arXiv:2302.07220v1 [math.DG] 14 Feb 2023

全纯下沉的 K¨ahler 结构

李麒

摘要

本文简要地针对任意全纯下沉 $\pi: X \to B$，推导出一个判据，以判断 X 是否具有 K¨ahler 结构。该判据推广了 Blanchard 针对一类特殊等变全纯下沉所提出的判据。我们利用这一判据，在纤维维数为一的情形下回答 Harvey-Lawson 提出的问题。作为主要应用，我们证明，对于某类具有 K¨ahler 纤维和 K¨ahler 底空间的全纯下沉，若其存在厄米-辛结构，则其全空间是 K¨ahler 的。此类包括等平凡次浸和环面纤维化。

目录

1 引言及主要结果 1

2 预备知识 4

2.1 Leray 谱序列.42.2 K¨ähler 情形.62.3 极化霍奇结构变分的 Deligne-Hodge理论 7

3 主要结果的证明 10

4 Hermitian-Symplectic 结构的一个应用 12

1 引言与主要结果

设 X、B 是紧复流形。假设存在一个全纯下沉 $\pi: X \to B$。我们希望得到一个判据，以判断 X 是否为 K¨ähler 流形。

若 X 具有 K¨ähler 度量，其对应的 K¨ähler 形式记为 Q。那么 Q是一个闭的 (1, 1)-形式，它定义了 K¨ähler 上同调类 $[Q] \in H^2(X, \mathbb{R})$。本文中，我们将使用 K¨ähler 形式，并不将其与对应的 K¨ähler 度量区分开来。令 $f_b: X_b \to X$ 表示纤维 $X_b = \pi^{-1}(b)$ 的嵌入。对于任意 $b \in B$，限制 $Q|_{X_b} = f_b^* Q$ 都是 X_b 上的 K¨ähler 度量。在上同调层面，对于 $k \in \{0, \ldots, \dim X\}$，我们有自然的限制同态:

$$f_b^*: H^k(X, \mathbb{R}) \to H^k(X_b, \mathbb{R}). \tag{1}$$

因此，我们得到第一个必要条件:

（条件 I）存在一个上同调类 $[Q] \in H^2(X, \mathbb{R})$，其在每个纤维 $X_b = \pi^{-1}(b)$ 上的限制都是 K¨ahler 类，$b \in B$。

此外可以证明，如果 Q 是 X 上的 K¨ahler 形式，那么可以构造出 B 上的 K¨ahler 形式 $\int_{X/B} Q^{n+1}$，其中 $\int_{X/B}$ 表示沿纤维积分的运算。因此我们得到第二个必要条件：

（条件 II） B 是一个 K¨ähler 流形。

本文的主要结果是，这两个条件也是充分条件：

定理 1.1。在上述全纯下沉的情形下， X 上存在 K¨ähler 度量，当且仅当（条件 I）和（条件 II）同时满足。

注意，如果我们事先知道 $[Q] \in H^2$（X， $\mathbb{R}$）由一个闭的（1，1）-形式表示，那么通过应用 $\partial\partial$-引理的族版本即可相当容易地证明该结果。参见注 3.2。然而，我们在此并不假设这一条件。事实上，本文的主要目标正是构造这样一个闭的（1，1）-形式。在这一方面，可以将定理 1.1 视为 K¨ähler 版本的 Thurston 关于辛纤维化的辛结构的著名构造（[19], [10, 定理 4。91]）。

令 $X_b = \pi^{-1}(b)$（其中 $b \in B$）为 π 的任意纤维。通过平移上同调类，可定义 $\pi_1(B)$ 在 $H^k(X_b, \mathbb{R})$ 上的自然单值化作用。若将 $H^k(X_b, \mathbb{R})$ 中在单值化作用下保持不变的元素集合记为$H^k(X_b, \mathbb{R})^{\mathrm{inv}}$，则我们知道，(1) 中限制态射 f_b^* 的像包含于 $H^k(X_b, \mathbb{R})^{\mathrm{inv}}$。在最简单的情形下，即纤维的复维数为 1 时，我们有 $H^2(X_b, \mathbb{R})^{\mathrm{inv}} = H^{1,1}(X_b, \mathbb{R})$，定理 1.1 可以对 Harvey-Lawson 的一个问题作出肯定回答（见定理 2.3 ）。

另一方面，我们有 Leray 谱序列 $\{E_r^{p,q}, d_r : E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r\}$，它关于 Leray滤过 $\mathcal{F}_L$ 收敛到 $\{Gr^p_{\mathcal{F}_L} H^{p+q}(X, \mathbb{R})\}$。存在如下同构：

$$E_2^{0,k} = H^0(B, R^k\pi_*\mathbb{R}) \cong H^k(X_b, \mathbb{R})^{\mathrm{inv}}. \tag{2}$$

根据 Leray 谱序列，一个上同调类 $x \in E^{0,k}_2$ 能够延拓为 H^k（X， $\mathbb{R}$）中的一个上同调类，当且仅当 $d_r x = 0$ 对于 $r \in \{2, \ldots, k+1\}$（详见第 2.1 节的进一步说明）。采用这些记号，可以得到定理 1.1 的一个更精细版本。

定理 1.2。如果且仅如果以下条件全部满足，则 X 上存在 K¨ähler 度量：

（条件 Ia）存在一个元素 $[\omega] \in H^0(B, R^2\pi_*\mathbb{R})$，其限制到 X_b 后，对于任意 $b \in B$都是 K¨ähler 上同调类。

（条件 Ib） $d_2[\omega] = 0$ 属于 $E^{2,1}_2 = H^2(B, R^1\pi_*\mathbb{R})$。

（条件 II） B 是 K¨ähler 的。

定理 1.2 的条件先验上弱于定理 1.1的条件。换言之，定理 1.2 蕴含 1.1 （即“如果”方向）。

定理1.2 推广了 Blanchard 在 [2] 中的一个旧结果；他研究了一类特殊的等变全纯下沉。这里，如果所有纤维作为复流形都彼此同构，则称全纯下沉为等平凡。注意，根据 Fischer-Grauert 的一个定理， [9], 等变全纯下沉总是局部平凡的，有时也称为解析纤维丛。事实上，在证明[2] 中的判据时，Blanchard 不仅假设了等平凡性，还假设 $\pi_1(B)$ 作用平凡 $H^1(X_b)$。

（条件 I）见于 [21, 备注 4.16], ，其中指出，对于射影下沉，在 E_2页退化的 Leray 谱序列的 Deligne 定理可在这一假设下得到证明。该条件也见于 [16]，在那里称为上同调 K¨ähler。事实上，在环面纤维化这一特殊情形下

定理 1.1 和定理1.2 均包含在 [16, 命题 2.17] 中，该命题通过用权为 1 的霍奇结构变分对环面纤维化进行精确描述而得以证明。

我们证明定理 1.1 的动机，源于 Li-Zhang [14] 和 Streets-Tian [18] 提出的一个问题：非 K¨ahler 复流形上是否存在厄米-辛（HS）结构。根据定义，在带有可积几乎复结构 J 的复流形 X 上，厄米-辛结构是指一个辛结构 ω，它定义在X 上并与 J相容，即对于任意 $v \neq 0 \in T_{\mathbb{R}}X$，都有 $\omega(v, Jv) > 0$。任意 K¨ahler 形式ω 在 (X, J) 上都是厄米-辛的，因为在这种情况下，ω不仅与 J相容，而且还与 J相容；后者意味着对于任意 v、$w \in T_{\mathbb{R}}X$，都有 $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$。Li-Zhang 和 Streets-Tian 询问，非 K¨ahler 复流形上是否存在 HS 结构的例子。 [1] 这一问题一般而言仍未解决，不过已有一些否定性结果表明，在复曲面（[14, 18]）、带不变复结构的幂零流形（[8]）、扭量空间（[20]）、Moishezon 流形以及 Fujiki 类复流形（[17, 3]）中不存在此类例子。另请参见 [7, 22]，其中介绍了针对这一一般问题的一些解析方法。我们考察具有全纯下沉结构的复流形上的这一问题。与 K¨ahler 情形类似，容易看出，全纯下沉上的 HS 结构的存在性要求纤维和底空间本身也是 HS 的。因此，若要寻找维数最低的此类例子，假设底空间和纤维均为 K¨ahler 流形是合理的。尽管目前我们尚未找到这样的例子，但我们将证明 HS 下沉总是满足（条件 Ib）（命题 4.5）。利用定理 1.2 中的判据，我们还可以为 HS 下沉导出一个 K¨ahler 性判据（命题 4.1），并排除几类（非平凡）例子：

定理 1.3. 设 $\pi : X \to B$ 是一个全纯下沉，其纤维为 K¨ahler 流形，底空间为 K¨ahler 流形。假设 X上存在一个厄米-辛结构。设 F 表示 π的一个纤维。那么，若满足以下任一条件，X 必为 K¨ahler 流形：

1. 该全纯下沉是等平凡的。2. π 的纤维是复环面（复结构可以变化）。3. $\pi_1(B)$在 $H^2(F)$上的单值化作用是平凡的。4. $H^{2,0}(F) = 0$。

