arXiv:2302.07369v1 [math.AT] 14 Feb 2023

通过障碍理论构造点构形空间的模型 I

THOMAS WILLWACHER

摘要。我们仅从代数角度出发，通过障碍理论推导流形上点构形空间的有理（Sullivan）模型，基本不借助分析或几何方法。

目录

1. 引言 3 致谢 5 2. 记号与约定 6 2.1. 一般约定 6 2.2. 李可容许代数与模 6 2.3. Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子 $\mathcal{F}_n$ 7 2.4. Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 8 2.5. $\mathcal{F}_n$ 的上同调 8 3. 运算子、运算子模及其有理同伦论 9 3.1. Λ 运算子与 Λ 模 9 3.2. Λ Hopf 余运算子与余模 10 3.3. 拓扑与单纯 Λ-运算子的同伦论 10 3.4. (Λ-)运算子上的拓扑与单纯右模的同伦论 12 3.5. 右算子模的归纳与限制 13 3.6. Λ 运算子的有理同伦论 14 3.7. 运算子模的有理同伦论 15 3.8. （余）归纳与（余）限制 17 3.9. Λ Hopf 余运算子与余模的 W 构造 19 3.10. 映射空间 20 3.11. （余）运算子的扭曲构造 20 4. 构形空间型的模与余模 22 4.1. 一个余自由Com 模 22 4.2. 构形空间型模 23 4.3. 构造：一个自由 Com^c-余模 24 4.4. 构形空间类型的余模 25 4.5. 作为 C-余模的自由性 26 5. 构形空间类型余模的性质 28 5.1. 等价条件 28

5.2. 代数 Cohen-Taylor 型谱序列 29 5.3. 对角元 30 5.4. 示例：La
mbrechts-Stanley 型余模 33 6. $SLie_\infty$ 代数、Maurer-Cartan 空间与障碍理论 35
6.1. 滤过完备曲弯 $SLie_\infty$-代数 35 6.2. $SLie_\infty$-代数的图式形式体系 36 6.3. 滤过完备
$SLie_\infty$-代数的 Maurer-Cartan 空间 37 6.4. $SLie_\infty$ 障碍理论 38 7. Hopf 余运算子余模
的变形复形 39 7.1. 变形复形的构造 39 7.2. 微分分次李代数作用 42 7.3. 微分分次李代
数作用与映射空间 44 8. 图形（余）运算子与（余）模 46 8.1. Kontsevich Λ Hopf 余
运算子 $Graphs_n$ 478.2. Λ Hopf $Graphs^{\#}$ n 余模
$Graphs^{\#}$ V,n 508.3. 分次李代数 $HGC^{\#}$ V,n 518.4. 微分与李代数 $HGC_{V,}$
$_n$ 558.5. Λ Hopf $Graphs_n$ 余模 $Graphs_{V,}$
$_n$ 588.6. $Graphs_{V,n}$ 作为 Λ Hopf Com^c 余模的拟
自由性 60 8.7. 滤过
$\mathcal{F}$ 618.8. 滤过
$\mathcal{G}$ 628.9. 边谱序列与
构形空间类型 64 8.10. 旁论：同伦交换代数 67 8.11. 复杂度滤过与一元部分的同伦类
型 67 9. Com^c 余模的图与变形复形 70 9.1. Com^c 余模映射 70 9.2. 毛图复形及其 $SLie_\infty$-
结构 72 9.3. 分次版本 74 10. 主要结果及定理 1.1 的证明 76 10.1. 定理 10.1 的证明
76 10.2. 命题 10.2 的证明 77 11. 自同构空间与定理 1.2 的证明 78 11.1. 定义与一般事
实 78 11.2. $Graphs^Z$ V,n 的自同构 7911.3. 定理 11.2 的证明 80 12. $HGC_{\bar{H},n}$的两个较小
变体：$GC_{H,n}$ 与 $GCp_{H,n}$ 8312.1. 与非退化对角类关联的
Maurer Cartan 元 83 12.2. 微分分次李代数 $GCx_{V,}$
$_n$ 85的定义 12.3. $GCx_{V,n}$ 与 HGC^{Z_Δ}V,n 的上同
调 90 12.4. 非退化约化对角类与微分分次李代数 $GCp_{H,n}$ 9213. 应用 96
13.1. 一般流形构形空间的有理同伦类型 96 13.2. 特例 1：高度连通流形 97

13.3. 特例 2：闭流形 98 13.4. 特例 3：具有球面边界的流形 99 13.5. 有理化构形空间的自同构 99 附录 A. Goldman-Millson 定理的一个技术变体 102 A.1. 1-胞腔与拼接 103 A.2. 定理 A.1 的证明 105 参考文献 107

