arXiv:2302.07178v1 [math.RA] 7 Feb 2023

相容前李代数的变形与阿贝尔扩张

SHANSHAN LIU 和 LIANGYUN CHEN*

摘要。本文首先给出相容前李代数及其表示的定义。我们研究相容李代数与相容前李代数之间的关系。我们还构造了一个新的双微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 元对应于相容前李代数结构。我们给出控制相容前李代数变形的双微分分次李代数。随后，我们引入了一个系数取自身的相容前李代数上同调。我们研究相容前李代数的无穷小变形，并证明等价无穷小变形属于同一个第二上同调群。我们进一步给出相容前李代数上的 Nijenhuis 算子的概念，并研究相容前李代数的形式变形。如果第二上同调群 $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 是平凡的，则该相容前李代数是刚性的。最后，我们给出系数取任意表示的相容前李代数上同调，并利用该上同调研究相容前李代数的阿贝尔扩张。我们证明，阿贝尔扩张由第二上同调群分类。

目录

1. 引言 12. 相容前李代数的 Maurer-Cartan 刻画 33. 相容前李代数的形式变形 73.1. 相容前李代数的上同调 73.2. 相容前李代数的无穷小变形 93.3. 相容前李代数的形式变形 114. 相容前李代数的阿贝尔扩张 134.1. 任意表示中相容前李代数的上同调 ffi数 134.2. 相容前李代数的阿贝尔扩张 16参考文献 20

1. 引言

前李代数（也称为左对称代数、拟结合代数、Vinberg 代数等）的概念由 M. Gerstenhaber 在环与代数的变形理论中独立提出 [9]。前李代数源于对仿射流形和李群上的仿射结构的研究 [14], 齐性凸锥 [22]。其定义恒等式比结合性弱。这种代数结构描述了结合代数的 Hochschild 上同调中的上链空间、有根树以及仿射空间上的向量场的一些性质。

* 通讯作者 MSC 2020：17A36, 17A40, 17B10, 17B40, 17B60, 17B63, 17D25 关键词及短语：相容前李代数、Maurer-Cartan 元、上同调、变形、阿贝尔扩张。

此外，由于其在非结合代数、组合学、数值分析和量子场论中的应用，前李代数在代数、几何和物理学中的作用日益重要，另见 [1, 2, 3, 6]。前李代数与李代数之间存在密切联系：前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 可通过交换子括号导出一个李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_C)$，称为伴随李代数，记作 $\mathfrak{g}^C$。此外，对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，由映射 $L : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 以及 $L_x y = x \cdot y$ 定义的表示，给出了伴随李代数 $\mathfrak{g}^C$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的一个表示。

相容代数结构是指线性范畴中两个同类代数结构，使得对应于这两个代数结构的乘法的任意线性组合仍定义同类代数结构。相容代数结构在数学和数理物理中得到了广泛研究。Golubchik 和 Sokolov 在可积方程的背景下研究了相容李代数 [10], 经典杨-巴克斯特方程 [11], 李代数上的环代数 [12]。相容李代数也与椭圆θ函数有关 [19]。文献 [20, 21, 24] 还研究了相容李代数的分类、歌剧和双代数理论。最近，文献 [17]，利用双微分分次李代数理论建立了相容李代数的变形理论和上同调理论。基于类似思想，文献 [8]，研究了相容 L_∞-代数，文献 [5] 研究了相容结合代数，文献 [13] 研究了相容3-李代数。

本文旨在研究相容前李代数的上同调及其应用。我们构造了一个双微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 元为相容前李结构。随后，我们引入了系数取自身的相容前李代数的上同调。作为应用，我们研究相容前李代数的形式变形和无穷小变形，并给出相容前李代数上的 Nijenhuis 算子的概念。我们给出一个相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 及其表示 $(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$，并构造一个双微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 元为 $(\pi_1+\rho+\mu, \pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu})$。随后，我们给出系数取任意表示的相容前李代数的上同调。作为应用，我们研究相容前李代数的阿贝尔扩张。

本文结构如下。第 2 节中，我们给出相容前李代数及其表示的记号，并研究相容李代数与相容前李代数之间的关系。我们回顾双微分分次李代数的概念，并构造一个新的双微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 元素是相容前李结构。此外，我们给出控制相容前李代数变形的双微分分次李代数。第 3 节中，我们介绍一个以自身为系数的相容前李代数的上同调。利用这一上同调，我们研究相容前李代数的无穷小变形，并证明等价无穷小变形属于同一个第二上同调群。我们给出相容前李代数上 Nijenhuis 算子的概念，并证明平凡变形会导出一个 Nijenhuis 算子。反过来，Nijenhuis 算子也会导出一个平凡变形。我们研究相容前李代数的形式变形。如果第二上同调群 $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ 是平凡的，那么该相容前李代数是刚性的。第 4 节中，我们给出一个相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 及其表示 $(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$，并构造一个双微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 元是 $(\pi_1 + \rho + \mu, \pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu})$。利用该双微分分次李代数，我们给出一个以任意表示为系数的相容前李代数的上同调。我们运用上同调方法研究相容前李代数的阿贝尔扩张，并证明阿贝尔扩张由第二上同调群分类。

2. 相容前李代数的 Maurer-Cartan刻画

本节首先给出相容前李代数及其表示的记号。然后，我们研究相容李代数与相容前李代数之间的关系。最后，我们构造一个新的双微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 元素是相容前李结构。我们给出控制相容前李代数变形的双微分分次李代数。

定义 2.1. ([1]) 一个 前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 是一个向量空间 $\mathfrak{g}$，配备了一个双线性乘积 $\cdot : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$，使得对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，下述等式成立：

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z).$$

设 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 是一个前李代数。交换子 $[x, y]_C = x \cdot y - y \cdot x$ 给出一个李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_C)$，记作 $\mathfrak{g}^C$，称为 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 的伴随李代数。

定义 2.2. ([2]) 前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 在向量空间 V 上的一个表示由一对 (ρ, μ) 构成，其中 $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ 是伴随李代数 $\mathfrak{g}^C$ 在 V 上的一个表示，而 $\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ 是一个线性映射，使得对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\mu(y) \circ \mu(x) - \mu(x \cdot y) = \mu(y) \circ \rho(x) - \rho(x) \circ \mu(y).$$

我们将前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 的一个表示记为 (V, ρ, μ)。此外，设 $L, R : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(\mathfrak{g})$ 为线性映射，其中 $L_x y = x \cdot y$，$R_x y = y \cdot x$。于是 $(\mathfrak{g}, L, R)$ 也是一个表示，称为正则表示。

若置换 $\sigma \in \mathbb{S}_n$ 满足 $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ 且 $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$，则称其为 $(i, n-i)$-无交错置换。若 $i = 0$ 且 $i = n$，则约定 $\sigma = Id$。所有 $(i, n-i)$- 无交错置换构成的集合记为 $\mathbb{S}_{(i,n-i)}$。$(i_1, \ldots, i_k)$- 无交错置换的概念及集合 $\mathbb{S}_{(i_1,\ldots,i_k)}$ 的定义类似。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间。我们将 $C^n(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = Hom(\wedge^{n-1}\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$，并考虑分次向量空间 $C^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = \oplus_{n=1}^{+\infty} C^n(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = \oplus_{n=1}^{+\infty} Hom(\wedge^{n-1}\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$。文献[4, 18, 23] 中已证明，赋予松岛–二之江括号的 $C^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$

$$[P, Q]^{MN} = P \circ Q - (-1)^{pq} Q \circ P, \quad \forall P \in C^{p+1}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}), Q \in C^{q+1}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$$

是一个分次李代数，其中 $P \circ Q \in C^{p+q+1}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ 定义为

$$\begin{aligned} & P \circ Q(x_1, \ldots, x_{p+q+1}) \\ = & \sum_{\sigma \in \mathbb{S}(q,1,p-1)} \operatorname{sgn}(\sigma) P(Q(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}, x_{\sigma(q+1)}), x_{\sigma(q+2)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}, x_{p+q+1}) \\ & + (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}(p,q)} \operatorname{sgn}(\sigma) P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}, Q(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}, x_{p+q+1})). \end{aligned}$$

特别地，$\pi \in Hom(\otimes^2\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ 构成前李代数，当且仅当 $[\pi, \pi]^{MN} = 0$。如果 π 是一个前李代数结构，那么 $d_\pi := [\pi, \cdot]^{MN}$ 是分次李代数 $(C^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}), [\cdot, \cdot]^{MN})$ 的分次导子，并且满足 $d_\pi \circ d_\pi = 0$，因此 $(C^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}), [\cdot, \cdot]^{MN}, d_\pi)$ 成为一个微分分次李代数。

定义 2.3. 相容前李代数是一个三元组 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间，“$\cdot$”和“$*$”是 $\mathfrak{g}$ 上的前李代数结构，且对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，下列等式成立：

(1) $(x * y) \cdot z + (x \cdot y) * z - x \cdot (y * z) - x * (y \cdot z) - (y * x) \cdot z - (y \cdot x) * z + y \cdot (x * z) + y * (x \cdot z) = 0$

命题 2.4. 三元组 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 是相容前李代数，当且仅当“$\cdot$”和“$*$”是 $\mathfrak{g}$ 上的前李代数结构，且对所有 $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$，下列双线性运算

$$x \diamond y = k_1 x \cdot y + k_2 x * y, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{2}$$

在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个前李代数结构。

证明。显然。 □

定义 2.5. 设 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 和 $(\mathfrak{g}', \cdot', *')$ 是两个相容前李代数。映射 $\varphi : (\mathfrak{g}, \cdot, *) \longrightarrow (\mathfrak{g}', \cdot', *')$ 既是从 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 到 $(\mathfrak{g}', \cdot')$ 的前李代数同态，也是从 $(\mathfrak{g}, *)$ 到 $(\mathfrak{g}', *')$ 的前李代数同态。

定义 2.6. 相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 在向量空间 V 上的一个表示由四元组 $(\rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 组成，其中 (V, ρ, μ) 是前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 的一个表示，且 $(V, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 是前李代数 $(\mathfrak{g}, *)$ 的一个表示，并满足对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
&\rho(x * y) + \tilde{\rho}(x \cdot y) - \rho(x)\tilde{\rho}(y) - \tilde{\rho}(x)\rho(y) &&= \rho(y * x) + \tilde{\rho}(y \cdot x) - \rho(y)\tilde{\rho}(x) - \tilde{\rho}(y)\rho(x), &(3)\\
&\mu(y)\tilde{\rho}(x) - \rho(x)\tilde{\mu}(y) - \mu(y)\tilde{\mu}(x) + \mu(x * y) &&= -\tilde{\mu}(y)\rho(x) + \tilde{\rho}(x)\mu(y) + \tilde{\mu}(y)\mu(x) - \tilde{\mu}(x \cdot y). &(4)
\end{aligned}$$

我们将相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的一个表示记为 $(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$。此外，设 $L, R, \tilde{L}, \tilde{R} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为线性映射，其中 $L_x y = x \cdot y$，$R_x y = y \cdot x$，$\tilde{L}_x y = x * y$，$\tilde{R}_x y = y * x$。那么 $(\mathfrak{g}, L, R, \tilde{L}, \tilde{R})$ 也是一个表示，称为正则表示。

