpha_j x_i\}$$

为它们张成的 $\mathbb{RP}^d$ 线性子空间。注意，Z 与交集（作为线性子空间）$H_i \cap H_j \cap \alpha_j H_i$互为对偶。超平面（作为线性子空间）的三重交集避开 $\mathbb{H}^d$ 的闭包，因为

$$(H_i \cap H_j \cap \alpha_j H_i) \cap \bar{\mathbb{H}}^d = (V \cap \alpha_j V) \cap \bar{\mathbb{H}}^d = \emptyset.$$

特别地，二次型 q 在三重交集上的限制是正定的。因此，二次型 q在对偶空间 Z 上的限制具有惯性指数 (2，1)，这意味着 Z 与 $\mathbb{H}^d$ 相交于一个全测地 $\mathbb{H}^2$。此外，根据构造，Z 经过对偶点 x_i、x_j、$\alpha_j x_i$，因此它与子空间 H_i、H_j、$\alpha_j H_i$正交。□

令 Z 为引理 8.14给出的二维平面。

考虑交点 $p = Z \cap V, q := Z \cap \alpha_i V$。

根据关于 T 的假设，我们有 $d_{\mathbb{H}^d}(p, q) \geq d_{\mathbb{H}^d}(V, \alpha_i V) \geq R$。

还要考虑无穷远交点 $\{\xi, \zeta\} := \partial Z \cap \partial \alpha_i H_j$。角 $\angle pq\xi, \angle pq\zeta$ 分别为 $|j-i|\pi/k$ 和 $\pi - |j-i|\pi/k$。考虑三角形 $\Delta(p, q, \xi)$ 和 $\Delta(p, q, \zeta)$。根据双曲三角学（见 []），p 处的角非常小：根据双曲余弦定理，经过简单变形可得

$$\begin{aligned}\sin\left(\angle qp\xi\right), \sin\left(\angle qp\zeta\right) &\leq \frac{2}{\cosh\left(d_{\mathbb{H}^n}(p, q)\right) \sin\left(|j-i|\frac{\pi}{k}\right)} \\ &\leq \frac{2}{\cosh(R) \sin\left(|j-i|\frac{\pi}{k}\right)}.\end{aligned}$$

如果选择 R，使得角 $\angle qp\xi$，$\angle qp\zeta$ 远小于 $\pi/2k$，那么 $\alpha_i U_j$ 包含于 U_i 中。□

利用乒乓系统，我们推导出所需的性质。

性质 (2) 和 (3)。取一个元素 $\gamma \in Q$。我们总可以将其写成 $\gamma = \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n}$，其中 $\alpha_{j_k} \in T_{j_k} - P$ 且 $\alpha_{j_n} \in T_{j_n}$，并且满足：对每个 k，都有 $j_k \neq j_{k+1}$。

注意到，根据第一个断言，对每个 H_i 都有 $\gamma H_i \subset U_{j_1}$；此外，若 $n > 1$，则 $\gamma H_i \subset \text{int}(U_{j_1})$：事实上，先考虑 $\alpha_{j_n} H_i$，这里有两种情况：若 $j_n = i$，则 $\alpha_{j_n} H_i = H_i$，因此它包含于 $U_i = U_{j_n}$。否则，根据该断言，$\alpha_{j_n} H_i \subset \alpha_{j_n} U_i \subset U_{j_n}$。利用 $j_k \neq j_{k+1}$ 这一事实，归纳地应用该断言，即可得出结论：

$$\begin{aligned}\gamma H_i &= \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n} H_i \\ &\subset \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{n-1}} U_{j_n} \\ &\subset \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{n-2}} \text{int}(U_{j_{n-1}}) \\ &\subset \cdots \\ &\subset \alpha_{j_1} U_{j_2} \subset \text{int}(U_{j_1}).\end{aligned}$$

现在我们可以证明以下命题

断言 2。 若 $\gamma H_i \cap H_j \neq \emptyset$，则 $\gamma = \alpha_j \alpha_i$，其中 $\alpha_i \in T_i$ 且 $\alpha_j \in T_j$。

断言的证明。 我们对 γ 上述形式 $\gamma = \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n}$的最短代表元的长度进行归纳。显然，底空间情形 $n = 1$成立。若 $n > 1$，则由上述计算可得 $\gamma H_i \subset \text{int}(U_{j_1})$。由于$\gamma H_i \cap H_j \neq \emptyset$，我们必有 $j_1 = j$。考虑 $\gamma' = \alpha_{j_1}^{-1} \gamma$。根据构造，元素$\gamma'$ 有一个比 γ 更短的代表元，并且满足 $\gamma' H_i \cap H_j = \alpha_{j_1}^{-1}(\gamma H_i \cap H_j) \neq \emptyset$。因此，由归纳假设可得$\gamma' = \alpha'_j \alpha'_i$，其中 $\alpha'_j \in T_j$ 且 $\alpha'_i \in T_i$。最后，我们得到 $\gamma = (\alpha_{j_1} \alpha'_j)\alpha'_i$；这便完成了归纳步骤，因为 $\alpha_{j_1} \alpha'_j \in T_j$。□

断言 3。 对于每个 $j \leq k$，自然映射 $H_j / T_j \to \mathbb{H}^d / Q$ 是一个嵌入。

断言的证明。 假设对于 $x, y \in H_j$，有 $\pi(x) = \pi(y)$。那么，存在 $\gamma \in Q$ 使得 $y = \gamma x$，特别是 $\gamma H_j \cap H_j \neq \emptyset$。由前一个断言，我们推得 $\gamma \in T_j$，因此 $[x] = [y]$ 属于 H_j / T_j。□

断言 4。 对于每个 $i < j$，我们有 $H_i / T_i \cap H_j / T_j = V / P$。

断言的证明。 假设对于 $x \in H_i, y \in H_j$，有 $\pi(x) = \pi(y)$。那么，存在 $\gamma \in Q$ 使得 $y = \gamma x$，特别是 $\gamma H_i \cap H_j \neq \emptyset$。由前一个断言，我们推得 $\gamma = \alpha_j \alpha_i$，其中 $\alpha_j \in T_j$ 且 $\alpha_i \in T_i$。为了得出结论，我们只需注意到

$$\alpha_j^{-1}(\gamma H_i \cap H_j) = \alpha_j^{-1}(\alpha_j \alpha_i H_i \cap H_j) = H_i \cap H_j = V$$

使得 $y \in \gamma H_i \cap H_j = \alpha_j V$ 且 $x = \gamma^{-1} y \in \alpha_i V$。因此 $\pi(x) = \pi(y) \in V / P$。□