我们以概述本文的组织结构作为本引言的结尾。在第 2.1 节中，我们将从过滤的 de Rham 复形的角度回顾 Leray 谱序列，并从 $d_1 : E^{p,q}_1 \to E^{p+1,q}_1$ 的角度进行说明；这里使用高斯-马宁联络，并解释其与外微分算子的相容性。在第 2.3 节中，我们将回顾系数取自极化霍奇结构变分的上同调群的 Deligne 的霍奇理论，并推导一个经典 $\partial\bar{\partial}$-引理的变体，这对我们的构造至关重要。在第3 节中，我们将逐步构造一个 K¨ahler 形式；这一构造受 Leray 谱序列的指引，详见第 2.1 节。构造的主线与 Blanchard 最初的构造相似，但由于我们处理的是更一般的情形，其中若干步骤与之有显著差异（见注释 3.1）。最后，在第 4 节中，我们将应用定理 1.2 中的判据，研究全纯下沉的厄米-辛结构。

[1] 在实维数 4 的情形下，Donaldson 曾提出过一个类似的问题，讨论被辛结构驯服或与之相容的辛结构，但不假设复结构可积。

致谢：作者感谢 Weiyi Zhang 仔细阅读本文草稿，并提供宝贵的反馈和修正意见。他还感谢 Jeffrey Streets 和 Gang Tian 提供非常有益的评论，并告知他相关论文[7, 22]。

2 预备知识

2.1 Leray 谱序列

设 $\pi: X \to B$ 是一个可微纤维丛。本小节中，我们不考虑任何复结构。众所周知，存在一个 Leray 谱序列： $\{E_r^{p,q}, d_r\}$其中

$$E_2^{p,q} = H^p(B, R^q\pi_*\mathbb{R}) \Rightarrow E_\infty^{p,q} \cong GrH^{p+q}(X, \mathbb{R}).$$

为后续构造做准备，我们从过滤的 de Rham 复形的角度，用微分形式来说明谱序列的这一收敛性。在下面的讨论中，对于任意局部计算，我们选取一个小的坐标邻域 $\{U, u = (u_1, \ldots, u_m)\}$，使得 B存在一个微分同胚

$$\pi^{-1}(U) \cong U \times F. \tag{3}$$

在 F上选取局部实坐标 $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$，使得 $\pi: \pi^{-1}(U) \to U$由投影 $\pi(u, y) = u$给出。

用 $\mathcal{E}^\ell(X)$表示 X上的光滑ℓ 次微分形式空间。形式 $\eta \in \mathcal{E}^\ell(X)$可局部表示为以下表达式：

$$\eta = \sum_{|I|+|K|=\ell} \eta_{I;K}(u, y) du_I \wedge dy_K = \sum_I du_I \wedge \eta_I \tag{4}$$

为简化记号，对于指标集 $I = \{i_1, \ldots, i_{|I|}\}$，我们记 $du_I = du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{|I|}$（$dy_K$ 的情形类似），并记 $\eta_I = \sum_{|K|=\ell-|I|} \eta_{I;K} dy_K$。

考虑以下 Leray滤过：

$$\mathcal{F}_L^p \mathcal{E}^\ell(X) = \left\{ \eta = \sum_{|I|+|K|=\ell} \eta_{I;K} du_I \wedge dy_K; |I| \geq p \right\}.$$

容易验证，在坐标变换 $(u, y') = (u, y'(u, y))$ 下，对于任意满足 $|I| = p$ 的 I，项 $\sum_K \eta_{I;K} dy_K$ 沿任意纤维 $X_b = \pi^{-1}(b)$ 按张量变换。特别地，限制 $\eta_I|_{X_b} := f_b^* \eta_I$ 是任意纤维 X_b 上定义良好的 $(\ell - p)$-形式。

让我们回顾一下 [11, p. 440-442] 中对 Leray 谱序列的描述：

$$E_r^{p,q} = \frac{\{a \in \mathcal{F}_L^p \mathcal{E}^{p+q}(X) : da \in \mathcal{F}_L^{p+r} \mathcal{E}^{p+q+1}(X)\}}{d(\mathcal{F}_L^{p-r+1} \mathcal{E}^{p+q-1}(X)) + \mathcal{F}_L^{p+1} \mathcal{E}^{p+q}(X)}. \tag{5}$$

这里，分母并不是分子的子群，其含义是按原样取 {分母} ∩ {分子}。微分 $d_r: E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r$定义如下：

$$d_r[a] = [da] \in E_r^{p+r,q-r+1} = \frac{\{b \in \mathcal{F}_L^{p+r} \mathcal{E}^{p+q+1}(X); db \in \mathcal{F}_L^{p+2r} \mathcal{E}^{p+q+2}(X)\}}{d\mathcal{F}_L^{p+1} \mathcal{E}^{p+q}(X) + \mathcal{F}_L^{p+r+1} \mathcal{E}^{p+q+1}(X)}. \tag{6}$$

如果一个上同调类 $[\eta] \in E^{p,\,r\,q}$满足 $d_r[\eta] = 0$，那么由（6）可知，存在 $\chi \in \mathcal{F}_L^{p+1}\mathcal{E}^{p+q}$ 使得 $d\eta - d\chi \in \mathcal{F}_L^{p+r+1}\mathcal{E}^{p+q+1}$，因此 η，且 $\eta' = \eta - \chi$ 在 $E^{p,\,r\,q}$中定义相同的上同调类，而 $\eta' = \eta - \chi$ 在 $E^{p,\,q}_{r+1}$中定义一个上同调类。

当 $p = 0$ 时，我们有映射 $d_r:\ E^{0,\,r\,q} \to E^{r,\,r\,q-r+1}$以及 $E^{0,\,q}_{r+1} = \mathrm{Ker}(d_r) \subseteq E^{0,\,r\,q}$。因此我们总有包含关系 $E^{0,\,q}_{\infty} \subset E^{0,\,q}_{q+1} \subset \ldots \subset E^{0,\,1\,q}$。

考虑第二页（即 $r = 2$），并将纤维为 $\{H^q(X_b,\mathbb{R})$的局部系统 $V^q = R^q\pi_*\mathbb{R}$ 记为 $b \in B\}$。那么存在自然同构：

$$E_2^{0,q} = H^0(B, V^q) = H^q(X_b,\mathbb{R})^{\mathrm{inv}} \tag{7}$$

其中，$H^0(B,V^q)$ 是 V^q的平坦截面空间，而 $H^q(X_b,\mathbb{R})^{\mathrm{inv}}$ 是在单值化作用下不变的上同调空间。此外，$[\eta] \in E_r^{0\,q} \subseteq$，，$E_2^{0\,q} = H^0\ B\ V^q$ η $[\eta] \in E_2^{0\,q}$（，）当且仅当我们可以找到，的一个代表元，使得$d\eta \in \mathcal{F}^r\mathcal{E}^{q+1}(X)$。在此情况下，$d_r[\eta] = 0$ 当且仅当存在 $\chi \in \mathcal{F}_L^1\mathcal{E}^q$ 使得$d(\eta - \chi) \in \mathcal{F}_L^{r+1}\mathcal{E}^{q+1}(X)$。因此，如果对任意 $r \in \{1,\ldots,q+1\}$ 都有 $d_r[\eta] = 0$，那么可以将代表元 η 选为一个闭的 q-形式，我们称 $[\eta] \in H^0(B,V^q)$ 延拓为 X 上的闭的 q-形式。换言之，子空间 $E^{0,\,q}_{\infty} = E^{0,\,q}_{q+1} \subseteq E^{0,\,2\,q}$ 等于自然映射的像

$$f_b^*: H^q(X,\mathbb{R}) \to H^q(X_b,\mathbb{R})^{\mathrm{inv}} = E_2^{0,q}. \tag{8}$$

注意，f_b^*与复合映射 $H^q(X,\mathbb{R}) \to Gr^0_{\mathcal{F}_L} H^q(X,\mathbb{R}) \to E^{0,\,2\,q}$重合。为了后续研究，我们需要更好地理解 Leray 谱序列的第一页和第二页。对于如（4）中的任意 $\eta = \sum_I du_I \wedge \eta_I \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^{p+q}(X)$，我们知道，对于任意满足$|I| = p$的 I，$\eta_I|_{X_b}$是任意纤维 X_b上的闭微分形式，即 $(d\eta_I)|_{X_b} = 0$。因此，$[\eta_I|_{X_b}]$在 $V_b^q = H^q(X_b,\mathbb{R})$ 中定义了一个上同调类。那么，空间 $E^{p,\,1\,q}$ 有如下描述：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^p(B,V^q) \;=\; \{[\eta] = [\eta]_p := \sum_{|I|=p} du_I \otimes [\eta_I|_{X_b}] : \eta \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^{p+q}(X),\\ \text{for any } I \text{ with } |I| = p, \eta_I|_F \text{ is closed}\}\end{aligned}$$

它是 V^q值的 p次微分形式空间。接下来，我们希望将d_1微分与由 Gauss-Manin 联络诱导的以下微分算子联系起来。

$$\begin{aligned} D: \mathcal{E}^p(B,V^q) \;&\to\; \mathcal{E}^{p+1}(B,V^q).\\ D[\eta]_p \;&=\; \sum_{\substack{|I|=p\\ i\in\{1,\ldots,\dim_{\mathbb{R}} B\}}} (-1)^p \left(du_I \wedge du_i \otimes [\mathcal{L}_{\partial_{u_i}}\eta_I]\right). \end{aligned} \tag{9}$$