我们分别定义两个双线性运算 $\cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} : \otimes^2(\mathfrak{g} \oplus V) \to (\mathfrak{g} \oplus V)$ 和 $*_{\mathfrak{g}\oplus V} : \otimes^2(\mathfrak{g} \oplus V) \to (\mathfrak{g} \oplus V)$，如下:

$$\begin{aligned}
(x + u) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} (y + v) &= x \cdot y + \rho(x)(v) + \mu(y)(u), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, u, v \in V,\\
(x + u) *_{\mathfrak{g}\oplus V} (y + v) &= x * y + \tilde{\rho}(x)(v) + \tilde{\mu}(y)(u), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, u, v \in V.
\end{aligned}$$

命题 2.7. 采用上述记号，$(\mathfrak{g}\oplus V, \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V}, *_{\mathfrak{g}\oplus V})$ 是一个相容前李代数，记作 $\mathfrak{g} \ltimes_{(\rho,\mu,\tilde{\rho},\tilde{\mu})} V$，称为相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 与表示 $(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 的半直积。

证明。显然，$(\mathfrak{g} \oplus V, \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V})$ 和 $(\mathfrak{g} \oplus V, *_{\mathfrak{g}\oplus V})$ 都是前李代数。对于所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}, u, v, w \in V$，由 (1)、(3) 和 (4)，可得

$$\begin{aligned}
&((x + u) *_{\mathfrak{g}\oplus V} (y + v)) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w) + ((x + u) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} (y + v)) *_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w)\\
&-(x + u) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} ((y + v) *_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w)) - (x + u) *_{\mathfrak{g}\oplus V} ((y + v) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w))\\
&-((y + v) *_{\mathfrak{g}\oplus V} (x + u)) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w) - ((y + v) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} (x + u)) *_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w)\\
&+(y + v) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} ((x + u) *_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w)) + (y + v) *_{\mathfrak{g}\oplus V} ((x + u) \cdot_{\mathfrak{g}\oplus V} (z + w))\\
=\ &(x * y) \cdot z + \rho(x * y)w + \mu(z)\tilde{\rho}(x)v + \mu(z)\tilde{\mu}(y)u + (x \cdot y) * z + \tilde{\rho}(x \cdot y)w + \tilde{\mu}(z)\rho(x)v + \tilde{\mu}(z)\mu(y)u\\
&-x \cdot (y * z) - \rho(x)\tilde{\rho}(y)w - \rho(x)\tilde{\mu}(z)v - \mu(y * z)u - x * (y \cdot z) - \tilde{\rho}(x)\rho(y)w - \tilde{\rho}(x)\mu(z)v - \tilde{\mu}(y \cdot z)u\\
&-(y * x) \cdot z - \rho(y * x)w - \mu(z)\tilde{\rho}(y)u - \mu(z)\tilde{\mu}(x)v - (y \cdot x) * z - \tilde{\rho}(y \cdot x)w - \tilde{\mu}(z)\rho(y)u - \tilde{\mu}(z)\mu(x)v\\
&+y \cdot (x * z) + \rho(y)\tilde{\rho}(x)w + \rho(y)\tilde{\mu}(z)u + \mu(x * z)v + y * (x \cdot z) + \tilde{\rho}(y)\rho(x)w + \tilde{\rho}(y)\mu(z)u + \tilde{\mu}(x \cdot z)v\\
=\ &0.
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

现在，我们将给出相容李代数与相容 pre-Lie 代数之间的关系。首先，我们回顾相容李代数及其表示的记号。

定义 2.8. ([10, 11, 19]) 一个相容李代数是一个三元组$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$，其中$\mathfrak{g}$是一个向量空间，$[\cdot,\cdot]$和$\{\cdot,\cdot\}$是定义在$\mathfrak{g}$上的李代数结构，使得对所有的$x,y,z \in \mathfrak{g}$，以下等式成立：

$$[\{x,y\},z] + [\{y,z\},x] + [\{z,x\},y] + \{[x,y],z\} + \{[y,z],x\} + \{[z,x],y\} = 0.$$

定义 2.9. ([24]) 相容李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$在向量空间$V$上的一个表示由一对$(\rho, \mu)$组成，其中$(V, \rho)$是李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$的一个表示，且$(V, \mu)$是李代数$(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\})$的一个表示，并满足对所有$x, y \in \mathfrak{g}$：

$$\rho(\{x,y\}) + \mu([x,y]) = [\rho(x), \mu(y)] - [\rho(y), \mu(x)].$$

我们将相容李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$的一个表示记作$(V, \rho, \mu)$.

命题 2.10. 设$(\mathfrak{g}, \cdot, *)$是一个相容前李代数。分别定义两个括号$[\cdot,\cdot]$和$\{\cdot,\cdot\}$如下：

$$[x,y] = x \cdot y - y \cdot x, \quad \{x,y\} = x * y - y * x.$$

那么，$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$是一个相容李代数，记作$\mathfrak{g}^C$，称为$(\mathfrak{g}, \cdot, *)$的下~邻接相容李代数。此外，设$L$、$\tilde{L}$为线性映射，其中$L_x y = \tilde{x} \cdot y$，$\tilde{L}_x y = x * y$。那么$(V, L, \tilde{L})$是下邻接相容李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$的一个表示。

证明。显然，$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$和$(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\})$是李代数。对于所有$x,y,z \in \mathfrak{g}$，由(1)，可得

$$\begin{aligned}
& [\{x,y\},z] + [\{y,z\},x] + [\{z,x\},y] + \{[x,y],z\} + \{[y,z],x\} + \{[z,x],y\} \\
= \; & [x*y - y*x, z] + [y*z - z*y, x] + [z*x - x*z, y] \\
& + \{x \cdot y - y \cdot x, z\} + \{y \cdot z - z \cdot y, x\} + \{z \cdot x - x \cdot z, y\} \\
= \; & (x*y)\cdot z - (y*x)\cdot z - z\cdot(x*y) + z\cdot(y*x) + (y*z)\cdot x - (z*y)\cdot x \\
& - x\cdot(y*z) + x\cdot(z*y) + (z*x)\cdot y - (x*z)\cdot y - y\cdot(z*x) + y\cdot(x*z) \\
& + (x\cdot y)*z - (y\cdot x)*z - z*(x\cdot y) + z*(y\cdot x) + (y\cdot z)*x - (z\cdot y)*x \\
& - x*(y\cdot z) + x*(z\cdot y) + (z\cdot x)*y - (x\cdot z)*y - y*(z\cdot x) + y*(x\cdot z) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

因此，$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$是相容李代数。

~显然，(V, L)是$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$的一个表示，且$(V, L)$是$(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\})$的一个表示。对于所有$x,y,z \in \mathfrak{g}$，由(1)，可得

$$\begin{aligned}
& L_{\{x,y\}} z + \tilde{L}_{[x,y]} z - [L_x, \tilde{L}_y] z + [L_y, \tilde{L}_x] z \\
= \; & \{x,y\}\cdot z + [x,y] * z - L_x \tilde{L}_y z + \tilde{L}_y L_x z + L_y \tilde{L}_x z - \tilde{L}_x L_y z \\
= \; & (x*y)\cdot z - (y*x)\cdot z + (x\cdot y)*z - (y\cdot x)*z - x\cdot(y*z) + y*(x\cdot z) + y\cdot(x*z) - x*(y\cdot z) \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

这意味着

$$L_{\{x,y\}} + \tilde{L}_{[x,y]} = [L_x, \tilde{L}_y] - [L_y, \tilde{L}_x].$$

~因此，$(V, L, \tilde{L})$是下邻接相容李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$的一个表示。 □

命题 2.11. 设$(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$是相容前李代数$(\mathfrak{g}, \cdot, *)$的一个表示。那么$(V, \rho - \mu, \tilde{\rho} - \tilde{\mu})$是下邻接相容李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot\})$的一个表示。

证明。 显然，$(V, \rho - \mu)$ 是李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 的一个表示，而 $(V, \tilde{\rho} - \tilde{\mu})$ 是李代数 $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\})$ 的一个表示。对所有 $x, y \in \mathfrak{g}, u \in V$，由 (3) 和 (4)，我们有

$$\begin{aligned}
& (\rho-\mu)(\{x,y\})+(\tilde{\rho}-\tilde{\mu})([x,y])-[(\rho-\mu)(x),(\tilde{\rho}-\tilde{\mu})(y)]+[(\rho-\mu)(y),(\tilde{\rho}-\tilde{\mu})(x)]\\
= \;& \rho\{x,y\}-\mu\{x,y\}+\tilde{\rho}[x,y]-\tilde{\mu}[x,y]-[\rho(x),\tilde{\rho}(y)]+[\rho(x),\tilde{\mu}(y)]+[\mu(x),\tilde{\rho}(y)]\\
& -[\mu(x),\tilde{\mu}(y)]+[\rho(y),\tilde{\rho}(x)]-[\rho(y),\tilde{\mu}(x)]-[\mu(y),\tilde{\rho}(x)]+[\mu(y),\tilde{\mu}(x)]\\
= \;& \rho(x*y)-\rho(y*x)-\mu(x*y)+\mu(y*x)+\tilde{\rho}(x\cdot y)-\tilde{\rho}(y\cdot x)-\tilde{\mu}(x\cdot y)+\tilde{\mu}(y\cdot x)\\
& -\rho(x)\tilde{\rho}(y)+\tilde{\rho}(y)\rho(x)+\rho(x)\tilde{\mu}(y)-\tilde{\mu}(y)\rho(x)+\mu(x)\tilde{\rho}(y)-\tilde{\rho}(y)\mu(x)-\mu(x)\tilde{\mu}(y)+\tilde{\mu}(y)\mu(x)\\
& +\rho(y)\tilde{\rho}(x)-\tilde{\rho}(x)\rho(y)-\rho(y)\tilde{\mu}(x)+\tilde{\mu}(x)\rho(y)-\mu(y)\tilde{\rho}(x)+\tilde{\rho}(x)\mu(y)+\mu(y)\tilde{\mu}(x)-\tilde{\mu}(x)\mu(y)\\
= \;& 0,
\end{aligned}$$

这意味着

$$(\rho-\mu)(\{x,y\})+(\tilde{\rho}-\tilde{\mu})([x,y])=[(\rho-\mu)(x),(\tilde{\rho}-\tilde{\mu})(y)]-[(\rho-\mu)(y),(\tilde{\rho}-\tilde{\mu})(x)].$$

证明至此完成。 □

定义 2.12. ([17]) 设 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_1)$ 和 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_2)$ 是两个微分分次李代数，其中 $\mathcal{G} = \oplus^{\infty}_{i=0} \mathfrak{g}_i$。若 d_1 和 d_2 满足以下条件，则称四元组 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2)$ 为双微分分次李代数

$$\mathrm{d}_1 \circ \mathrm{d}_2 + \mathrm{d}_2 \circ \mathrm{d}_1 = 0. \tag{5}$$

定义 2.13. ([17]) 设 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2)$ 是一个双微分分次李代数。若一对 $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$ 满足以下条件，则称其为 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2)$ 的 Maurer-Cartan 元：P_1 和 P_2 分别是微分分次李代数 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_1)$ 和 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_2)$ 的 Maurer-Cartan 元

$$\mathrm{d}_1 P_2 + \mathrm{d}_2 P_1 + [P_1, P_2] = 0. \tag{6}$$

设 $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot])$ 是一个分次李代数。显然，$(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}_1 = 0, \mathrm{d}_2 = 0)$ 是一个双微分分次李代数。考虑分次李代数 $(\mathrm{C}^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN})$，我们得到以下主要结果。

