arXiv:2302.07332v1 [cs.LO] 14 Feb 2023

从ATL 到 STIT 理论

Aldo Iván Ramírez Abarca

1 ATL 语法与语义

Alur等人在一系列论文中提出了该逻辑（例如，参见 Alur等人，1997年、2002））。交替时间时序逻辑被视为所谓 CTL 的扩展。CTL 是一种分支时间时序逻辑，包含两个模态算子，用于对路径集合进行量化——路径是状态序列，其中每个元素都会迁移到下一个元素——借此使用涉及这些路径全称量化和存在量化的公式，来推理系统中计算的属性。基于这些思想，交替时间时序逻辑被引入，用于推理此类迁移系统上的策略。其核心问题是，如何形式化描述一个智能体联盟何时能够选择并执行一项策略——这里的策略指一组可选的迁移序列，这些序列因所涉及的路径而有所不同——从而保证 φ 在属于该策略的所有路径（或计算）的特定状态上发生。该逻辑的形式化定义如下。

定义 1.1（ ATL的语法）。 给定一个有限的智能体名称集合 Ags 和一个可数的命题集合P，形式语言 $\mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$ 的文法如下:

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle\langle C\rangle\rangle X\varphi \mid \langle\langle C\rangle\rangle \mathsf{G}\varphi \mid \langle\langle C\rangle\rangle \varphi \mathsf{U}\psi,$$

其中 $p \in P$ 且 $C \subseteq Ags$。

$[C]\varphi$——其中 φ 是形如 $X\psi$、$\mathsf{G}\psi$ 或 $\psi \mathsf{U}\theta$的时序逻辑公式——意在表达联盟C 具有确保 φ 成立的能力，而不论 $Ags - C$ 中的智能体能做什么。在这一设定中，$X\psi$ 意在表达 ψ 在下一个状态成立，$\mathsf{G}\psi$ 意在表达 ψ 从此以后一直成立（在当前状态以及给定计算路径上的所有状态中），而 $\psi \mathsf{U}\theta$ 意在表达 θ将在给定计算路径上的某个未来状态成立，并且在此之前，该计算路径经过的状态都满足 φ 。

至于语义， $\mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$ 的公式通常使用交替时序结构（ATS）或并发博弈结构（CGS）进行求值。Goranko和Jamroga（2004年）证明，ATS与CGS是等价的，即该逻辑在这两类结构上的表现相同。这里，我将使用CGS介绍 ATL 。

定义 1.2（并发博弈结构（CGS））。 元组 $\mathcal{S} := \langle W, Ags, Act, \delta, \mathcal{V}\rangle$ 是并发博弈结构（CGS），当且仅当

- W 是一个有限的状态集合。

  W 中所有元素构成的无限序列集合记作 W^{∞}。该集合中的元素称为路径或计算。W 中所有元素构成的有限序列集合记作 W^{+}。 W^{+} 中的元素是计算的有限前缀，记作 $\lambda = w_1, \ldots, w_k$，其中 $k \in \in$ N。

  对于给定的 $\lambda \in W^{+}$，我将 λ 的长度函数记作 $len(\lambda)$。对于 $1 \leq i \leq len(\lambda)$， $\lambda(i)$ 表示序列 λ 中的第 i^{th} 个元素，而 $\lambda[1, i]$ 表示 λ 中截至第 i^{th} 个元素的初始片段。
- Act 是一个函数，它为每个智能体 $\alpha \in Ags$ 和状态 $w \in W$ 指定一个有限的非空行动标签集合 Act^{w}_{α}，其形式为 $\{s_{\alpha,w}, s'_{\alpha,w}, s''_{\alpha,w}, \ldots\}$。 Act^{w}_{α} 表示在 w 状态下α 可用的行动集合。

  对于联盟 $C \subseteq Ags$和 $w \in W$，集合 $Act^{w}_{C} := \Pi_{\alpha \in C} Act^{w}_{\alpha}$被解释为 C 在 w可执行的联合行动集合。该集合中的元素将表示为 $\mathsf{s}_{C,\ w} = \langle s_{\alpha,\ w}\rangle_{\alpha \in C}$，而 s_{α}

将作为 $s^{\{\alpha\}}$的简写。集合 $Act_{Ags} := \bigcup_{w \in W} Act^w_{Ags}$ 称为关于 $\mathcal{S}$的行动组合集合。对于 $s \in Act_{Ags}$，s 沿索引 α 的投影记作 $(s)_\alpha$。

- δ： $W \times Act_{Ags} \to W$ 是一个函数，称为转移函数，它将每个状态和行动组合映射到一个唯一的状态。对于 $w \in W$ 和联合动作 $s_{C,\ w}$（其中 $C \subseteq Ags$），集合$\{v \in W;\ v = \delta(w, s_{Ags,\ w})$ 对某个 $s_{Ags,\ w} \in Act^w_{Ags}$ s. t. $(s_{Ags,\ w})_\alpha = (s_{C,\ w})_\alpha$ 对每个 $\alpha \in C\}$ 都成立，记作 $\delta[w, s_{C,\ w}]$，并称为联合动作 $s_{C,\ w}$ 在 w处可能的后继状态集合。

  注意，对于每个 $w \in W$ 和行动组合 $s_{Ags,\ w}$，$\delta[w, s_{Ags,\ w}]$ 都是一个单元素集合，记作 $w^{+s_{Ags,\ w}}$。

- $\mathcal{V}$： $P \to 2^W$ 是一个赋值函数。

为了 pr　　为了给出 $\mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$ 上 CGS 的公式语义，还需要进一步的定义　　.

定义 1.3（ATL中的策略）。对于给定的智能体 α，α 在 $\mathcal{S}$上的策略 是一个函数 f_α: $W^+ \to \bigcup_{w \in W} Act^w_\alpha$，它为每个形如 $\lambda = w_1$、.....、w_k的有限序列指定 $Act^{w_k}_\alpha$中的一个元素。α 在 $\mathcal{S}$ 上的所有策略 的集合记为 $Strat_\alpha$。对于联盟 $C \subseteq Ags$，C 在 $\mathcal{S}$上的集体策略 定义为如下形式的元组：$f_C := \langle f_\alpha \rangle_{\alpha \in C}$（其中，对于每个 $\alpha \in C$，f_α 都是 α 在 $\mathcal{S}$ 上的一个策略）。在 $\mathcal{S}$ 上的所有策略 的集合记为 $Strat_C$。

对于 $\lambda \in W^+$和集体策略 f_C，由 $\langle f_\alpha(\lambda) \rangle_{\alpha \in C}$给出的联合动作记为 $f_C(\lambda)$。从 w出发的集体策略 f_C的结果 — $out(w, f_C)$—定义如下：

$$out(w, f_C) := \left\{ \mu \in W^\infty;\ \begin{array}{l} \mu(1) = w, \\ \mu(i+1) \in \delta[\mu(i), f_C(\mu[1,i])] \text{ for every } i \in \mathbb{N} - \{0\} \end{array} \right\}.$$

对于 $w \in W$、$f_C \in Strat_C$ 和 $\mu \in out(w, f_C)$，我将集合 $\{\mu[1,i];\ i \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ 记为 μ^{fin}。注意，对于每个 $f_{Ags} \in Strat_{Ags}$，$out(w, f_{Ags})$ 都是一个单元素集合。

定义 1.4（ATL 的求值规则）。设 $\mathcal{S}$ 是一个 CGS。$\mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$ 的公式在 $\mathcal{S}$ 上的语义由以下真值条件递归定义，并在状态 w 处求值：

$\mathcal{S}, w \models p$ 当且仅当 $w \in \mathcal{V}(p)\mathcal{S}, w \models \neg\varphi$ 当且仅当 $\mathcal{S}, w \not\models \varphi\mathcal{S}, w \models \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $\mathcal{S}, w \models \varphi$ 且 $\mathcal{S}, w \models \psi\mathcal{S}, w \models \langle\langle C \rangle\rangle X\varphi$ 当且仅当存在 f_C 使得 $\mathcal{S}, \lambda$ (2) $\models \varphi$ 对每个 $\lambda \in out(w, f_C)$ 都成立$\mathcal{S}, w \models \langle\langle C \rangle\rangle \mathsf{G}\varphi$ 当且仅当存在 f_C 使得 $\mathcal{S}, \lambda(i) \models \varphi$ 对每个 $\lambda \in out(w, f_C)$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}\mathcal{S}, w \models \langle\langle C \rangle\rangle \varphi \mathsf{U} \psi$ 当且仅当存在 f_C 使得，对于每个 $\lambda \in out(w, f_C)$，都存在$j \in \mathbb{N} - \{0\}$ 使得 $\mathcal{S}, \lambda(j) \models \psi$ 且 $\mathcal{S}, \lambda(i) \models \varphi$ 对每个 $1 \leq j < i$. 都成立

因此，CGS 与联盟逻辑的博弈模型非常相似（Pauly，2002）。本质上，CGS不过是还定义了路径——或计算——以及联盟策略的博弈模型。因此，对路径和策略进行量化，是 $\mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$公式语义的基础。与联盟逻辑的情况一样，$\mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$ 公式的语义对于原子命题以及由布尔联结词构成的公式而言都是标准的。新引入的模态由形如 $\langle\langle C \rangle\rangle \varphi$的公式给出，其中 φ 表示线性时序逻辑的三种模态之一（$X\psi$、$\mathsf{G}\psi$或 $\psi\mathsf{U}\theta$）。$\langle\langle C \rangle\rangle \varphi$ 的语义解释如下：在状态 w，联盟 C 能够确保 φ 成立——也就是在线性时序逻辑模态 φ 所指示的那些状态成立——当且仅当对于 C 的每个成员，都存在一个策略，使得由这些个体策略构成的策略组合所对应的结果集中，每个计算都在所述状态满足 ψ（θ）。

2 将 ATL 嵌入 STIT 理论

Broersen等人（2006）探讨了 ATL 与STIT理论之间的形式关系，并提出了将 ATL 嵌入STIT理论所需的核心思想。由于文献中缺少这种嵌入的细节，我决定在此补充这些细节，从而一劳永逸地解决并发博弈结构与带标签的bdt模型之间的若干问题；后者用于具有策略能力的群体*xstit*理论。下面从形式定义开始。

定义2.1。给定一个有限的智能体名称集合 Ags 和一个可数的命题集合 P，满足 $p \in P$和 $C \subseteq Ags$，形式语言 $\mathcal{L}_{\mathtt{SX}}$ 的语法如下：

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid X\varphi \mid \mathtt{G}\varphi \mid \varphi \mathtt{U} \psi \mid \Box\varphi \mid [C]\varphi \mid \langle\langle C\rangle\rangle^s \varphi.$$

$X\varphi$表示“φ 在下一个时刻（沿同一历史）成立”。Gφ 表示“φ 现在成立，并且在所有未来时刻（沿同一历史）都成立”。 φUψ 表示“φ 成立，直到 ψ 成立”。 $\Box\varphi$ 用于表达 φ 的“历史必然性”（$\Diamond\varphi$ 是 $\neg\Box\neg\varphi$的缩写）。 $[C]\varphi$ 表示“联盟 C 确保 φ成立”。$\langle\langle C\rangle\rangle^s\varphi$ 用于表达“联盟 C 具有策略能力，无论 $Ags - C$ 中的智能体能做什么，都能确保 φ 成立”。

至于语义， $\mathcal{L}_{\mathtt{SX}}$ 的公式将通过我称为带标记bdt模型的结构进行评估：

定义 2.2（带标记的bdt模型）。 $\mathcal{M} := \langle M, \sqsubset, Ags,$ 选择 $Tps, Lbl, Exe, \mathcal{V}\rangle$ 称为带标记的bdt模型，当且仅当