这里 $\mathcal{L}_{\partial_{u_i}}$表示关于向量场 ∂_{u_i}的李导数，其中 $i \in \{1,\ldots,m\}$。这里我们将 ∂_{u_i} 提升为定义在 $\pi^{-1}(U$上的向量场，其依据是（3）中的微分同胚。

利用消失条件（$d\eta_I\,|_{X_b} = 0$ $d\eta \in$），很容易看出，$\mathcal{F}_L^{p+1}/\mathcal{F}_L^{p+2}$其中的分次分量由以下各项表示：

$$\sum_{\substack{|I|=p;\\ i\in\{1,\ldots,\dim_{\mathbb{R}} B\}}} (-1)^p du_I \wedge du_i \wedge \mathcal{L}_{\partial_{u_i}}\eta_I + \sum_{|J|=p+1} (-1)^{p+1} du_J \wedge d\eta_J.$$

注意，第二项中的 $d\eta_J$ 限制在任意纤维上时都是恰当的。特别地，对于任意 $\eta \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^{p+q}(X)$，我们有：

$$d\eta \in \mathcal{F}_L^{p+1}\mathcal{E}^{p+q+1}(X) \quad \text{and} \quad D[\eta]_p = [d\eta]_{p+1} \in \mathcal{E}^{p+1}(B,V^q). \tag{10}$$

引理 2.1。存在一个自然的满射态射：

$$\phi : \{a \in \mathcal{F}_L^p \mathcal{E}^{p+q}(X) : da \in \mathcal{F}_L^{p+2}\mathcal{E}^{p+q+1}(X)\} \to \mathrm{Ker}(D : \mathcal{E}^p(B, V^q) \to \mathcal{E}^{p+1}(B, V^q)). \tag{11}$$

它诱导一个同构

$$E_2^{p,q} \cong \frac{\mathrm{Ker}(D : \mathcal{E}^p(B, V^q) \to \mathcal{E}^{p+1}(B, V^q))}{\mathrm{Im}(D : \mathcal{E}^{p-1}(B, V^q) \to \mathcal{E}^p(B, V^q))} = H^p(B, V^q). \tag{12}$$

证明。为简化记号，将（11）的左端和右端分别记为 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$。我们还将 $\ell = p + q$。

若 $\eta \in \mathcal{V}_1$，则 $d\eta \in \mathcal{F}_L^{p+2}\mathcal{E}^{\ell+1}(X)$，因而 $D[\eta]_p = [d\eta]_{p+1} = 0$。于是得到自然态射 ϕ，它将 η 映射到 $[\eta]_p$。为证明此映射是满射，任取$[\eta] \in \mathcal{V}_2$，满足 $\eta \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^\ell(X)$，且对任意纤维 X_b，$\eta_I|_{X_b}$都是闭的。于是 $[d\eta]_{p+1}$ $=D[\eta]_p = 0$意味着，对任意满足 $|J| = p + 1$的 J以及任意纤维 X_b，$(d\eta)_J|_{X_b}$都是恰当的。选取 B 的一个坐标系 $\{(U_k, \{u_i^{(k)}\}\}$)，以及从属于覆盖 $\{U_k\}$的单位分解 $\{\rho_k\}$。对每个 $b \in U_k$ 以及任意满足 $|J| = p + 1$的 J，我们可以在X_b 上找到 $\chi_{J,b}$，使得 $(d\eta)_J|_{X_b} = d\chi_{J\,b}^{(k)}$，并且对于任意固定的 U_k，$\chi_{J\,b}^{(k)}$ 关于 $b \in U_k$ 光滑变化。由于任意纤维都与一个固定的光滑流形 F微分同胚，族 $\{\chi_{J,b}^{(k)}; b \in U_k\}$可视为 $\pi^{-1}(U_k) \cong U_k \times F$ 上的一个光滑形式 $\chi_J^{(k)}$（光滑微分同胚）。定义

$$\eta' = \eta - \sum_k \rho_k \sum_{|J|=p+1} (-1)^{p+1} du_J^{(k)} \wedge \chi_J^{(k)}.$$

那么，对于任意满足 $|J| = p + 1$ 的 J 以及任意 $b \in B$，η' 满足 $\eta' - \eta \in \mathcal{F}_L^{p+1}\mathcal{E}^{p+q}$ 和 $(d\eta')_J|_{X_b} = 0$。特别地，$\eta' \in \mathcal{V}_1$，并且满足 $\phi(\eta') = [\eta'] = [\eta]$。

为了证明 ϕ 诱导了同构 (12)，我们需要确定 ϕ的核。因此，假设 $[\eta] = D[\chi] \in \mathrm{Im}(D: \mathcal{E}^{p-1}(B, V^q) \to \mathcal{E}^p(B, V^q))$。于是我们可以假设$\eta \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^\ell(X)$，其中 $d\eta \in \mathcal{F}_L^{p+1}\mathcal{E}^{\ell+1}(X)$，且 $\chi \in \mathcal{F}_L^{p-1}\mathcal{E}^{\ell-1}(X)$。于是

$$[\eta]_p = D[\chi]_{p-1} = \sum_{|I|=p-1} (-1)^{p-1}(du_I \wedge du_i \otimes [\mathcal{L}_{\partial_{u_i}}\chi_I]) = [d\chi]_p.$$

这意味着 $[\eta - d\chi]_p = 0$，进而意味着 $\eta \in \mathcal{V}_1' := d\mathcal{F}_L^{p-1}\mathcal{E}^{\ell-1}(X) + \mathcal{F}_L^{p+1}\mathcal{E}^\ell(X)$。因此我们得到恒等式 $\phi^{-1}(\mathrm{Im}(D)) = \mathcal{V}_1' \cap \mathcal{V}_1$。根据 (5) 中的定义，$E^{p,\,q}_{2} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_1' \cap \mathcal{V}_1}$。由此可得，$\phi$ 诱导了一个同构。

□

2.2 K¨ahler 情形

从现在起，我们假设纤维 $\{X_b; b \in B\}$ 和底空间 B 都是 K¨ahler 流形。假设我们有 $\alpha \in H^0(B, V^2) \cong E^{0,2}$ 2，它在每个纤维上的限制都是 K¨ahler 上同调类。我们考虑的主要问题是，能否在 X 上找到一个闭的 (1, 1)-形式 Q，使得 $[Q]|_{X_b} = f_b^*[Q] = \alpha$，也就是说，对于 $q = 2$，α 是否包含在 (8) 中自然态射的像内。根据定理 1.2，当且仅当 $d_2(\alpha) = 0$ 时，答案是肯定的。从某种意义上说，定理 1.2 是对 Blanchard 和 Deligne 在 K¨ahler 几何中的以下基本结果的逆命题：

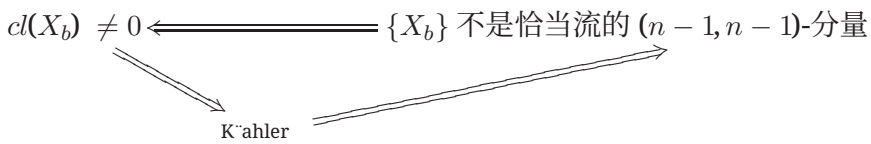
定理 2.2 ([2, 4])。设 X 和 B 是紧致的 K¨ahler 流形，且 $\pi : X \to B$ 是一个全纯下沉，则 Leray 谱序列在第 E_2 页退化。

在第 4节中，我们将运用 Deligne方法证明该定理，以证明厄米-辛下沉的一个延拓结果（见命题 4.5）。

定理 1.1 的另一个有趣推论，是对 Harvey-Lawson 在 [13] 中提出的问题给出了肯定的回答。

定理2.3 （定理1.1的推论）。 假设该次浸没的纤维维数为 1。那么， ¨存在一个 Kähler 度量，当且仅当 X 的任意纤维的同调类 X 非零。

事实上，当 $\dim X_b = 1$。 $H^2(X_b,\mathbb{R})^{\mathrm{inv}} = H^{1,1}(X_b) = \mathbb{R}$ 由纤维的自然定向诱导。（条件 I）成立，当且仅当 (8) 中的映射 f_b^* 非零；根据对偶性，这等价于 Gysin映射 $(f_b)_!\colon H^0(X_b,\mathbb{R}) \cong H_2(X_b,\mathbb{R}) \to H_2(X,\mathbb{R}) \cong H^{2n-2}(X,\mathbb{R})$ 非零。这也等价于上同调类 $cl(X_b) := (f_b)_![1]$ 非零，该上同调类定义为纤维的上同调类。另一方面，复子簇 X_b 定义了沿 X_b 积分的流 $\{X_b\}$。流 $\{X_b\}$ 是一个类型为 $(n-1,n-1)$ 的闭正流，其德拉姆上同调类为 $cl(X_b) \in H^{n-1,n-1}(X,\mathbb{R}) \subset H^{2n-2}(X,\mathbb{R})$。若 X 上存在 K¨ahler 度量，则显然流 $\{X_b\}$ 不是恰当的 $(n-1,n-1)$ 分量流。综合这些陈述，便可轻易得到以下等价关系，从而推出 [13,定理 1.7] 并回答 [13, 注D]。