定理 2.14. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间，且 $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Hom}(\otimes^2\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$。那么，$(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是一个相容前李代数，当且仅当 (π_1, π_2) 是双微分分次李代数 $(\mathrm{C}^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, \mathrm{d}_1 = 0, \mathrm{d}_2 = 0)$ 的 Maurer-Cartan 元。

证明. 显然，$(\mathfrak{g}, \pi_1)$ 和 $(\mathfrak{g}, \pi_2)$ 是前李代数，当且仅当

$$[\pi_1, \pi_1]^{MN} = 0, \quad [\pi_2, \pi_2]^{MN} = 0.$$

对于所有的 $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\begin{aligned}
[\pi_1,\pi_2]^{MN}(x,y,z) = \;& \pi_1(\pi_2(x,y),z)-\pi_1(\pi_2(y,x),z)-\pi_1(x,\pi_2(y,z))+\pi_1(y,\pi_2(x,z))\\
& +\pi_2(\pi_1(x,y),z)-\pi_2(\pi_1(y,x),z)-\pi_2(x,\pi_1(y,z))+\pi_2(y,\pi_1(x,z)),
\end{aligned}$$

这意味着方程 (1) 等价于 $[\pi_1, \pi_2]^{MN} = 0$。因此，$(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是相容前李代数，当且仅当 (π_1, π_2) 是双微分分次李代数 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, \mathrm{d}_1 = 0, \mathrm{d}_2 = 0)$ 中的 Maurer-Cartan 元。 □

现在，我们给出一种新的双微分分次李代数，用以控制相容前李代数的变形。

命题 2.15. 设 $(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是一个相容前李代数，则 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_{\pi_1}, d_{\pi_2})$ 是一个双微分分次李代数。此外，对于所有 $\pi_1', \pi_2' \in \mathrm{Hom}(\otimes^2\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$，$(\mathfrak{g}, \pi_1 + \pi_1', \pi_2 + \pi_2')$ 是一个相容前李代数，当且仅当 (π_1', π_2') 是双微分分次李代数 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_{\pi_1}, d_{\pi_2})$ 的一个 Maurer-Cartan 元。

证明。 由于 $(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是相容前李代数，根据定理 2.14, (π_1, π_2) 是双微分分次李代数 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_1 = 0, d_2 = 0)$ 的 Maurer-Cartan 元。因此，我们有

$$[\pi_1, \pi_1]^{MN} = 0, \quad [\pi_2, \pi_2]^{MN} = 0, \quad [\pi_1, \pi_2]^{MN} = 0.$$

因此，$(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_{\pi_1})$ 和 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_{\pi_2})$ 是微分分次李代数。对于所有 $P \in C^{p+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$，根据分次雅可比恒等式，我们有

$$d_{\pi_1}(d_{\pi_2}P) + d_{\pi_2}(d_{\pi_1}P) = [\pi_1, [\pi_2, P]^{MN}]^{MN} + [\pi_2, [\pi_1, P]^{MN}]^{MN} = [[\pi_1, \pi_2]^{MN}, p]^{MN} = 0,$$

这意味着 $d_{\pi_1} \circ d_{\pi_2} + d_{\pi_2} \circ d_{\pi_1} = 0$。因此，$(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_{\pi_1}, d_{\pi_2})$ 是双微分分次李代数。

若 $(\mathfrak{g}, \pi_1 + \pi_1', \pi_2 + \pi_2')$ 是一个相容前李代数，根据定理 2.14，$(\pi_1 + \pi_1', \pi_2 + \pi_2')$ 是双微分分次李代数 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_1 = 0, d_2 = 0)$ 中的一个 Maurer-Cartan 元。因此，我们有

$$[\pi_1 + \pi_1', \pi_1 + \pi_1']^{MN} = 0, \tag{7}$$

$$[\pi_2 + \pi_2', \pi_2 + \pi_2']^{MN} = 0, \tag{8}$$

$$[\pi_1 + \pi_1', \pi_2 + \pi_2']^{MN} = 0, \tag{9}$$

由（7）、（8）和（9），可得

$$\begin{aligned} d_{\pi_1}\pi_1' + \frac{1}{2}[\pi_1', \pi_1']^{MN} &= 0, \\ d_{\pi_2}\pi_2' + \frac{1}{2}[\pi_2', \pi_2']^{MN} &= 0, \\ d_{\pi_1}\pi_2' + d_{\pi_2}\pi_1' + [\pi_1', \pi_2']^{MN} &= 0. \end{aligned}$$

因此，(π_1', π_2') 是 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot]^{MN}, d_{\pi_1}, d_{\pi_2})$ 中的一个 Maurer-Cartan 元。逆向部分可用类似方法证明。细节从略。证明完毕。□

3. 相容前李代数的形式变形

本节首先介绍相容前李代数自身系数的上同调。然后，我们利用该上同调研究相容前李代数的无穷小变形，并证明等价无穷小变形属于同一个第二上同调群。我们给出相容前李代数上 Nijenhuis 算子的概念，并证明 Nijenhuis 算子会产生一个平凡变形。最后，我们研究相容前李代数的形式变形。若第二上同调群 $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 是平凡的，则该相容前李代数是刚性的。

3.1. 相容前李代数的上同调。

设 $(\mathfrak{g}, \pi)$ 是一个前李代数，其中 $\pi(x, y) = x \cdot y$。由分次雅可比恒等式，我们定义余边界算子 $\delta_\pi : C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$，其定义如下：

$$\delta_\pi f = (-1)^{n-1}[\pi, f]^{MN}, \quad \forall f \in C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g}).$$

因此，我们得到一个上链复形 $(\oplus_{n=1}^{+\infty}C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g}),\delta_\pi)$。更确切地说，对于所有 $x_1,\ldots,x_{n+1}\in\mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}(\delta_\pi f)(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x_i\cdot f(x_1,\ldots,\hat{x_i},\ldots,x_{n+1})\\ &+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f(x_1,\ldots,\hat{x_i},\ldots,x_n,x_i)\cdot x_{n+1}\\ &-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f(x_1,\ldots,\hat{x_i}\ldots,x_n,x_i\cdot x_{n+1})\\ &+\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j}f([x_i,x_j]_C,x_1,\ldots,\hat{x_i},\ldots,\hat{x_j},\ldots,x_{n+1}),\end{aligned}$$

它是前李代数$\mathfrak{g},\pi$在正则表示中取值的余边界算子（V,L,R）。更多细节请参见 [8]。

设 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 是一个相容前李代数，其中 $\pi_1(x,y)=x\cdot y$，$\pi_2(x,y)=x*y$。我们将 n-余链的集合（$n\ge 1$）定义为

$$\mathfrak{C}^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})=\underbrace{C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})\oplus C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})\oplus\cdots\oplus C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})}_{n\ copies}.$$

定义算子 $\delta:C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})\longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$，其定义如下

$$\begin{aligned}\delta^1 f &= (\delta_{\pi_1}f,\delta_{\pi_2}f),\quad \forall f\in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),n=1,\\ \delta^n(f_1,\ldots,f_n) &= (\delta_{\pi_1}f_1,\ldots,\underbrace{\delta_{\pi_2}f_{i-1}+\delta_{\pi_1}f_i}_{i},\ldots,\delta_{\pi_2}f_n),\quad \forall(f_1,\ldots,f_n)\in\mathfrak{C}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),2\le i\le n.\end{aligned}$$

定理 3.1。算子 $\delta:C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})\longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 如上定义，满足 $\delta\circ\delta=0$。

证明。由定理 2.14，我们得到 (π_1,π_2) 是双微分分次李代数 $(C^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}),[\cdot,\cdot]^{MN},d_1=0,d_2=0)$ 中的 Maurer-Cartan 元。因此，利用 $[\pi_1,\pi_1]^{MN}=[\pi_2,\pi_2]^{MN}=[\pi_1,\pi_2]^{MN}=0$ 这一事实以及分次雅可比恒等式，对所有$f\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$，我们有

$$\begin{aligned}&\delta^2(\delta^1 f)\\ =\ &\delta^2([\pi_1,f]^{MN},[\pi_2,f]^{MN})\\ =\ &-([\pi_1,[\pi_1,f]^{MN}]^{MN},[\pi_2,[\pi_1,f]^{MN}]^{MN}+[\pi_1,[\pi_2,f]^{MN}]^{MN},[\pi_2,[\pi_2,f]^{MN}]^{MN})\\ =\ &-(\frac{1}{2}[[\pi_1,\pi_1]^{MN},f]^{MN},[[\pi_1,\pi_2]^{MN},f]^{MN},\frac{1}{2}[[\pi_2,\pi_2]^{MN},f]^{MN})\\ =\ &(0,0,0).\end{aligned}$$

由 $[\pi_1,\pi_1]^{MN}=[\pi_2,\pi_2]^{MN}=[\pi_1,\pi_2]^{MN}=0$ 和分次雅可比恒等式，对于所有 $(f_1,\ldots,f_n)\in C^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),2\le i\le n$，我们有

$$\begin{aligned}&\delta^{n+1}\delta^n(f_1,\ldots,f_n)\\ =\ &(-1)^{n-1}\delta^{n+1}([\pi_1,f_1]^{MN},\ldots,\underbrace{[\pi_2,f_{i-1}]^{MN}+[\pi_1,f_i]^{MN}}_{i},\ldots,[\pi_2,f_n]^{MN})\\ =\ &-([\pi_1,[\pi_1,f_1]^{MN}]^{MN},[\pi_2,[\pi_1,f_1]^{MN}]^{MN}+[\pi_1,[\pi_2,f_1]^{MN}]^{MN}+[\pi_1,[\pi_1,f_2]^{MN}]^{MN},\ldots,\\ &\underbrace{[\pi_2,[\pi_2,f_{i-2}]^{MN}]^{MN}+[\pi_2,[\pi_1,f_{i-1}]^{MN}]^{MN}+[\pi_1,[\pi_2,f_{i-1}]^{MN}]^{MN}+[\pi_1,[\pi_1,f_i]^{MN}]^{MN}}_{3\le i\le n-1},\ldots,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& [\pi_2,[\pi_2,f_{n-1}]^{MN}]^{MN}+[\pi_2,[\pi_1,f_n]^{MN}]^{MN}+[\pi_1,[\pi_2,f_n]^{MN}]^{MN},[\pi_2,[\pi_2,f_n]^{MN}]^{MN}) \\
= \; & -(\frac{1}{2}[[\pi_1,\pi_1]^{MN},f_1]^{MN},[[\pi_1,\pi_2]^{MN},f_1]^{MN}+\frac{1}{2}[[\pi_1,\pi_1]^{MN},f_2]^{MN},\ldots, \\
& \underbrace{\frac{1}{2}[[\pi_2,\pi_2]^{MN},f_{i-2}]^{MN}+[[\pi_1,\pi_2]^{MN},f_{i-1}]^{MN}+\frac{1}{2}[[\pi_1,\pi_1]^{MN},f_i]^{MN}}_{3\le i\le n-1},\ldots, \\
& \frac{1}{2}[[\pi_2,\pi_2]^{MN},f_{n-1}]^{MN}+[[\pi_1,\pi_2]^{MN},f_n]^{MN},\frac{1}{2}[[\pi_2,\pi_2]^{MN},f_n]^{MN}) \\
= \; & (0,0,\ldots,0).
\end{aligned}
$$

因此，我们有 $\delta\circ\delta=0$。 □

定义 3.2. 设 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 是一个相容前李代数。上链复形 $(\oplus_{n=1}^{+\infty}C^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g}),\delta)$ 的上同调称为 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 的上同调。相应的第 n 上同调群记为 $\mathcal{H}^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$。