- M 是一个非空的时刻集合， $\sqsubset$ 是定义在 M 上的严格偏序，并满足无向后分支：对于所有满足 $m' \sqsubset m$和 $m'' \sqsubset m$的 $m, m', m'' \in M$， $m' = m''$或 $m' \sqsubset m''$或$m'' \sqsubset m'$成立。每个极大 $\sqsubset$-链称为一段历史，所有历史组成的集合记为 H。对于$m \in M$, $H_m := \{h \in H;\ m \in h\}$。满足 $m \in M$, $h \in H$和 $m \in h$的元组 $\langle m, h\rangle$ 称为指标，指标集合记为 $I(M \times H)$。

  这些结构被称为“离散时间”，因为（$M, \sqsubset$）还必须满足以下要求：

  – (TD) 时间离散性：对于所有 $m \in M$和 $h \in H_m$，都存在唯一的时刻 m^{+h}，使得$m \sqsubset m^{+h}$ 且对于每个满足 $m \sqsubset m'$的 $m' \in h$，都有 $m^{+h} \sqsubseteq m'$。对于 $m \in M$ 和 $h \in H_m$， m^{+h} 称为 m沿着 h 的后继。对于一个指标 $\langle m$，我将 $\langle m^{+h}, h\rangle$ 称为$\langle m, h\rangle$的后继。对于 $m \in M$ 和 $h \in H_m$，时刻 m^{+h} 也记作 $m^{+h(1)}$，时刻$\left(m^{+h}\right)^{+h}$ 也记作 $m^{+h(2)}$，因此，对于每个 $i \in \mathbb{N} - \{0\}$， $m^{+h(i)}$ 表示 h 中对 m应用后继函数 i^{th} 次迭代后得到的唯一时刻。为保持一致， $m^{+h(0)}$ 也表示 m。

  Ags 是定义2.1中的有限智能体名称集合。

- 选择是一个函数，它将每个智能体 α 和时刻 m 映射到 H_m的一个划分 Choice^m_α，其中该划分的单元表示 α在 m可选的行动。对于 $m \in M$ 和 $h \in H_m$， $\text{Choice}^m_\alpha(h)$表示包含 h的单元。该单元表示 α 在索引 $\langle m, h\rangle$处执行的行动选择，我将其称为 α在 $\langle m, h\rangle$处的当前行动选择。Choice满足两个条件：

  – (NC) 未分化历史之间无选择：对于所有的 $\alpha \in Ags$和 $h, h' \in H_m$，如果 $m' \in h \cap h'$对某个 $m' \sqsupset m$成立，那么对于每个 $L \in \text{Choice}^m_\alpha$， $h \in L$ 当且仅当 $h' \in L$。– (IA) 行动者独立性：函数 s： $Ags \to 2^{H_m}$ 称为位于 m 的选择函数，当它为每个 α 分配一个 Choice^m_α 的成员时。如果 Select^m 表示位于m的所有选择函数的集合，那么对于所有 $m \in M$和 $s \in \text{Select}^m$， $\bigcap_{\alpha \in Ags} s(\alpha)$ $\neq \emptyset$。这一条件确立了不同智能体的并发行动必须彼此独立：某个智能体的行动选择不能影响其他智能体可用的选择（关于这一性质的讨论，见 Belnap等人，2001年；Horty 和 Belnap，1995年）。

- Tps 是一个动作类型集合。对于 $\alpha \in Ags$ 和 $m \in M$， Tps_α^m 表示在 m 时 α 可用的动作类型集合。

- Lbl 是一个将动作标记映射到动作类型的标签函数：对于 $\alpha \in Ags$， $m \in M$ 和 $L \in$ 选择$_\alpha^m$，$Lbl(L) \in Tps$。对于 $\alpha \in Ags$， Lbl_α 将表示一个函数，该函数把索引映射到 α 在该索引处执行的动作标记的动作标签。换言之，对于索引 $\langle m, h\rangle$， $Lbl_\alpha(\langle m, h\rangle) =$ $Lbl($选择$_\alpha^m(h))$。

- Exe 是一个部分执行函数，它将每种动作类型 $\tau \in Tps$， $m \in M$ 和 $\alpha \in Ags$ 映射到一个特定的动作标记 $Exe_\alpha^m(\tau) \in$ 选择$_\alpha^m$。Lbl 和 Exe 满足以下条件：$-$(EL) 对每个 $\alpha \in Ags$ 和索引 $\langle m, h\rangle$， $Exe_\alpha^m(Lbl_\alpha(\langle m, h\rangle)) =$ 选择$_\alpha^m(h)$。$-$(LE) 对每个 $\alpha \in Ags$， $m \in M$ 和 $\tau \in Tps$，如果 $Exe_\alpha^m(\tau)$ 有定义，那么 $Lbl_\alpha(Exe_\alpha^m(\tau)) = \tau$.

- $\mathcal{V}$： $P \to 2^{M\times H}$ 是一个赋值函数，它为每个原子命题分配一组指标。

带标记的 bdt-模型如果满足以下条件，则称为确定性的：对于每个 $m \in M$ 和 $h \in H_m$，若 $h' \in$ 选择$_{Ags}^m(h)$，则 $m^{+h} = m^{+h'}$。

为了给出相对于带标记 bdt-框架的 $\mathcal{L}_{\mathsf{SX}}$ 公式的语义，还需要一些定义。

定义 2.3 (STIT 理论中的群组策略)。设 $\mathcal{M}$ 是一个带标记的 bdt-模型，其时刻集合为 M。

- 对于联盟 $C \subseteq Ags$， $m \in M$ 和 $h \in H_m$，集合 $\bigcap_{\alpha\in C}$ 选择$_\alpha^m(h)$ 记作 $\mathsf{Choice}_C^m(h)$，因此集合 $\mathsf{Choice}_C^m := \{\mathsf{Choice}_{Ags}^m(h); h \in H_m\}$ 可解释为联盟 C 在 m 可用的动作划分。

- 对于 $\alpha \in Ags$ 和 $m \in M$，以 m 为起点的策略 α 定义为函数 $\sigma : \sqsubseteq [m] \to \bigcup_{m'\in\sqsubseteq[m]}$ 选择$_\alpha^{m'}$，其中 $\sqsubseteq [m] := \{m' \in M;\ m \sqsubseteq m'\}$。对于每个联盟 $C \subseteq Ags$，以 m 为起点的集体策略 C 定义为如下形式的元组 $\sigma_C := \langle\sigma_\alpha\rangle_{\alpha\in C}$（其中，对于每个 $\alpha \in C$， σ_α 都是 α 从 m 开始的策略）。我将用 $\sigma_C(m')$ 表示交集 $\bigcap_{\alpha\in C}(\sigma_C)_\alpha(m')$，它是选择$_C^{m'}$ 中的一个元素。

- 对于 $C \subseteq Ags$、 $m \in M$ 以及以 m 为起点的集体策略 σ_C，集合

$$\mathbf{Adm}_C^m(\sigma_C) := \left\{ h' \in H_m;\ \begin{array}{l} h' \in \sigma_C\left(m^{+h'(i)}\right) \\ \text{for every } i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

称为 σ_C 的可容许历史集合。

带标签的 bdt 模型使我们能够为 $\mathcal{L}_{\mathsf{SX}}$ 中的公式提供语义：

定义2.4（求值规则）。设带标签的 bdt 模型为 $\mathcal{M}$。$\mathcal{M}$ 上 $\mathcal{L}_{\mathsf{SX}}$ 中公式的语义由以下真值条件递归定义，并在给定的指标 $\langle m、 h\rangle$ 处求值：

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models p & \text{iff} & \langle m,h\rangle \in \mathcal{V}(p) \\
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models \neg\varphi & \text{iff} & \mathcal{M},\langle m,h\rangle \not\models \varphi \\
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models \varphi\wedge\psi & \text{iff} & \mathcal{M},\langle m,h\rangle \models \varphi \text{ and } \mathcal{M},\langle m,h\rangle \models \psi \\
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models X\varphi & \text{iff} & \mathcal{M},\langle m^{+h},h\rangle \models \varphi \\
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models \mathsf{G}\varphi & \text{iff} & \mathcal{M},\langle m^{+h(i)},h\rangle \models \varphi \text{ for every } i \in \mathbb{N} \\
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models \varphi\mathsf{U}\psi & \text{iff} & \textit{there is } j \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \mathcal{M},\langle m^{+h(j)},h\rangle \models \psi \text{ and} \\
 & & \mathcal{M},\langle m^{+h(i)},h\rangle \models \varphi \text{ for every } 0 \le i < j \\
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models [C]\varphi & \text{iff} & \text{for all } h' \in \mathbf{Choice}_C^m(h), \mathcal{M},\langle m,h'\rangle \models \varphi \\
\mathcal{M},\langle m,h\rangle \models \langle\langle C\rangle\rangle^s\varphi & \text{iff} & \text{there is a collective strategy } \sigma_C \text{ starting at } m \\
 & & \text{s.t. } \mathcal{M},\langle m,h'\rangle \models \varphi \text{ for every } h' \in \mathbf{Adm}_C^m(\sigma_C).
\end{array}$$

可满足性、框架上的有效性和一般有效性均按通常方式定义。

通往 p 的路径　为证明一个对应结果，我们定义与某个 CGS 相关联的带标记bdt框架　　.

定义 2.5（与 CGS 关联的（标记）bdt框架）。设 $\mathcal{S} = \langle W, Ags, Act, \delta, \mathcal{V}\rangle$ 为一个 CGS。结构 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}} = \langle M^{\mathcal{S}}, \sqsubset, Ags,$ 选择 $Tps, Lbl, Exe, \mathcal{V}^{\mathcal{S}}\rangle$ 定义如下：

- 对于每个 $w \in W$，令 $out(w) := \bigcup_{f_{Ags} \in Strat_{Ags}} out(w, f_{Ags})^{fin}$。
  我们令 $M^{\mathcal{S}} = \bigcup_{w \in W} out(w)$。注意，根据定义，这是一个不相交并。
  这意味着， $M^{\mathcal{S}}$中的每个时刻都是一个有限序列 $\lambda \in W^{+}$，满足 $\lambda(1) = w$对于某个$w \in W$，并且 $\lambda(i+1) = \lambda(i)^{+f_{Ags}(\lambda[1,i])}$对于每个 $1 \leq i < len(\lambda)$都成立——这里对应某个特定的集体策略 $f_{Ags} \in Strat_{Ags}$。回想一下， $f_{Ags}(\lambda[1,i]) = \langle f_{\alpha}(\lambda[1,i])\rangle_{\alpha \in Ags}$ 是 $Act_{Ags}^{\lambda(i)}$ 中的一个行动组合。
- $\sqsubset$ 在 $M^{\mathcal{S}}$ 上的定义规则如下：
  $\lambda \sqsubset \lambda'$ 当且仅当 $len(\lambda) < len(\lambda')$且 $\lambda'[1, len(\lambda)] = \lambda$（即，对于所有 $1 \leq i \leq len(\lambda)$， $\lambda'(i) = \lambda(i)$）。
  历史集合 $H \subseteq 2^{M}$的定义与通常相同：每个历史都是一个极大线性有序时刻集合。注意，对每个 $h \in H$， h都与集合 $out(w, f_{Ags})^{fin}$相重合，其中 f_{Ags}满足这一点；并且，对于每个 $f'_{Ags} \in Strat_{Ags}$，只要 $f'_{Ags}(\lambda) = f_{Ags}(\lambda)$对每个 $\lambda \in h$都成立， $h = out\left(w, f'_{Ags}\right)^{fin}$就成立。[1] 因此，每个 $h \in H$ 都对应于一个由$\{f_{Ags}(\lambda)\}_{\lambda \in h}$给出的行动组合序列。