2.3 极化霍奇结构变分的 Deligne-Hodge理论

从现在起，我们假设 (条件 Ia) 成立。于是，局部系统 $V^q = R^q\pi_*\mathbb{R}$ 是极化霍奇结构变分的底层局部系统。在构造全纯下沉的 K¨ahler 度量时，我们需要运用 Deligne 关于 $H^p(B,V^q)$¯的霍奇理论，以推导出 $\partial\partial$-引理的一个变体（引理 2.6）。因此，我们简要回顾这一理论，讲述方式遵循 Zucker 在 [23]中的介绍。

对于任意 $b \in B$，由于纤维 X_b 是 K¨ahler 的，我们有霍奇滤过 $\{\mathscr{F}^\ell := \mathscr{F}^\ell H^q(X_b,\mathbb{C})\}$，它属于 $V^q_{\mathbb{C},\,b} := H^q(X_b,\mathbb{C})$，并在每个纤维上诱导出霍奇分解：

$$V^q_{\mathbb{C},b} = H^q(X_b,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\ell=0}^{q} \mathcal{H}^{\ell,q-\ell}(X_b) \quad \text{with} \quad \mathcal{H}^{\ell,q-\ell}(X_b) = \mathscr{F}^\ell \cap \overline{\mathscr{F}^{q-\ell}}. \tag{13}$$

式（13中的逐纤维霍奇分解定义了 $\mathcal{H}^{\ell,\,q-\ell}$ 它们是与 $V^q_{\mathbb{C}} = V^q \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 相关的光滑向量丛的光滑子丛。若 $\mathcal{E}^p(V^q) = \Gamma(B,V^q_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}^p_B)$ 表示 B 上的光滑 $V^q_{\mathbb{C}}$ 值 p 形式，则有如下分解：

$$\mathcal{E}^0(V^q) = \bigoplus_{\ell=0}^{q} \mathcal{E}^0(\mathcal{H}^{\ell,q-\ell}), \quad \mathcal{E}^p(V^q) = \bigoplus_{k,\ell} \mathcal{E}^{k,p-k}(\mathcal{H}^{\ell,q-\ell});$$

$$\mathcal{E}^p(V^q) = \bigoplus_{R,S} \mathcal{E}^p(V^q)^{R,S}, \quad \mathcal{E}^p(V^q)^{R,S} = \bigoplus_{\substack{a+c=R,b+d=S\\ a+b=p,c+d=q}} \mathcal{E}^{a,b}(\mathcal{H}^{c,d}).$$

我们可以将高斯-马宁联络 D 分解为两个互为共轭的算子：

$$D = \nabla \oplus \overline{\nabla} : \mathcal{E}^0(V^q) \to \mathcal{E}^{1,0}(V^q) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(V^q).$$

D 的平坦性意味着算子 $\overline{\nabla}$ 满足可积性条件 $\overline{\nabla}^2 = 0$。因此，$\overline{\nabla}$ 定义了一种全纯结构，并由此产生相应的全纯向量丛 $\mathscr{V}^q = V^q \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_B$。霍奇滤过诱导出 $\mathscr{V}^q$的一个全纯子丛滤过 $\{\mathscr{F}^\ell \mathscr{V}^q\}$。Griffiths 证明，全纯高斯-马宁联络$\nabla$ 满足无穷小周期关系（也称为Griffiths横截性）：

$$\nabla \mathscr{F}^\ell \mathscr{V}^q \subseteq \Omega^1_B \otimes \mathscr{F}^{\ell-1} \mathscr{V}^q. \tag{14}$$

(14)中的关系蕴含以下包含关系：

$$D\mathcal{E}^{a,b}(\mathcal{H}^{c,d}) \subseteq \mathcal{E}^{a+1,b}(\mathcal{H}^{c,d}) \oplus \mathcal{E}^{a+1,b}(\mathcal{H}^{c-1,d+1}) \oplus \mathcal{E}^{a,b+1}(\mathcal{H}^{c+1,d-1}) \oplus \mathcal{E}^{a,b+1}(\mathcal{H}^{c,d}).$$

相应地，算子 D 可分解为：

$$\begin{array}{ll} \partial' : & \mathcal{E}^{a,b}(\mathcal{H}^{c,d}) \to \mathcal{E}^{a+1,b}(\mathcal{H}^{c,d}) \\ \theta : & \mathcal{E}^{a,b}(\mathcal{H}^{c,d}) \to \mathcal{E}^{a+1,b}(\mathcal{H}^{c-1,d+1}) \\ \bar{\partial}' : & \mathcal{E}^{a,b}(\mathcal{H}^{c,d}) \to \mathcal{E}^{a,b+1}(\mathcal{H}^{c,d}) \\ \bar{\theta} : & \mathcal{E}^{a,b}(\mathcal{H}^{c,d}) \to \mathcal{E}^{a,b+1}(\mathcal{H}^{c+1,d-1}). \end{array} \tag{15}$$

众所周知，θ 由与相应变形的 Kodaira-Spencer 类作楔积给出。更确切地说，对于任意 $b \in B$ 和任意 $v \in T_b B$，若以 $\tau_b(v) \in H^1(X_b, TX_b)$ 表示全纯下沉沿方向 v诱导的变形的 Kodaira-Spencer 类，则与 $\tau_b(v)$ 的杯积诱导出纤维上的映射：

$$\tau_b(v) : H^d(X_b, \Omega^c_{X_b}) \to H^{d+1}(X_b, \Omega^{c-1}_{X_b}). \tag{16}$$

于是，θ是由映射族 $\{\tau_b \in T^*_{(1,0)} X_b \quad \otimes (\mathcal{H}^{c,d}_b)^* \otimes_{\otimes \mathcal{H}^{c-1,}_b} \quad ^{d+1}\}$ 诱导的自然张量映射。

利用 (15) 中的分解，我们可以定义如下算子：

$$\begin{aligned} D' &= \partial' + \bar{\theta} : \mathcal{E}^p(V^q)^{R,S} \to \mathcal{E}^{p+1}(V^q)^{R+1,S}, \\ D'' &= \bar{\partial}' + \theta : \mathcal{E}^p(V^q)^{R,S} \to \mathcal{E}^{p+1}(V^q)^{R,S+1}. \end{aligned}$$

上述讨论适用于任意固定权的霍奇结构变分。因此，在本小节余下部分，我们将 V 记作 V^q。现在假设 V 是可极化的：存在定义在 V 上、由 $\mathbb{R}$ 定义的非退化平坦双线性配对，且该配对满足霍奇-黎曼双线性关系（精确定义见 [21, vI.10.1] ）。于是，光滑向量丛 $\mathcal{E}^\cdot($ V上存在平坦霍奇度量，据此可以定义伴随算子 D^*, D'^*, D''^* 以及拉普拉斯算子：

$$\Box_D = DD^* + D^*D, \quad \Box_{D'} = D'D'^* + D'^*D', \quad \Box_{D''} = D''D''^* + D''^*D.$$

记 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^p(V) := \mathrm{Ker}(\Box_D)$ 为 $\mathcal{E}^p(V)$ 中的调和形式空间。于是，标准霍奇理论给出：

定理 2.4（霍奇定理）。存在一个同构 $H^p(B, V) \cong \mathfrak{h}$。

Deligne 证明了以下结果:

定理 2.5 (Deligne，参见 [23, 第 2]节)。 1. 以下广义 K¨ahler 恒等式成立。

$$[\Lambda, D] = -C^{-1}D^*C, \quad [\Lambda, D''] = -\sqrt{-1}D'^*, \quad [\Lambda, D'] = \sqrt{-1}D''^* \tag{17}$$

其中， C 是由作用于 $\mathcal{E}^p(V)^{R,\ S}$上的标量算子 i^{R-S} 直和而成的算子。

2. 拉普拉斯算子满足以下等式:

$$\Box_{D'} = \Box_{D''}, \quad \Box_D = \Box_{D'} + \Box_{D''} = 2\Box_{D''}.$$

因此，一个形式是调和形式，当且仅当它的所有 (R, S)-分量都是调和形式。

3. 记 $\mathfrak{h}^{R,\ S}$ 为 $\mathcal{E}^p(V)^{R,\ S}$中的调和形式空间。在 $H^p(B,\ V)$ 上，由定理 2.4 中的同构及以下分解诱导出一个霍奇结构:

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{R+S=p+q} \mathfrak{h}^{R,S}.$$

注意，当 $V = \mathbb{R}$时，Deligne 理论约化为经典霍奇理论。与经典情形一样，K¨ahler 恒等式蕴含以下有用的恒等式:

$$D'D''^* + D''^*D' = 0. \tag{18}$$

¯我们需要以下标准的变体 $\partial\partial$-引理以及 Blanchard 的一个引理（[2, 引理 II 3。2]）。

引理 2.6. 1. 若 $x \in \mathcal{E}^{\cdot}(V)^{R,\ S}$ 是 D-恰当的，则存在 $z \in \mathcal{E}^{\cdot}(V)^{R-1,\ S-1}$ 使得 $x = D'D''z$.
2. 若 $x \in \mathcal{E}^{\cdot}(V)^{R+1,\ S} \oplus \mathcal{E}^{\cdot}(V)^{R,\ S+1}$ 是 D- 恰当的，则存在 $w \in \mathcal{E}^{\cdot}(V)^{R,\ S}$ 使得 $x = Dw$.