1. 引言

设 M 是一个维数为 $n \geq 2$ 的流形，并考虑以下空间

$$\mathrm{conf}_{\mathbf{M}}(r) = \{(x_1, \ldots, x_r) \mid x_j \in \mathbf{M}, x_i \neq x : i \text{ for } i \neq j\}$$

M 上 r 个可区分点的构形空间。设 $\mathcal{F}_M(\mathrm{r})$ 是 $\mathrm{conf}_{\mathbf{M}}(\mathrm{r})$ 的 Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 紧化，见 [3]。进一步假设 M 是平行化的，也就是说，我们给定了其切丛的一个平凡化。那么，集合 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 带有小圆盘拟运算的 Fulton-MacPherson 版本 $\mathcal{F}_n$ 的自然拟运算右作用。拟运算右$\mathcal{F}_n$-模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 在代数拓扑中颇受关注，因为它们出现在 Goodwillie-Weiss 嵌入演算 [7, 8, 31, 32]中。特别地，人们对它们的有理同伦论感兴趣。从代数学家的角度看，嵌入演算引出了以下三个代数问题：

- 问题 1：按照有理同伦论的意义，为运算子及运算子模对（$\mathcal{F}_n$，$\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$）寻找“易于处理”的模型。具体而言，这意味着要在微分分次交换代数中寻找一个余合作子 C 和一个右 C-余模 M，使得对（C，M）能够通过一串拟同构与（$\mathcal{F}_n$，$\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$）上的（某种版本的）微分形式联系起来。详情及更精确的定义请参见下文第 3 节。
- 问题 2：给定这样一个用于建模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 的右 C-余模 M，我们希望研究右 C-余模范畴中的同伦自同构单纯幺半群 $\mathrm{Aut}_h(\mathrm{M})$。
- 问题 3：给定两个这样的模型 M 和 N，分别用于建模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$（其中 N 是另一个流形），我们希望研究右 C-余模范畴中的导出映射空间 $\mathrm{Map}_h(\mathrm{M}, \mathrm{N})$。

本文将介绍用于解决或简化前两个问题的代数方法。映射空间的计算将留待后续工作。让我们先概述已有研究，从问题 1 开始。过去 60 年来，流形上点的构形空间的有理同伦论在文献中受到了广泛关注。主要成果包括：Arnold [4] 和 Cohen [13], 确定了 R^n 中点的构形空间的实或有理同伦型；Fulton-MacPherson [21],、Kriz [41] 和 Totaro [52]的工作确定了光滑射影簇中点的构形空间的实或有理同伦型。这些早期工作并未研究运算子的作用。最近，小圆盘 operad 的有理同伦型，以及由此

$\mathcal{F}_n$ 的有理同伦型已经得到确定，结果表明它是有理形式的 [23,27]。也就是说，对于上面的 $\mathcal{F}_n$ 模型 C，我们可以取其上同调余运算子

$$C = \mathsf{e}_n^c := H^\bullet(\mathcal{F}_n),$$

或一个弱等价对象。此外，Idrissi [35], 以及 Campos 和作者 [12] 为闭平行化流形的构形空间找到了实模型，这些模型也保留了运算子$\mathcal{F}_n$-模结构。值得注意的是，他们构造了从一个（候选）图模型图$\mathbf{M}$ 到 $\mathcal{F}_M$ 上的微分形式 $\Omega_{PA}(\mathcal{F}_\mathbf{M})$ 的一个版本中的显式映射，

$$\mathsf{Graphs}_\mathbf{M} \to \Omega_{PA}(\mathcal{F}_\mathbf{M}).$$

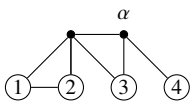
这个映射本质上是通过应用拓扑场论的费曼规则给出的，并涉及构形空间积分。特别是，它仅在实数域上定义。

相比之下，本文提出一种使用障碍理论解决问题 1 的替代性、完全代数化的方法。其核心新概念是构形空间型的（余）运算子（余）模。具体来说，如果右运算子 $\mathcal{F}_n$-模 M 的自然映射

$$M(1)^{\times r} \to (\mathrm{Ind}_{E_n}^{\mathsf{Com},h} M)(r)$$

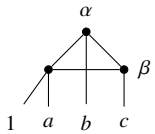
从 M(1) 的各个副本到所诱导的同伦 Com-模中都是弱等价，那么我们就称其为构形空间型，其中 Com 是满足对所有 r 均有 Com(r) 为一点的拓扑运算子。顾名思义，构形空间 $\mathcal{F}_\mathbf{M}$ 是构形空间型的，见下文命题 4.3。对上述内容取对偶，也可定义右 e_n^c-模为构形空间型，见下文定义 4.7，因此所需的 $\mathcal{F}_\mathbf{M}$ 模型确实是构形空间型的，见推论 4.10。