至此，性质 (2) 和 (3) 得证。

性质（1）。根据事实3.20，只需证明点 $p \in V$ 的轨道是拟凸的，前提是 R 足够大。由于对每个 H_j ，该轨道在 $j \leq k$中粗稠密，因此只需证明

$$C := \bigcup_{\gamma \in Q,\, j \leq k} \gamma H_j$$

是拟凸的。

注意到 C 具有内在路径度量。 C 中的两个不同点可以通过以下任一方式连接：若它们位于同一平坦片 γH_i上，则沿 $\mathbb{H}^d$的一条测地线段连接；或者通过一条拼接路径 $\kappa = \kappa_1 \star \ldots \star \kappa_m \subset C$连接，该路径由 $\mathbb{H}^d$ 中的测地线段组成，对于 C 而言是测地线，并且其中每条κ_j 都位于某个平移 $\gamma_j H_{i_j}$上，且其端点位于 $\gamma_j H_{i_j}$中 V 的两个不同平移上。我们证明，这种内在的 C-测地线 κ 是一致拟测地线，因此，根据拟测地线的稳定性，它们与 $\mathbb{H}^d$ 中连接相同端点的测地线之间的豪斯多夫距离一致有界。这足以证明C 是拟凸的。

为了证明 κ是一条一致拟测地线，我们需要注意两点：首先，每个 κ_j 的长度至少为 R ，因为这条测地线段连接了 V的不同平移像。其次，由于拼接是关于 C的内在路径度量的测地线，因此相邻两条线段 κ_j、 κ_{j+1} 之间的角至少等于 $\gamma_j H_{i_j}$、 $\gamma_{j+1} H_{i_{j+1}}$之间的角，而后者至少为 π/k。结论由以下初等事实得出

事实 8.15. 对于每个 $\theta > 0$ ，都存在 $R > 0$ 和 $c > 0$ ，使得每个由长度至少为 R 的测地线段拼接而成、且相邻线段之间的角至少为 θ 的 $\kappa \subset \mathbb{H}^d$ ，都是一条 c-拟测地线。

证明至此结束。 □

现在我们可以证明定理 1.8。

8.2.3. 定理 *1.8*的证明。 我们证明 (a) 部分。

令 $Q < G$ 为命题 8.13所给出的子群。根据事实 8.10，Q 在 G中是可分的。一个标准论证表明：

断言。 存在一个包含 $Q < G'$ 的有限指数子群 $G' < G$ ，使得覆盖投影 $\mathbb{H}^d/Q \to \mathbb{H}^d/G'$ 限制在$N_1 \cup \cdots \cup N_k \subset \mathbb{H}^d/Q$ 上时是一个嵌入，其中 N_j:
$= H_j/T_j$。

断言的证明。根据命题 8.13， Q 余紧地作用于凸集 $\mathcal{CH} \subset \mathbb{H}^d$ 上。商空间 $\mathcal{CH}/Q$ 嵌入于 $\mathbb{H}^d/Q$ 中，并包含 H_j/T_j。考虑覆盖投影 π : $\mathbb{H}^d/Q \to \mathbb{H}^d/G$ ，以及将 π 限制到 $\mathcal{CH}/Q$ 上的映射。注意到，对于某些 p、$q \in \mathcal{C}/Q$ ， $\pi(p) = \pi(q)$ 当且仅当存在将 p、 q 提升到某个紧基本域 $F \subset \mathcal{CH}$ 中的提升 x、 $y \in F$，以及一个元素 $\gamma \in G$ ，使得 $\gamma x = y$。

我们利用 Q 的可分性，在一个中间有限覆盖 $\mathbb{H}^d/Q \to \mathbb{H}^d/G' \to \mathbb{H}^d/G$ 中排除这种构型：考虑有限集

$$A := \{\gamma \in G - Q \,|\gamma F \cap F \neq \emptyset\}.$$

根据 G 中 Q 的可分性，存在一个包含 Q 且满足 $G' \cap A = \emptyset$ 的有限指数子群 $G' < G$。由于 G' 包含 Q，我们有一个覆盖投影 $\pi' : \mathbb{H}^d/Q \to \mathbb{H}^d/G'$。根据我们对 A 的选择以及 $G' \cap A = \emptyset$ 这一事实， π' 在 $\mathcal{CH}/Q$ 上的限制现在是单射的。□

根据命题 8.13 以及投影 $\mathbb{H}^d/Q \to \mathbb{H}^d/G'$在 $N_1 \cup \cdots \cup N_k \subset \mathcal{C}/Q$ 上限制为一个嵌入这一事实，任意一个 $\mathbb{H}^d/G' - N_1 \cup \cdots \cup N_k$ 的补分支的抽象完备化 M 是一个带有全测地边界与角的紧致双曲 d 流形，所有角点角均等于 π/k；并且，若 k 为偶数，则边界图是二分的。

证明至此完成。 □

9. Hyperbolic doubles

在本节中，我们证明定理1.1、1.2和1.5。

我们将从粘合与弯曲构造的以下特殊情形推导出这些定理：沿若干角弯曲一个具有全测地边界的紧致凸双曲流形，并将其双倍化。

定理 9.1。 设 $\mathbb{M}$ 是一个维数为 $d \geq 3$、边界非空的紧致凸双曲 *bc*-流形。为每个墙固定一个参数。假设

(i) 所有角点角都小于 $\pi/2$。*(ii)* 对于每个角 $\mathfrak{C}$ ，其角度为 θ ，且相邻墙 W 和 W' 的参数分别为 μ和 μ'，记 $\underline{\nu} = \mu^{\frac{d+1}{2}}$和 $\underline{\nu'} = \mu'^{\frac{d+1}{2}}$ ，

$$t := \cos(\theta)^2 \left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu}\right) - \sin(\theta)^2 \left(\nu'\nu + \frac{1}{\nu'\nu}\right) \geq 2.$$

$$Set\ \mu_{\mathfrak{C}} := \max\left\{\tfrac{\mu}{\mu'}, \tfrac{\mu'}{\mu}\right\}\ and\ \lambda_{\mathfrak{C}} := \tfrac{t}{2} + \sqrt{\tfrac{t^2}{4} - 1}.$$

于是有如下结论：

(1) $N := D\mathbb{M} - U$ 通过移除角的双倍 $D\mathbb{M}$ 的管状邻域 U 而得到的对象，具有带全测地边界的凸射影结构。*(2)* 对于 N 的每个墙 W ，存在一个将 $\widetilde{W}$的一份副本映射到 凸包($\mathbb{H}^{d-2}$、$[e_d]$) 上的 N 的发展映射，使得 $\pi_1(W)$ 的整体单值化是