为方便读者，我们给出简短的证明，它与经典情形相同。

证明。根据标准的霍奇定理，存在格林算子 $G\colon \mathcal{E}^{\cdot}(V) \to \mathcal{E}^{\cdot}(V)$，它保持类型，与 D'', D' 对易，并满足 $G\Box_D = \Box_D G = \mathrm{Id} - \mathbb{H}$，其中 $\mathbb{H}$ 是到调和形式空间的正交投影。因此我们得到x 的分解$= [\eta]$:

$$x = \mathbb{H}x + 2(D''D''^* + D''^*D'')Gx = 2D''D''^*Gx.$$

因此，我们可以找到一个形式 $y = 2D''^*Gx$，其类型为 $(R, S-1)$，使得 $x = D''y$。对 y 应用类似的分解，我们得到: $y = \mathbb{H}y + 2(D'D'^* + D'^*D')Gy = D'z + D'^*u$ (其中$z = 2D'^*Gy$ 且 $u = 2D'Gy$)，因此 $x = D''D'z + D''D'^*u$。另一方面，我们知道 $D'x = 0$。于是 $0 = D'D''D'^*u = -D'D'^*D''u$，这里用到了 (18)。将其与 $D''u$配对，可得 $D''D'^*u = 0$。因此我们得出结论 $x = D''D'z$。

对于第二个结论，令 $x = y + z$ with $y \in \mathcal{E}(V)^{R+1,\ S}$ and $z \in \mathcal{E}(V)^{R,\ S+1}$。由于 $\mathbb{H}x = 0$，我们得到 $\mathbb{H}y = \mathbb{H}z = 0$。又由于我们还有 $D'y = 0$，因此存在分解 $y = D'D'^*Gy = D'u$，其中 $u = D'^*Gy$ 是 (R, S) 型。于是 $x - Du =$(x − D′u) − D″u = z − D″u 是 D-恰当的，且为 $(R, S+1)$ 型。由第一个结论，对于 $v \in \mathcal{E}^{\cdot}(V)^{R-1,\ S}$, 我们得到 $x - Du = D''D'v = DD'v$。因此，形式 $u + D'v$ 是 (R, S) 型，并满足结论。

□

3 主要结果的证明

本节证明定理 1.2，这也蕴含定理 1.1。“仅当”方向由引言和第 2.1 节中的讨论显然可得。因此，我们只需证明“若”方向。

在以下构造中，我们固定一个开覆盖 $\{U_k\}$，其中 B 的每个 U_k 都双全纯于一个多圆盘，并取一个从属于该覆盖 $\{U_k\}$ 的单位分解 $\{\rho_k\}$。

根据假设（条件 Ia），存在一个元素 $\sigma \in H^0(B, V^2)$，使得对任意 $b \in B$，$\sigma|_{X_b}$ 都是一个 K¨ahler 上同调类。对开覆盖 $\{U_k\}$ 作细化后，我们可以假设 $\pi^{-1}(U_k)$ 带有一个 K¨ahler 度量 ω_k，且 $[\omega_k]|_{X_b} = \sigma|_{X_b}$。令 $\omega = \sum_k \rho_k \omega_k$。于是 ω 是一个全局定义的 (1, 1)-形式，满足 $\sigma = [\omega] \in H^0(B, V^2) = E^{0,\ 2}_2$。

为了进行具体计算，我们在 $\pi^{-1}(U_k)$ 上选取局部全纯坐标 $\{w_\alpha, z_k\} = \{w_\alpha^{(k)}, z_r^{(k)}\}$，使得 π 由映射 $\pi(w_\alpha, z_r) = (w_\alpha)$ 给出。于是 ω 可在局部展开为：

$$\omega = a_{r\bar{s}} dz_r \wedge d\bar{z}_s + a_{\alpha\bar{r}} dw_\alpha \wedge d\bar{z}_r + a_{\bar{\beta}s} d\bar{w}_\beta \wedge dz_s + a_{\alpha\bar{\beta}} dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta.$$

在假设 $d_2[\omega] = 0$ 的情况下，我们的目标是通过一个 (1, 1)-形式 χ 修正 ω，使得 $Q := \omega - \chi$ 在 X 上全局满足 $dQ = 0$。

我们将分几个步骤依次实现 $p = 1$、2、3、4 的 $dQ \in \mathcal{F}_L^p(\mathcal{E}^3(X))$（注意，$\mathcal{F}_L^4(\mathcal{E}^3(X)) = 0$）。对于 $p = 1$，这已经成立，因为 $\omega|_{X_b}$ 是闭的。对于 $p = 2$，我们将看到，修正源于这样一个事实：$d_1[\omega] = 0$，因此 $[\omega] \in E^{0,\ 2}_2 = H^0(B, V^2)$。对于 $p = 3$，我们需要使用条件 Ib 的假设，即 $d_2[\omega] = 0$，并且关键是要用到引理 2.6。最后，可以用通常的 $\partial\bar{\partial}$-引理完成 $p = 4$ 情形。

为简化记号，我们将 $dQ \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^3(X)$ 的分次分量记作 $(dQ)_{p;3-p} \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^3(X)/\mathcal{F}_L^{p+1}\mathcal{E}^3(X)$。换言之，若 $dQ \in \mathcal{F}_L^p\mathcal{E}^3(X)$，则当且仅当 $(dQ)_{p;3-p} = 0$ $dQ \in \mathcal{F}_L^{p+1}\mathcal{E}^3(X)$。注意，当且仅当对于任意 $b \in B$，$f_b^* \iota_{\tilde{v}_{\alpha_1}} \cdots \iota_{\tilde{v}_{\alpha_p}} dQ = 0$，其中 $\tilde{v}_{\alpha_i} \in \{v_1, \ldots, v_m, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$，且 $m =$，dim B，v_α（分别为 $\bar{v}_\alpha$）是 ∂_{w_α}（分别为 $\partial_{\bar{w}_\alpha}$）在 $b \in B$ 和 f_b 附近的局部坐标向量场的提升时，以上条件成立：$X_b \to X$ 是纤维的嵌入映射。

- （步骤 1：消去 $(d\omega)_{0;3}$）由于消失关系（回想一下，f_b： $X_b \to X$ 是纤维的嵌入），这对 (1,1)-形式 ω 已经成立

$$f_b^* d\omega = d f_b^* \omega = 0.$$

- （步骤 2：消去 $(d\omega)_{1;2}$）我们可以计算：

$$f_b^* \iota_{v_\alpha} d\omega \quad = \quad f_b^*(\mathcal{L}_{v_\alpha}\omega - d\iota_{v_\alpha}\omega) = f_b^* \mathcal{L}_{v_\alpha}\omega - d f_b^* \iota_{v_\alpha}\omega. \tag{19}$$

由于 $d_1[\omega] = [d\omega]_2 = 0$，$f_b^*\mathcal{L}_{v_\alpha}\omega$对于任意 $b \in B$都是恰当形式。因此，式（19）右端是一个类型为（1，1）的恰当形式 +（0，2），对每个 $b \in B$都成立。由引理 2.6.2，存在一个形式 h_α，其纤维类型为（0，1），使得 $dh_\alpha = f_b^* \iota_{v_\alpha} d\omega$。此外，我们可以假设，在任意 U_k上，$h_\alpha = h_\alpha^{(k)}$都关于 $b \in U_k$光滑依赖。令 $\chi^{(k)} = dw_\alpha \wedge \bar{h}_\alpha + d\bar{w}_\alpha \wedge h_\alpha$ 在 $\pi^{-1}(U_k)$ 上，并定义：

$$Q = \omega - \sum_k \rho_k \chi^{(k)}.$$

于是 Q 是全局定义的，并满足 $dQ \in \mathcal{F}_L^2\mathcal{E}^3(X)$。从现在起，将 ω 替换为Q （即称 Q 为新的 ω）。

- (步骤 3：分量消去 $(d\omega)_{2,\ 0;1,\ 0}$) 由于 $d\omega \in \mathcal{F}_L^2\mathcal{E}^3(X)$，它定义了一个光滑截面 $[d\omega] \quad \mathcal{E}^2\ V^1 \qquad D[d\omega] = 0 \qquad d_2[\omega] =$，其满足条件且，(,)。由于复结构可积， 是一个 (2, 1) 型形式 $+$(1, 2)，且 $[d\omega] \in \mathcal{E}^2(V^1)$ 包含于 $[d\omega] \in E_2^{2\ 1} = H^2\ B\ V^1 \qquad d\omega$

$$\mathcal{E}^{2,0}(\mathcal{H}^{0,1}) \oplus \mathcal{E}^{1,1}(\mathcal{H}^{1,0}) \oplus \mathcal{E}^{0,2}(\mathcal{H}^{1,0}) \oplus \mathcal{E}^{1,1}(\mathcal{H}^{0,1}).$$