  因此请注意，每个 $\mathcal{S}$ 的状态 w 都对应于一棵展开树，由元组$\langle out(w) \sqsubset\rangle$给出。若令 λ_w 为序列 "w"（其中 $len(\lambda_w) = 1$ 且 $\lambda_w(1) = w$），则显然有 $H_{\lambda_w} = \{h \in H; min(h) = \lambda_w\}$。此外，我们有 $H = \bigcup_{w \in W} H_{\lambda_w}$（此处为不相交并）。因此， H 中的每个历史 h 都有一个（唯一的）根时刻，记作$min(h)$。

  对于 $h \in H$，我将由 $seq(h)$ 表示由 h 的元素给出的无限序列 。因此，对每个$h \in H$，都有 $seq(h) = out\left(w, f^{h}_{Ags}\right)$。
  对于每个 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$（其中 $\lambda(1) = w$）以及每个历史 $h \in H_{\lambda}$（这意味着 $min(h) = \lambda_w$），都存在唯一的 λ'，称为 λ沿 h的后继，使得 $\lambda \sqsubset \lambda'$，并且对每个满足$\lambda \sqsubset \lambda''$的 λ''，都有 $\lambda' \sqsubseteq \lambda''$。这一性质的证明（我称之为时间离散性 ）见下文命题 2.6 证明的第一项。对于每个 λ 和每个历史 $h \in H_{\lambda}$，我将 λ沿 h 的后继记为 λ^{+h}。

  对于每段历史 $h \in H$（其中 $h = out(w, f^{h}_{Ags})^{fin}$和 $min(h) = \lambda_w$），与 h 相关联的唯一动作配置序列因此可按如下方式排列：
  $f^{h}_{Ags}(\lambda_w)\ f^{h}_{Ags}\left((\lambda_w)^{+h}\right), f^{h}_{Ags}\left(\left((\lambda_w)^{+h}\right)^{+h}\right)\ldots$。对于每段历史 $h \in H$，与之相关联的行动组合序列今后也将记作 $\mathsf{s}^{h}_{1}, \mathsf{s}^{h}_{2}, \mathsf{s}^{h}_{3}, \ldots$。请注意， $\mathsf{s}^{h}_{1} \in Act^{w}_{Ags}, \mathsf{s}^{h}_{2} \in Act^{w^{+\mathsf{s}^{h}_{1}}}_{Ags}, \mathsf{s}^{h}_{3} \in Act^{(w^{+\mathsf{s}^{h}_{1}})^{+\mathsf{s}^{h}_{2}}}_{Ags}$ 等情况成立，并且对于每个 $\lambda \in h$， $f^{h}_{Ags}(\lambda) = \mathsf{s}^{h}_{len(\lambda)}$，因此 $\lambda^{+h}\left(len\left(\lambda^{+h}\right)\right) = \lambda(len(\lambda))^{+\mathsf{s}^{h}_{len(\lambda)}}$.[2]

---

[1]我们来证明，对于每个 $h \in H$, $h = out\left(w, f_{Ags}\right)^{fin}$，存在某个 $w \in W$和 $f_{Ags} \in Strat_{Ags}$。令 $h \in H$。首先注意，根据 $\sqsubset$的定义，对于每个 $i \in \mathbb{N} - \{0\}$，恰好存在一个时刻 $\lambda_i \in h$，使得$len(\lambda_i) = i$。此外，对于每个 $i \in \mathbb{N} - \{0\}$，根据 $M^{\mathcal{S}}$的定义，存在某个 $h^{\lambda_i}_{Ags} \in Strat_{Ags}$，使得 $\lambda_i \in out\left(\lambda_1(len(\lambda_1))\ h^{\lambda_i}_{Ags}\right)^{fin}$。我们按照以下规则在 W^{+} 上定义一个集体策略 f^{h}_{Ags}：对于每个 $i \in \mathbb{N} - \{0\}$，令$f^{h}_{Ags}(\lambda_i) = h^{\lambda_{i+1}}_{Ags}(\lambda_i)$；对于其他所有序列 $\lambda \in W^{+}$，令 $f^{h}_{Ags}(\lambda)$为 $Act^{\lambda(len(\lambda))}_{Ags}$ 中的任意一个集体策略。利用序列长度进行归纳，可以很容易地证明 $h = out\left(\lambda_1(len(\lambda_1))\ f^{h}_{Ags}\right)^{fin}$。

[2]请注意，对于 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$，划分 $\mathsf{Choice}^{\lambda}_{Ags}$ 与 $Act^{\lambda(len(\lambda))}_{Ags}$ 一一对应（对于 $h, h' \in H_{\lambda}$， $\mathsf{s}^{h}_{len(\lambda)} = \mathsf{s}^{h'}_{len(\lambda)}$ 当且仅当 $\mathsf{Choice}_{Ags}(h) = \mathsf{Choice}_{Ags}(h')$）。此外， $\mathsf{s}^{h}_{len(\lambda)} = \mathsf{s}^{h'}_{len(\lambda)}$ 当且仅当 $\lambda^{+h} = \lambda^{+h'}$。这一特性源于这样一个事实：在 $\mathcal{S}$ 中，每个行动组合都对应唯一的后继状态，正如转移函数 δ 的定义所示。

• 请回想， $\lambda(len(\lambda))$ 是序列 λ 中的最后一个状态，并且 $\delta[w, \mathsf{s}_\alpha]$ 定义为执行 α 的行动 s_α 后可能产生的所有可能后继状态的集合。选择按以下规则定义。对于 $\alpha \in Ags$ 和 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$，我们设

$$\mathbf{Choice}_\alpha^\lambda(h) := \left\{h' \in H; \lambda^{+h'}\left(len\left(\lambda^{+h'}\right)\right) \in \delta\left[\lambda\left(len\left(\lambda\right)\right), \left(\mathsf{s}^h_{len(\lambda)}\right)_\alpha\right]\right\}.$$

注意到，该定义意味着： $h' \in$ 选择$_\alpha^\lambda(h)$ 当且仅当 $\left(\mathsf{s}^h_{len(\lambda)}\right)_\alpha = \left(\mathsf{s}^{h'}_{len\ (\lambda)}\right)_\alpha$。

• Tps 定义为集合 $\bigcup_{\alpha \in Ags,\ w \in W} Act^w_\alpha$，满足对于 $\alpha \in Ags$ 和 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$， $Tps^\lambda_\alpha = Act^{\lambda\ (len\ (\lambda)\ )\ \alpha}$。

• Lbl 定义如下。对于 $\alpha \in Ags$、 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$ 和 $L \in$, $^\lambda_\alpha Lbl(L) = \left(\mathsf{s}^h_{len\ (\lambda)}\right)_\alpha$，其中 h 是 L中的任意历史。

注意到，该定义与上述选择的定义一起意味着： $h' \in$ 选择$_\alpha^\lambda(h)$ 当且仅当 $Lbl\left(\text{选择}^\lambda_\alpha(h')\right) = Lbl\left(\text{选择}^\lambda_\alpha(h)\right)$。

• Exe 定义如下。对于满足 $\tau \in Tps^\lambda_\alpha$（这意味着 $\tau = s_\alpha$、$\lambda(len(\lambda))$ 对某个行动标签 s_α、$\lambda(len(\lambda)) \in Act^\lambda(len(\lambda))_\alpha$ ）的 $\alpha \in Ags$、 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$ 和 $\tau \in Tps$， $Exe^\lambda_\alpha(\tau) = \left\{h \in H_\lambda;\ \left(\mathsf{s}^h_{len(\lambda)}\right)_\alpha = s_\alpha,\ \lambda(len(\lambda))\right\}$。等价地，用上文定义的标记函数表示，$Exe^\lambda_\alpha(\tau) = \left\{h \in H_\lambda;\ Lbl\left(\text{选择}^\lambda_\alpha(h)\right) = s_\alpha, \lambda(len(\lambda))\right\}$。

• $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}$： $P \to 2^{I(M^{\mathcal{S}} \times H)}$ 由以下规则定义： $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}(p) = \{\langle \lambda, h\rangle;\ \lambda(len(\lambda)) \in \mathcal{V}(p)\}$。

命题 2.6. </style}设 , $Ags, Act, \delta, \mathcal{V}\rangle$ 是一个并发博弈结构。结构 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$——如定义 *2.5* 中所定义——确实是一个确定性的带标签 bdt 框架。

证明。 我们需要证明 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$ 满足定义 2.2 中陈述的条件。

• L让我们how that $\langle M^{\mathcal{S}} \sqsubset, Ags, \mathbf{Choice}, \mathcal{V}^{\mathcal{S}}\rangle$ is a bdt-模 del

： – 根据 len 和 $\sqsubset$ 的定义，可以直接推出 $\sqsubset$ 具有非自反性和传递性。 $<$ 在 N 上具有三歧性这一事实，意味着 $\sqsubset$ 满足无向后分支。至于时间离散性条件，令 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$ 和 $h \in H_\lambda$ （其中 $\lambda(1) = w$ 且 $h \in out(w, f_{Ags})$）。令 λ' 为 W^+ 中的序列，使得 $len(\lambda') = len(\lambda) + 1$, $\lambda'[1, len(\lambda)] = \lambda$, 且 $\lambda'(len(\lambda')) = (\lambda(len(\lambda)))^{+f_{Ags}}(\lambda)$。显然， $\lambda \sqsubset \lambda'$。现在假设对某个 $\lambda'' \in h$有 $\lambda \sqsubset \lambda''$。这意味着 $len(\lambda'') > len(\lambda)$。若 $len(\lambda'') = len(\lambda) + 1$，那么根据 $\sqsubset$的定义，我们有 $\lambda'' = \lambda'$。若 $len(\lambda'') > len(\lambda) + 1$，那么显然 $len(\lambda'') > len(\lambda')$，因此，根据同一 $\sqsubset$ 的定义以及 $\lambda'' \in h$ 这一假设，可得 $\lambda' \sqsubset \lambda''$。所以， λ' 是沿着 h的 λ 的后继，记作 λ^{+h}。– 至于选择，令 $\alpha \in Ags$ 和 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$。回顾脚注 2，每个 $h \in H_\lambda$ 都对应唯一的行动组合 $\mathsf{s}^h_{len(\lambda)} \in Act^{\lambda(len(\lambda))}_{Ags}$ 。因此， $\bigcup$Choice$^\lambda_\alpha = H_\lambda$。现在，若 Choice$^\lambda_\alpha(h) \neq$ Choice$^\lambda_\alpha(h')$，那么根据定义 2.5 中 Choice$^\lambda_\alpha(h)$ 的定义之后紧接着的观察，可知 $\left(\mathsf{s}^h_{len(\lambda)}\right)_\alpha \neq \left(\mathsf{s}^{h'}_{len(\lambda)}\right)_\alpha$。假设交集中存在一个历史 h''，则根据同一观察可推出 $\left(\mathsf{s}^h_{len(\lambda)}\right)_\alpha = \left(\mathsf{s}^{h''}_{len(\lambda)}\right)_\alpha = \left(\mathsf{s}^{h'}_{len(\lambda)}\right)_\alpha$，这与假设矛盾。因此，Choice$^\lambda_\alpha$ 确实是 H_λ的一个划分。下面证明 Choice 满足条件（NC）。令 $h, h' \in H_\lambda$，并假设存在$\lambda' \sqsupset \lambda$ 使得 $\lambda' \in h \cap h'$。注意到 $\lambda^{+h} \sqsubseteq \lambda'$ 和 $\lambda^{+h'} \sqsubseteq \lambda'$，这意味着$\lambda^{+h}\left(len\left(\lambda^{+h}\right)\right) = \lambda'\left(len\left(\lambda^{+h}\right)\right) = \lambda^{+h'}\left(len\left(\lambda^{+h'}\right)\right)$。此外，由于 $\lambda^{+h}[1, len\left(\lambda^{+h}\right) - 1] =$