由以下元素生成的群

$$\left(\begin{array}{cc}\Gamma_{\mathfrak{C}} & \\ & \mathbb{I}_2\end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc}\mu_{\mathfrak{C}}^{-1}\mathbb{I}_{d-1} & & \\ & \mu_{\mathfrak{C}}^{\frac{d-1}{2}}\lambda_{\mathfrak{C}} & \epsilon \\ & & \mu_{\mathfrak{C}}^{\frac{d-1}{2}}\lambda_{\mathfrak{C}}^{-1}\end{array}\right) \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}),$$

当 $\epsilon = 1$ 时，如果 $\lambda = 1$ 且 0 否则，并且其中 $\mathfrak{C}$ 是角 W的爆破，整体单值化为 $\Gamma_{\mathfrak{C}} < \mathrm{SO}(d-2,1)$。

(3) 如果 $\lambda_{\mathfrak{C}} > 1$，那么 N 相对于 W 和极性 $[e_{d+1}]$满足包含条件。

(4) $\tilde{N} \subset \mathbb{S}^d$ 中任意一对不同的墙的闭包彼此不相交（即$\sim N$ 没有幽灵分层），并且 ∂N 中位于墙的闭包之外的每一点都是极端的且 $\mathcal{C}^1$。

在证明主要结果之前，我们先约定一些记号。

9.1. **一些记号**。对于每个 $\theta \in [0, 2\pi)$，我们将 r_θ, R_θ 记作这些旋转

$$r_\theta := \left(\begin{array}{cc}\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{array}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \quad R_\theta := \left(\begin{array}{cc}\mathbb{I}_{d-1} & \\ & r_\theta\end{array}\right) \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}). \tag{9.1}$$

对于每个 $\mu > 0$，我们也将 b_μ, b'_μ, B_μ 记作这些鼓胀矩阵

$$b_\mu := \left(\begin{array}{cc}\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \mu\end{array}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \quad b'_\mu := \left(\begin{array}{cc}\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \mu^d\end{array}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}), \tag{9.2}$$

and

$$B_\mu := \left(\begin{array}{cc}\frac{1}{\mu}\mathbb{I}_d & \\ & \mu^d\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc}\frac{1}{\mu}\mathbb{I}_{d-1} & \\ & \mu^{\frac{d-1}{2}} b_{\mu^{(d+1)/2}}\end{array}\right) \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}). \tag{9.3}$$

9.2. **双曲倍体上的射影结构**。定理 9.1 证明背后的基本计算，是每个角周围子午线的整体单值化，以及该角的管型。我们沿用定理 9.1中的记号，并进一步将 $\mathbb{M}'$ 记作我们粘合到 $\mathbb{M}$ 上的那份副本$\mathbb{M}$，并将 M 和 M' 记作这些流形的光滑轨迹。

我们将 DM 的粘合 M 与其双倍 M' 进行膨胀（从而在 DM上得到射影结构），采用定理 9.1 中针对 M的墙所给的参数，并对 M'的墙采用等于 1 的平凡参数。

9.2.1. 子午圈的整体单值化。考虑 $\mathbb{M}$ 上的一个角 $\mathfrak{C}$，其角度为 θ，相邻墙为 W 和 W'，膨胀参数分别为 μ 和 μ'。

令 $\nu = \mu^{(d+1)/2}$ 和 $\nu' = \mu'^{(d+1)/2}$。

设 $\mathbb{U} \subset D\mathbb{M}$ 是 $\mathfrak{C}$ 中一点的开邻域，使得 $\mathbb{U} \cap \mathbb{M}$和 $\mathbb{U} \cap \mathbb{M}'$ 都是小的双曲球（因而是凸的）。

令 $U \subset T$ 为 U 的提升，它与 DM 中 U 的任意提升相同。此外，它是分别由 $V_{nn\in\mathbb{Z}}$ 和 $V'_{nn\in\mathbb{Z}}$ 这两个提升序列粘合而成的

$U\cap M$和 $U\cap M'$，沿着 $U\cap W$ 和 $U\cap W'$ 的提升 $W_{nn\in\mathbb{Z}}$ 和 $W'_{nn\in\mathbb{Z}}$，使得 $V_n\cap V'_n=W_n$ 和 $V'_n\cap V_{n+1}=W'_{n+1}$。

考虑一个双曲发展图表 ϕ of $\mathbb{U}\cap\mathbb{M}$，它将 $\mathbb{M}\cap\mathfrak{C}$ 映至$\mathbb{H}^{d-2}$，将 $\mathbb{U}\cap W'$映至 Conv($\mathbb{H}^{d-2},[e_d]$)，并将 $\mathbb{U}\cap\mathbb{M}$ 映至 Conv($\mathbb{H}^{d-1},[e_{d+1}]$)。

这确定了 U 上（鼓胀的）射影结构的一个发展映射 dev。初等计算表明：

引理 9.2。设 γ 是绕 $\mathfrak{C}$ 的一条子午线，它从 $U\cap W'$ 出发，经过 $U\cap M$，与 $U\cap W$ 相交，然后经过 $U\cap M'$ 返回起点。

- $\mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R})$ 对 γ 的整体单值化为 $\rho(\gamma)=R_\theta B_\mu R_\theta B_{\mu'}^{-1}$。
- $\mathrm{SL}_2^{\pm}$ 对 $\rho(\gamma)$（定义 *4.4*）为

$$g(\gamma)=r_\theta b_\nu r_\theta b_{\nu'}^{-1}.$$

- 在 $\mathbb{S}^1=\mathbb{S}(\mathbb{R}^{d+1}/\mathbb{R}^{d-1})$ 中，$\mathrm{dev}(V_0\cup V'_0)$ 的投影是 $[e_d]$ 与 $r_\theta b_\nu r_\theta b_{\nu'}^{-1}[e_d]$ 之间的适当凸线段。

9.2.2. 定理 *9.1* 的 证明思路如下。

- 我们验证定理7.18 的条件均已满足。
- 我们应用定理 7.18，得到 DM 是凸的。
- 我们验证定理 7.19 的条件均已满足，特别是 DM 是真凸的。
- 我们应用定理 7.19，得到 N 对 $D\mathbb{M}$ 的全测地爆破。它没有幽灵分层，并且在以双曲 SL_2-角爆破奇点时满足墙上的包含条件。~
- 我们证明，∂N 墙的闭包之外的每一点都是极端的，并且 $\mathcal{C}^1$ 利用定理7.21、推论5.15 和观察5.16。