3.2. 相容前李代数的无穷小变形。

定义 3.3. 设 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 是一个相容前李代数，且 $(\omega_1,\omega_2)\in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$。定义

$$x\cdot_t y=x\cdot y+t\omega_1(x,y),\quad x*_t y=x*y+t\omega_2(x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

若对所有 $t\in\mathbb{K}$，$(\mathfrak{g},\cdot_t,*_t)$ 仍是一个相容前李代数，则称 (ω_1,ω_2) 生成了 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 的一个无穷小变形。

容易验证，$(\omega_1,\ \omega_2)$ 生成一个相容前李代数 $(\mathfrak{g},\ \cdot,\ *)$ 的无穷小变形，当且仅当对所有 $k_1,k_2\in\mathbb{K}$，$k_1\omega_1+k_2\omega_2$ 生成前李代数 $(\mathfrak{g},\ \diamond)$ 的一个无穷小变形，其中“$\diamond$”由 (2) 给出。

根据定理 2.14，$(\omega_1,\ \omega_2)$ 生成相容前李代数 $(\mathfrak{g},\ \pi_1,\ \pi_2)$ 的无穷小变形，其中 $x\cdot y=\pi_1(x,\ y)$ 且 $x*y=\pi_2(x,\ y)$ 当且仅当

$$[\pi_1,\omega_1]^{MN}=0,\quad [\pi_2,\omega_2]^{MN}=0,\quad [\pi_1,\omega_2]^{MN}+[\pi_2,\omega_1]^{MN}=0, \tag{10}$$

$$[\omega_1,\omega_1]^{MN}=0,\quad [\omega_2,\omega_2]^{MN}=0,\quad [\omega_1,\omega_2]^{MN}=0. \tag{11}$$

显然，(10) 表示 $(\omega_1,\ \omega_2)$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g},\ \cdot,\ *)$ 的 2-余循环，即$\delta(\omega_1,\ \omega_2)=0$。(11) 表示 $(\mathfrak{g},\ \omega_1,\ \omega_2)$ 是相容前李代数。

定理 3.4. 使用上述记号，(ω_1,ω_2) 是相容前李代数 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 的 2-余循环。

定义 3.5. 分别由 (ω_1,ω_2) 和 (ω_1',ω_2') 生成的两个无穷小变形 $(\mathfrak{g},\cdot_t,*_t)$ 和 $(\mathfrak{g}',\cdot_t',*_t')$ 称为等价的，如果存在一个线性算子 $N\in gl(\mathfrak{g})$，使得 $Id+tN$ 是从 $(\mathfrak{g}',\cdot_t',*_t')$ 到 $(\mathfrak{g},\cdot_t,*_t)$ 的相容前李代数同态。

由（$\omega_1,\ \omega_2$）和（$\omega_1',\ \omega_2'$）分别生成的两个无穷小变形 $(\mathfrak{g},\cdot_t,*_t)$ 和 $(\mathfrak{g}',\cdot_t',*_t')$ 等价，当且仅当对所有 $x,y\in\mathfrak{g}$，以下等式成立：

$$\omega_1'(x,y)-\omega_1(x,y)=N(x)\cdot y+x\cdot N(y)-N(x\cdot y), \tag{12}$$

$$N(\omega_1'(x,y))=\omega_1(x,N(y))+\omega_1(N(x),y)+N(x)\cdot N(y), \tag{13}$$

$$\omega_1(N(x),N(y))=0, \tag{14}$$

$$\omega_2'(x,y)-\omega_2(x,y)=N(x)*y+x*N(y)-N(x*y), \tag{15}$$

$$N(\omega_2'(x,y))=\omega_2(x,N(y))+\omega_2(N(x),y)+N(x)*N(y), \tag{16}$$

$$\omega_2(N(x),N(y)) = 0. \tag{17}$$

注意，(12) 和 (15) 表示 $(\omega_1' - \omega_1,\ \omega_2' - \omega_2) = \delta N = ([\pi_1, N]^{MN},\ [\pi_2, N]^{MN})$。因此，我们有

定理 3.6. 设 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 是一个相容前李代数。若分别由 (ω_1, ω_2) 和 (ω_1', ω_2') 生成的两个无穷小变形 $(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 和 $(\mathfrak{g}', \cdot_t', *_t')$ 等价，则 (ω_1, ω_2) 和 (ω_1', ω_2') 属于 $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 的同一个上同调类。

定义 3.7. ([23]) 设 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 是一个前李代数。若线性算子 $N \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 满足对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$N(x) \cdot N(y) = N(x \cdot_N y),$$

其中乘积“$\cdot_N$”定义为

$$x \cdot_N y \triangleq N(x) \cdot y + x \cdot N(y) - N(x \cdot y).$$

命题 3.8. ([23]) 设 N 是前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 上的一个 Nijenhuis 算子，则 $(\mathfrak{g}, \cdot_N)$ 是一个前李代数，且 N 是从 $(\mathfrak{g}, \cdot_N)$ 到 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 的同态。

定义 3.9. 设 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 是一个相容前李代数。若线性算子 $N \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 既是前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 上的 Nijenhuis 算子，也是前李代数 $(\mathfrak{g}, *)$ 上的 Nijenhuis 算子，则称 N 为 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 上的 Nijenhuis 算子。

命题 3.10. 设 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 是一个相容前李代数，且 $N \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是一个线性映射。那么，N 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 上的 Nijenhuis 算子，当且仅当 N 是前李代数 $(\mathfrak{g}, \diamond)$上的 Nijenhuis 算子，其中 “$\diamond$”由 (2)给出。

证明. 若 N 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 上的 Nijenhuis 算子，则对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\begin{aligned}
& N(x) \diamond N(y) - N(N(x) \diamond y + x \diamond N(y) - N(x \diamond y)) \\
= \ & k_1 N(x) \cdot N(y) + k_2 N(x) * N(y) - N(k_1 N(x) \cdot y + k_2 N(x) * y \\
& + k_1 x \cdot N(y) + k_2 x * N(y) - N(k_1 x \cdot y + k_2 x * y)) \\
= \ & k_1 (N(x) \cdot N(y) - N(N(x) \cdot y + x \cdot N(y) - N(x \cdot y))) \\
& + k_2 (N(x) * N(y) - N(N(x) * y + x * N(y) - N(x * y))) \\
= \ & 0,
\end{aligned}$$

这意味着 N 是前李代数 $(\mathfrak{g}, \diamond)$ 上的 Nijenhuis 算子。反向部分可用类似方法证明。细节从略。证明完毕。□

命题 3.11. 设 $N \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 上的 Nijenhuis 算子。则 $(\mathfrak{g}, \cdot_N, *_N)$ 是相容前李代数，且 N 是从 $(\mathfrak{g}, \cdot_N, *_N)$ 到 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的同态。

证明。 根据命题 3.10，N 是前李代数（$\mathfrak{g}, \diamond$上的 Nijenhuis 算子。对所有 x,$y \in \mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}
x \diamond_N y &= N(x) \diamond y + x \diamond N(y) - N(x \diamond y) \\
&= k_1 N(x) \cdot y + k_2 N(x) * y + k_1 x \cdot N(y) + k_2 x * N(y) - k_1 N(x \cdot y) - k_2 N(x * y) \\
&= k_1 (x \cdot_N y) + k_2 (x *_N y).
\end{aligned}$$

根据命题 3.8，$(\mathfrak{g}, \diamond_N)$ 是一个前李代数。根据命题 2.4，$(\mathfrak{g}, \cdot_N, *_N)$ 是一个相容前李代数。根据命题 3.8，N 是从 $(\mathfrak{g}, \cdot_N)$ 到 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 的同态，也是从 $(\mathfrak{g}, *_N)$ 到 $(\mathfrak{g}, *)$ 的同态。因此，N 是从 $(\mathfrak{g}, \cdot_N, *_N)$ 到 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的同态。□

定义 3.12. 若存在一个线性算子 $N \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$，使得 $\mathrm{Id} + tN$ 是从 $(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 到 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的相容前李代数同态，则由 (ω_1, ω_2) 生成的相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的无穷小变形 $(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 称为平凡的。

$(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 是平凡无穷小变形，当且仅当对于所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，以下等式成立：

$$\omega_1(x, y) = N(x) \cdot y + x \cdot N(y) - N(x \cdot y), \tag{18}$$

$$N(\omega_1(x, y)) = N(x) \cdot N(y), \tag{19}$$

$$\omega_2(x, y) = N(x) * y + x * N(y) - N(x * y), \tag{20}$$

$$N(\omega_2(x, y)) = N(x) * N(y). \tag{21}$$

由 (18) 和 (19)，可得 N 是前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot$上的 Nijenhuis 算子。由 (20) 和 (21)，可得 N 是前李代数 $(\mathfrak{g}, *$上的 Nijenhuis 算子。因此，由 (18)、(19)、(20) 和 (21)，可得相容前李代数的平凡无穷小变形会导出该相容前李代数上的 Nijenhuis 算子 N。反过来，Nijenhuis 算子也可以生成平凡无穷小变形，如下述定理所示。

定理 3.13. 设 N 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 上的 Nijenhuis 算子。则相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的一个无穷小变形 $(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 可通过如下方式得到

$$\omega_1(x, y) = N(x) \cdot y + x \cdot N(y) - N(x \cdot y), \tag{22}$$

$$\omega_2(x, y) = N(x) * y + x * N(y) - N(x * y). \tag{23}$$

此外，该无穷小变形 $(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 是平凡的。

证明. 由 (22) 和 (23)，我们得到 $(\omega_1, \omega_2) = \delta N$。因此，$(\omega_1, \omega_2)$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的一个 2-余循环。由于 N 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 上的 Nijenhuis 算子，根据命题 3.11，$(\mathfrak{g}, \omega_1, \omega_2)$ 是一个相容前李代数。因此，$(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 是 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的一个无穷小变形。不难推出，$\mathrm{Id} + tN$ 是从 $(\mathfrak{g}, \cdot_t, *_t)$ 到 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的相容前李代数同态。因此，该无穷小变形是平凡的。□

3.3. 相容前李代数的形式变形。

定义 3.14. 设 $(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是一个相容前李代数，$\pi_1^t = \pi_1 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty} \pi_{1i}^i t^i, \pi_2^t = \pi_2 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty} \pi_{2i}^i t^i : \mathfrak{g}[[t]] \otimes \mathfrak{g}[[t]] \longrightarrow \mathfrak{g}[[t]]$ 是 $\mathbb{K}[[t]]$-双线性映射，其中 $\pi_1^i, \pi_2^i : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 是线性映射。若 $(\mathfrak{g}[[t]], \pi_1^t, \pi_2^t)$ 仍是一个相容前李代数，则称 $\{\pi_1^i, \pi_2^i\}_{i \geq 1}$ 生成了相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 的一个单参数形式变形。

若 $\{\pi_1^i, \pi_2^i\}_{i \geq 1}$ 生成相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \pi_1, \pi_2)$ 的单参数形式变形，则对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$ 以及 $n = 1, 2, \ldots$，我们有

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \pi_1^i(\pi_1^j(x, y), z) - \pi_1^i(x, \pi_1^j(y, z)) - \pi_1^i(\pi_1^j(y, x), z) + \pi_1^i(y, \pi_1^j(x, z)) = 0.$$