作为第二个要素，我们使用 Kontsevich 图余运算子 Graphs_n 的余模变体，这类变体也曾以类似方式出现在 [12] 中。更确切地说，对于 V 为有限维分次向量空间的情形，$\mathsf{Graphs}_{V,n}(\mathrm{r})$ 的元素是图的形式线性组合，其中包含 r 个编号的“外部”顶点和任意有限个内部顶点，顶点上带有 V 的元素作为标记。



$\in \mathsf{Graphs}_{V,n}(4)$ 其中 $\alpha, \beta \in \mathrm{V}$

关于精确定义，请参见下文第 8 节。这些对象 $\mathsf{Graphs}_{V,n}(\mathrm{r})$ 是右 Hopfe_n^c-余模。此外，它们带有一个大图形微分分次李代数 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 的作用，其元素是带有外腿（或毛发）的图的级数，腿上以 V 的元素作为标记$_1$:= V $\oplus$Q1，顶点上以 V 的元素作为标记*。



$\in \mathbf{HGC}_{V,n}$ with $\alpha, \beta \in V^*$ and $a, b, c, d \in V$

关于 $\mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 在 $\mathsf{Graphs}_{V\text{ 上}n}$的作用的精确定义和组合描述，我们再次参阅第 8 节。现在，我们只需注意，对于任意 Maurer-Cartan 元素 Z $\in \mathrm{HGC}_{V\text{ 中的}n}$,

我们可以用 Z 扭曲 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 从而得到一个右余合作子 Hopf e_n^c-余模$\mathsf{Graphs}^Z{}_{V,n}$。于是，我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 $n \geq 2$，且 M 是一个构形空间型的右 Λ Hopf e_n^c-余模，使得 $\bar{H}(M(1)) =: Q1 \oplus H$ 连通且有限维。则存在一个 Maurer-Cartan 元素 $Z \in \mathrm{HGC}_{\bar{H},n}$，以及右 Λ Hopf We_n^c-余模之间的一个拟同构

$$\Phi : \mathsf{Graphs}^Z_{\bar{H},n} \to W M,$$

其中 We_n^c 和 W M 分别是 e_n^c 和 M 的适当分解。

实际上，这意味着，为了确定流形上点的构形空间的有理同伦型，只需确定正确的 Maurer-Cartan 元素 $Z \in \mathrm{HGC}_{\bar{H},n}$。在许多情况下，通过形式次数计数论证相对容易做到这一点。例如，我们将在下文第 13 节证明，上述定理可用于描述维数至少为 4 的无边界平行化紧流形上点的构形空间的有理同伦型。

我们强调，上述定理 1.1 是一个完全代数性的结果，其证明采用障碍理论方法。它既不涉及也不使用流形上点的构形空间，也不涉及构形空间积分等解析技术。当然，将其应用于构形空间的有理同伦时，需要构形空间的有理同伦论存在；不过，只需确认存在一个代数模型，且该模型属于构形空间型。

此外，通过用 Maurer-Cartan 元 Z 扭曲而得到的定理 10.1 中的模型 $图^Z{}_{V,n}$，自动带有扭曲微分分次李代数 $\mathrm{HGC}^Z{}_{V,n}$的作用。微分分次李代数 $\mathrm{HGC}^Z{}_{V,n}$ 并非前幂零，因此李代数作用无法直接积分为群作用。不过，我们可以将其限制在前幂零微分分次李子代数 $\mathrm{HGC}^Z{}_{,nil\ V,n} \subset \mathrm{HGC}^Z{}_{V,n}$上。接着，我们用本质上与定理 10.1 所依据的相同计算技术证明，相应的群作用穷尽了 $图^Z{}_{V,n}$的同伦自同构中的“Torelli”部分，更精确地说：

定理 1.2（见推论 11.3）。设 V 是一个有限维正分次向量空间，且 $Z \in \mathcal{G}^1\mathrm{HGC}_{V,n}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。则有如下单纯幺半群的弱等价

$$\mathrm{Exp}_{\bullet}(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n}) \simeq \mathrm{Aut}^h(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})_{[1]},$$