定理*9.1*的证明。我们来检查定理7.18的假设是否成立（这里我们用到了引理 9.2）：

断言1。DM 是连通的。

断言的证明。显然。 □

断言2。$\mathbb{M}$ 是真凸的，具有完备墙和角，且没有幽灵分层。

断言的证明。这由我们的假设和事实7.14可得。 □

断言3。$\mathbb{M}$ 的每一面墙都满足相对于其双曲极性的包含条件。

断言的证明。这由事实7.17给出。 □

断言 4. 的每个奇点 $D\hat{}M$ 在 $\mathbb{S}^d$ (命题4.7)中均可一致化。

断言的证明。 固定一个角 $\mathfrak{c}$ 属于 $D\mathbb{M}$ 并采用第 9.2.1 节和引理9.2中的记号。

由引理4.9 以及引理9.2的最后一点可知，我们只需验证 $g(\gamma) = r_\theta b_\nu r_\theta b_{\nu'}^{-1}$ 非平凡（这是一次初等计算），且其迹至少为 2；这正是定理 9.1 的假设，因为这个迹为

$$t = \cos(\theta)^2 \left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu}\right) - \sin(\theta)^2 \left(\nu'\nu + \frac{1}{\nu'\nu}\right). \qquad \square$$

此时，我们可以利用定理7.18 说明 DM 是凸的。为了能够使用定理7.19，我们需要验证：

断言5. $D\mathbb{M}$ 的每个奇点都是特殊的（定义4.10）。

and

断言 6。 DM 是适当的凸集。

命题的证明 *5*。 沿用上述证明（4）中的记号。我们有

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{-\frac{2}{d+1}} & \\ & \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{d-1}{d+1}} g(\gamma) \end{pmatrix}.$$

根据定义 4.10 （更准确地说，是（4.10）），我们必须证明 $\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 - \left(\frac{\nu}{\nu'}\right) t + 1$ 为正。计算如下：

$$\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 - \left(\frac{\nu}{\nu'}\right) t + 1 = \sin(\theta)^2 \left(\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 + 1 + \nu'^2 + \nu^{-2}\right) > 0. \qquad \square$$

为了证明命题6，我们需要以下事实。

事实 9.3。 任何维数至少为3 的紧致凸双曲 *bc*-流形 $\mathbb{X} = (\mathcal{C} \subset \mathbb{H}^d)/\Gamma$ 都具有不可约整体单值化（不存在不变的真子空间）。

事实的证明。 经典结论表明， Γ 不可约，当且仅当其极限集在 $\mathbb{H}^d$ 中的凸包具有非空内部（例如参见 [19,命题 2。5]）。

由于 Γ 余紧地作用于闭凸子集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{H}^d$上，其极限集为 $\partial\mathcal{C} \cap \partial\mathbb{H}^d$。此外， $\mathcal{C}$ （在 $\mathbb{S}^d$中的）闭包是其极值点的凸包。这些极值点中没有一个位于 $\partial\mathcal{C} \cap \mathbb{H}^d$ 中，因为该集合是墙和角的并（由于$d > 2$，这些角具有正维数），所以它们全都位于 $\partial\mathcal{C} \cap \partial\mathbb{H}^d$中，即 Γ的极限集内。因此，其凸包为 $\mathcal{C}$，而该凸包具有非空内部。□

命题的证明 *6*. 假设 $d > 2$，则由事实 9.3 $\pi_1(M)$ 在 $\mathbb{S}^d$上不可约作用。由标准论证立即可得， DM是 $\pi_1(M)$-不变的真凸集（见定义 3.1）。□

此时我们可以应用定理 7.19。

最后，定理7.21、推论5.15 和事实5.16 保证 $\partial\widetilde{N}$ 中墙的闭包之外的每一点都是极端点，并且 $\mathcal{C}^1$，前提是：

断言7。 $\partial\widetilde{M}\cap\partial\mathbb{H}^d$ 中墙的闭包之外的每一点都是一个极端 $\mathcal{C}^1$ 点，属于 $\partial\widetilde{M}$。

断言8。对于每个墙 $\widetilde{W}\subset\widetilde{M}$， $\partial\widetilde{W}\cap\partial\mathbb{H}^d$ 中角的闭包之外的每一点，都是 $\mathcal{C}^1$ 的边界上的一个极端点；该边界属于 $\widetilde{M}$ 与~跨越 W的 M 的任意鼓胀反射之并集。

这两点的证明基本相同。

断言 7的证明。设 $x\in\partial\widetilde{M}\cap\partial\mathbb{H}^d$ 位于墙的闭包之外。该点是 $\widetilde{M}$ 的极端点，因为它是 $\mathbb{H}^d$的极端点，而后者包含~M。

~取 $p\in M$。由于 $\mathbb{M}$ 是紧致的， x 不属于某面墙的闭包这一事实表明，射线 $[p,x)$ 的投影会无限次回到 M内部的某个紧子集。因此，存在 $r>0$ 和 $p_n\in[p,x)$，它们趋于 x ，使得以 $\mathbb{H}^d$ 为中心、半径为 r 的球包含所有 p_n，且该球包含于 $\widetilde{M}$。由此可经典地推出， $\partial\widetilde{M}$ 是 $\mathcal{C}^1$ （否则就会有一条射线 $[q,x)\subset\mathbb{H}^d$ 位于 $\widetilde{M}$之外，但根据基本的双曲几何，这条射线最终会任意接近 $[p,x)$）。□

~ ~ ~断言 8 的证明。考虑一个鼓胀反射 M'关于 M跨过 W。可以拉伸 $\mathbb{H}^d$，从而得到一个 $\pi_1(W)$-不变椭球 $\mathcal{E}$，它包含 $\widetilde{M}\cup\widetilde{M}'$，并且满足 $\mathcal{E}\cap\mathbb{S}^{d-1}=\mathbb{H}^{d-1}$。

令 $x\in\partial\widetilde{W}\cap\partial\mathbb{H}^{d-1}$ 位于角的闭包之外。由于该点对 $\mathcal{E}$是极端的，而 $\mathcal{E}$包含 $M\cup M'$，因此它对 M 也是极端的。

~取 $p\in W$。由于 W 是紧致的， x 不在某个角的闭包中这一事实表明，射线 $[p,x)$的投影会无限次地回到 W内部的某个紧子集中。因此，存在 $r>0$ 以及趋于 x 的 $p_n\in[p,x)$，使得以所有 p_n为中心、半径为 r ~ ~ ~的 $\mathcal{E}$ 球都包含在 $M\cup M'$中。由此可经典地推出， $\partial M\cup M'$是 $\mathcal{C}^1$。□

定理 9.1 的证明至此结束。 □

注记 9.4（情形 $d=2$）。 请注意，上述证明在维数 $d=2$ 下也成立，6中的断言除外。不过，该断言的结论仍然成立（可由初等论证得出）。

9.3. 主要定理的证明。

定理 *1.3*和*1.5*的证明。固定 $k=4$。令 M 为由定理 d所给出的、具有全测地边界与角且角度为 $\pi/4$ 的凸紧致双曲1.8流形，其边界图是二分的。

考虑将 M 的墙染成黄色和紫色，使任意两个相邻的墙具有不同的颜色。

对于 $j=1$，2，考虑 ν_j 使得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\nu_j^2+\nu_j^{-2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+1)=2+(2-j).$$