此外，我们有

$$(24)\quad \sum_{\substack{i+j=n\\0<i,j\leq n-1}} \pi_1^i(\pi_1^j(x,y),z)-\pi_1^i(x,\pi_1^j(y,z))-\pi_1^i(\pi_1^j(y,x),z)+\pi_1^i(y,\pi_1^j(x,z))=-[\pi_1,\pi_1^n]^{MN}(x,y,z).$$

同理，我们有

$$(25)\quad \sum_{\substack{i+j=n\\0<i,j\leq n-1}} \pi_2^i(\pi_2^j(x,y),z)-\pi_2^i(x,\pi_2^j(y,z))-\pi_2^i(\pi_2^j(y,x),z)+\pi_2^i(y,\pi_2^j(x,z))=-[\pi_2,\pi_2^n]^{MN}(x,y,z).$$

对所有 x、y、z $\in$ g 以及 n = 1, 2, . . .，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{i+j=n\\i,j\geq 0}} \pi_1^i(\pi_2^j(x,y),z)+\pi_2^j(\pi_1^i(x,y),z)-\pi_1^i(x,\pi_2^j(y,z))-\pi_2^j(x,\pi_1^i(y,z))\\&-\pi_1^i(\pi_2^j(y,x),z)-\pi_2^j(\pi_1^i(y,x),z)+\pi_1^i(y,\pi_2^j(x,z))+\pi_2^j(y,\pi_1^i(x,z))=0.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{i+j=n\\0<i,j\leq n-1}} \pi_1^i(\pi_2^j(x,y),z)+\pi_2^j(\pi_1^i(x,y),z)-\pi_1^i(x,\pi_2^j(y,z))-\pi_2^j(x,\pi_1^i(y,z))\\&-\pi_1^i(\pi_2^j(y,x),z)-\pi_2^j(\pi_1^i(y,x),z)+\pi_1^i(y,\pi_2^j(x,z))+\pi_2^j(y,\pi_1^i(x,z))\\=\;&-([\pi_1,\pi_2^n]^{MN}+[\pi_2,\pi_1^n]^{MN})(x,y,z).\end{aligned}$$

定义 3.15. 设 $(\pi_1^t{}' = \pi_1 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty}\pi_1^i{}'_i\mathrm{t}^i, \pi_2^t{}' = \pi_2 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty}\pi_2^i{}'_i\mathrm{t}^i)$ 和 $(\pi_1^t = \pi_1 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty}\pi_{1i}^i\mathrm{t}^i, \pi_2^t = \pi_2 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty}\pi_{2i}^i\mathrm{t}^i)$ 是相容前李代数 $(\mathrm{g}, \pi_1, \pi_2)$ 的两个单参数形式变形。从 $(\mathrm{g}[[\mathrm{t}]], \pi_1^t{}', \pi_2^t{}')$ 到 $(\mathrm{g}[[\mathrm{t}]], \pi_1^t, \pi_2^t)$ 的形式同构是一个幂级数 $\Phi_t = \mathrm{P}_{+\infty\, i=0}\varphi_i\mathrm{t}^i$，其中 $\varphi_i : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ 是满足 $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ 的线性映射，使得

$$\begin{aligned}\Phi_t \circ \pi_1^t{}' &= \pi_1^t \circ (\Phi_t \times \Phi_t),\\ \Phi_t \circ \pi_2^t{}' &= \pi_2^t \circ (\Phi_t \times \Phi_t).\end{aligned}$$

如果存在从 $(\mathrm{g}[[\mathrm{t}]], \pi_1^t{}', \pi_2^t{}')$ 到 $(\mathrm{g}[[\mathrm{t}]], \pi_1, \pi_2)$ 的形式同构 $\Phi_t = \mathrm{P}_{+\infty\, i=0}\varphi_i\mathrm{t}^i$，则称两个单参数形式变形 $(\mathrm{g}[[\mathrm{t}]], \pi_1^t{}', \pi_2^t{}')$ 和 $(\mathrm{g}[[\mathrm{t}]], \pi_1, \pi_2)$ 等价。

定义 3.16. 相容前李代数 $(\mathrm{g}, \pi_1, \pi_2)$ 的单参数形式变形 $(\mathrm{g}[[\mathrm{t}]], \pi_1^t, \pi_2^t)$ 称为平凡的，如果它与 $(\mathrm{g}, \pi_1, \pi_2)$ 等价，即存在 $\Phi_t = \mathrm{P}_{+\infty\, i=0}\varphi_i\mathrm{t}^i$，其中 $\varphi_i : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ 是满足 $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ 的线性映射，使得

$$\begin{aligned}\Phi_t \circ \pi_1^t &= \pi_1 \circ (\Phi_t \times \Phi_t),\\ \Phi_t \circ \pi_2^t &= \pi_2 \circ (\Phi_t \times \Phi_t).\end{aligned}$$

定义 3.17. 设 $(\mathrm{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是一个相容前李代数。如果所有单参数形式变形都是平凡的，则称 $(\mathrm{g}, \pi_1, \pi_2)$ 具有刚性。

定理 3.18. 设 $(\mathrm{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是一个相容前李代数。若 $\mathcal{H}^2(\mathrm{g}; \mathrm{g}) = 0$，则 $(\mathrm{g}, \pi_1, \pi_2)$ 是刚性的。

证明。设 $(\pi_1^t = \pi_1 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty}\pi_1^i\mathrm{i}\,\mathrm{t}^i, \pi_2^t = \pi_2 + \mathrm{P}_{=1}^{+\infty}\pi_2^i\mathrm{i}\,\mathrm{t}^i)$ 是一个单参数形式变形，并假设 $\mathrm{n} \geq 1$ 是使得 (π_1^n, π_2^n) 不为零的最小数。由 (24)、(25)、(26) 和 $\mathcal{H}^2(\mathrm{g}; \mathrm{g}) = 0$，我们有 $(\pi_1^n, \pi_2^n) \in \mathrm{B}^2(\mathrm{A}; \mathrm{A})$。因此，存在 $\varphi_n \in \mathrm{C}^1(\mathrm{g}; \mathrm{g})$，使得 $(\pi_1^n, \pi_2^n) = \delta(-\varphi_n) = (\delta_{\pi_1}(-\varphi_n), \delta_{\pi_2}(-\varphi_n))$。令 $\Phi_t = \mathrm{Id} + \varphi_n\mathrm{t}^n$，并定义一个新的形式变形 $(\pi_1^t{}', \pi_2^t{}')$

定义为 $\pi_1^t{}'(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \Phi_t^{-1}\circ\pi_1^t(\Phi_t(\mathrm{x}),\Phi_t(\mathrm{y}))$，$\pi_2^t{}'(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \Phi_t^{-1}\circ\pi_2^t(\Phi_t(\mathrm{x}),\Phi_t(\mathrm{y}))$。那么 $(\pi_1^t{}',\pi_2^t{}')$ 和 (π_1^t,π_2^t) 是等价的。通过直接计算可得，对于所有 $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}\pi_1^t{}'(x,y) &= \Phi_t^{-1}\circ\pi_1^t(\Phi_t(x),\Phi_t(y))\\ &= (\mathrm{Id}-\varphi_n t^n+\dots)\pi_1^t(x+\varphi_n(x)t^n, y+\varphi_n(y)t^n)\\ &= (\mathrm{Id}-\varphi_n t^n+\dots)\Big(x\cdot y+(x\cdot\varphi_n(y)+\varphi_n(x)\cdot y+\pi_1^n(x,y))t^n+\dots\Big)\\ &= x\cdot y+\Big(x\cdot\varphi_n(y)+\varphi_n(x)\cdot y+\pi_1^n(x,y)-\varphi_n(x\cdot y)\Big)t^n+\dots.\end{aligned}$$

因此，我们有 $\pi_1^{1'}=\pi_1^{2'}=\cdots=\pi_1^{n-1'}=0$。此外，我们有

$$\begin{aligned}\pi_1^{n'}(x,y) &= x\cdot\varphi_n(y)+\varphi_n(x)\cdot y+\pi_1^n(x,y)-\varphi_n(x\cdot y)\\ &= \delta_{\pi_1}\varphi_n(x,y)+\pi_1^n(x,y)\\ &= 0.\end{aligned}$$

类似地，我们有 $\pi_2^n{}'(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$。重复这一过程，我们得到 $(\mathfrak{g}[[t]],\pi_1^t,\pi_2^t)$ 与 $(\mathfrak{g},\pi_1,\pi_2)$ 等价。证明完毕。□

4. 相容前李代数的阿贝尔扩张

本节首先给出一个相容前李代数 $(\mathfrak{g},\pi_1,\pi_2)$ 及其表示 $(V,\rho,\mu,\tilde{\rho},\tilde{}\mu)$。我们构造一个双微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 元为 $(\pi_1+\rho+\mu,\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{}\mu)$。然后，我们给出系数取任意表示的相容前李代数的上同调。最后，我们利用这一上同调方法研究相容前李代数的阿贝尔扩张。我们证明，阿贝尔扩张由第二上同调群分类。

4.1. 任意表示系数下相容前李代数的上同调。

设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是向量空间，$\mathfrak{g}_1$ 中的元素记为 x、y、x_i，$\mathfrak{g}_2$中的元素记为 u、v、v_i。设 $\mathrm{c}:\wedge^{n-1}\mathfrak{g}_1\otimes\mathfrak{g}_1\longrightarrow\mathfrak{g}_2$ 是一个线性映射。我们可以构造线性映射 $\hat{}\mathrm{c}\in C^n(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2)$，定义如下：

$$\hat{c}(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n) := c(x_1,\dots,x_n).$$

一般地，对于给定的线性映射 $\mathrm{f}:\wedge^{k-1}\mathfrak{g}_1\otimes\wedge^l\mathfrak{g}_2\otimes\mathfrak{g}_1\longrightarrow\mathfrak{g}_j$，其中 $\mathrm{j}\in\{1,2\}$，我们定义线性映射 $\hat{}\mathrm{f}\in C^{k+l}(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2)$ 如下：

$$\hat{f}(x_1+v_1,\dots,x_{k+l}+v_{k+l}) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}(k-1,l)}\mathrm{sgn}(\sigma)f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k-l)},v_{\sigma(k)},\dots,v_{\sigma(k+l-1)},x_{k+l}).$$

类似地，对于 $\mathrm{f}:\wedge^k\mathfrak{g}_1\otimes\wedge^{l-1}\mathfrak{g}_2\otimes\mathfrak{g}_2\longrightarrow\mathfrak{g}_j$，其中 $\mathrm{j}\in\{1,2\}$，我们定义线性映射 $\hat{}\mathrm{f}\in C^{k+l}(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2)$ 如下：

$$\hat{f}(x_1+v_1,\dots,x_{k+l}+v_{k+l}) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}(k,l-1)}\mathrm{sgn}(\sigma)f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)},v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l-1)},v_{k+l}).$$

我们称线性映射 $\hat{}\mathrm{f}$ 为 f 的水平提升，或简称提升。我们定义 $\mathcal{G}^{k,l}=\wedge^{k-1}\mathfrak{g}_1\otimes\wedge^l\mathfrak{g}_2\otimes\mathfrak{g}_1+\wedge^k\mathfrak{g}_1\otimes\wedge^{l-1}\mathfrak{g}_2\otimes\mathfrak{g}_2$。向量空间 $\wedge^{n-1}(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2)\otimes(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2)$ 同构于 $\mathcal{G}^{k,l}$、$\mathrm{k}+\mathrm{l}=\mathrm{n}$ 的直和。在下文中，我们将省略记号 $\hat{}$。

定义 4.1. ([15]) 线性映射 $\mathrm{f}\in\mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2)\otimes(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2),\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2)$ 具有 双次数 $k|l$，当且仅当以下四个条件成立：

(i) $k+l+1=n$；(ii) 若 X 是 $\mathcal{G}^{k+1,l}$ 中的一个元素，则 $f(X)\in g_1$；(iii) 若 X 是 $\mathcal{G}^{k,l+1}$ 中的一个元素，则 $f(X)\in g_2$；(iv) 在所有其他情况下，$f(X)=0$。

我们将双次数为 $k|l$ 的线性映射 f 记为 $\|f\|=k|l$。

若线性映射 f 具有双次数，则称 f 为齐次的。我们将双次数为 $k|l$ 的齐次线性映射集合记为 $C^{k|l}(g_1\oplus g_2,g_1\oplus g_2)$。由于 $n\geq 1$ 且 $k+1、l+1\geq 0$，我们有 $k+l\geq 0$，其中 $k、l\geq -1$。

由上述提升，我们得到以下同构：

$C^{k|0}(g_1\oplus g_2,g_1\oplus g_2)\cong \mathrm{Hom}(\wedge^k g_1\otimes g_1,g_1)\oplus \mathrm{Hom}(\wedge^k g_1\otimes g_2,g_2)\oplus \mathrm{Hom}(\wedge^{k-1} g_1\otimes g_2\otimes g_1,g_2)$; $C^{l|-1}(g_1\oplus g_2,g_1\oplus g_2)\cong \mathrm{Hom}(\wedge^{l-1} g_1\otimes g_1,g_2)$.