$\lambda = \lambda^{+h'}[1, len\left(\lambda^{+h'}\right) - 1]$，因此 $\lambda^{+h} = \lambda^{+h'}$。所以，$\mathsf{s}^{h}_{len(\lambda)} = \mathsf{s}^{h'}_{len}(\lambda)$，这直接意味着 h, h' 位于 $\mathsf{Choice}^{\lambda}_{\alpha}$中的同一个单元内。下面证明 Choice 满足条件（IA）。令 $s \in \mathsf{Select}^{\lambda}$ 为一个选择函数，使得对每个 $\alpha \in Ags$，都有 $h_\alpha \in s(\alpha)$。由 $\left\langle \left(\mathsf{s}^{h_\alpha}_{len}(\lambda)\right)_\alpha \right\rangle_{\alpha \in Ags}$ 给出的行动组合显然属于 $Act^{\lambda(len(\lambda))}_{Ags}$。根据脚注 2 中的观察，存在一个与该行动组合对应的历史 $h_* \in H_\lambda$，也就是说，$\mathsf{s}^{h_*}_{len}(\lambda) = \left\langle \left(\mathsf{s}^{h_\alpha}_{len}(\lambda)\right)_\alpha \right\rangle_{\alpha \in Ags}$。因此，按定义，$h_* \in \bigcap_{\alpha \in Ags} s(\alpha)$。此外，脚注 2 意味着对于每个 $h' \in \bigcap_{\alpha \in Ags} s(\alpha)$，都有 $m^{+h'} = m^{+h_*}$。正是由于这一条件，$\mathcal{M}$ 才被称为确定性 bdt 模型。– $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ 是一个定义良好的赋值函数。

- Tps 定义良好。
- Lbl 定义良好。
- Exe定义良好，因此，定义 2.5 中紧接在 $\mathsf{Choice}^{\lambda}_{\alpha}(h)$ 的定义之后的注释表明，对于所有 $\tau \in Tps^{\lambda}_{\alpha}(\lambda \in M^{\mathcal{S}}, \alpha \in Ags)$，$Exe^{\lambda}_{\alpha}(\tau) \in \mathsf{Choice}^{\lambda}_{\alpha}$。
  – 关于 (EL)，注意到 $h' \in Exe\left(Lbl(\text{选择}^{\lambda}_{\alpha}(h))\right)$ 当且仅当$\left(\mathsf{s}^{h'}_{len(\lambda)}\right)_\alpha = Lbl\left(\text{选择}^{\lambda}_{\alpha}(h)\right) = \left(\mathsf{s}^{h'}_{len(\lambda)}\right)_\alpha$ 当且仅当 $h' \in \text{选择}^{\lambda}_{\alpha}(h)$（最后这个双重蕴含是由定义 2.5 中紧接在 $\mathsf{Choice}^{\lambda}_{\alpha}(h)$ 的定义之后的注释所致）。– 关于 (LE)，Lbl 和 Exe 的定义直接表明 $Lbl\left(Exe^{\lambda}_{\alpha}(\tau)\right) = \tau$。

因此，$\mathcal{M}$ 确实是一个确定性的带标记bdt模型。 □

为了建立带标记bdt模型与并发博弈结构之间的对应，我们定义一个翻译：

定义 2.7（翻译）。设 $p \in \mathcal{P}$ 为一个原子命题，设 φ、$\psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$，并设 $C \subseteq Ags$ 为一个联盟。从 $\mathcal{L}_{\mathsf{ATL}}$ 到 $\mathcal{L}_{\mathsf{SX}}$ 的翻译递归定义如下：

$$\begin{array}{lcl} Tr(p) & = & \Box p \\ Tr(\neg\varphi) & = & \neg Tr(\varphi) \\ Tr(\varphi \wedge \psi) & = & Tr(\varphi) \wedge Tr(\psi) \\ Tr\left(\langle\langle C\rangle\rangle X\varphi\right) & = & \langle\langle C\rangle\rangle^{s} X Tr(\varphi) \\ Tr\left(\langle\langle C\rangle\rangle \mathsf{G}\varphi\right) & = & \langle\langle C\rangle\rangle^{s} \mathsf{G} Tr(\varphi) \\ Tr\left(\langle\langle C\rangle\rangle \varphi \mathsf{U} \psi\right) & = & \langle\langle C\rangle\rangle^{s} Tr(\varphi) \mathsf{U} Tr(\psi). \end{array}$$

引理 2.8。设 $\lambda, \lambda' \in M^{\mathcal{S}}$满足 $\lambda(len(\lambda)) = \lambda'(len(\lambda'))$。存在一一对应$c: H_\lambda \to H_{\lambda'}$，使得对于每个 $h \in H_\lambda$ 和 $i \in \mathbb{N}$，都有 $\mathbf{s}^{h}_{len(\lambda)+i} = \mathbf{s}^{c(h)}_{len\ (\lambda')+i}$。

证明。这可 以直接从脚注 2 以及定义 2.5 中其所注释的段落得出 . □

注记 2.1. 注意，集合 $\{\mu' \in h;\ \mu' \sqsupseteq \mu\}$ 可以改写为 $\{\mu^{+h(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 的形式。对于满足 $\lambda(len(\lambda)) = \lambda'(len(\lambda'))$ 的 λ、$\lambda' \in M^{\mathcal{S}}$，于是，$c$ 在 H_λ 与 $H_{\lambda'}$ 之间的对应关系保证了，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，$\lambda^{+h(i)}\left(len\left(\lambda^{+h(i)}\right)\right) = \lambda'^{+c(h)(i)}\left(len\left(\lambda'^{+c(h)(i)}\right)\right)$。这是因为在 $\mathcal{S}$ 中，每个行动组合都决定一个唯一的后继状态。

引理 2.9. 设 φ 是 $\mathcal{L}_{\mathsf{SX}}$的一个公式，并设 $\lambda, \lambda' \in M^{\mathcal{S}}$满足 $\lambda(len(\lambda)) = \lambda'(len(\lambda'))$，注意到 $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}$指定了 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$中原子命题的赋值。对于每个 $h \in H_\lambda$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda, h\rangle \models \varphi$ 当且仅当$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda', c(h)\rangle \models \varphi$。

证明。 设 $h \in H_\lambda$。我们对 φ的复杂度进行归纳。根据定义 2.5 中 $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ 的定义，基础情形显然成立。布尔联结词的情形是标准的。下面讨论其余模态公式的情形。

- (“$X\varphi$”) c与 H_λ之间的对应 $H_{\lambda'}$确保了 $\lambda^{+h}\left(len\left(\lambda^{+h}\right)\right) = \lambda'^{+c_{(h)}}\left(len\left(\lambda'^{+c(h)}\right)\right)$。 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda$、$h\rangle \models X\varphi$成立，当且仅当 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda^{+h}$、$h\rangle \models \varphi$成立；根据归纳假设以及上述关于对应 c的观察，这当且仅当 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda'^{+c_{(h)}}c(h)\rangle \models \varphi$成立，而后者又当且仅当$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda'$、$c(h)\rangle \models X\varphi$成立。

- （“Gφ”）
$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda$、$h\rangle \models \mathsf{G}\varphi$成立，当且仅当对所有 $i \in \mathbf{N}$， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda^{+h(i)}$、$h\rangle \models \varphi$成立；根据归纳假设和注 2.1，这当且仅当对所有 $i \in \mathbf{N}$， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda'^{+c(h)(i)}$、$c(h)\rangle \models \varphi$成立，而后者又当且仅当 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$、$\langle\lambda'$、$c(h)\rangle \models \mathsf{G}\varphi$成立。

- (“$\varphi\mathsf{U}\psi$”)
$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda, h\rangle \models \varphi\mathsf{U}\psi$当且仅当存在 $j \in \mathbf{N}$，使得 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda^{+h(j)}, h\rangle \models \psi$且 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda^{+h(i)}, h\rangle \models\varphi$ 对每个 $0 \leq i < j$都成立。根据归纳假设，这当且仅当存在 $j \in \mathbf{N}$，使得$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda'^{+c(h)(j)}, c(h)\rangle \models \psi$且 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$, $\langle\lambda'^{+c(h)(i)}, c(h)\rangle \models \varphi$ 对每个 $0 \leq i < j$都成立；进而当且仅当$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda', c(h)\rangle \models \varphi\mathsf{U}\psi$。

- (“$\Box\varphi$”)
$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda, h\rangle \models \Box\varphi$当且仅当对每个 $h' \in H_\lambda$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda, h'\rangle \models \varphi$。根据归纳假设，这当且仅当对每个 $h' \in H_\lambda$ $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$，都有 $\langle\lambda', c(h')\rangle \models \varphi$。由于 c是一一对应，这又当且仅当 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda', c(h)\rangle \models \Box\varphi$。

- (“$\langle\langle C\rangle\rangle^s\varphi$”)
注意到，对应关系 c 在 $\sqsubseteq[\lambda]$ 与 $\sqsubseteq[\lambda']$之间诱导出一个对应关系，使得对于每个 $i \in \mathbf{N}$, $\lambda^{+h(i)}\left(len\left(\lambda^{+h(i)}\right)\right) = \lambda'^{+c(h)(i)}\left(len\left(\lambda'^{+c(h)(i)}\right)\right)$。因此，对于每个从 λ开始的集体策略σ_C，都存在一个从 λ' 开始的对应集体策略 σ'_C，使得对于每个$h \in H_\lambda$ 和 $i \in \mathbf{N}$，$\sigma_C\left(\lambda^{+h(i)}\right) = \sigma'_C\left(\lambda^{+c(h)(i)}\right)$, 反之亦然。此外， $h' \in \mathsf{Adm}^{\lambda}_{C}(\sigma_C)$ 当且仅当$c(h') \in \mathsf{Adm}^{\lambda'}_{C}(\sigma'_C)$。

  因此， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda, h\rangle \models \langle\langle C\rangle\rangle^s\varphi$ 当且仅当存在 σ_C，使得对于每个 $h' \in \mathsf{Adm}^{\lambda}_{C}(\sigma_C)$， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda, h'\rangle \models \varphi$; 根据归纳假设和上述观察，这当且仅当存在 σ'_C，使得对于每个 $h'' \in \mathsf{Adm}^{\lambda'}_{C}(\sigma'_C)$， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda', h''\rangle \models \varphi$; 而这又当且仅当$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda', c(h)\rangle \models \langle\langle C\rangle\rangle^s\varphi$。

□

引理 2.10。 设 φ 是 $\mathcal{L}_{ATL}$的一个公式，则对于给定的 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$和 $h \in H_\lambda$， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$， $\langle\lambda$， $h\rangle \models Tr(\varphi)$ 当且仅当$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$， $\langle\lambda$， $h'\rangle \models Tr(\varphi)$ 对每个 $h' \in H_\lambda$都成立。

证明。 显然。可以通过对 φ的复杂度进行归纳来证明，其中模态公式的情形源于以下事实：对于 $\lambda \in M^{\mathcal{S}}$，在 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$ 中从 λ 开始的策略是否存在，并不取决于任何经过 λ的历史。

□

命题 2.11 (对应)**.** 设 $\mathcal{S} = \langle W, Ags, Act, \delta, \mathcal{V}\rangle$ 是一个并发博弈结构，使得$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$ 是与 $\mathcal{S}$相关联的带标记bdt-框架。对于 $\mathcal{L}_{ATL}$ 的每个公式 φ 和状态 $w \in W$，都有 $\mathcal{S}, w \models \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda_w, h\rangle \models Tr(\varphi)$ 对每个 $h \in H_{\lambda_w}$ 都成立（其中 λ_w 是 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$ 中与状态 w对应的一个时刻。）

证明：我们对 φ 的复杂度进行归纳法。基础情形可由定义 2.5 直接得出。涉及布尔联结词的情形是标准的。下面处理其余模态公式的情形:

- （“$\langle\langle C\rangle\rangle X\varphi$”）

(⇒) 假设 $\mathcal{S}, w \models \langle\langle C\rangle\rangle X\varphi$。这意味着存在一个关于 $\mathcal{S}$ 的集体策略 f_C，使得对于每个 $\mu \in out(w, f_C)$，$\mathcal{S}, \mu(2) \models \varphi$。我们希望证明，存在一个从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，使得对于每个 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h' \rangle \models XTr(\varphi)$。

定义从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，以确保这一方向成立。对于满足 $\mu \sqsupseteq \lambda_w$ 的每个 $\mu \in M^{\mathcal{S}}$，令 $\sigma_C(\mu) = \bigcap_{\alpha \in C} Exe((f_C(\mu))_\alpha)$；回忆一下，$f_C$ 是形如 $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha \in C}$ 的元组，且对于每个 $\alpha \in C$ 都有 $f_\alpha \in Strat_\alpha$；此外，对于每个 $\mu \in W^+$，$f_C(\mu)$ 表示由 $\langle f_\alpha(\mu) \rangle_{\alpha \in C}$ 给出的 $Act_C^{\mu(len(\mu))}$ 在 $\mathcal{S}$ 中的联合动作。

令 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$，这意味着对于每个 $\alpha \in C$ 和 $i \in \mathbb{N}$，都有 $Lbl\left(\mathrm{Choice}_\alpha^{\lambda_w^{+h'(i)}}(h')\right) = \left(f_C\left(\lambda_w^{+h'}(\ \ i)\right)\right)_\alpha$。反过来，这意味着对于每个 $\alpha \in C$ 和 $i \in \mathbb{N}$，都有 $\left(f_{Ags}^{h'}\left(\lambda_w^{+h'}(\ \ i)\right)\right)_\alpha = \left(f_C\left(\lambda_w^{+h'}(\ \ i)\right)\right)$。因此，$seq(h') \in out(w, f_C)$。根据假设，$\mathcal{S}, seq(h')(2) \models \varphi$。

根据归纳假设，对于任意历史 $h'' \in H_{\lambda_{seq(h')(2)}}$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{seq(h')(2)}\ h'' \rangle \models Tr(\varphi)$；回忆一下，$\lambda_{seq(h')(2)}$ 是这样一个序列，其唯一的第一个元素为 $seq(h')(2) = w^{+\mathbf{s}_1^{h'}} = w^{+f_{Ags}^{h'}(\lambda_w)} = \lambda_w^{+h'}\left(len\left(\lambda_w^{+h'}\right)\right)$。引理 2.9 随即意味着 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle (\lambda_w)^{+h'}, h' \right\rangle \models Tr(\varphi)$。

因此，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h' \rangle \models XTr(\varphi)$。由于 h' 是 $\mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$ 中任意一段历史，因此对于任意 $h \in H_{\lambda_w}$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h \rangle \models \langle\langle C\rangle\rangle^s XTr(\varphi)$（最后这个对 H_{λ_w} 中历史的全称量化可由引理 2.10 得出）。

(⇐) 假设对于每个 $h \in H_{\lambda_w}$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h \rangle \models \langle\langle C\rangle\rangle^s XTr(\varphi)$。这意味着存在一个从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，使得对于每个 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h' \rangle \models XTr(\varphi)$。我们要证明，存在一个定义在 $\mathcal{S}$ 上的集体策略 f_C，使得对于每个 $\mu \in out(w, f_C)$，$\mathcal{S}, \mu(2) \models \varphi$。

让我们构造所需的、定义在 $\mathcal{S}$ 上的集体策略 f_C，以确保这一方向成立。定义 f_C：$W^+ \to \bigcup_{w \in W} Act_\alpha^w$ 如下。对于每个 $h \in H_{\lambda_w}, i \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in C$，令 $\left(f_C\left(\lambda_w^{+h(i)}\right)\right)_\alpha = Lbl\left((\sigma_C)_\alpha\left(\lambda_w^{+h(i)}\right)\right)$；对于其他每个 $\mu \in W^+$，令 $(f_C(\mu))_\alpha$ 为 $Act_\alpha^{\mu(len(\mu))}$ 中的任意一个行动。

设 $\mu \in out(w, f_C)$，这意味着 $\mu^{fin} \in H_{\lambda_w}$。下面证明 $\mu^{fin} \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$。为此，我们需要证明对于每个 $i \in \mathbb{N}$，$\mu^{fin} \in \sigma_C\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)$。设 $i \in \mathbb{N}$。回想一下，$\sigma_C\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)$ 是 $\mathrm{Choice}_C^{\lambda_w^{+\mu^{fin}(i)}}$ 中的一个选择单元，由交集 $\bigcap_{\alpha \in C}(\sigma_C)_\alpha\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)$ 给出。设 $\alpha \in C$。根据构造，与历史 μ^{fin}（其中 $\mu^{fin} = out\left(w, f_{Ags}^{\mu^{fin}}\right)^{fin}$）相关联的集体策略 $f_{Ags}^{\mu^{fin}}$ 满足 (⋆) $\left(f_{Ags}^{\mu^{fin}}\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)\right)_\alpha = \left(f_C\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)\right)_\alpha$。

根据定义 2.5 中选择和 Lbl 的定义，可知 $Lbl\left(\text{选择}_\alpha^{\lambda_w^{+\mu^{fin}(i)}}\left(\mu^{fin}\right)\right) = \left(f_{Ags}^{\mu^{fin}}\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)\right)_\alpha$，因此，标记为 (⋆) 的等式和 f_C 的定义推出 $Lbl\left(\text{选择}_\alpha^{\lambda_w^{+\mu^{fin}(i)}}\left(\mu^{fin}\right)\right) = Lbl\left((\sigma_C)_\alpha\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)\right)$，这意味着 $\mu^{fin} \in (\sigma_C)_\alpha\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)$。因此，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $\mu^{fin} \in \sigma_C\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}(\ \ i)\right)$，从而 $\mu^{fin} \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$。

根据假设，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, \mu^{fin} \rangle \models XTr(\varphi)$ 成立。因此，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda_w^{+\mu^{fin}}, \mu^{fin} \right\rangle \models Tr(\varphi)$。显然，对每个 $i \in \mathbb{N}$，$\lambda_w^{+\mu^{fin}}\left(len\left(\lambda_w^{+\mu^{fin}}\right)\right) = \mu(2)$。由引理 2.9 可得 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda_{\mu(2)}, c\left(\mu^{fin}\right) \right\rangle \models Tr(\varphi)$。进而，由引理 2.10 可得，对每个 $h \in H_{\lambda_{\mu(2)}}$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda_{\mu(2)}, h \right\rangle \models Tr(\varphi)$。根据归纳假设，我们得到 $\mathcal{S}, \mu(2) \models \varphi$，于是 $\mathcal{S}, w \models \langle\langle C\rangle\rangle X\varphi$。

- (“$\langle\langle C\rangle\rangle$博弈论$\varphi$”)

($\Rightarrow$) 假设 $\mathcal{S}, w \models \langle\langle C\rangle\rangle X\varphi$。这意味着存在一个在 $\mathcal{S}$ 上的集体策略 f_C，使得对于每个 $\mu \in out(w, f_C)$，$\mathcal{S}, \mu(i) \models \varphi$ 对每个 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$ 都成立。我们想要证明，存在一个从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，使得对于每个 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h'\rangle \models \mathbf{G}Tr(\varphi)$。

让我们定义从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，以确保这一方向成立。我们仿照上文条目中从右到左的蕴含来构造。对于每个满足 $\mu \sqsupseteq \lambda_w$ 的 $\mu \in M^{\mathcal{S}}$，令 $\sigma_C(\mu) = \bigcap_{\alpha \in C} Exe((f_C(\mu))_\alpha)$。

令 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$。仿照上文条目中的从右到左的蕴含，可得 $seq(h') \in out(w, f_C)$。根据假设，对于每个 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$，都有 $\mathcal{S}, seq(h')(i) \models \varphi$。根据归纳假设，对于每个 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$ 及每个历史 $h'' \in H_{\lambda_{seq(h')(i)}}$，都有 ($\star$) $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{seq(h')(i)}\ h''\rangle \models Tr(\varphi)$。显然，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，$\lambda^{+h'}_{w\ \ i}\left(len\left(\lambda^{+h'}_{w\ \ i}\right)\right) = seq(h')(i+1)$。因此，引理 2.9 和 ($\star$) 保证，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda^{+h'}_w(i), h'\right\rangle \models Tr(\varphi)$。

因此，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h'\rangle \models \mathbf{G}Tr(\varphi)$。由于 h' 是 $\mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$ 中任意一段历史，因此对于任意 $h \in H_{\lambda_w}$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h\rangle \models \langle\langle C\rangle\rangle^s \mathbf{G}Tr(\varphi)$（其中，对 H_{λ_w} 中历史的这一全称量化由引理 2.10 得出）。

($\Leftarrow$) 假设对于每个 $h \in H_{\lambda_w}$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h\rangle \models \langle\langle C\rangle\rangle^s \mathbf{G}Tr(\varphi)$。这意味着存在一个从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，使得对于每个 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h'\rangle \models \mathbf{G}Tr(\varphi)$。我们要证明存在一个定义在 $\mathcal{S}$ 上的集体策略 f_C，使得对于每个 $\mu \in out(w, f_C)$，$\mathcal{S}, \mu(i) \models \varphi$ 对于每个 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$。

让我们构建所需的集体策略 f_C over $\mathcal{S}$，以确保这一方向成立。我们的做法与上一个条目中的从左到右的蕴含完全相同。令 $f_C : W^+ \to \bigcup_{w \in W} Act^w_\alpha$ 定义如下。对于每个 $h \in H_{\lambda_w}$、$i \in \mathbf{N}$ 和 $\alpha \in C$，令 $\left(f_C\left(\lambda^{+h(i)}_w\right)\right)_\alpha = Lbl\left((\sigma_C)_\alpha\left(\lambda^{+h(i)}_w\right)\right)$；对于其他每个 $\mu \in W^+$，令 $(f_C(\mu))_\alpha$ 为 $Act^{\mu(len(\mu))}_\alpha$ 中的任意行动。

令 $\mu \in out(w, f_C)$，这意味着 $\mu^{fin} \in H_{\lambda_w}$。正如上一个条目中的从左到右的蕴含所示，这意味着 $\mu^{fin} \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$。

根据假设，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, \mu^{fin}\rangle \models \mathbf{G}Tr(\varphi)$。因此，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda^{+\mu^{fin}}_w(i), \mu^{fin}\right\rangle \models Tr(\varphi)$。显然，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，$\lambda^{+\mu^{fin}}_{w\ \ i}\left(len\left(\lambda^{+\mu^{fin}}_{w\ \ i}\right)\right) = \mu(i+1)$。于是，引理 2.9 推出，对于每个 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda_{\mu(i)}, c\left(\mu^{fin}\right)\right\rangle \models Tr(\varphi)$。因此，对于每个 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$，引理 2.10 推出，对于每个 $h \in H_{\lambda_{\mu(i)}}$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{\mu(i)}, h\rangle \models Tr(\varphi)$。根据归纳假设，我们得到，对于每个 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$，$\mathcal{S}, \mu(i) \models \varphi$，从而 $\mathcal{S}, w \models \langle\langle C\rangle\rangle \mathbf{G}\varphi$。

- ("$\langle\langle C\rangle\rangle \varphi \mathbf{U} \psi$") ($\Rightarrow$) 假设 $\mathcal{S}, w \models \langle\langle C\rangle\rangle \varphi \mathbf{U} \psi$。这意味着存在一个关于 $\mathcal{S}$ 的集体策略 f_C，使得对于每个 $\mu \in out(w, f_C)$，都存在 $j \in \mathbf{N} - \{0\}$，满足 $\mathcal{S}, \mu(j) \models \psi$ 且 $\mathcal{S}, \mu(i) \models \varphi$，对每个 $1 \le i < j$ 都成立。我们要证明，存在一个从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，使得对于每个 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h'\rangle \models Tr(\varphi) \mathbf{U} Tr(\psi)$。