其中，左侧是指数（单纯）群，右侧由该空间的同伦自同构单纯幺半群中对应于在上同调上诱导恒等映射的态射的连通分支组成。

在第 13 节中，我们结合定理1.1和1.2，计算了“足够良好”流形的构形空间有理模型的同伦自同构群的 Torelli 部分。特别是，这适用于高度连通的流形。

致谢

本文受益于与许多同事的讨论，在此谨致以衷心感谢，其中包括 Alexander Berglund、Benoit Fresse、Sander Kupers、Oscar Randal-Williams、Victor

Turchin 和 Bruno Vallette。此外，作者感谢瑞士国家科学基金会通过 NCCR Swissmap 对本研究的支持。

2. 记号与约定

2.1. 一般约定。我们通常采用上同调约定，即分次向量空间上的微分次数为 +1。我们将“微分分次”一词缩写为 dg，或者完全省略该词，因为我们几乎所有的代数对象都是微分分次的。通常，我们考虑的所有向量空间都是有理数向量空间，除非另有说明，拓扑空间的上同调均取有理数系数。微分分次向量空间 (V,d) 或拓扑空间 X 的上同调分别记为 H(V) 或 H(X)。特别地，注意到

$$H(X) := H^\bullet(X;\mathbb{Q}),$$

右侧采用了上同调文献中更为常见的记号。

对于分次向量空间 V，我们用 V[k] 表示次数移位版本：如果 $x \in V$ 是次数为 p 的齐次元素，那么同一元素在 V[k] 中的次数为 p – k。

我们将经常考虑过滤的微分分次向量空间

$$\cdots \supset \mathcal{F}^p V \supset \mathcal{F}^{p+1} V \subset \cdots .$$

在这种情况下，我们考虑伴随分次空间的两个版本：

$$\mathrm{gr}V = \bigoplus_p \mathcal{F}^p V/\mathcal{F}^{p+1}V \qquad\qquad \hat{\mathrm{gr}}V = \prod_p \mathcal{F}^p V/\mathcal{F}^{p+1}V.$$

对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$(A, B) 表示两个对象 A 和 B 之间的态射集合。如果该范畴是富化于（微分分次）向量空间上的，那么我们使用记号 $\mathcal{H}$om(A, B) 表示态射（微分分次）向量空间。此外，我们使用记号 Map(A, B) 表示映射空间或单纯集。

范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对称序列 A，是由对象 A(r) 组成的序列，并带有对称群 S_r 的右作用，其中 r = 0，1，.....。对于两个对称序列 A、B，我们用 A ∘ B 表示复合积，见 [47, 第 5.1 节6]。请注意，该记号与使用“∘”表示态射的复合相冲突，但我们希望不会因此产生混淆。

2.2. 李可容许代数与模。微分分次向量空间 g 上的李可容许代数结构是一个二元运算

$$* : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

使得相应的交换子括号

$$[x, y] = x * y - (-1)^{|x||y|} y * x$$

满足雅可比恒等式，因此是 g 上的李括号。这等价于结合子满足以下条件：

$$A(x, y, z) = (x * y) * z - x * (y * z)$$

其反对称分量为零:

$$A(x,y,z)+(-1)^{|x|(|y|+|z|)}A(y,z,x)+(-1)^{|z|(|x|+|y|)}A(z,x,y)$$
$$-(-1)^{|x||y|}A(y,x,z)-(-1)^{|x||z|+|y||x|+|y||z|}A(z,y,x)-(-1)^{|y||z|}A(x,z,y)=0\,.$$

李可容许（左）g-模是一个微分分次向量空间 V，并配有一个二元运算

$$\cdot\colon \mathfrak{g}\otimes V\to V$$

满足

$$x\cdot(y\cdot v)-(x*y)\cdot v=(-1)^{|x||y|}\,(y\cdot(x\cdot v)-(y*x)\cdot v)$$

对于齐次元素 $x, y \in g, v \in V$。这等价于 $\cdot$ 定义了微分分次李代数 g 在 V 上的左作用。

李可容许代数和李可容许模的概念很容易对偶化为李可容许余代数和李可容许余模的概念。特别地，微分分次向量空间 c 上的李可容许余代数结构由一个态射定义

$$\Delta:\mathfrak{c}\to\mathfrak{c}\otimes\mathfrak{c}$$

使得相应的余结合子

$$A^c:=(\Delta\otimes id)\circ\Delta-(id\otimes\Delta)\circ\Delta\colon\mathfrak{c}\to\mathfrak{c}^{\otimes 3}$$

其反对称部分为零,

$$\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}\sigma A^c=0.$$

相应的余括号

$$\Delta-\tau\circ\Delta:\mathfrak{c}\to\mathfrak{c}\otimes\mathfrak{c},$$

借助 $\tau: c \otimes c \to c \otimes c$ 因子换位，进而在 c 上定义微分分次李余代数结构。最后，李可容许 c 余模是微分分次李余代数 c 的一个余模。