引理 4.2。([15]) 若 $\|f\|=k_f|l_f$ 且 $\|g\|=k_g|l_g$，则 $[f,g]^{MN}$ 具有双次数 $k_f+k_g|l_f+l_g$。命题 4.3。([16]) 设 (V,ρ,μ) 是前李代数 (g,π) 的表示。则有

$$[\pi+\rho+\mu,\pi+\rho+\mu]^{MN}=0.$$

设 (V,ρ,μ) 是前李代数 (g,π) 的表示，其中 $\pi(x,y)=x\cdot y$。将 n-余链的集合记为

$$C^n(\mathfrak{g};V)=\mathrm{Hom}(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g},V),\quad n\geq 1.$$

由命题4.3 和分次雅可比恒等式，我们定义余边界算子 $\partial_{\pi+\rho+\mu}: C^n(\mathfrak{g},V)\longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g},V)$，定义为

$$\partial_{\pi+\rho+\mu}f=(-1)^{n-1}[\pi+\rho+\mu,f]^{MN},\quad \forall f\in C^n(\mathfrak{g},V).$$

事实上，由于 $\pi+\rho+\mu\in C^{1|0}(g\oplus V,g\oplus V)$ 且 $f\in C^{n|-1}(g\oplus V,g\oplus V)$，根据引理 4.2，我们得到 $[\pi+\rho+\mu,f]^{MN}\in C^{n+1|-1}(g\oplus V,g\oplus V)$。因此，$[\pi+\rho+\mu,f]^{MN}\in C^{n+1}(g,V)$，从而得到良定义的上链复形 $(\oplus_{n=1}^{+\infty}C^n(g;V),\partial_{\pi+\rho+\mu})$。更准确地说，对于所有 $x_1,\ldots,x_{n+1}\in g$，我们有

$$\begin{aligned}(\partial_{\pi+\rho+\mu}f)(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\rho(x_i)f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1})\\ &+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mu(x_{n+1})f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_i)\\ &-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f(x_1,\ldots,\hat{x}_i\ldots,x_n,x_i\cdot x_{n+1})\\ &+\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j}f([x_i,x_j]_C,x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_{n+1}),\end{aligned}$$

它是前李代数 (g,π) 在表示 (V,ρ,μ) 中取系数的余边界算子。更多细节见 [8]。

设 $(g,\cdot,*)$ 是一个相容前李代数，其中 $\pi_1(x,y)=x\cdot y$，$\pi_2(x,y)=x*y$，且 $(V,\rho,\mu,\tilde{\rho},\tilde{\mu})$ 是 $(g,\cdot,*)$ 的一个表示。

命题 4.4. 使用上述记号，$(\pi_1+\rho+\mu,\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu})$ 是双微分分次李代数 $(C^*(g\oplus V;g\oplus V),[\cdot,\cdot]^{MN},d_1=0,d_2=0)$ 的一个 Maurer-Cartan 元，即

$[\pi_1+\rho+\mu,\ \pi_1+\rho+\mu]^{MN}=0$、$[\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}、\ \pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}]^{MN}=0$、$[\pi_1+\rho+\mu,\ \pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}]^{MN}=0$。

证明。由于 (V, ρ, μ) 是前李代数 (g, $\cdot$) 的一个表示，根据命题 4.3，我们有

$$[\pi_1 + \rho + \mu, \pi_1 + \rho + \mu]^{MN} = 0.$$

类似地，由于 $(V, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 是前李代数 $(\mathfrak{g}, *)$ 的表示，根据命题 4.3，我们有

$$[\pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu}, \pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu}]^{MN} = 0.$$

对于所有 $x,y,z \in \mathfrak{g}, u,v,w \in V$，由 (1)、(3) 和 (4)，我们有

$$\begin{aligned}
& [\pi_1 + \rho + \mu, \pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu}]^{MN}(x+u, y+v, z+w) \\
= \; & (\pi_1 + \rho + \mu)(\pi_2(x,y) + \tilde{\rho}(x)v + \tilde{\mu}(y)u, z+w) - (\pi_1 + \rho + \mu)(\pi_2(y,x) + \tilde{\rho}(y)u + \tilde{\mu}(x)v, z+w) \\
& -(\pi_1 + \rho + \mu)(x+u, \pi_2(y,z) + \tilde{\rho}(y)w + \tilde{\mu}(z)v) + (\pi_1 + \rho + \mu)(y+v, \pi_2(x,z) + \tilde{\rho}(x)w + \tilde{\mu}(z)u) \\
& +(\pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu})(\pi_1(x,y) + \rho(x)v + \mu(y)u, z+w) - (\pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu})(\pi_1(y,x) + \rho(y)u + \mu(x)v, z+w) \\
& -(\pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu})(x+u, \pi_1(y,z) + \rho(y)w + \mu(z)v) + (\pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu})(y+v, \pi_1(x,z) + \rho(x)w + \mu(z)u) \\
= \; & \pi_1(\pi_2(x,y), z) + \rho(\pi_2(x,y))w + \mu(z)\tilde{\rho}(x)v + \mu(z)\tilde{\mu}(y)u \\
& -\pi_1(\pi_2(y,x), z) - \rho(\pi_2(y,x))w - \mu(z)\tilde{\rho}(y)u - \mu(z)\tilde{\mu}(x)v \\
& -\pi_1(x, \pi_2(y,z)) - \rho(x)\tilde{\rho}(y)w - \rho(x)\tilde{\mu}(z)v - \mu(\pi_2(y,z))u \\
& +\pi_1(y, \pi_2(x,z)) + \rho(y)\tilde{\rho}(x)w + \rho(y)\tilde{\mu}(z)u + \mu(\pi_2(x,z))v \\
& +\pi_2(\pi_1(x,y), z) + \tilde{\rho}(\pi_1(x,y))w + \tilde{\mu}(z)\rho(x)v + \tilde{\mu}(z)\mu(y)u \\
& -\pi_2(\pi_1(y,x), z) - \tilde{\rho}(\pi_1(y,x))w - \tilde{\mu}(z)\rho(y)u - \tilde{\mu}(z)\mu(x)v \\
& -\pi_2(x, \pi_1(y,z)) - \tilde{\rho}(x)\rho(y)w - \tilde{\rho}(x)\mu(z)v - \tilde{\mu}(\pi_1(y,z))u \\
& +\pi_2(y, \pi_1(x,z)) + \tilde{\rho}(y)\rho(x)w + \tilde{\rho}(y)\mu(z)u + \tilde{\mu}(\pi_1(x,z))v \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

这意味着

$$[\pi_1 + \rho + \mu, \pi_2 + \tilde{\rho} + \tilde{\mu}]^{MN} = 0.$$

证明完毕。 □

我们将 n-余链的集合（$n \geq 1$）定义为

$$\mathfrak{C}^n(\mathfrak{g}; V) = \underbrace{C^n(\mathfrak{g}; V) \oplus C^n(\mathfrak{g}; V) \oplus \cdots \oplus C^n(\mathfrak{g}; V)}_{n \text{ copies}}.$$

定义算子 $\partial : C^n(g; V) \longrightarrow C^{n+1}(g; V)$ 如下

$$\partial^1 f = (\partial_{\pi_1+\rho+\mu} f, \partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}} f), \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V), n = 1.$$

对于所有 $(f_1, \ldots, f_n) \in C^n(g, V)$，$2 \leq i \leq n$，我们有

$$\partial^n(f_1, \ldots, f_n) = (\partial_{\pi_1+\rho+\mu} f_1, \ldots, \underbrace{\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}} f_{i-1} + \partial_{\pi_1+\rho+\mu} f_i}_{i}, \ldots, \partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}} f_n).$$

定理4.5 。如上定义的算子 $\partial : C^n(g; V) \longrightarrow C^{n+1}(g; V)$ 满足 $\partial \circ \partial = 0$。

证明。 由命题 4.4 以及分次雅可比恒等式，类似于定理 3.1的证明，我们有 $\partial \circ \partial = 0$。 □

定义 4.6. 设 $(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 是相容前李代数 $(g, \cdot, *)$ 的一个表示。上链复形 $(\oplus^{+\infty}{}_{n=1} C^n(g; V), \partial)$ 的上同调称为 $(g, \cdot, *)$ 关于表示 $(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 的上同调。相应的第 n 上同调群记为 $\mathcal{H}^n(g; V)$。

4.2. 相容前李代数的阿贝尔扩张。

定义 4.7. 设 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 和 $(V, \cdot_V, *_V)$ 是两个相容前李代数。由 $(V, \cdot_V, *_V)$ 对 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的一个扩张是相容前李代数态射的短正合列:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\tau} \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \longrightarrow 0,$$

其中 $(\hat{\mathfrak{g}}, \cdot_{\hat{\mathfrak{g}}}, *_{\hat{\mathfrak{g}}})$ 是一个相容前李代数。

若 $(V, \cdot_V, *_V)$ 是一个阿贝尔相容前李代数，即对所有 $u, v \in V$，$u \cdot_V v = u *_V v = 0$，则称其为阿贝尔扩张。

定义 4.8. 相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 被 $(V, \cdot_V, *_V)$ 扩张为 $(\hat{\mathfrak{g}}, \cdot_{\hat{\mathfrak{g}}}, *_{\hat{\mathfrak{g}}})$ 时，其截面是一个线性映射 $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}$，满足 $p \circ s = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$。

设 $(\hat{\mathfrak{g}}, \cdot_{\hat{\mathfrak{g}}}, *_{\hat{\mathfrak{g}}})$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 被 $(V, \cdot_V, *_V)$ 作出的阿贝尔扩张，且 $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}$ 是一个截面。对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，分别定义线性映射 $\theta, \theta : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow V$ 如下:

$$\theta(x, y) = s(x) \cdot_{\hat{\mathfrak{g}}} s(y) - s(x \cdot y), \tag{26}$$

$$\tilde{\theta}(x, y) = s(x) *_{\hat{\mathfrak{g}}} s(y) - s(x * y). \tag{27}$$

对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$、$u \in V$，分别定义 ρ、μ、$\tilde{\rho}$、$\tilde{\mu} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 如下:

$$\rho(x)(u) = s(x) \cdot_{\hat{\mathfrak{g}}} u, \quad \mu(x)(u) = u \cdot_{\hat{\mathfrak{g}}} s(x), \tag{28}$$

$$\tilde{\rho}(x)(u) = s(x) *_{\hat{\mathfrak{g}}} u, \quad \tilde{\mu}(x)(u) = u *_{\hat{\mathfrak{g}}} s(x). \tag{29}$$