我们来定义从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，以确保这个方向成立。我们采用与上面条目中从右到左的蕴含相同的方法。对于每个满足 $\mu \sqsupseteq \lambda_w$ 的 $\mu \in M^{\mathcal{S}}$，令 $\sigma_C(\mu) = \bigcap_{\alpha \in C} Exe((f_C(\mu))_\alpha)$。

设 $h' \in \mathrm{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$。与上面条目的从右到左的蕴含一样，这意味着 $seq(h') \in out(w, f_C)$。根据假设，存在 $j \in \mathbf{N} - \{0\}$ 使得，对于每个 $1 \le i < j$，都有 $\mathcal{S}, seq(h')(j) \models \psi$ 且 $\mathcal{S}, seq(h')(i) \models \varphi$。

根据归纳假设，对于每个历史 $h'' \in H_{\lambda_{seq(h')(j)}}$，($\star$) $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{seq(h')(j)}\ h''\rangle \models Tr(\psi)$ 成立；并且对于每个 $1 \le i < j$ 和每个历史 $h''' \in H_{\lambda_{seq(h')(i)}}$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{seq(h')(i)}\ h'''\rangle \models Tr(\varphi)$ 成立。显然，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，$\lambda^{+h'}_{w\ \ i}\left(len\left(\lambda^{+h'}_{w\ \ i}\right)\right) = seq(h')(i+1)$。因此，引理 2.9 和 ($\star$) 保证，对于每个 $1 \le i < j$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda^{+h'}_w(j-1), h'\right\rangle \models Tr(\psi)$ 成立；并且 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda^{+h'}_w(i-1), h'\right\rangle \models Tr(\varphi)$ 成立。

因此， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h' \rangle \models Tr(\varphi) \mathsf{U} Tr(\psi)$。由于 h' 是 $\mathsf{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$ 中任意一个历史，因此，对于任意 $h \in H_{\lambda_w}$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h \rangle \models \langle\langle C \rangle\rangle^s Tr(\varphi) \mathsf{U} Tr(\psi)$ 成立（其中，对 H_{λ_w} 中历史的最后这个全称量化由引理 2.10 得出）。

($\Leftarrow$)

假设对于每个 $h \in H_{\lambda_w}$，都有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h \rangle \models \langle\langle C \rangle\rangle^s Tr(\varphi) \mathsf{U} Tr(\psi)$。这意味着存在一个从 λ_w 开始的集体策略 σ_C，使得对于每个 $h' \in \mathsf{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$ $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}$，都有 $\langle \lambda_w, h' \rangle \models Tr(\varphi) \mathsf{U} Tr(\psi)$。我们希望证明，存在一个定义在 $\mathcal{S}$ 上的集体策略 f_C，使得对于每个 $\mu \in out(w, f_C)$，都存在 $j \in \mathbb{N}_{\{0\}}$，满足 $\mathcal{S}, \mu(j) \models \psi$，并且对于每个 $1 \leq i < j$，都有 $\mathcal{S}, \mu(i) \models \varphi$。

让我们构造所需的定义在 $\mathcal{S}$ 上的集体策略 f_C，以确保这一方向成立。具体做法与上述条目中的从左到右的蕴含相同。令 $f_C: W^+ \to \bigcup_{w \in W} Act_\alpha^w$ 如下定义：对于每个 $h \in H_{\lambda_w}, i \in \mathbb{N}$ 以及 $\alpha \in C$，令 $\left(f_C\left(\lambda_w^{+h(i)}\right)\right)_\alpha = Lbl\left((\sigma_C)_\alpha\left(\lambda_w^{+h(i)}\right)\right)$；对于其他每个 $\mu \in W^+$，令 $(f_C(\mu))_\alpha$ 为 $Act_\alpha^{\mu(len(\mu))}$中的任意行动。

令 $\mu \in out(w, f_C)$，这意味着 $\mu^{fin} \in H_{\lambda_w}$。正如上面条目中从左到右的蕴含所示，这意味着 $\mu^{fin} \in \mathsf{Adm}_C^{\lambda_w}(\sigma_C)$。

根据假设， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, \mu^{fin} \rangle \models Tr(\varphi) \mathsf{U} Tr(\psi)$ 成立。因此，存在 $j \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda_w^{+\mu^{fin}{}_{(j)}}, \mu^{fin} \right\rangle \models Tr(\psi)$，并且 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \left\langle \lambda_w^{+\mu^{fin}{}_{(i)}}, \mu^{fin} \right\rangle \models Tr(\varphi)$ 对每个 $0 \leq i < j$ 都成立。显然，对每个 $i \in \mathbb{N}$，$\lambda^{+\mu^{fin}(}{}_w{}^i\left(len\left(\lambda^{+\mu^{fin})(}{}_w{}^i\right)\right) = \mu^{)}(i+1)$。由引理 2.9 可得，对每个 $0 \leq i < j$，$\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{\mu(j+1)}, c\left(\mu^{fin}\right)\rangle \models Tr(\psi)$ 且 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{\mu(i+1)}, c\left(\mu^{fin}\right)\rangle \models Tr(\varphi)$。

引理 2.10 随即推出，对于每个 $h \in H_{\lambda_{\mu(j+1)}}$, $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{\mu(j+1)}, h \rangle \models Tr(\psi)$，以及对于每个$0 \leq i < j$an each each $h' \in H_{\lambda_{\mu(i+1)}}$, $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_{\mu(i+1)}, h' \rangle \models Tr(\varphi)$。根据归纳假设，我们得到 $\mathcal{S}, \mu(j+1) \models \psi$ and $\mathcal{S}, \mu(i+1) \models \psi$对每个 $1 \leq i+1 < j+1$ 都成立，因此 $\mathcal{S}, w \models \langle\langle C \rangle\rangle \varphi \mathsf{U} \psi$。

□

为了将 ATL 嵌入 STIT 理论，我们给出一个关于 ATL 的证明系统：

定义2.12（关于 ATL 的证明系统）。 $\Lambda_{\mathtt{ATL}}$ 是由以下公理和推理规则定义的证明系统——如 Goranko 和 van Drimmelen（2006）所述：

- （公理）命题逻辑中的所有经典重言式。对于满足 $A \cap B = \emptyset$ 的 A、$B \subseteq Ags$，有以下公理模式：

$\neg\langle\langle A \rangle\rangle X \bot$	$(\bot)$
$\langle\langle A \rangle\rangle X \top$	$(\top)$
$\neg\langle\langle \emptyset \rangle\rangle X \neg p \to \langle\langle Ags \rangle\rangle X p$	(GC)
$\langle\langle A \rangle\rangle X p \wedge \langle\langle B \rangle\rangle X q \to \langle\langle A \cup B \rangle\rangle X (p \wedge q)$	(S)
$\langle\langle A \rangle\rangle \mathsf{G} p \leftrightarrow p \wedge \langle\langle A \rangle\rangle X \langle\langle A \rangle\rangle \mathsf{G} p$	(FP_{G})
$\langle\langle \emptyset \rangle\rangle \mathsf{G}(r \to (p \wedge \langle\langle A \rangle\rangle X r)) \to \langle\langle \emptyset \rangle\rangle \mathsf{G}(r \to (p \wedge \langle\langle A \rangle\rangle \mathsf{G} p))$	(GFP_{G})
$\langle\langle A \rangle\rangle p \mathsf{U} q \leftrightarrow q \vee (p \wedge \langle\langle A \rangle\rangle X \langle\langle A \rangle\rangle p \mathsf{U} q)$	(FP_{U})
$\langle\langle \emptyset \rangle\rangle \mathsf{G}((q \vee (p \wedge \langle\langle A \rangle\rangle X r)) \to r) \to \langle\langle \emptyset \rangle\rangle \mathsf{G}(\langle\langle A \rangle\rangle p \mathsf{U} q \to r)$	(LFP_{U})

- （推理规则）

  – 肯定前件，代入。– $\langle\langle A \rangle\rangle X$-单调性：由 $\varphi \to \psi$ 推出 $\langle\langle A \rangle\rangle X \varphi \to \langle\langle A \rangle\rangle X \psi$。– $\langle\langle \emptyset \rangle\rangle \mathsf{G}$-必然化：由 φ 推出 $\langle\langle \emptyset \rangle\rangle \mathsf{G} \varphi$。

引理 2.13。 对于 $\Lambda_{\mathtt{ATL}}$ 的每个公理和公理模式 φ，$Tr(\varphi)$ 都是相对于带标签的 bdt 模型类的有效公式。

证明。设 $\mathcal{M}$ 是一个带标签的 bdt 模型。

- 对于命题重言式、公理模式（$\bot$）和公理模式（$\top$），该性质显而易见。

- 令 φ 表示公理模式（GC）。注意，$Tr(\varphi) = \neg\langle\langle\emptyset\rangle\rangle^s X\Box p \to \langle\langle Ags\rangle\rangle^s X\Box p$。该公式等价于 $\Diamond X\Box p \to \langle\langle Ags\rangle\rangle^s X\Box p$。假设 $\mathcal{M}$、$\langle m$、$h\rangle \models \Diamond X\Box p$。这意味着存在 $h' \in H_m$，使得 $\mathcal{M}$、$\langle m$、$h'\rangle \models X\Box p$。令 σ_{Ags}为一个从 m开始的集体策略，定义如下：令 $\sigma_{Ags}(m) =$ 选择$^m_{Ags}(h')$；对于每个 $h'' \in$ 选择$^m_{Ags}(h')$以及每个满足 $m' \sqsupset m$的 $m' \in h''$，令 $\sigma_{Ags}(m')$为包含 h''的选择单元$^{m'}_{Ags}$；对于其他每个满足 $m' \sqsupset m$的 m'，令 $\sigma_{Ags}(m')$为选择$^{m'}_{Ags}$的任意一个选择单元。显然，$\mathsf{Adm}^m_{Ags}(\sigma_{Ags})$ =选择$^m_{Ags}(h')$，因此，$\mathcal{M}$是确定性的这一事实意味着 $\mathcal{M}$、$\langle m$、$h\rangle \models \langle\langle Ags\rangle\rangle^s X\Box p$。

- 令 φ表示公理模式（S）。则 $Tr(\varphi) = \langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box p \wedge \langle\langle B\rangle\rangle^s X\Box q \to \langle\langle A\cup B\rangle\rangle^s X(\Box p \wedge \Box q)$。假设 $\mathcal{M}$、$\langle m$、$h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box p \wedge \langle\langle B\rangle\rangle^s X\Box q$。这意味着存在从 m开始的集体策略 σ_A和 σ_B，使得对于 $h' \in \mathsf{Adm}^m_A(\sigma_A)$，$\mathcal{M}$、$\langle m$、$h'\rangle \models X\Box p$成立；并且对于$h'' \in \mathsf{Adm}^m_B(\sigma_B)$，$\mathcal{M}$、$\langle m$、$h''\rangle \models X\Box q$成立。注意，框架条件行动者独立性意味着 $\sigma_A(m) \cap \sigma_B(m)$非空。令 $h_* \in \sigma_A(m) \cap \sigma_B(m)$。令 $\sigma_{A\cup B}$为一个从 m 开始的集体策略，定义如下：令 $\sigma_{A\cup B}(m)$为 $=$ $\mathsf{Choice}^m_{A\cup B}(h_*)$；对于每个 $h'' \in \mathsf{Choice}^m_{A\cup B}(h_*)$以及满足 $m' \sqsupset m$的每个 $m' \in h''$，令 $\sigma_{A\cup B}(m')$为包含 h''的 $\mathsf{Choice}^{m'}_{A\cup B}$的选择单元；对于满足 $m' \sqsupset m$的其他每个 m'，令 $\sigma_A \cup B(m')$为 $\mathsf{Choice}^{m'}_{A\cup B}$的任意选择单元。令 $h' \in \mathsf{Adm}^m_{A\cup B}(\sigma_{A\cup B})$。显然，$h' \in \mathsf{Choice}^m_{A\cup B}(h_*)$，因此 $\mathcal{M}$、$\langle m$、$h'\rangle \models X\Box p \wedge X\Box q$，从而$\mathcal{M}$、$\langle m$、$h\rangle \models \langle\langle A\cup B\rangle\rangle^s X(\Box p \wedge \Box q)$。