根据定理 9.1，通过为黄色和紫色墙指定参数 $\nu_j^{(d+1)/2}$ 和 $\nu_j^{-(d+1)/2}$，我们得到一个边界处处为测地边界的紧致凸射影流形 N_j，它没有角，具有完备墙（定义 7.10），且没有幽灵分层（定义 7.12）。（注意，N_1 和 N_2 是同胚的。）

设 $\widetilde{N}_j\subset\mathbb{S}^d$ 是 N_j的万有覆盖。则：

- 定理1.5中对 N_j 的墙（ N_j的墙的提升）所作的描述，即将其描述为稳定子具有 π_1（$\mathfrak{C}$）$\times\mathbb{Z}$ 形式且带有$\mathfrak{C}\subset M$ 一个角的锥，在定理 9.1中给出。
- 再次利用定理9.1， ∂N_j 中任何不在某个墙的闭包内的点都是极端点，并且 $\mathcal{C}^1$。

设 Γ_j 是 N_j的基本群。
设 Λ_j 是 Γ_j 在 $\partial\Omega_j$中的完整轨道极限集。

- 根据定理6.3， Γ_j 相对于 N_j的墙的基本群（即墙的稳定子）~，是相对双曲的 N_j。

情形 $j=1$。若 $j=1$，则：

- 根据定理9.1，每个墙都有一个满足包含条件的极性。
- 根据定理7.18， N_1 上的射影结构延拓为双倍 $N=DN_1$上的凸射影结构，而根据事实*9.3*，它实际上是 $d\geq 3$ 真凸的。
- 设 $\Omega_1\subset\mathbb{S}^d$ 是 N的万有覆盖，它被 Γ 划分为=π_1（N），因为 N 是闭流形。根据命题 6.1， Γ_1 在 Ω_1上凸紧地作用。
- 我们将 N_1的墙在 N 中的像以及它们在 Ω_1中的提升~称为“墙”。根据对 N_1 的墙及其稳定子的描述，Ω_1 的墙构成一个 Γ-不变的适当嵌入的锥族，且具有两两不交的闭包；其稳定子具有 $\pi_1(\mathfrak{C})\times\mathbb{Z}$ 的形式，其中 $\mathfrak{C}\subset M$ 是一个角。
- 根据定理 7.21、推论 5.15和事实 5.16， $\partial\Omega_1$中的每一个不在某个墙的闭包内的点都是极端的，并且 $\mathcal{C}^1$。
- 根据事实6.4， Γ 相对于墙的稳定子（即适当嵌入的锥）是相对双曲的。至此，定理 1.3的证明。

- By convex-cocompactness and [30, Lem. 4.1], $\Lambda_1 = \partial\widetilde{M}_1 \smallsetminus \widetilde{M}_1$, so that $\mathcal{CH}(\Lambda_1) \smallsetminus \Lambda_1 = \widetilde{M}_1$.

定理 1.5的证明到此结束。

~ ~**情形** $j = 2$。设 $j = 2$。我们来验证 $\Lambda_2 = \partial M_2 \smallsetminus M_2$。

~ ~包含关系 $\Lambda_2 \subset \partial M_2 \smallsetminus M_2$ 显然，下面证明反向包含。

~固定 $p \in \Omega_2$。令 $x \in \partial M_2$，它不属于任何墙的闭包。正如定理 6.3 的证明所示，$[p, x)$ 在 M_2 中的像会无穷多次回到墙补集的某个紧子集中；换言之，存在趋于 x 的 $x_n \in [p, x)$，以及满足以下条件的 $g_n \in \Gamma_2$： $g_n x_n$ 始终位于 Ω_2 的某个紧子集中。取充分大的 $R > 0$，使得闭希尔伯特球 $B_n := B_R(g_n x_n)$ 对每个 n 都包含 p。由于 x 是极端的，$g_n^{-1} B_n = B_R(x_n)$ 收敛到 x（例如参见 [18, 事实 2.1.10]）。特别地，$x \in \Gamma_2 \cdot p$。

由于墙的相对边界中的点可以由~ ~闭墙外的点逼近，因此 $\partial M_2 \smallsetminus M_2$ 包含于 $\Gamma_2 p$中，进而包含于完整轨道极限集中。□

定理1.1 是定理1.3的一个特殊情形。

我们证明定理1.2。

定理*1.7*的证明。取 ϵ，由事实2.1得到。考虑 a_i、b_i、c_i、$i = 1$、……、n，如定理1.7所述，即满足 $1 < a_i < e^{\epsilon/2}$、$b_i > 3$ 以及 $1 < c_i < -2 + b_i^2/2$。

设 $\ell_i := 2\ln(a_i) < \epsilon$，并考虑 M 上的双曲度量，该度量具有全测地面和角，使得这些角为 α_i，其长度为ℓ_i，角度为 $\theta_i < \pi/4$。

事实表明，$c_i < -2 + b_i^2/2$ 和 $\theta_i < \pi/4$，从而保证了

$$c_i + c_i^{-1} < \frac{1}{2}(b_i^2 + b_i^{-2}) - 1 < \cos^2\theta_i(b_i^2 + b_i^{-2}) - 2\sin^2\theta_i,$$

因此，也保证了

$$2 < \frac{\cos^2\theta_i(b_i^2 + b_i^{-2}) - (c_i + c_i^{-1})}{\sin^2\theta_i}.$$

因此，存在唯一的 $d_i > 1$，使得

$$d_i^2 + d_i^{-2} < \frac{\cos^2\theta_i(b_i^2 + b_i^{-2}) - (c_i + c_i^{-1})}{\sin^2\theta_i},$$

and

$$t_i := \cos^2\theta_i(b_i^2 + b_i^{-2}) - \sin^2\theta_i(d_i^2 + d_i^{-2}) = c_i + c_i^{-1} > 2.$$

令 $\mu_i := \sqrt{b_i d_i}$，并令 $\mu_i' := \sqrt{d_i/b_i}$。

注意，$\mu_i/\mu_i' = b_i$ 和 $\mu_i\mu_i' = d_i$ 以及 $c_i = t_i/2 + \sqrt{t_i^2/4 - 1}$。