显然，作为向量空间，$\hat{\mathfrak{g}}$ 与 $\mathfrak{g} \oplus V$ 同构。将 $\hat{\mathfrak{g}}$ 上的相容前李代数结构转移到 $\mathfrak{g} \oplus V$ 上，我们得到一个相容前李代数 $(\mathfrak{g} \oplus V, \cdot_{(\theta,\rho,\mu)}, *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})})$，其中“$\cdot_{(\theta,\rho,\mu)}$”和“$*_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})}$”定义如下:

$$(x + u) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (y + v) = x \cdot y + \theta(x, y) + \rho(x)(v) + \mu(y)(u), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}, u, v \in V, \tag{30}$$

$$(x + u) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (y + v) = x * y + \tilde{\theta}(x, y) + \tilde{\rho}(x)(v) + \tilde{\mu}(y)(u), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}, u, v \in V. \tag{31}$$

定理 4.9. 使用上述记号，$(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot, *)$ 的一个表示。此外，该表示与截面的选择无关。

证明。对所有 $x, y \in \mathfrak{g}, u \in V$，根据前李代数的定义，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u) - (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} x) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u + y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u) \\ &= (x \cdot y + \theta(x, y)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} \rho(y)u - (y \cdot x + \theta(y, x)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u + y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} \rho(x)u \\ &= \rho(x \cdot y)u - \rho(x)\rho(y)u - \rho(y \cdot x)u + \rho(y)\rho(x)u, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 0 &= (u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} x) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y - u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) - (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y + x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) \\ &= \mu(x)u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y - u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x \cdot y + \theta(x, y)) - \rho(x)u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y + x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} \mu(y)u \\ &= \mu(y)\mu(x)u - \mu(x \cdot y)u - \mu(y)\rho(x)u + \rho(x)\mu(y)u, \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \rho([x, y]_C &= \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x), \\ \mu(y) \circ \mu(x) - \mu(x \cdot y) &= \mu(y) \circ \rho(x) - \rho(x) \circ \mu(y). \end{aligned}$$

因此，(V, ρ, μ) 是前李代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 的一个表示。类似地，$(V, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 是前李代数 $(\mathfrak{g}, *)$ 的一个表示。

$$0 = (x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} y) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u + (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} u - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} u) - x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u)$$

$$
\begin{aligned}
& -(y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} x) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u - (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} x) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} u + y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} u) + y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u) \\
= \ & (x * y + \tilde{\theta}(x,y)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u + (x \cdot y + \theta(x,y)) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} u - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} \tilde{\rho}(y)u - x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} \rho(y)u \\
& -(y * x + \tilde{\theta}(y,x)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u - (y \cdot x + \theta(y,x)) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} u + y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} \tilde{\rho}(x)u + y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} \rho(x)u \\
= \ & \rho(x * y)u + \tilde{\rho}(x \cdot y)u - \rho(x)\tilde{\rho}(y)u - \tilde{\rho}(x)\rho(y)u - \rho(y * x)u - \tilde{\rho}(y \cdot x)u + \rho(y)\tilde{\rho}(x)u + \tilde{\rho}(y)\rho(x)u,
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\rho(x * y) + \tilde{\rho}(x \cdot y) - \rho(x)\tilde{\rho}(y) - \tilde{\rho}(x)\rho(y) = \rho(y * x) + \tilde{\rho}(y \cdot x) - \rho(y)\tilde{\rho}(x) - \tilde{\rho}(y)\rho(x).
$$

同理，由

$$
\begin{aligned}
& (x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} u) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y + (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} u) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} y - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (u *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} y) - x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) \\
& -(u *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} x) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y - (u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} x) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} y + u \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} y) + u *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) \\
= \ & 0,
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\mu(y)\tilde{\rho}(x) - \rho(x)\tilde{\mu}(y) - \mu(y)\tilde{\mu}(x) + \mu(x * y) = -\tilde{\mu}(y)\rho(x) + \tilde{\rho}(x)\mu(y) + \tilde{\mu}(y)\mu(x) - \tilde{\mu}(x \cdot y).
$$

因此，$(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ 是相容前李代数 $(g, \cdot, *)$ 的一个表示。设 s' 是另一个截面，$(V, \rho', \mu', \tilde{\rho}', \tilde{\mu}')$ 是相容前李代数 $(g, \cdot, *)$ 的相应表示。由于 $s(x) - s'(x) \in V$，因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\rho(x)u - \rho'(x)u = (s(x) - s'(x)) \cdot_{\hat{g}} u = 0, \\
\mu(x)u - \mu'(x)u = u \cdot_{\hat{g}} (s(x) - s'(x)) = 0,
\end{aligned}
$$

这意味着 $\rho = \rho'$ 且 $\mu = \mu'$。同理，我们有 $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}'$ 且 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}'$。因此，该表示与截面的选取无关。□

定理 4.10。沿用上述记号，(θ, θ) 是相容前李代数 $(g, \cdot, *)$ 的一个 2-余循环，其系数取自表示 $(V, \rho, \mu, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$。

证明。对所有 x、y、$z \in g$，根据前李代数的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
0 \ = \ & (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z) - (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} x) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z + y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z) \\
= \ & (x \cdot y + \theta(x,y)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (y \cdot z + \theta(y,z)) \\
& -(y \cdot x + \theta(y,x)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z + y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x \cdot z + \theta(x,z)) \\
= \ & \theta(x \cdot y, z) + \mu(z)\theta(x,y) - \theta(x, y \cdot z) - \rho(x)\theta(y,z) \\
& -\theta(y \cdot x, z) - \mu(z)\theta(y,x) + \theta(y, x \cdot z) + \rho(y)\theta(x,z) \\
= \ & -\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\theta(x,y)
\end{aligned}
$$

这意味着 $\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\theta = 0$。同理，我们有$\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}}\theta = 0$。

对于所有 x、y、$z \in \mathfrak{g}$，根据（1），我们有

$$
\begin{aligned}
0 \ = \ & (x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} y) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z + (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} y) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} z - x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} z) - x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z) \\
& -(y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} x) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z - (y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} x) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} z + y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} z) + y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z) \\
= \ & (x * y + \tilde{\theta}(x,y)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z + (x \cdot y + \theta(x,y)) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} z \\
& -x \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (y * z + \tilde{\theta}(y,z)) - x *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (y \cdot z + \theta(y,z)) \\
& -(y * x + \tilde{\theta}(y,x)) \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} z - (y \cdot x + \theta(y,x)) *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} z \\
& +y \cdot_{(\theta,\rho,\mu)} (x * z + \tilde{\theta}(x,z)) + y *_{(\tilde{\theta},\tilde{\rho},\tilde{\mu})} (x \cdot z + \theta(x,z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(x*y,z)+\mu(z)\tilde{\theta}(x,y)+\tilde{\theta}(x\cdot y,z)+\tilde{\mu}(z)\theta(x,y)\\
&\quad -\theta(x,y*z)-\rho(x)\tilde{\theta}(y,z)-\tilde{\theta}(x,y\cdot z)-\tilde{\rho}(x)\theta(y,z)\\
&\quad -\theta(y*x,z)-\mu(z)\tilde{\theta}(y,x)-\tilde{\theta}(y\cdot x,z)-\tilde{\mu}(z)\theta(y,x)\\
&\quad +\theta(y,x*z)+\rho(y)\tilde{\theta}(x,z)+\tilde{\theta}(y,x\cdot z)+\tilde{\rho}(y)\theta(x,z)\\
&= -(\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}}\theta+\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\tilde{\theta})(x,y,z),
\end{aligned}
$$

~这意味着 $\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}}\theta+\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\theta=0$。因此，我们有

$$\partial(\theta,\tilde{\theta})=(\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\theta,\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}}\theta+\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\tilde{\theta},\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}}\tilde{\theta})=0.$$

证明至此结束。 □

定义 4.11. 设 $(\hat{\mathfrak{g}}1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}1},*_{\hat{\mathfrak{g}}1})$ 和 $(\hat{\mathfrak{g}}2,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}2},*_{\hat{\mathfrak{g}}2})$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 通过 $(V,\cdot_V,*_V)$ 得到的两个阿贝尔扩张。若存在一个相容前李代数同构 $\zeta:(\hat{\mathfrak{g}}1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}1},*_{\hat{\mathfrak{g}}1})\longrightarrow(\hat{\mathfrak{g}}2,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}2},*_{\hat{\mathfrak{g}}2})$，使得下图交换，则称它们同构：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\iota_1} & \hat{\mathfrak{g}}_1 & \xrightarrow{p_1} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\zeta} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\iota_2} & \hat{\mathfrak{g}}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

引理 4.12. 设 $(\hat{\mathfrak{g}}_1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1},*_{\hat{\mathfrak{g}}_1})$ 和 $(\hat{\mathfrak{g}}_2,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_2},*_{\hat{\mathfrak{g}}_2})$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 通过 $(V,\cdot_V,*_V)$ 得到的两个同构阿贝尔扩张。那么它们导出相同的 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 表示。

证明。设 $s_1:\mathfrak{g}_1\longrightarrow\hat{\mathfrak{g}}_1$ 和 $s_2:\mathfrak{g}_2\longrightarrow\hat{\mathfrak{g}}_2$ 分别是 $(\hat{\mathfrak{g}}1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1},*_{\hat{\mathfrak{g}}_1})$ 和 $(\hat{\mathfrak{g}}2,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_2},*_{\hat{\mathfrak{g}}_2})$ 的两个截面。由定理 4.9 可知，$(V,\rho_1,\mu1,\tilde{\rho}_1,\tilde{\mu}_1)$ 和 $(V,\rho_2,\mu2,\tilde{\rho}_2,\tilde{\mu}_2)$ 分别是它们的表示。定义 $s'_1:\mathfrak{g}_1\longrightarrow\hat{\mathfrak{g}}_1$，使得 $s'_1=\zeta^{-1}\circ s_2$。由于 $\zeta:(\hat{\mathfrak{g}}1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1},*_{\hat{\mathfrak{g}}_1})\longrightarrow(\hat{\mathfrak{g}}2,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_2},*_{\hat{\mathfrak{g}}_2})$ 是满足定义 4.11 中交换图的相容前李代数同构，由 $p_2\circ\zeta=p_1$，得

$$p_1\circ s'_1=p_2\circ\zeta\circ\zeta^{-1}\circ s_2=\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}.$$

因此，我们得到 s'_1 是 $(\hat{\mathfrak{g}}_1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1},*_{\hat{\mathfrak{g}}_1})$ 的一个截面。对所有 $x\in\mathfrak{g}$、$u\in V$，由 $\zeta|_V=\mathrm{Id}_V$，可得

$$
\begin{aligned}
\rho_1(x)(u)&=s'_1(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1}u=(\zeta^{-1}\circ s_2)(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1}u=\zeta^{-1}(s_2(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_2}u)=\rho_2(x)(u),\\
\mu_1(x)(u)&=u\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1}s'_1(x)=u\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1}(\zeta^{-1}\circ s_2)(x)=\zeta^{-1}(u\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_2}s_2(x))=\mu_2(x)(u),
\end{aligned}
$$