- 令 φ表示公理模式（FP_{G}）。那么 $Tr(\varphi) = \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p \leftrightarrow \Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$。

  对于从右到左的蕴含，假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$通过从 m开始的集体策略 σ_A成立。显然，$\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box p$。令 $h' \in \mathsf{Adm}^m_A(\sigma_A)$。令$\sigma'_A$为一个从 $m^{+h'}$ 开始的集体策略，定义如下：对于满足 $m' \sqsupseteq m^{+h'}$的 m'，令 $\sigma'_A(m') = \sigma_A(m')$。令$h'' \in \mathsf{Adm}^{m^{+h'}}_A(\sigma'_A)$。注意，$h'' \in H_{m^{+h'}}$蕴含 $h'' \in H_m$，且 $h'' \in \mathsf{Choice}^m_{Ags}(h')$（见脚注 2）。此外，根据 σ'_A 的定义可知，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，都有 $h'' \in \sigma_A\left(m^{+h'}(i)\right)$，进而可知 $h'' \in \mathsf{Adm}^m_A(\sigma_A)$。根据我们的假设，$\mathcal{M}, \langle m, h''\rangle \models \mathsf{G}\Box p$，因此 $\mathcal{M}, \langle m^{+h'}, h''\rangle \models \mathsf{G}\Box p$ 也成立。由于 h'' 是 $\mathsf{Adm}^{m^{+h'}}_A(\sigma'_A)$ 中任意一段历史，因此可知 $\mathcal{M}, \langle m^{+h'}, h'\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$，所以 $\mathcal{M}, \langle m, h'\rangle \models X\langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$。由于 h' 是 $\mathsf{Adm}^m_A(\sigma_A)$ 中任意一段历史，因此可知 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s X\langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$。

  对于从左到右的蕴含，假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$通过从 m 开始的集体策略 σ_A 得以满足。这意味着，对于每个 $h' \in \mathsf{Adm}^m_A(\sigma_A)$，都有 $\mathcal{M}, \langle m^{+h'}, h'\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$；我们认为，这种满足性可由从 $m^{+h'}$ 开始的集体策略$\sigma^{h'}_A$ 证明。令σ''_A 为一个从 m 开始的集体策略，定义如下：令 $\sigma''_A(m) = \sigma_A(m)$；对于 $h_* \in \sigma_A(m)$和 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$，令 $\sigma''_A\left(m^{+h_*}(i)\right) = \sigma^{h'_*}_A\left(m^{+h_*}(i)\right)$，其中 h'_* 为任意满足 $h'_* \in \mathsf{Adm}^m_A(\sigma_A)$ 的值。[3] 对于 $h_* \notin \sigma_A(m)$，令 $\sigma''_A\left(m^{+h_*}(i)\right) = \sigma_A\left(m^{+h_*}(i)\right)$。

  令 $h'' \in \mathsf{Adm}^m_A(\sigma''_A)$。正如我们的假设所蕴含的，$\mathcal{M}, \langle m^{+h''(0)}h''\rangle \models \Box p$。对于$i \in \mathbf{N} - \{0\}$，有 $h'' \in \sigma''_A\left(m^{+h''(i)}\right) = \sigma^{h'_*}_A\left(m^{+h''(i)}\right)$（其中，$h'_*$是满足$h'_* \in \mathsf{Adm}^m_A(\sigma_A)$的历史，$m^{+h'_*} = m^{+h''}$，而 $\sigma^{h'_*}_A$是从 $m^{+h''}$ 开始的集体策略，它证明了 $\mathcal{M}, \langle m^{+h''}, h'_*\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$这一事实）。这意味着 $h'' \in \mathsf{Adm}^{m^{+h''}}_A\left(\sigma^{h'_*}_A\right)$。因此，$\mathcal{M}, \langle m^{+h''}, h''\rangle \models \mathsf{G}\Box p$，从而支持 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p$。

- 令 φ表示公理模式（GFP_{G}）。那么 $Tr(\varphi) = \langle\langle\emptyset\rangle\rangle^s\mathsf{G}(\Box r \to (\Box\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box r)) \to \langle\langle\emptyset\rangle\rangle^s\mathsf{G}(\Box r \to (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}p))$。这个公式等价于 $\Box\mathsf{G}(\Box r \to (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box r)) \to \Box\mathsf{G}(\Box r \to (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s\mathsf{G}\Box p))$。假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box\mathsf{G}(\Box r \to (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box r))$。

[3]这种历史的存在是由以下事实所保证的：策略映射到选择划分的单元中 .

令 $h' \in H_m$ 和 $i \in \mathbf{N}$。我们要证明 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h' \right\rangle \models \Box r \rightarrow (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s \mathbf{G}\Box p)$。因此，假设 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h' \right\rangle \models \Box r$。我们的主要假设蕴含 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h' \right\rangle \models \Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r$。令 σ_A 为从 $m^{+h'}(i)$开始、能够证明右侧合取项成立的集体策略。这意味着，对于每个 $h'' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，都有 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h'' \right\rangle \models X\Box r$；根据主要假设，这蕴含 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h'' \right\rangle \models X(\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r)$，其中 $\sigma_A^{h''}$ 表示从 $\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h''}$ 开始、确保公式“$\langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box r$”在沿着 h'' 的 $m^{+h'}(i)$ 的后继时刻成立的集体策略。于是，对于每个 $h''' \in \mathbf{Adm}_A^{\left(m^{+h'(i)}\right)^{+h''}}\left(\sigma_A^{h''}\right)$，都可以运用同样的论证，得到一个从 $\left(\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h''}\right)^{+h'''}$ 开始的集体策略 $\sigma_A^{h'''}$，以证明 $\mathcal{M}, \left\langle \left(m^{+h'}(i)\right)^{+h''}, h''' \right\rangle \models X(\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box r)$。因此请注意，对于每个 $m' \in \left\{m', \text{都存在 } h'' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A), \text{使得 } m' = \left(m^{+h'}(i)\right)^{+h''}\right\}$；并且存在 $\sigma_A^{m'}$，使得对于 $\sigma_A^{m'}$ 的所有可容许历史，沿这些可容许历史从 m' 出发的后继也满足公式 $\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\Box r$。因此，对于这些后继中的每一个，都存在一个集体策略，使其在该后继的可容许历史中也实现同样的目标，如此等等。我们将如下定义一个从 $m^{+h'}(i)$开始的集体策略 σ'_A：令 $\sigma'_A\left(m^{+h'}(i)\right) = \sigma_A\left(m^{+h'}(i)\right)$；对于每个满足 $m' \sqsupset m$ 的 m'，分两种情况：若 m' 是沿可容许历史、符合上段所述条件的后继，则令 $\sigma'_A(m') = \sigma_A^{m'}(m')$；若 m' 不是任何后继，则令 $\sigma'_A(m') = \sigma_A(m')$。对于 $h'' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma'_A)$，可以证明 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h'' \right\rangle \models \mathbf{G}\Box p$。因此，我们证明了 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h' \right\rangle \models \Box r \rightarrow (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s \mathbf{G}\Box p)$，从而证明 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box\mathbf{G}(\Box r \rightarrow (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s \mathbf{G}\Box p))$。

- 令 φ 表示公理模式（$FP\cup$）。那么 $Tr(\varphi) = \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q \leftrightarrow \Box q \vee (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q)$。

  对于从右到左的蕴含，假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$ 是通过集体策略 σ_A从 m开始实现的。进一步假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \neg\Box q$。显然，我们的主要假设由此蕴含 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box p$。令 $h' \in \mathbf{Adm}_A^m(\sigma_A)$。令 σ'_A 为一个从 $m^{+h'}$ 开始的集体策略，定义如下：对于满足 $m' \sqsupseteq m^{+h'}$ 的 m'，令 $\sigma'_A(m') = \sigma_A(m')$。令 $h'' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'}}(\sigma'_A)$。注意，$h'' \in H_{m^{+h'}}$ 蕴含 $h'' \in H_m$，且 $h'' \in$ 选择$_{Ags}^m(h')$（见脚注 2）。此外，σ'_A 的定义蕴含，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，$h'' \in \sigma_A\left(m^{+h''}(i)\right)$，这又蕴含 $h'' \in \mathbf{Adm}_A^m(\sigma_A)$。因此，根据我们的假设，$\mathcal{M}, \langle m, h''\rangle \models \Box p \mathbf{U} \Box q$。由于同样有 $\mathcal{M}, \langle m, h''\rangle \models \neg\Box q$（如上文所作的“进一步”假设所蕴含），因此也可得出 $\mathcal{M}, \langle m^{+h'}, h''\rangle \models \Box p \mathbf{U} \Box q$。由于 h'' 是 $\mathbf{Adm}_A^{m^{+h'}}(\sigma'_A)$ 中任意的历史，这蕴含 $\mathcal{M}, \langle m^{+h'}, h'\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$，从而 $\mathcal{M}, \langle m, h'\rangle \models X\langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$。由于 h' 是 $\mathbf{Adm}_A^m(\sigma_A)$ 中任意的历史，这蕴含 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s X\langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$。

  对于从左到右的蕴含，假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box q \vee (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q)$。那么有两种情况：

  – 如果 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box q$，显然 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box\Box q$，这进而意味着 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box(\Box p \mathbf{U} \Box q)$，继而意味着 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$。– 假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X\langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$，因此右侧合取项的满足由从 m 开始的集体策略 σ_A 证明。也就是说，对于每个 $h' \in \mathbf{Adm}_A^m(\sigma_A)$，都有 $\mathcal{M}, \langle m^{+h'}, h'\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$；我们认为，这种满足由从 $m^{+h'}$ 开始的集体策略 $\sigma_A^{h'}$ 证明。令 σ''_A 表示一个从 m 开始的集体策略，定义如下：