我们通过定理中的鼓胀过程，在 $DM \setminus U$ 9.1 中使用参数 μ_i 和μ_i'（回顾一下，$d = 3$）。□

9.4. 可公度性。 最后，我们将证明，我们的构造足够灵活，能够产生大量彼此不等价的非对称非严格可除凸域实例。

首先，让我们回顾可公度性的定义。

定义 9.5（可公度）。 如果两个群 G, G' 含有同构的有限指数子群 $H < G$, $H' < G'$，则称它们可公度。

我们证明

定理 *9.6.* 设 $d \geq 5$。取 $\theta = \pi/n, \theta' = \pi/n'$，使得数域 $F = \mathbb{Q}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ $F' = \mathbb{Q}(\cos(\theta'), \sin(\theta'))$ 不同。取满足引理 *8.8* 假设的元素 $\tau \in F$, $\tau' \in F'$。令 $\Gamma, \Gamma' < PSL_{d+1}(\mathbb{R})$ 为定理 *1.3* 中的群，它们除以真凸集 $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{RP}^d$，且相对于子群族 $\{\Theta_j \times \mathbb{Z}\}_{j\in J}, \{\Theta_j' \times \mathbb{Z}\}_{j\in J'}$ 是相对双曲的，其中 Θ_j, Θ_j' 是 $SO(q)_{\mathcal{O}}, SO(q')_{\mathcal{O}'}$ 的有限指数子群，
$q = x_1 + \cdots + x_{d-2}^2 - \tau y^2$ 且 $q' = x_1 + \cdots + x_{d-2}^2 - \tau' y^2$。那么 Γ, Γ' 不可公度。

证明。 假设 Γ, Γ' 可公度。这意味着存在一个群 G，它同时嵌入 Γ, Γ'，且其像是有限指数子群。设 $G < \Gamma$ 和 $\iota : G \hookrightarrow \Gamma'$ 是一个嵌入。

由于 Γ, Γ' 相对于子群族 $\{\Theta_j \times \mathbb{Z}\}_{j\in J}, \{\Theta_j' \times \mathbb{Z}\}_{j\in J'}$ 是相对双曲的，因此 G 相对于 $\{S_{j,\alpha} := \alpha(\Theta_j \times \mathbb{Z})\alpha^{-1} \cap G\}_{j\in J, \alpha\in\Gamma}$ 也是相对双曲的；此外，它也相对于 $\{S'_{j,\alpha} := \iota^{-1}(\alpha(\Theta_j' \times \mathbb{Z})\alpha^{-1})\}_{j\in J', \alpha\in\Gamma'}$是相对双曲的。注意，每个 $S_{j,\alpha}, \iota(S'_{j,\alpha})$ 都是 $\alpha(\Theta_j \times \mathbb{Z})\alpha^{-1}, \alpha(\Theta_j' \times \mathbb{Z})\alpha^{-1}$ 的有限指数子群。

根据 Islam 和 Zimmer 的工作 [35, 定理 1.6], 我们有如下结论：设$L'_{j,\alpha}$ 为群 $S'_{j,\alpha}$ 在 Ω 中的（完整轨道）极限集。那么：

- $L'_{j,\alpha} \subset \partial\Omega$ 是闭的，且 $\mathcal{CH}(L'_{j,\alpha}) \setminus L'_{j,\alpha}$ 是 Ω 的一个凸子集
- 群 $S'_{j,\alpha}$ 在 $\mathcal{CH}(L'_{j,\alpha}) \setminus L'_{j,\alpha} \subset \Omega$ 上余紧地作用。
- $(G, \{S'_{j,\alpha}\}_{j\in J', \alpha\in\Gamma'})$ 的 Bowditch 边界与将 $\partial\Omega$ 中每个 $L'_{j,\alpha}$ 压缩为一点后得到的空间之间存在等变同胚。特别地，集合 $L'_{j,\alpha} \subset \partial\Omega$ 两两不相交。
- 如果 $[a, b] \subset \partial\Omega$ 是一条非平凡线段，那么 $[a, b] \subset L'_{j,\alpha}$ 对于某个$j \in J'$ 且 $\alpha \in \Gamma'$。

考虑其中一个适当嵌入的锥 $\mathcal{CH}(H, p) \cap \Omega \in \mathcal{C}$，其上有群 $S_{i,\beta} = \beta(\Theta_k \times \mathbb{Z})\beta^{-1} \cap G$ 余紧地作用；取某个 $k \in J$ 和 $\beta \in \Gamma$，令$L_{i,\beta}$ 为 $S_{i,\beta}$的完整轨道极限集，即该锥的相对边界。

对于每个 $q \in \partial H$，线段 $[q,p] \subset \partial\Omega$ 都包含在某个 $L'_{j,\,\alpha}$中。由于所有线段都交于 p，我们得出它们都包含在同一个 $L'_{j,\,\alpha}$中。因此 $L_{i,\,\beta} \subset L'_{j,\,\alpha}$ 和 $\mathcal{CH}(H,\ p) \subset \mathcal{CH}(L'_{j,\,\alpha})$。

注意，$S_{i,\,\beta}$ 保持了 $L'_{j,\,\alpha}$。事实上，若 $\gamma \in S_{i,\,\beta}$ 则 $L'_{j,\,\iota(\gamma)\alpha} = \gamma L'_{j,\,\alpha}$ 包含 $L_{i,\,\beta}$，因此与$L'_{j,\,\alpha}$ 相交，故与之相等。

由于 $S'_{j,\,\alpha}$ 是 Stab 的有限指数子群$_G(L'_{j,\,\alpha})$，这意味着$S_{i,\,\beta} \cap S'_{j,\,\alpha}$ 是 $S_{i,\,\alpha}$的有限指数子群。特别地，它的上同调维数与 $S_{i,\,\beta}$的相同，即 $d-1$，这也就是$S'_{j,\,\alpha}$的上同调维数。根据标准论证（见 [57]），可知 $S_{i,\,\beta} \cap S'_{j,\,\alpha}$ 也是 $S'_{j,\,\alpha}$的有限指数子群。

特别地，$\Theta'_j \times \mathbb{Z}$ 和 $\Theta_i \times \mathbb{Z}$ 是可公度的，因为它们包含同构的有限指数子群$S_{i,\,\beta} \cap S'_{j,\,\alpha}$ 和 $\iota\ (S_{i,\,\beta} \cap S'_{j,\,\alpha})$。

设 K 是一个群，使得 K 的每个有限指数子群都具有平凡中心。例如，所有 Θ_i，Θ'_j 都具有这一性质。考虑一个有限指数子群 $S < K \times \mathbb{Z}$。那么，S的中心是 $Z(S) = S \cap (\{1\} \times \mathbb{Z})$，并且我们有

$$S/Z(S) = S/\left(S \cap (\{1\} \times \mathbb{Z})\right) \simeq \pi(S) < K$$

其中 $\pi:\ K \times \mathbb{Z} \to K$ 是到第一个因子的投影。

我们来证明这一断言：考虑 $\pi(S) < K$。它是一个有限指数子群，因此根据假设，它具有平凡中心。若（$\alpha,\ t$）$\in S$ 属于S的中心，那么 α 属于 $\pi(S)$的中心，而该中心是平凡的。反过来，很容易看出 $\{1\} \times \mathbb{Z}$ 属于 $K \times \mathbb{Z}$的中心。