这意味着 $\rho_1=\rho_2$ 和 $\mu_1=\mu_2$。类似地，我们有 $\tilde{\rho}_1=\tilde{\rho}_2$ 和 $\tilde{\mu}_1=\tilde{\mu}_2$。证明完毕。□

因此，在下文中，我们固定相容前李代数 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 的一个表示 $(V,\rho,\mu,\tilde{\rho},\tilde{\mu})$，并考察诱导给定表示的阿贝尔扩张。

定理 4.13. 相容前李代数 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 以 $(V,\cdot_V,*_V)$ 为核的阿贝尔扩张由 $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};V)$ 分类。

证明。设 $(\hat{\mathfrak{g}},\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}},*_{\hat{\mathfrak{g}}})$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 的阿贝尔扩张，扩张所依据的空间为 $(V,\cdot_V,*_V)$。~选取一个截面 $s:\mathfrak{g}\longrightarrow\hat{\mathfrak{g}}$，根据定理 4.10，我们得到 (θ,θ) 是一个 2-余循环。现在我们~证明 (θ,θ) 的上同调类不依赖于截面的选取。事实上，设 s 和 s′ 是两个不同的截面。定义 $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow V$，使得 $\varphi(x)=s(x)-s'(x)$。那么对于所有 $x,y\in\mathfrak{g}$，我们有

$$\theta(x,y)=s(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}}s(y)-s(x\cdot y)$$

$$
\begin{aligned}
&= (s'(x)+\varphi(x))\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}}(s'(y)+\varphi(y))-s'(x\cdot y)-\varphi(x\cdot y)\\
&= s'(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}}s'(y)+\rho(x)\varphi(y)+\mu(y)\varphi(x)-s'(x\cdot y)-\varphi(x\cdot y)\\
&= \theta'(x,y)+\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\varphi(x,y),
\end{aligned}
$$

这意味着 $\theta-\theta'=\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\varphi$。同理，我们有 $\theta-\theta'=\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}}\varphi$。

因此，我们得到 $(\theta-\theta',\theta-\theta')=\partial\varphi$、$(\theta,\theta')$ 和 (θ,θ') 属于同一个上同调类。

现在我们证明，同构的阿贝尔扩张在 $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};V)$ 中对应同一个元素。设 $(\hat{\mathfrak{g}}1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}1},*_{\hat{\mathfrak{g}}1})$ 和 $(\hat{\mathfrak{g}}2,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}2},*_{\hat{\mathfrak{g}}2})$ 是相容前李代数 $(\mathfrak{g},\cdot,*)$ 由 $(V,\cdot_V,*_V)$ 给出的两个同构的阿贝尔扩张，并且 $\zeta:(\hat{\mathfrak{g}}1,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}1},*_{\hat{\mathfrak{g}}1})\longrightarrow(\hat{\mathfrak{g}}2,\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}2},*_{\hat{\mathfrak{g}}2})$ 是一个满足定义 4.11 中交换图的相容前李代数同构。设 $s_1:\mathfrak{g}\longrightarrow\hat{\mathfrak{g}}_1$ 是 $\hat{\mathfrak{g}}_1$ 的一个截面。由 $p_2\circ\zeta=p_1,$，我们有

$$p_2\circ(\zeta\circ s_1)=p_1\circ s_1=\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}.$$

因此，我们得到 $\zeta\circ s_1$ 是 $\hat{\mathfrak{g}}_2$ 的截面。定义 $s_2=\zeta\circ s_1$。由于 ζ 是相容前李代数的同构，且 $\zeta|_V=\mathrm{Id}_V$，对于所有 $x,y\in\mathfrak{g}$，我们有

$$
\begin{aligned}
\theta_2(x,y) &= s_2(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_2}s_2(y)-s_2(x\cdot y)\\
&= (\zeta\circ s_1)(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_2}(\zeta\circ s_1)(y)-(\zeta\circ s_1)(x\cdot y)\\
&= \zeta(s_1(x)\cdot_{\hat{\mathfrak{g}}_1}s_1(y)-s_1(x\cdot y))\\
&= \theta_1(x,y),
\end{aligned}
$$

同样地，我们有 $\theta_1=\theta_2$。因此，同构的阿贝尔扩张在 $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};V)$ 中对应于同一个元素。

反之，给定两个 2-余循环 (θ_1,θ_1) 和 (θ_2,θ_2)，我们可以构造两个阿贝尔扩张 $(\mathfrak{g}\oplus V,\cdot_{(\theta_1,\rho,\mu)},*_{(\tilde{\theta}_1,\tilde{\rho},\tilde{\mu})})$ 和 $(\mathfrak{g}\oplus V,\cdot_{(\theta_2,\rho,\mu)},*_{(\tilde{\theta}_2,\tilde{\rho},\tilde{\mu})})$。如果 $(\theta_1,\tilde{\theta}_1)$、$(\theta_2,\tilde{\theta}_2)\in\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};V)$，那么存在 $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow V$，使得 $\theta_1=\theta_2+\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\varphi$ 并且 $\theta_1=\theta_2+\partial_{\pi_2+\tilde{\rho}+\tilde{\mu}}\varphi$。我们定义 $\zeta:\mathfrak{g}\oplus V\longrightarrow\mathfrak{g}\oplus V$ 为

$$\zeta(x+u)=x+u+\varphi(x),\quad\forall\,x\in\mathfrak{g},u\in V.$$

对任意 $x,y\in\mathfrak{g},u,v\in V$，根据 $\theta_1=\theta_2+\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\varphi$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\zeta((x+u)\cdot_{(\theta_1,\rho,\mu)}(y+v))-\zeta(x+u)\cdot_{(\theta_2,\rho,\mu)}\zeta(y+v)\\
=\;&\zeta(x\cdot y+\theta_1(x,y)+\rho(x)v+\mu(y)u)-(x+u+\varphi(x))\cdot_{(\theta_2,\rho,\mu)}(y+v+\varphi(y))\\
=\;&\theta_1(x,y)+\varphi(x\cdot y)-\theta_2(x,y)-\rho(x)\varphi(y)-\mu(y)\varphi(x)\\
=\;&\theta_1(x,y)-\theta_2(x,y)-\partial_{\pi_1+\rho+\mu}\varphi\\
=\;&0,
\end{aligned}
$$

这意味着

$$\zeta((x+u)\cdot_{(\theta_1,\rho,\mu)}(y+v))=\zeta(x+u)\cdot_{(\theta_2,\rho,\mu)}\zeta(y+v).\tag{32}$$

同理，我们有

$$\zeta((x+u)*_{(\tilde{\theta}_1,\tilde{\rho},\tilde{\mu})}(y+v))=\zeta(x+u)*_{(\tilde{\theta}_2,\tilde{\rho},\tilde{\mu})}\zeta(y+v).\tag{33}$$

因此，由（32）和（33），ζ是从$(\mathfrak{g}\oplus V,\cdot_{(\theta_1,\rho,\mu)},*_{(\tilde{\theta}_1,\tilde{\rho},\tilde{\mu})})$到$(\mathfrak{g}\oplus V,\cdot_{(\theta_2,\rho,\mu)},*_{(\tilde{\theta}_2,\tilde{\rho},\tilde{\mu})})$的相容前李代数同构。此外，定义 4.11 中的图表显然是交换的。证明完毕。□

致谢：本研究得到吉林省国家自然科学基金（编号：YDZJ202201ZYTS589）、国家自然科学基金（编号：12271085、12071405）以及中央高校基本科研业务费的资助。

参考文献

[1] D. Burde，几何与物理学中的左对称代数和前李代数。Cent. Eur. J. Math. 4 (2006)，323-357。2, 3[2] C. Bai，左对称双代数与经典杨-巴克斯特方程的类比。Commun. Contemp. Math. 10 (2008)，第2期，221-260。2, 3[3] C. Bai，前李代数导论。载于《代数与应用》第1卷，A. Makhlouf 统筹，243-273，ISTE-Wiley，2020。2[4] F. Chapoton 和 M. Livernet，前李代数与根树歌剧。Int. Math. Res. Not. 8 (2001)，395-408。3[5] T. Chtioui、A. Das 和 S. Mabrouk，相容结合代数的上同调。arXiv:2107.09259。2[6] A. Connes 和 D. Kreimer，Hopf代数、重整化与非交换几何。Comm. Math. Phys. 199 (1998)，203-242。2[7] A. Das，相容 L_∞-代数。J. Algebra. 610 (2022)，241-269。2, 8, 14[8] A. Dzhumadil'daev，右对称代数的上同调与变形。J. Math. Sci. 93 (1999)，第6期，836-876。2, 8, 14[9] M. Gerstenhaber，结合环的上同调结构。Ann. of Math. 78 (1963)，267-288。1[10] I. Z. Golubchik 和 V. V. Sokolov，主手征模型类型的相容李括号与可积方程。Funct. Anal. Appl. 36 (2002)，172-181。2, 5[11] I. Z. Golubchik 和 V. V. Sokolov，相容李括号与杨-巴克斯特方程。Theor. Math. Phys. 146 (2006)，159-169。2, 5[12] I. Z. Golubchik 和 V. V. Sokolov，环代数的因子分解与相容李括号。J. Nonlinear Math. Phys. 12 (2005)，343-350。2[13] S. Hou、Y. Sheng 和 Y. Zhou，相容3-李代数的变形、上同调与阿贝尔扩张。arXiv:2208.12647v1。2[14] J. L. Koszul，仿射变换群的齐性凸锥域与轨道。Ann. of Math. 78 (1963)，267-288。1[15] J. Liu，前李代数与拟前李双代数上的扭曲。arXiv:2003.11926v2。13, 14[16] J. Liu 和 Q. Wang，泊松-尼延豪斯结构的前李类比与Maurer-Cartan方程。J. Algebra Appl. 21 (2022)，第6期，论文编号2250120，34页。14[17] J. Liu、Y. Sheng 和 C. Bai，相容李代数的 Maurer-Cartan刻画与上同调。arXiv:2102.04742，Sci. China Math. (2022)，http://engine.scichina.com/doi/10.1007/s11425-021-2014-5。2, 6[18] A. Nijenhuis，关于几类不同代数所共有的一类性质。（法文）Enseignement Math. (2) 14 (1968)，225-277。3[19] A. V. Odesskii 和 V. V. Sokolov，与椭圆曲线相关的相容李括号。J. Math. Phys. 47 (2006)，013506。2, 5[20] A. Panasyuk，相容李括号：走向分类。J. Lie Theory. 24 (2014)，561-623。2[21] H. Strohmayer，相容结构的歌剧与加权划分。J. Pure Appl. Algebra. 212 (2008)，2522-2534。2[22] E. B. Vinberg，齐性凸锥理论。Bull. soc. Math. France. 89 (1961)，515-533。1[23] Q. Wang、Y. Sheng、C. Bai 和 J. Liu，前李代数上的尼延豪斯算子。Commun. Contemp. Math. 7 (2019)，1850050。3, 10[24] M. Wu 和 C. Bai，相容李双代数。Comm. Theore. Phys. 63 (2015)，653-664。2, 5

中国吉林省长春市130024，东北师范大学数学与统计学院 电子邮箱：shanshanmath@163.com

中国长春市130024，东北师范大学数学与统计学院 电子邮箱：chenly640@nenu.edu.cn