2.3. Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子 $\mathcal{F}_n$。对于整数 $n \geq 1$，我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中 r 个编号点的构型空间 $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$。缩放和平移群 $\mathbb{R}_{>0}\ltimes\mathbb{R}^n$ 作用于该空间。存在一个映射

$$\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)/\mathbb{R}_{>0}\ltimes\mathbb{R}^n\to(S^{n-1})^{\binom{n}{2}}\times(\mathbb{RP}^1)^{\binom{n}{3}}$$
$$(x_1,\dots,x_r)\mapsto\left(\dots,\frac{x_i-x_j}{\|x_i-x_j\|},\dots,\left[\|x_i-x_j\|:\|x_j-x_k\|:\|x_k-x_i\|\right],\dots\right).$$

我们将此映射像的闭包记作

$$\mathcal{F}_n(r):=\overline{\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)/\mathbb{R}_{>0}\ltimes\mathbb{R}^n}.$$

（紧致）空间 $\mathcal{F}_n(\mathrm{r})$ 可视为构形空间的一种迭代边界化。它们组成一个运算子，即 Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子 $\mathcal{F}_n$。

这种构形空间的紧化归功于 Axelrod-Singer [3] 和 Fulton- MacPherson，而 $\mathcal{F}_n$ 上的运算子结构则由 Getzler-Jones [30] 和 Kontsevich [39]研究过。运算子 $\mathcal{F}_n$ 与小 n-圆盘运算子 [48], 弱等价，并将在本文中作为后者的替代物。

我们还将考虑带框 Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子 $\mathcal{F}_{frn}=\mathrm{O(n)} \ltimes \mathcal{F}_n$，其定义满足

$$\mathcal{F}_n^{fr}(r) = \mathcal{F}_n(r) \times O(n)^r.$$

它与带框小 n-圆盘运算子弱等价。

2.4. Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$。设 $\mathrm{M} \subset \mathrm{R}^N$ 是一个光滑的 n-维子流形。于是，M 上 r 个编号点的构形空间 $\mathrm{Conf}_{\mathbf{M}}(\mathrm{r})$ 带有一个映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Conf}_{\mathbf{M}}(r) &\to \mathbf{M}^r \times (S^{N-1})^{\binom{r}{2}} \times (\mathbb{RP}^1)^{\binom{r}{3}} \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto \left(\dots, x_i, \dots, \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}, \dots, \left[\|x_i - x_j\| : \|x_j - x_k\| : \|x_k - x_i\| \right], \dots \right).\end{aligned}$$

我们将 $\mathrm{Conf}_{\mathbf{M}}(\mathrm{r})$ 在上述映射下的像的闭包记作

$$\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(r) = \overline{\mathrm{Conf}_{\mathbf{M}}(r)}.$$

若 M 是紧致的，那么 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(\mathrm{r})$ 也是紧致的；否则 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(\mathrm{r})$ 只是构形空间的部分紧化。空间 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(\mathrm{r})$ 由 Axelrod-Singer [3] 和 Fulton-MacPherson [21], 引入；关于更近年的讨论以及对其性质的回顾，我们请读者参阅 [50]。

若 M 是平行化的，那么空间 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(\mathrm{r})$ 可组合成一个运算子右 $\mathcal{F}_n$-模，见[53]。此外，令 $\mathrm{Fr}_{\mathbf{M}}$ 为 M 的标架丛。那么我们可以考虑其带框版本

$$\mathcal{F}_{\mathbf{M}}^{fr}(r) = \mathcal{F}_{\mathbf{M}}(r) \times_{\mathbf{M}^r} \mathrm{Fr}_{\mathbf{M}}$$

空间 $\mathcal{F}_n(\mathrm{r})$，它们进而组合成一个运算子右 $\mathcal{F}_{frn}$-模 $\mathcal{F}_{fr\mathbf{M}}$。

2.5. $\mathcal{F}_n$的上同调。我们将小 n-圆盘运算子的有理上同调余合作子记为 $\mathsf{e}_n^c = \mathrm{H}(\mathcal{F}_n)$。对于 $\mathrm{n} = 1$，有 $\mathsf{e}_n^c = \mathsf{Assoc}^c$ 是余结合余运算子。对于 $\mathrm{n} \geq 2$，$\mathsf{e}_n^c = \mathsf{Pois}_n^c$ 可识别为 n-Poisson 余运算子。余合作子 Pois_n^c 由一个次数为 0 的余交换余乘法运算和一个次数为 $\mathrm{n} - 1$的李余括号运算共同余生成。此外，作为分次交换代数

$$\mathsf{Pois}_n^c(r) = \mathbb{Q}[\omega_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq r] / \sim$$