我们将这一事实应用于 $S := S_{i,\,\beta} \cap S'_{j,\,\alpha} < \Theta_i \times \mathbb{Z}$ 和 $\iota(S) < \Theta'_j \times \mathbb{Z}$：令$\pi_i$，$\pi_j$为 $\Theta_i \times \mathbb{Z}$，$\Theta'_j \times \mathbb{Z}$ 在第一因子上的投影。我们有

$$\pi_j(S) \simeq S/Z(S) \simeq \pi_i(\iota(S)).$$

因此，Θ'_j 与 Θ_i 可公度，因为它们包含同构的有限指数子群 $\pi_j(S)$ 和 $\pi_i(\iota(S))$。

为了得出结论，我们将使用双曲流形的一个可公度性不变量，即不变迹域：

定义 9.7（迹域）。设 $\Gamma < \mathrm{SO}_0(d-2,\ 1)$ 为一个格。Γ 的不变迹域 为

$$k(\Gamma) := \mathbb{Q}\left(\{\mathrm{tr}(\mathrm{Ad}(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma\}\right)$$

其中 $\mathrm{Ad} : \mathrm{SO}_0(d-2,\ 1) \to \mathfrak{so}(d-2,\ 1)$ 是伴随表示。

根据 Mostow 刚性（见 [49, 第 15]章），若 $d \geq 5$，则不变迹域$k(\Gamma)$是抽象群 Γ的不变量，且不依赖于其作为格嵌入到 $\mathrm{SO}_0(d-2,\ 1)$ 的具体方式（该嵌入在共轭意义下唯一）。

Vinberg [66] 证明，迹域 $k(\Gamma)$ 是 Γ 的可公度类的不变量：

事实 9.8 (Vinberg [66])。 设 $\Theta < \mathrm{SO}_0(d-2,1)$ 是一个格。若 $\Theta_0 < \Theta$ 是有限指数子群，则 $k(\Theta_0) = k(\Theta)$。

在我们的情形下，迹域的计算并不困难：

事实 9.9 (Prasad–Rapinchuck [52, 引理 2.6])**.** 设 F 是一个数域，其整数环为 $\mathcal{O}$。设

$$q = x_1^2 + \cdots + x_{d-2}^2 - \tau y^2$$

是一个二次型，其中 $\tau \in \mathcal{O}$ 满足引理 *8.8*的假设。则

$$k(\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}) = F.$$

由于Θ'_j， Θ_i 可公度，我们必有 $k(\Theta'_j) = k(\Theta_i)$。然而，$\Theta'_j$， Θ_i 分别是 $\mathrm{SO}(q)_{\mathcal{O}}$、$\mathrm{SO}(q')_{\mathcal{O}'}$ 的有限指数子群，其中$q = x_1 + \cdots + x_{d-2}^2 - \tau y^2$和 $q' = x_1 + \cdots + x_{d-2}^2 - \tau' y^2$，而 $\mathcal{O}$， $\mathcal{O}'$ 分别是 F、F'的整数环。由上述结果可得 $k(\Theta'_j) = F'$且 $k(\Theta_i) = F$。由于 $F \neq F'$，这就产生了矛盾，并完成了证明。□

References

[1] S. A. Ballas、D. Cooper 和 A. Leitner, *Generalized cusps in real projective manifolds: classification* **13** 2020 1455 1496 , 《拓扑学杂志》 (), -。[2] S. A. Ballas、J. Danciger 和 G.-S. Lee, *Convex projective structures on nonhyperbolic three-manifolds* **22** 2018 1593 1646 , 《几何与拓扑》 (), -。[3] S. A. Ballas、L. Marquis, *Properly convex bending of hyperbolic manifolds*, 《群、几何与动力系统》14(2020), 653-688。[4] W. Ballmann, *Nonpositively curved manifolds of higher rank*, 《数学年刊》122(1985), 597-609。[5] T. Barbot、F. Bonsante 和 J.-M. Schlenker, *Collisions of particles in locally AdS spacetimes I. Local description and global examples* **308** 2011 , 《数学物理通讯》 (), 147-200。[6] Y. Benoist, *Automorphismes des cônes convexes*, 《数学发明》141(2000), 149-193。[7] Y. Benoist, *Convex divisible I*, 载于《代数群与算术》, 塔塔基础研究院数学研究丛书第17卷（2004）, 339-374。[8] Y. Benoist, *Convex divisible II*, 《杜克数学杂志》120(2003), 97-120。[9] Y. Benoist, *Convex divisible III*, 《高等师范学校科学年刊》38(2005), 793-832。[10] Y. Benoist, *Convex divisible IV*, 《数学发明》164(2006), 249-278。[11] Y. Benoist, *Exercises on divisible convex sets*, 2012年, https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ benoist/prepubli/12GearJuniorRetreat.pdf [12] Y. Benoist, *Five lectures on lattices in semisimple Lie groups*, 载于《负或零曲率几何、离散群与刚性》, S´emin. Congr., 第18卷, 法国数学会, 巴黎, 2009, 117-176。[13] Y. Benoist, *A survey on divisible convex sets*, 载于《离散群的几何、分析与拓扑》, 高级数学讲座（ALM）, 第6卷, 2008, 1 18 国际出版社, Somerville, MA, -。[14] J.-P. Benz´ecri, *Sur les variétés localement affines et localement projectives*, 《法国数学会通报》88(1960), 229-332。[15] N. Bergeron、F. Haglund 和 D. T. Wise, *Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds* **83** 2011 431 448 , 《伦敦数学会杂志》 (), -。