令 $\sigma''_A(m) = \sigma_A(m)$；对于 $h_* \in \sigma_A(m)$ 和 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$，令 $\sigma''_A\left(m^{+h_*}(i)\right) = \sigma_A^{h'_*}\left(m^{+h_*}(i)\right)$；若 $h_* \notin \mathbf{Adm}_A^m(\sigma_A)$，则令 $\sigma''_A\left(m^{+h_*}(i)\right) = \sigma_A\left(m^{+h_*}(i)\right)$。令 $h'' \in \mathbf{Adm}_A^m(\sigma''_A)$。根据我们的假设可知，$(\star)$ $\mathcal{M}, \langle m^{+h''}(0) h''\rangle \models \Box p$。对于 $i \in \mathbf{N} - \{0\}$，有 $h'' \in \sigma''_A\left(m^{+h''}(i)\right) = \sigma_A^{h'_*}\left(m^{+h''}(i)\right)$（其中 h'_* 是满足 $h'_* \in \mathbf{Adm}_A^m(\sigma_A)$ 的历史，$m^{+h'_*} = m^{+h''}$，而 $\sigma_A^{h'_*}$ 是从 $m^{+h''}$ 开始、用于证明 $\mathcal{M}, \langle m^{+h''}, h'_*\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \mathbf{G}\Box p$ 的集体策略）。这意味着 $h'' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h''}}\left(\sigma_A^{h'_*}\right)$。因此，$\mathcal{M}, \langle m^{+h''}, h''\rangle \models \Box p \mathbf{U} \Box q$，结合 $(\star)$ 可直接推出 $\mathcal{M}, \langle m, h''\rangle \models \Box p \mathbf{U} \Box q$，从而支持 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$。– 令 φ 表示公理模式 $(LFP_{\mathbf{U}})$。则 $Tr(\varphi) = \langle\langle\emptyset\rangle\rangle^s \mathbf{G}((\Box q \vee (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r)) \rightarrow \Box r) \rightarrow (\langle\langle\emptyset\rangle\rangle^s \mathbf{G}(\langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q \rightarrow \Box r)$。该公式等价于 $\Box \mathbf{G}((\Box q \vee (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r)) \rightarrow \Box r) \rightarrow \Box \mathbf{G}(\langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q \rightarrow \Box r)$。假设 $\mathcal{M}, \langle m, h\rangle \models \Box \mathbf{G}((\Box q \vee (\Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r)) \rightarrow \Box r)$。令 $h' \in H_m$ 和 $i \in \mathbf{N}$。我们要证明 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h'\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q \rightarrow \Box r$。因此，进一步假设 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h'\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$ 是由集体策略 σ_A 证明的。如果存在 $h'' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，使得 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \Box q$，那么主要假设可直接推出 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \Box r$，即得所需结论。因此，假设对于每个$h'' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，使得 $\mathcal{M}, \left\langle \left(m^{+h'}(i)\right)^{+h''}(j)\right.$ 的指标 j 都严格大于 0。取 h'' $\mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，使上述指标为 j。我们将证明 $\mathcal{M}, \left\langle \left(m^{+h'}(i)\right), h''\right\rangle \models \Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r$。进一步假设 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$ 是由集体策略 σ_A 证明的，这直接意味着 $\mathcal{M}, \left\langle \left(m^{+h'}(i)\right), h''\right\rangle \models \Box p$。对于另一个合取项，我们来证明以下断言成立：对于每个 $h''' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，都有 $\mathcal{M}, \left\langle \left(m^{+h'}(i)\right)^{+h'''}, h'''\right\rangle \models \Box r$。反设此断言不成立。那么存在一个可容许历史 h_*，使得 $\mathcal{M}, \left\langle \left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*}, h_*\right\rangle \not\models \Box r$。根据主要假设，这意味着 $\Box q$ 在该指标处不成立；因此，进一步假设 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$ 是由集体策略 σ_A 证明的，便意味着 $\Box p$ 在该指标处成立。注意，不可能对于所有满足$\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*} \in h'''$的 $h''' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，$\Box r$ 都在沿着 h''' 和 h''' 的 $\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*}$ 后继所对应的指标处成立，因为这将意味着 $\langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r$ 在基于 $\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*}$ 的每个指标处都成立，而主要假设因而会推出 $\Box r$ 在 $\left\langle \left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*}, h_*\right\rangle$ 处成立，这与我们假设的情况相矛盾。因此，必定存在 $h'_* \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，使得$\mathcal{M}, \left\langle \left(\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*}\right)^{+h'_*}, h'_*\right\rangle \not\models \Box r$。

同样，主要假设意味着 $\Box q$ 在该指标处不成立；因此，进一步假设 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathbf{U} \Box q$ 是由集体策略 σ_A 证明的，便意味着 $\Box p$ 在该指标处成立。类似地，对于所有满足 $\left(\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*}\right)^{+h'_*} \in h'''$ 的 $h''' \in \mathbf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，$\Box r$ 不可能在沿着 h''' 和 h''' 的 $\left(\left(m^{+h'}(i)\right)^{+h_*}\right)^{+h'_*}$ 后继所对应的指标处成立，因此必定存在一个可容许

历史 h''_* 使得 $\Box r$ 在由 $\left(\left(m^{+h'}\text{的后继给出的索引处不成立，即 }_i\right)^{+h_*}\right)^{+h'_*}$沿着 h''_* 和 h''_*。再次，主要假设由此推出 $\Box q$ 在这样的索引处不成立，因此，进一步假设 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathsf{U} \Box q$通过集体策略 σ_A 蕴含 $\Box p$ 在这样的索引处成立。借助这一论证和自然归纳，可以证明存在一段历史 $h_+ \in \mathsf{Adm}_A^{m^{+h'(i)}}(\sigma_A)$，使得 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h_+\right\rangle \models \mathsf{G}\Box p$，这与假设 σ_A 证明了 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s \Box p \mathsf{U} \Box q$ 相矛盾。因此， $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r$。因此， $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \Box p \wedge \langle\langle A\rangle\rangle^s X \Box r$成立。主要假设由此蕴含 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h''\right\rangle \models \Box r$，所以 $\mathcal{M}, \left\langle m^{+h'}(i)\ h'\right\rangle \models \Box r$ 也成立。

□

引理2。 **14.** 设公式 φ, ψ 是语言 $\mathcal{L}_{ATL}$中的公式，则以下各条成立 :

a) 如果 $Tr(\varphi)$ 和 $Tr(\varphi \to \psi)$ 对于带标签的 bdt模型类均有效，那么 $Tr(\psi)$ 对于带标签的 bdt模型类也有效。

b) 如果 ψ 是通过将 φ 中的命题字母一致代换为 $\mathcal{L}_{ATL}$中的任意公式而从 φ 得到的，并且 $Tr(\varphi)$ 对于带标签的 bdt模型类有效，那么 $Tr(\psi)$ 对于带标签的 bdt模型类也有效。

c) 如果 $Tr(\varphi \to \psi)$ 对于带标签的 bdt模型类有效，那么
$Tr\left(\langle\langle A\rangle\rangle X\varphi \to \langle\langle A\rangle\rangle X\psi\right)$ 对于带标签的 bdt模型类也有效。

d) 如果 $Tr(\varphi)$ 关于带标签的 bdt模型类有效，那么 $Tr(\langle\langle\emptyset\rangle\rangle \mathsf{G}\varphi)$ 关于带标签的 bdt模型类也有效。

证明。 a) 注意到， $Tr(\varphi \to \psi)$ 在逻辑上等价于 $Tr(\varphi) \to Tr(\psi)$。因此，如果 $Tr(\varphi)$ 关于带标签的 *bdt*模型类有效，并且 $Tr(\varphi) \to Tr(\psi)$ 也有效，那么我们可以得到， $Tr(\psi)$ 关于带标签的 *bdt*模型类也有效。

b) 令 $p_i \mapsto \theta_i$ 为 φ 上的一致代换。注意到， $Tr(\psi)$ 是通过一致代换$p_i \mapsto Tr(\theta_i)$得到的。由于一致代换保持关于带标签的 *bdt*模型类的有效性，因此， $Tr(\varphi)$ 关于带标签的 *bdt*模型类有效这一事实蕴含着， $Tr(\psi)$ 关于带标签的 *bdt*模型类也有效。

c）直接由以下事实得出： $Tr(\varphi \to \psi)$在逻辑上等价于 $Tr(\varphi) \to Tr(\psi)$，且 $Tr\left(\langle\langle A\rangle\rangle X\varphi \to \langle\langle A\rangle\rangle X\psi\right)$在逻辑上等价于 $\langle\langle A\rangle\rangle^s XTr(\varphi) \to \langle\langle A\rangle\rangle^s XTr(\psi)$。

d）直接得出自以下事实： $Tr(\langle\langle\emptyset\rangle\rangle \mathsf{G}\varphi)$在逻辑上等价于 $\Box \mathsf{G} Tr(\varphi)$.

□

命题 2.15。 对于语言 $\mathcal{L}_{ATL}$中的公式 φ ，有： $\vdash_{\Lambda_{\mathtt{ATL}}} \varphi$ 当且仅当 $Tr(\varphi)$ 相对于确定性标记bdt模型类是有效的。

证明。 (⇒) 假设 $\vdash_{\Lambda_{\mathtt{ATL}}} \varphi$。我们对证明的长度进行归纳。引理 2.13 保证，若 φ 是 $\Lambda_{\mathtt{ATL}}$的某个公理或公理模式的实例，则 $Tr(\varphi)$相对于标记*bdt*模型类是有效的。若 φ 是通过一致代换、肯定前件、 $\langle\langle A\rangle\rangle X$-单调性或 $\langle\langle\emptyset\rangle\rangle$G-必然化由 $\Lambda_{\mathtt{ATL}}$ 的定理得到的，则引理 2.14 保证 $Tr(\varphi)$相对于标记*bdt*模型类是有效的。

(⇐) 我们采用逆否命题进行证明。假设 $\nvdash_{\Lambda_{\mathtt{ATL}}} \varphi$。这意味着 $\neg\varphi$ 是 $\Lambda_{\mathtt{ATL}}$-一致的。根据 Goranko 和 van Drimmelen（2006）关于完备性的结果，存在一个并发博弈结构 $\mathcal{S}$，使得 $\mathcal{S}, w \models \neg\varphi$对某个属于 $\mathcal{S}$的论域的 w成立。根据命题 2.11， $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle\lambda_w, h\rangle \models Tr(\neg\varphi)$，对于

每个 $h \in H_{\lambda_w}$。由于根据构造存在这样一个 h （我们将其记为 h_*），因此有 $\mathcal{M}^{\mathcal{S}}, \langle \lambda_w, h_* \rangle \models \neg Tr(\varphi)$，所以 $Tr(\varphi)$ 对带标记的 bdt-模型类并非有效。

□

命题 2.16。 对于语言 $\mathcal{L}_{ATL}$ 的公式 φ， φ 相对于并发博弈结构类是有效的，当且仅当 $Tr(\varphi)$ 相对于确定性标记 bdt 模型类是有效的。

证明。 **(⇒)** 如果 φ 相对于并发博弈结构类是有效的，那么 Goranko 和 van Drimmelen（2006）的完备性结果表明 $\vdash_{\Lambda_{\mathrm{ATL}}} \varphi$。随后，命题 2.15 的从左到右方向表明， $Tr(\varphi)$ 相对于确定性标记 bdt 模型类是有效的。

(⇐) 如果 $Tr(\varphi)$ 相对于确定性标记 sbdt 模型类是有效的，那么根据命题 2.15 的从右到左方向，可知 $\vdash_{\Lambda_{\mathrm{ATL}}} \varphi$。随后，Goranko 和 van Drimmelen（2006）的可靠性结果表明， φ 相对于并发博弈结构类是有效的。

□

参考文献

Alur, R., Henzinger, T. A., and Kupferman, O.（1997年）。交替时间时序逻辑。载于组合性国际研讨会，第 23–60 页。施普林格。Alur, R., Henzinger, T. A., and Kupferman, O.（2002）。交替时间时序逻辑。*ACM* 会刊，49(5):672–713。Belnap, N., Perloff, M., and Xu, M.（2001年）。面向未来：非决定论世界中的行动者与选择。牛津大学出版社。Broersen, J., Herzig, A., and Troquard, N.（2006）。将交替时间时序逻辑嵌入行动者战略逻辑。逻辑与计算期刊，16(5):559–578。Goranko, V. and Jamroga, W.（2004年）。比较多智能体系统逻辑的语义。载于信息、交互与行动者，第 77–116 页。施普林格。Goranko, V. and van Drimmelen, G.（2006）。交替时间时序逻辑的完全公理化与可判定性。理论计算机科学，353(1-3):93–117。Horty, J. F. and Belnap, N.（1995年）。审议型 stit：对行动、不作为、能力与义务的研究。哲学逻辑期刊，24(6):583–644。Pauly, M.（2002）。博弈中联盟权力的模态逻辑。逻辑与计算期刊，12(1):149– 166。