代数生成元为次数 $\mathrm{n} - 1$ 的 ω_{ij}，关系为 $\omega_{ij}^2 = 0$、$\omega_{ij} = (-1)^n \omega_{ji}$，以及 Arnold 关系

$$\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0\,. \tag{1}$$

本文几乎只考虑 $\mathrm{n} \geq 2$ 的情形，并且为简洁起见，我们更倾向于使用记号 e_n^c，而非 $\mathsf{Pois}^c{}_n$。

3. 运算子、算子模及其有理同伦理论

这里我们简要回顾运算子、算子模及其有理同伦论的相关事实。本节中的论述仅用于说明存在一种定义良好的有理同伦论，即适当范畴上的模型结构及合适的伴随函子。具体来说，我们将在下文中用到同伦（余）诱导函子对歌剧右（余）模定义良好这一事实。因此，本节将相对简短，但会提供大量文献线索，可从中找到更多细节。

3.1. Λ 运算子与 Λ 模。出于技术原因，我们始终使用不含零元数运算的运算子和模。不过，按照 Fresse [23] 的做法，单个零元数运算可以表示为一个 Λ 结构。更确切地说，设 P 是单纯集合或拓扑空间中的一个不含零元数运算的运算子。若 P 配备了一族映射，我们就称 P 为 Λ 运算子

$$\mu_j : P(r) \to P(r-1) \tag{2}$$

对于 r = 2、3、.....，以及 j = 1、.....、r，使得

$$P_*(r) = \begin{cases} * & \text{for } r = 0 \\ P(r) & \text{for } r > 0 \end{cases} \tag{3}$$

构成一个运算子，其中 μ_j 这一运算 $(-) \circ_j *$ 表示在第 j 个槽位与 $* \in P_*(0)$ 进行复合。类似地，设 M 是一个右 P-模，且其零元数部分 $M(0) = \emptyset$ 为空。若 M 配备了一族态射，则称 M 为 Λ-模

$$\mu_j : M(r) \to M(r-1)$$

对于 r = 2、3、.....以及 j = 1、.....、r，使得

$$M_*(r) = \begin{cases} * & \text{for } r = 0 \\ M(r) & \text{for } r > 0 \end{cases}$$

是一个右 P_*-模，其右作用 $*$ 通过态射 μ_j 定义。

特别地，我们认为 Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子 $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_{frn}$ 及其右模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$, $\mathcal{F}_{fr\,\mathbf{M}}$ 不具有元数为零的运算，

$$\mathcal{F}_n(0) = \mathcal{F}_n^{fr}(0) = \mathcal{F}_{\mathbf{M}}(0) = \mathcal{F}_{\mathbf{M}}^{fr}(0) = \emptyset.$$

然而，我们确实将 $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_{frn}$ （分别将 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$, $\mathcal{F}_{fr\,\mathbf{M}}$ ）视为 Λ-运算子（分别视为 Λ-模），从而捕捉与一个零元运算等价的数据。

3.2. Λ Hopf 余拟序列与余模。令 dg$\mathcal{C}$om 为微分（非负）分次交换 Q-代数的范畴。Hopf 余拟序列是范畴 dg$\mathcal{C}$om 中的余合作子。类似地，对于 Hopf 余拟序列 C，Hopf 右 C-模 M 是范畴 dg$\mathcal{C}$om 中的 C-右模。换言之，我们要求 M(r) 是微分分次交换代数，并且余合作子余作用态射

$$M(s_1 + \cdots + s_r) \to M(r) \otimes C(s_1) \otimes \cdots \otimes C(s_r)$$

是微分分次交换代数的态射。

我们通常假设，我们的余合作子和余模在零元数处没有余合作。然而，与 Λ-运算子和 Λ-模对偶地，我们也考虑 Hopf Λ 余合作子和 Hopf Λ余模。对于余合作子，一个 Λ-结构由一族态射组成

$$\mu_j^c : C(r) \to C(r+1)$$

使得

$$C_*(r) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{for } r = 0 \\ C(r) & \text{for } r > 0 \end{cases}$$

是一个 Hopf 余合作子，其中运算 μ_j^c 是余复合 $C_*(r) \to C_*(r+1) \otimes C_*(0)$。类似地，Hopf C-余模 M 如果配备了运算

$$\mu_j^c : M(r) \to M(r+1) \tag{4}$$

使得

$$M_*(r) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{for } r = 0 \\ M(r) & \text{for } r > 0 \end{cases}$$