[16] G. Birkhoff, *Extensions of Jentzsch's theorem*, 《美国数学会汇刊》85(1957), 219-227。[17] P.-L. Blayac, *Patterson-Sullivan densities in convex projective geometry*, 预印本, arXiv:2106.08089。[18] P.-L. Blayac, *Dynamical aspects of convex projective structures*, 博士论文, Alexander Grothendieck 实验室, 巴黎萨克雷大学, 2021年。P.-L. Blayac 和 F. Zhu, *Ergodicity an equidistribution in Hilbert geometry*, 预印本, arXiv:2106.08079。[20] M. D. Bobb, *Convex projective manifolds with a cusp of any non-diagonalizable type*, 《伦敦数学会杂志》（第2辑）100(2019), 183-202。[21] F. Bonahon 和 J.-P. Otal, *Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3* **160** 2004 1013 1055 , 《数学年刊》（），-。[22] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, 《拓扑》2(1963), 111-122。[23] B. Bowditch, *Relatively hyperbolic groups*, 《国际代数与计算杂志》22(2012), 1 66, - K. Burns 和 R. Spatzier, *Manifolds of nonpositive curvature and their buildings*, [24] 《Publ. Math. IHES》65(1987), 35-59。[25] R. Canary, *Anosov representations: Informal lecture notes*, 预印本, 见 http://www.math.lsa.umich.edu/canary/lecnotespublic.pdf。[26] S. Choi 和 W. M. Goldman, *Convex real projective structures on closed surfaces are closed* **118** 1993 657 661 , 《美国数学会会刊》（），-。[27] S. Choi、G.-S. Lee 和 L. Marquis, *Convex projective generalized Dehn filling*, 《高等师范学校科学年刊》53(2020), 217-266。[28] Y.-E. Choi 和 C. Series, *Lengths are coordinates for convex structures*, 《微分几何杂志》73(2006), 75-116。[29] J. Danciger, *A geometric transition from hyperbolic to anti-de Sitter geometry*, 《几何与拓扑》17(2013), 3077-3134。[30] J. Danciger、F. Gu´eritaud 和 F. Kassel, *Convex-cocompact actions in real projective geometry* 1704 08711 , 预印本, arXiv: . .[31] J. Danciger、F. Gu´eritaud、F. Kassel、G.-S. Lee 和 L. Marquis, *Convex compactness for Coxeter groups* 2102 02757 , 预印本, arXiv: . .[32] M. Gromov 和 W. Thurston, *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, 《数学发明》89(1987), 1-12。[33] *Rank-one Hilbert geometries* 1912 13013 M. Islam, 预印本 arXiv: 。[34] M. Islam 和 A. Zimmer, *Convex co-compact actions of relatively hyperbolic groups*, 预印本, arXiv:1910.08885。[35] M. Islam 和 A. Zimmer, *Relative hyperbolic groups in convex real projective geometry* 2203 16596 , 预印本, arXiv: . .[36] D. Johnson 和 J. Millson, *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds* ¨ , 《数学进展》, Birkhauser。[37] V. Kac 和 E.Vinberg, *Quasihomogeneous cones*, 《数学札记》1(1967), 231-235。[38] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, 《现代 Birkh¨auser 经典》, Birkh¨auser Boston, Inc., Boston, MA, 2009。[39] M. Kapovich, *Convex projective structures on Gromov-Thurston manifolds*, 《几何与拓扑》11(2007), 1777-1830。[40] M. Koecher, *The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications*, 《数学讲义》第1710卷, Springer-Verlag, 柏林, 1999年。由 Aloys Krieg 和 Sebastian Walcher 编校、注释并撰写序言。[41] J.-L. Koszul, *Déformation des connexions localement plates*, 《傅里叶研究所年刊》18(1968), 103-114。

[42] C. Lecuire, *An extension of the Masur domain*, 载于 Y. Minsky、M. Sakuma 和 C. Series（编），《克莱因群空间》，伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社，49-74。[43] G.-S. Lee、L. Marquis 和 S. Riolo, *A small closed convex projective 4-manifold via Dehn filling* **66** 2022 369 403 ，《Publ. Mat.》（），-。[44] L. Marquis, *Espace des modules de certains polyèdres projectifs miroirs*, 《几何与拓扑》147(2010)，47-86。[45] L. Marquis, *Exemples de variétés projectives strictement convexes de volume fini en dimension quelconque* **58** 2012 3 47 ，《Enseign. Math.》（），-。[46] L. Marquis, *Around groups in Hilbert geometry*, 载于 G. Besson、M. Troyanov 和 A. Papadopoulos 编《希尔伯特几何手册》。[47] B. Martelli, *An introduction to geometric topology*, CreateSpace Independent Publishing Platform (2016)。[48] J. S. Milne, *Algebraic Number Theory*, 网址: https://jmilne.org/math/CourseNotes/ANT.pdf [49] D. W. Morris, *An introduction to arithmetic groups*, Deductive Press (2015)。[50] B. Nica, *Linear groups - Malcev's theorem and Selberg's lemma*, 预印本 arXiv:1306.2385。[51] D. Osin, *Acylindrically hyperbolic groups*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》368(2016)，851-888。[52] G. Prasad 和 R. Rapinchuk, *Weakly commensurable arithmetic groups and isospectral locally symmetric spaces* **109** 2009 113 184 ，《Publ. Math. IHES》（），-。[53] S. Riolo 和 A. Seppi, *Geometric transition from hyperbolic to Anti-de Sitter structures in dimension four* **23** 2022 115 176 ，《Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.》（），-。[54] P. Scott 和 T. Wall, *Topological methods in group theory*, 载于《群的同调理论》（研讨会论文集，达勒姆，1977），伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社 36(1979)，137-203。[55] C. Siegel, *Indefinite quadratische formen und funktionentheorie*, 《Math. Ann.》124(1951)，17-54 和 364-387。[56] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames*, SL_2, R´edig´e，由 Hyman Bass 协助，Ast´erisque 46(1977)，法国数学会，巴黎。[57] J.-P. Serre, *Cohomologie des groupes discrets*, 载于《数学展望》(AM-70)，第 70 卷，普林斯顿大学出版社，2016，77-170。[58] W. Thurston, *Geometry and topology of three-manifolds*, 普林斯顿讲义，1979。[59] W. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, 《Bull. Amer. Math. Soc.》（新系列），6(1982)，357-381。[60] W. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary* 9801058 ，，预印本，arXiv:math.GT/。[61] P. Tukia, *Conical limit points and uniform convergence groups*, 《J. Reine Angew. Math.》501(1998)，71-98。[62] J. Vey, *Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants*, 《Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.》24(1970)，641-665。[63] E. Vinberg, *The theory of homogeneous convex cones*, 《Trudy Moskov. Mat. Obsc.》12(1963)，303-358。[64] E. Vinberg, *Structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone*, 《Trudy Moskov. Mat. Obsc.》13(1965)，56-83。[65] E. Vinberg, *Discrete linear groups that are generated by reflections*, 《Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.》35(1971)，1072-1112。[66] E. Vinberg, *Rings of definition of dense subgroups of semisimple linear groups*, 《Math. USSR Izv.》5(1971)，45-55。[67] T. Weisman, *Dynamical properties of convex-cocompact actions in projective space*, 预印本 arXiv:2009.10994v2。

[68] T. Weisman, *An extended definition of Anosov representation for relatively hyperbolic groups* 2205 07183 , 预印本

arXiv: 。。[69] A. Yaman, *A topological characterization of relative hyperbolic groups*, 《J. Reine Angew. Math.》**566**(2004), 41-89。[70] A. Zimmer, *A higher rank rigidity theorem for convex real projective manifolds*, 即将在《几何与拓扑》发表。

University of Michigan, Ann Arbor, USA
Email address: blayac@umich.edu

Department of Mathematics, Heidelberg University, Heidelberg, Germany
Email address: gviaggi@mathi.uni-海德堡.de