现在我们使用这一假设： $d_2[\omega] = 0 \qquad [d\omega]_2 \in \mathcal{E}^2\ V^1 \qquad V^{\ 2\ 1} \oplus$因 $\mathcal{E}^{\cdot}\ V^{\ 1,2} \quad D \qquad [\chi] \in \mathcal{E}^{\cdot}\ V^{\ 1,1}$ 此 ( ) $= \mathcal{E}^{\cdot}()$, ( ) 是 -恰当的。根据引理 2.6 2, ，存在 ( )，使得 $[d\omega]_2 =$ $D[\chi] = [d\chi]_2 \qquad [\chi] \qquad \mathcal{E}^{\cdot}\ V^{\ 1\ 1} = \mathcal{E}^{1\ 0}\ \mathcal{H}^{0\ 1} \oplus \mathcal{E}^{0\ 1}\ \mathcal{H}^{1\ 0}$ 。由于属于 ( ), , (,) , (,),

我们可以构造一个代表元 χ 作为一个 (1, 1)-形式（如引理 2.1 的证明中那样使用单位分解）。

$d\omega$ 中类型为 (0, 2; 1, 0) 或 (2, 0; 0, 1) 的项为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}((\partial_{\bar{\alpha}} a_{\bar{\beta}r} - \partial_{\bar{\beta}} a_{\bar{\alpha}r}) dz_r) d\bar{w}_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta + \frac{1}{2}((\partial_{w_\alpha} a_{\beta\bar{s}} - \partial_{w_\alpha} a_{\beta\bar{s}}) d\bar{z}_s) \wedge dw_\alpha \wedge dw_\beta \\ = \quad & \frac{1}{2} P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} d\bar{w}_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta + \frac{1}{2} \overline{P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}} \wedge dw_\alpha \wedge dw_\beta. \end{aligned}$$

将 ω 替换为 $\omega - \chi$ 后，我们可以假设 $[d\omega]_2 = 0 \in \mathcal{E}^2(B, V^1)$。这意味着在每个纤维 X_b 上，(1,0)-形式 $P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ 是一个恰当形式。由于 X_b 是 K¨ahler，这意味着 $P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$。因此， $d\omega$ 不含类型为 (0, 2; 1, 0) 或 (2, 0; 0, 1) 的项。

- （步骤 4：消去 $(d\omega)_{1,\ 1;1,\ 0}$ 的分量）
  $d\omega$ 中类型为 (1, 1; 1, 0) 或 (1, 1; 0, 1) 的项可以写成 $P_{\alpha\bar{\beta}} \wedge dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta$，其中

$$P_{\alpha\bar{\beta}} \quad = \quad (\partial_{\bar{w}_\beta} a_{\alpha\bar{s}}) d\bar{z}_s - (\partial_{w_\alpha} a_{\bar{\beta}r}) dz_r + (\partial_{\bar{z}_s} a_{\alpha\bar{\beta}}) d\bar{z}_s + (\partial_{z_r} a_{\alpha\bar{\beta}}) dz_r.$$

与步骤 3 中一样，我们可以假设 $[d\omega]_2 = 0 \in \mathcal{E}^2(B, V^1)$，这再次意味着上述表达式中的 $P_{\alpha\bar{\beta}}$ 是恰当的。因此，对于任意 $b \in U_k$，存在定义在 X_b 上的光滑函数 $\xi_{\alpha\bar{\beta}}^{(k)}$，使得 $P_{\alpha\bar{\beta}} = d\xi_{\alpha\bar{\beta}}^{(k)}$ 且 $\int_{X_b} \xi_{\alpha\bar{\beta}}^{(k)} \omega^n = 0$。此外，我们可以假设 $\xi_{\alpha\bar{\beta}}^{(k)}$ 关于 $b \in U_k$ 光滑地变化。定义一个新的 (1, 1)-形式

$$Q = \omega - \sum_k \rho_k \cdot \xi_{\alpha\bar{\beta}}^{(k)} dw_\alpha^{(k)} \wedge d\bar{w}_\beta^{(k)}.$$

于是 Q 满足 $dQ \in \mathcal{F}_L^3\mathcal{E}^3(X)$。现在我们用 Q 替换 ω。

- （步骤5：构造的完成）由于 $d\omega \in \mathcal{F}_L^3\mathcal{E}^3(X)$，我们可以得到：

$$d\omega = f_{\alpha\beta\bar{\gamma}} dw_\alpha \wedge dw_\beta \wedge d\bar{w}_\gamma + \overline{f_{\alpha\beta\bar{\gamma}}} d\bar{w}_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta \wedge dw_\gamma.$$

$dd\omega = 0$ 意味着 $f_{\alpha\beta\bar{\gamma}}$ 沿纤维为常数。因此，对于某个 $\eta_B \in \mathcal{E}^{2,\ 1}(B) + \mathcal{E}^{1,\ 2}(B)$，有 $d\omega = \pi^* \eta_B$。显然， η_B 是闭的。 η_B 必定是恰当的，因为对于 B上的任意闭的 $(m-2)$-形式 T

$$\int_B \eta_B \wedge T = \int_X \omega^n \wedge \pi^* \eta_B \wedge \pi^* T = \frac{1}{n+1} \int_X d\omega^{n+1} \wedge \pi^* T = 0.$$

由于假设 B 是 K¨ahler 的（条件 II），将引理 2.6 应用于常值局部系统 $\mathbb{R}$，我们知道存在一个光滑的 (1, 1)-形式，使得$\eta_B = d\chi_B$。因此，(1, 1)-形式 $Q' = \omega - \pi^*\chi_B$是一个闭的 (1, 1)-形式，且其在每个纤维上的限制都是 K¨ahler 形式。设 ω_B 是 B上的一个 K¨ahler 形式，那么对于 $K \gg 1$，闭的 (1, 1)-形式 $Q := Q' + K \cdot \pi^*\omega_B$ 在 X上成为一个 K¨ahler 形式。

注 3.1。上述证明推广并简化了 *[2,* TH ´EOR ´EM PRINCIPAL II*]* 中的证明，其中 Blanchard 考虑了全纯下沉 $\pi : X \to B$ 为等平凡的特殊情形，并且还满足一个额外条件，即 $\pi_1(B)$ 在 $H^1(F)$ 上平凡作用。事实上，Blanchard 在 *[2,* TH ´ER ´EME II.1.I*]* 中证明，在这一平凡性假设和（条件 Ia）下，（条件 Ib）等价于转移映射 $H^1(F) \to H^2(B)$ 为 0。随后，他利用转移映射的这一消失，在其原始步骤中完成了 K ¨ahler 度量的构造，这些步骤对应于上述步骤 3 和步骤 4。此外，由于解析纤维丛是等平凡的，对于 *[2]* 而言，K ¨ahler 流形的标准霍奇理论便已足够，无需像上述证明中那样使用极化霍奇结构变分的 Deligne 的霍奇理论。

注 3.2. 如果我们知道上同调类 $[Q]$ 含有一个闭的 (1, 1)-形式 Q，那么上述构造可以大大简化如下。我们从本节开头利用单位分解构造的 (1, 1)-形式 ω 开始。对于任意 $b \in B$、¯，我们可以使用标准的 $\partial\partial$-引理，得出存在 $\psi_b \in C^\infty(X_b, \mathbb{R})$，使得 $\omega_b = Q|_{X_b} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_b$ 且 $\int_{X_b} \psi_b \omega_b^n = 0$。此外，很容易看出，$\psi_b$ 随 $b \in B$ 光滑变化。这使我们可以在 X 上定义一个光滑函数 Ψ，使得 $\Psi|_{X_b} = \psi_b$。定义 $Q = \chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\Psi$。那么 Q 是一个闭的 (1, 1)-形式，其限制是 X_b 上的 K ¨ahler 度量 ω_b。在 B 上选取一个 K ¨ahler 度量 ω_B 后，$Q + K \cdot \pi^*\omega_B$ 便是 $K \gg 1$ 的一个 K ¨ahler 度量。

如果我们只知道 Q 是一个不一定具有 (1,1) 型的闭 2-形式，那么类似的构造只能在 X 上产生一个厄米 - 辛形式。厄米 - 辛结构将在下一节中讨论。

4 厄米-辛结构的一个应用

设 X 是一个复流形，Q 是 X 上的闭 2-形式。当且仅当 Q 满足以下两个条件时，Q 是一个厄米-辛（HS）结构。

1. Q 是一个辛形式。换言之，$Q^{\dim X}$ 不处处为零，并且 $dQ = 0$。2. 如果 $Q = Q^{2,0} + Q^{1,1} + Q^{0,2}$ 是将 Q 分解为分别具有 (2, 0)、(1, 1) 和 (0, 2) 型的微分形式，那么 $Q^{1,1}$ 是一个正定的 (1, 1)-形式。

我们将应用定理 1.2 来证明以下一般性结果。

命题 4.1. 设 $\pi : X \to B$ 是一个具有凯勒纤维和凯勒底空间的全纯下沉。假设 X 具有厄米-辛结构。那么以下条件等价：

1. X 是 K ¨ahler。2. 存在 $[\omega] \in H^0(B, R^2\pi_*\mathbb{R})$，其在每个纤维 F 上限制为一个 K ¨ahler 上同调类。3. 霍奇结构变分 $R^2\pi_*\mathbb{R}$ 是可极化的。