是一个右 Hopf C_*-余模，其中 μ_j^c 是余复合

$$M_*(r) \to M_*(r+1) \otimes C_*(0).$$

如果上下文允许，我们通常会将“Λ Hopf C-余模”简写为 C-余模。

3.3. 拓扑和单纯 Λ-运算子的同伦论。单纯集合和拓扑空间范畴中的 Λ-运算子的同伦论已在 [22, 26] 中建立。这里我们简要回顾主要结果。我们用 s$\mathcal{S}$et 和 $\mathcal{T}$op 表示单纯集合和拓扑（k-）空间的模型范畴[1] 我们使用标准的 Quillen 等价

$$|-| : s\mathcal{S}et \rightleftarrows \mathcal{T}op : \mathrm{S}. \tag{5}$$

拓扑空间与单纯集合之间，其中 S 和 $|-|$分别是奇异单纯复形函子和几何实现函子。有关模型范畴结构的定义和详细信息，请参阅 [22, 第 8 节。3] 我们将 $\mathcal{T}$op 或 s$\mathcal{S}$et 中对称序列（分别为 Λ 序列）的范畴记作 (Λ)s$\mathcal{S}$et$\mathcal{S}$eq 和 (Λ)$\mathcal{T}$op$\mathcal{S}$eq。于是可由[22, 定理 8.3.19、8.3.20], [17, 节 1] 得到以下结果。

[1]我们遵循 [17, 第 1 节2]中的约定。

定理 3.1（Fresse、Ducoulombier、Turchin）。范畴 $\Lambda\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{S}\mathrm{eq}$ 和 $\Lambda\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{S}\mathrm{eq}$ 可赋予余纤维生成的模型范畴结构，使得弱等价为按元数的同伦等价，而余纤维化则是那些在 Σ-序列上的投射模型结构中属于余纤维化的态射。Quillen 等价 (5) 通过逐对象应用诱导出一个 Quillen 等价

$$|-|:\Lambda s\mathcal{S}et\mathcal{S}eq \rightleftarrows \Lambda\mathcal{T}op\mathcal{S}eq:\mathrm{S} \tag{6}$$

这些模型范畴之间。

证明。关于模型结构存在性的陈述可见 [22, 定理 8.3.19、8.3.20], [17, 第 1] 节。我们只需验证上述伴随是 Quillen 等价。首先注意到，相应的投射模型范畴之间的类似伴随

$$|-|:s\mathcal{S}et\mathcal{S}eq \rightleftarrows \mathcal{T}op\mathcal{S}eq:\mathrm{S}$$

Σ 序列之间的伴随是 Quillen 伴随，因为 S 显然保持（无挠）纤维化。但由于 Λ 序列范畴中的（无挠）余纤维化继承自 Σ-序列，因此也由 $|-|$ 保持。因此，(6) 是 Quillen 伴随。它是等价这一事实直接由 (5) 是等价得出。□

范畴 $\Lambda\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{S}\mathrm{eq}$ 和 $\Lambda\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{S}\mathrm{eq}$ 是函子范畴 $\Lambda\to\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}$、$\Lambda\to\mathcal{T}\mathrm{op}$，其定义在广义 Reedy 范畴 Λ 上（另见 [22, 第 8.3] 节）；上述模型结构则是相应的 Reedy 模型结构。

随后通过模型范畴转移，在 Λ 运算子 $\Lambda\,\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 和 $\Lambda\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 的范畴上定义模型结构。我们也将由此得到的模型结构称为Λ 运算子的 Reedy 模型结构。

定理 3.2（Fresse）。单纯和拓扑 Λ运算子的范畴 $\Lambda\,\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 和 $\Lambda\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 带有良定义的余纤维生成模型结构，该结构通过沿自由/遗忘伴随对模型结构进行右传递而得到

$$\mathbb{F}:\Lambda s\mathcal{S}et\mathcal{S}eq \rightleftarrows \Lambda\, s\mathcal{S}et\mathcal{O}\mathrm{p}:U \qquad\qquad \mathbb{F}:\Lambda\mathcal{T}op\mathcal{S}eq \rightleftarrows \Lambda\,\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}:U.$$

Quillen 等价 (5) 的逐对象扩张给出一个 Quillen 等价

$$|-|:\Lambda\, s\mathcal{S}et\mathcal{O}\mathrm{p} \rightleftarrows \Lambda\,\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}:\mathrm{G}. \tag{7}$$

在 $\Lambda\,\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 或 $\Lambda\,\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 中，态射 $\mathrm{f}:\mathrm{P}\to\mathrm{Q}$ 是余纤维化，当且仅当态射 f 是对称（即非-Λ）运算子范畴中的余纤维化。