¯4. X 满足 $\partial\partial$-引理。

本节余下部分旨在证明命题 4.1 ，并由此推导出定理1.3 作为其推论。设 F 是 π 的任意纤维。容易看出， $\chi = Q|_F$ 是 F上的厄米-辛形式。由于假设 F 是 K¨ahler 流形，因此我们有如下霍奇分解:

$$H^2(F,\mathbb{C}) = H^{2,0}(F) \oplus H^{1,1}(F) \oplus H^{0,2}(F), \quad H^{0,2}(F) = \overline{H^{2,0}(F)}.$$

上同调类 $[\chi] \in H^2(F,\mathbb{C})$ 关于上述分解可分解为 $[\chi] = [\chi]^{0,\,2} + [\chi]^{1,\,1} + [\chi]^{0,\,2}$。相反，若以 $\chi^{1,\,1}$ 表示 2-形式 χ 的 (1, 1) 分量，那么一般而言， $\chi^{1,\,1}$ 仅为 $\partial\bar{\partial}$-闭的，而非 d-闭的。

命题 4.2 ([14])。若 χ 是 K ¨ahler 流形 F 上的厄米-辛形式，则 $[\chi]^{1,\,1}$ 是一个 K ¨ahler 上同调类。

正如 [14], 所指出的，这是由 [6]中的深刻结果推得的。为方便读者，我们给出一个简短的证明。

证明。首先证明 $[\chi]^{1,1}$ 属于数值有效锥，而数值有效锥是 K¨ahler 锥的闭包。根据 [6, 定理 4.3], ，这等价于以下条件：对于每个不可约解析子集 $Y \subseteq F$， dim $= p$， 以及每个 K¨ ahler 上同调类 $[\omega_F] \in H^{1,1}(F,\mathbb{R})$,

$$\int_Y [\chi]^{1,1} \wedge \omega_F^{p-1} \geq 0.$$

但由于类型的原因，上述积分等于

$$\int_Y [\chi] \wedge \omega_F^{p-1} = \int_Y \chi \wedge \omega_F^{p-1} = \int_Y \chi^{1,1} \wedge \omega_F^{p-1} \geq 0.$$

对于任意 $\alpha \in H^{1,1}(F,\mathbb{R})$，且当 ϵ 充分小时，上同调类 $[\chi] + \epsilon\alpha$ 显然也包含一个厄米-辛形式，因此 $[\chi] + \epsilon\alpha$ 也属于数值有效锥。因此我们得出 $[\chi]^{1,1}$ 位于数值有效锥的内部，而这恰好就是 K¨ ahler 锥。

□

接下来，我们考虑如下定义。

定义 4.3（参见 [10, 定义 4.96]）。若辛流形 (F,χ) 上的乘法运算乘以 $[\chi]^{n-1}$

$$L := L_{[\chi]} : H^1(F,\mathbb{R}) \to H^{2n-1}(F,\mathbb{R}). \tag{20}$$

是一个同构，则称其为
Lefschetz 型。

推论 4.4。设 F 是一个 K ¨ahler 流形。若 χ 是 F上的厄米-辛形式，则 (F,χ) 是 Lefschetz 型。

证明。由庞加莱对偶性， $H^1(F,\mathbb{R})$ 和 $H^{2n-1}(F,\mathbb{R})$ 维数相同。因此，只需证明 $L_{[\chi]}: H^1(F,\mathbb{R}) \to H^{2n-1}(F,\mathbb{R})$ 是单射。

由于 F 是 K¨ahler，根据霍奇分解和定理 4.2，存在一个 K¨ahler 形式 ω_F和一个（闭的）全纯2形式 η，使得 $[\chi] = [\omega_F + \eta + \bar{\eta}]$。此外，我们有霍奇分解： $H^1(F,\mathbb{C}) = H^{1,\,0}(F) \oplus H^{0,\,1}(F)$。因此，任意 $\alpha \in H^1(F,\mathbb{R})$ 都可以表示为和式 $\xi + \bar{\xi}$，其中 $\xi \in H^0(F,\Omega_F^1)$ 是一个闭全纯1形式。

假设 $L^{n-1}(\alpha) = 0$。那么存在一个 $(2n-2)$-形式 ϕ，使得：

$$(\omega_F + \eta + \bar{\eta})^{n-1} \wedge (\xi + \bar{\xi}) = d\phi$$

由此，我们得到 $(\omega_F + \eta + \bar{\eta})^{n-1} \wedge \xi \wedge \bar{\xi} = d\phi \wedge \bar{\xi} = d(\phi \wedge \bar{\xi})$。对两边积分，可得：

$$\int_F (\omega_F + \eta + \bar{\eta})^{n-1} \wedge (\sqrt{-1}\xi \wedge \bar{\xi}) = \sqrt{-1} \int_F d(\phi \wedge \bar{\xi}) = 0.$$

利用 ω_F 的正性，很容易验证左端大于 $\int_F \omega_F^{n-1} \wedge \sqrt{-1}\xi \wedge \bar{\xi}$，这意味着 ξ 的 L^2-范数（相对于 ω_F）等于 0。因此我们得出 $\xi = 0$，从而有 $\alpha = 0$。

□

设 (F, χ) 是任意一个辛流形。受 K¨ahler 情形的启发，我们定义：

$$H^2(F, \mathbb{R})_{\text{prim}} = \text{Ker}\left(L_{[\chi]}^{n-1} : H^2(F, \mathbb{R}) \to H^{2n}(F, \mathbb{R})\right).$$

那么很容易看出存在直和分解：

$$H^2(F, \mathbb{R}) = H^2(F, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\chi] \oplus H^2(F, \mathbb{R})_{\text{prim}}.$$

事实上，很容易验证 $\mathbb{R}[\chi] \cap H^2(F, \mathbb{R})_{\text{prim}} = \{0\}$，并且任意 $\alpha \in H^2(F, \mathbb{R})$ 都可分解为

$$\alpha = \left(\frac{[\chi]^{n-1} \cdot \alpha}{[\chi]^n}[\chi]\right) + \left(\alpha - \frac{[\chi]^{n-1} \cdot \alpha}{[\chi]^n}[\chi]\right) \in \mathbb{R}[\chi] + H^2(F, \mathbb{R})_{\text{prim}}.$$

因此，对于任意辛流形（参见[1]），我们在二次上同调中都有一个Lefschetz型分解。

命题 4.5. 设 $\pi : X \to B$ 是一个全纯下沉。假设在 X 上存在一个闭形式 Q，使得（$X_b, Q_b := Q|_{X_b}$）是一个Lefschetz 型辛流形。那么，任意 $x \in H^0(B, R^2\pi_*\mathbb{R})$ 都可以延拓为 $H^2(X, \mathbb{R})$ 中的一个整体上同调类。

证明。 根据第 2.1 节中的讨论，只需证明 $d_2 : E_2^{0,2} \to E_2^{2,1}$ 均为 $d_3 : E_3^{0,2} \to E_3^{3,0}$ 也均为 0。我们将调整Deligne方法，将其用于证明射影下沉的Leray 谱序列在 E_2 页退化到HS情形。

通过与 [21, 4.2.2]，中相同的论证， Q 由于是闭的，它诱导出一个局部系统的态射：

$$L := [Q] \cup : R^k\pi_*\mathbb{R} \to R^{k+2}\pi_*\mathbb{R}. \tag{21}$$

这在 $b \in B$处的茎上等于 $L_{[Q_b]} = [Q_b] \cup$。对于 $k = 1, 2$，我们有相对Lefschetz分解：

$$R^1\pi_*\mathbb{R} = (R^1\pi_*\mathbb{R})_{\text{prim}}, \quad R^2\pi_*\mathbb{R} = (L \cdot R^0\pi_*\mathbb{R}) \oplus (R^2\pi_*\mathbb{R})_{\text{prim}}$$

这诱导出分解：

$$H^0(B, R^2\pi_*\mathbb{R}) = L \cdot H^0(B, R^0\pi_*\mathbb{R}) \oplus H^0(B, (R^2\pi_*\mathbb{R})_{\text{prim}}).$$

由于$R^0\pi_*\mathbb{R} = \mathbb{R}$ 是一个常值局部系统， $L \cdot H^0(B, R^0\pi_*\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cdot [Q]$，因此很容易看出 d_2：$L \cdot H^0(B, R^0\pi_*\mathbb{R}) \to H^2(B, R^1\pi_*\mathbb{R})$等于0。因此，要证明 $d_2 = 0$,

只需证明 d_2 限制在 $H^0(B,(R^2\pi_*\mathbb{R})^{\text{prim}})$上等于0。考虑以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} H^0(B,(R^2\pi_*\mathbb{R})_{\text{prim}}) & \xrightarrow{L^{n-1}} & H^0(B,R^{2n}\pi_*\mathbb{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle d_2} & & \downarrow{\scriptstyle d_2} \\ H^2(B,R^1\pi_*\mathbb{R}) & \xrightarrow{L^{n-1}} & H^2(B,R^{2n-1}\pi_*\mathbb{R}) \end{array} \tag{22}$$

根据 $(R^2\pi_*\mathbb{R})^{\text{prim}}$ 的定义，顶行等于 0。根据假设，(X_b,Q_{X_b}) 属于 Lefschetz 型，因此底行是一个同构。所以我们看到，左侧的 d_2 确实等于 0。

使用类似的论证，我们可以轻易证明 $d_2: E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$ 也等于 0。因此得到 $E_3^{0,2} = E_2^{0,2}$ 和 $E_3^{3,0} = E_2^{3,0}$。然后，我们可以使用与上面相同的论证，证明 $d_3: E_3^{0,2} \to E_3^{3,0} = H^3(B,R^0\pi_*\mathbb{R})$ 也等于 0。例如，我们使用下面的交换图，得出 d_3 在 $E_3^{0,2} = H^0(B,(R^2\pi_*\mathbb{R})^{\text{prim}})$ 上的限制等于 0：

$$\begin{array}{ccc} H^0(B,(R^2\pi_*\mathbb{R})_{\text{prim}}) & \xrightarrow{L^n=0} & H^0(B,R^{2n}\pi_*\mathbb{R})\,. \\ \downarrow{\scriptstyle d_3} & & \downarrow{\scriptstyle d_3} \\ H^3(B,R^0\pi_*\mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{L^n} & H^2(B,R^{2n}\pi_*\mathbb{R}) \end{array} \tag{23}$$

□

命题的证明 *4.1*。 根据定理 1.2 和命题 4.5，我们知道条件 1 和条件 2 等价（在 Hermitian-辛假设下），并且众所周知，它们蕴含条件 3 和条件 4。

我们证明条件 3 蕴含条件 2。我们知道，$[Q] \in H^0(B,V^2)$ 是局部系统 $V^2 = R^2\pi_*\mathbb{R}$ 关于高斯 - 马宁联络的平坦截面。若 V^2 上相应的霍奇结构变分是极化的（条件 3），那么根据 2.3 中阐述的 Deligne 的霍奇理论，$[Q]$ 的 (1, 1) 分量也是平坦的，因此$[Q]^{1,1} \in H^0(B,V^2)$。根据命题 4.2，我们知道 $[Q]^{1,1}$ 在每个纤维上的限制都是 K¨ahler 上同调类。但这恰好就是条件 2。

最后，我们证明条件 4 蕴含定理 1.1 的（条件 I）。如果 X 满足$^-\partial\partial$-引理，那么根据 [5] X 的著名结果，[5] X 具有霍奇分解，且限制态射 f_b^*: $H^2(X,\mathbb{R}) \to H^2(X_b,\mathbb{R})$ 是霍奇结构的态射。设 $[Q]^{1,1}$ 是 $[Q]$ 在 $H^2(X,\mathbb{C})$ 的霍奇分解中的 (1, 1)-分量。那么$[Q]^{1,1}$ 可由一个闭的 (1, 1)-形式表示，并且其限制成为 $[Q|_{X_b}] \in H^2(X_b,\mathbb{R})$ 的 (1, 1)-分量。根据命题 4.1，$[Q]^{1,1}$ 是 K¨ahler。因此，根据定理 1.1（或者更简单地，根据注 3.2），我们可以在整体空间 X 上构造一个 K¨ahler 形式。

□

定理的证明*1.3*。假设 Q 是 X上的厄米-辛形式。

在情形 1 中，我们知道 Kodaira-Spencer 类为 0。因此，由公式 (16) 可知 $\theta = 0 = \theta$ 在 (15) 中高斯-马宁联络的分解中。因此，高斯-马宁联络保持分解 $\mathcal{E}^0(B,V^2) = \mathcal{E}^0(B,V^2)^{2,0} \oplus \mathcal{E}^0(B,V^2)^{1,1} \oplus \mathcal{E}^0(B,V^2)^{0,2}$。所以，平坦截面 $[Q]$ 的 (1, 1) 分量也是平坦的。由命题 4.2 可知，$[Q]^{1,1}$ 在每个纤维上限制为 Kähler 类。因此，由命题 4.1 得出结论。

在情形 2 中， $V^1_{\mathbb{C}} = R^1\pi_*\mathbb{R}_{\mathbb{C}} = H^{1,\,0} \oplus H^{0,\,1}$ 存在自然极化。事实上，对于任意 $b \in X_b$, $\xi, \eta \in H^{1,\,0}(X_b)$，定义：

$$\langle \xi, \bar{\eta} \rangle = \sqrt{-1} \int_{X_b} \xi \wedge \bar{\eta} \wedge Q^{n-1}.$$

那么，由于 Q是闭的，且 $Q^{1,\,1}$ 是正定的，很容易看出它在 $V^1_{\mathbb{C}}$上定义了一个极化，并且还在 $V^2 = \wedge^2 V^1$上诱导出一个极化。因此，由命题4.1即可得出结论。

在情形 3 和情形 4 中，我们知道， 的 (1,1) 分量满足命题 4.1的条件 2。我们还指出，$H^{2,\,0}(X_b)$ 的维数不依赖于 $b \in B$ ，这是因为 K¨ahler 流形的霍奇数在变形下保持不变（见 [21, 命题 9.20，vI.9.3。2]）。

□

我们以简要讨论一个自然问题作为本文的结尾。该问题源于与 Weiyi Zhang 的交流。

问题：将本文的主要结果推广到更一般的全纯映射。事实上，对于高维情形下的椭圆纤维化（具有奇异纤维），Nakayama 基于对这类结构的细致研究，导出了类似的 K¨ahler 判据（见 [15, 16]）。另一方面，Gompf 已将 Thurston 对辛结构的构造推广到 Lefschetz 铅笔的情形（见 [12]）。相应地，我们预期，Zucker 对 Deligne 在 [23] 中结果的推广，以及对 Lefschetz 铅笔奇异纤维附近情形的仔细处理，将导出本文中 K¨ahler 判据的推广。

参考文献

[1] D. Angella、A. Tomassini，辛流形与上同调分解，《J. Symplectic Geometry》12，第2期（2014），215–236。[2] A. Blanchard，《关于复解析簇》，《Ann. Sci. ´École Norm. Sup.》73（1956），157–202。[3] I. Chiose，紧复流形上K¨ahler结构存在性的障碍，《Proc. Amer. Math. Soc.》142（2014），第10期，3561–3568。[4] P. Deligne，Lefschetz定理与谱序列退化判据，《Publ. Math. I.H.E.S.》，第35卷（1968），107–126页。[5] P. Deligne、P. Griffiths、J. Morgan和D. Sullivan，K¨ahler流形的实同伦论，《Invent. Math.》29（1975），245–275。[6] J.-P. Demailly、M. Paun，紧K¨ahler流形的K¨ahler锥的数值刻画，《Ann. of Math.》（2）159（3）（2004），1247–1274。[7] S. Dinew、D. Popovici，Hermitian-Symplectic度量的Aeppli上同调类的广义体积不变量，arXiv:2007.10647，即将发表于《Advances in Mathematics》。[8] N. Enrietti、A. Fino、L. Vezzoni，驯服辛形式与强K¨ahler挠率度量，《J. Symplectic Geom.》10，第2期（2012），203–223。

[9] W. Fischer、H. Grauert，紧复流形的局部平凡族。载于：《Nachr. Akad. Wiss. G¨ottingen Math.-Phys. Kl. II》1965年第6期（1965），89–94。[10] Y. F´elix、J. Oprea和D. Tanr´é，《几何中的代数模型》，《Oxford Graduate Texts in Mathematics》第17卷，牛津大学出版社，牛津，2008。[11] P. Griffiths、J. Harris，《代数几何原理》。Wiley-Interscience（1978）。[12] R. Gompf，局部全纯映射导出辛结构，《Comm. Anal. Geom.》13（2005），第3期，511–525。[13] R. Harvey和H. B. Lawson，K¨ahler流形的内在刻画，《Invent. Math.》74（1983），169–98。[14] T.-J. Li和W. Zhang，比较驯服辛锥与相容辛锥以及几乎复流形的上同调性质，《Comm. Anal. Geom.》17（4）（2009），651–683。[15] N. Nakayama，其万有覆盖空间双全纯于的射影代数簇。《J. Math. Soc. Japan》51（3）：643–654，1999。 $\mathbb{C}^n$N. Nakayama，其万有覆盖空间双全纯于的紧K[16]ähler流形。可访问 http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/index.html获取预印本，第1230号（1999）。[17] T. Peternell，紧复流形的代数性判据，《Math. Ann.》275（1986），第4期，653–672。[18] J. Streets、G. Tian，多重闭度量的抛物流，《Int. Math. Res. Notices》16（2010），3101–3133。[19] W. Thurston，辛流形的一些简单例子，《Proc. Amer. Math. Soc.》55（1976），467–468。[20] M. Verbitsky，扭量空间上的有理曲线与特殊度量，《《几何与拓扑》》18（2014），897–909。[21] C. Voisin，《霍奇理论与复代数几何》，第一、二卷。《Cambridge Stud. Adv. Math.》76（2002）。[22] Y. Ye，多重闭流与厄米-辛结构，arXiv:2207.12643。[23] S. Zucker，具有退化系数的霍奇理论：Poincaré度量中的 L^2-上同调，《Ann of Math.》（2）109（1979），415–476。

罗格斯大学数学系，皮斯卡塔韦，新泽西州 08854-8019。电子邮箱：chi.li@rutgers.edu