具体而言，这些 Reedy 模型结构具有以下几类特殊态射。

- 弱等价是逐对象弱等价。

- 纤维化是指在 Λ 序列范畴中相对于 Reedy 模型结构为纤维化的那些态射。

- 余纤维化是指那些相对于无圈纤维化具有左提升性质的态射。

定理 3.2 的证明。关于转移模型结构的存在性，我们再次参见 [22]。特别是，定理的最后一个陈述是 [22, 8.4.12]。

伴随 (7) 是 Quillen 伴随，因为按构造，G 保持（无圈）纤维化，这是因为它是 Quillen 伴随 (6) 中的右伴随。此外，(7) 是 Quillen 等价这一事实，也可直接由底层函子 (5) 是 Quillen 等价推出。□

我们还将回顾文献中的以下著名结果。

命题 3.3（Getzler-Jones [30], Salvatore [48, 推论 3.8]）。
Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 运算子 $\mathcal{F}_n$ 在配备 Reedy 模型范畴结构的 $\Lambda\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 中是余纤维对象。

证明。更准确地说，参考文献表明，$\mathcal{F}_n$（不含零元运算）在赋有投射模型结构的对称运算子范畴中是余纤维的。然而，根据上文定理 3.2 的最后一项断言，这意味着 $\mathcal{F}_n$ 在 $\Lambda\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 中相对于 Reedy 模型结构是余纤维的。□

3.4. 拓扑与单纯右模在（Λ-）运算子上的同伦理论。运算子上的右模范畴可以赋予若干种模型范畴结构。例如，对于相当一般的基范畴，[23] 中构造了投射模型结构。这里我们需要另一种特别适用于 Λ 运算子及其模的模型范畴结构，即 Reedy 模型结构，其定义见 [17], ，并总结于以下结果中。

定理 3.4（参见 [17, 定理 3.1 和 3.6]）。设 $\mathrm{P} \in \Lambda\mathcal{T}\mathrm{op}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 和 $\mathrm{Q} \in \Lambda\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{O}\mathrm{p}$ 是良基点[2] Λ 运算子。那么，右 Λ 模在 P 和 Q 上的范畴 $\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_P$ 和 $\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_Q$，可通过自由/遗忘伴随沿右传递获得良定义的模型结构

$$\mathbb{F}_P : \Lambda\mathcal{T}op\mathcal{S}eq \rightleftarrows \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_P : U \qquad \mathbb{F}_Q : \Lambda s\mathcal{S}et\mathcal{S}eq \rightleftarrows \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_Q : U.$$

对 象层面的 Quillen 等价 (5) 的延拓给出了一个 Quillen 等价 e

$$|-| : \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_Q \rightleftarrows \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_{|Q|} : \mathrm{G}. \tag{8}$$

在 $\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_P$ or $\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_P$ 中，态射 $\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 是余纤维化，当且仅当 f 在对称（即非-Λ）拟运算右模范畴中是余纤维化。

证明。尽管结果在 [17] 中基本已经证明，但仍有几点需要说明。首先，[17,定理 3.1] 讨论了以拓扑空间范畴为基范畴、且处于更一般的算子双模情形下模型结构的存在性。然而，由于拟运算右模是双模的特殊情形，其左作用是平凡的，因此，对于拓扑运算子和模，我们的情形也包含在内。

[2]这意味着一元中单位元的包含映射是余纤维化。该条件在单纯形情形下是空泛的。

在拓扑情形下给出的模型结构良定义性的证明 [17] 可以转写到单纯范畴中，方法是利用 $\mathcal{T}$op 与 s$\mathcal{S}$et 之间的 Quillen 等价。更具体地说， [17] 中的证明依赖 Berger 和 Moerdijk 的一般转移定理（[17, 定理 1.1] 或 [5, 第 2.5] 节），其关键在于纤维化替换函子的存在性，以及纤维对象的函子性路径对象。 [17, 第 3.1.1] 节中为拓扑模构造的纤维化替换 $M \to M^f$，可以构造成 $\mathcal{M}\mathrm{od}_Q$ 中的纤维化替换，即 $N \to S|N|^f$。这同样是 $\mathcal{M}\mathrm{od}_Q$ 中的纤维化替换，因为根据伴随关系，S 保持 Λ sequences 的纤维化和弱等价。此外，只需将拓扑 1-单形替换为单纯 1-单形，并将拓扑映射空间替换为单纯映射空间，就可以轻松地把 [17, 定理 3.1] 证明中的路径对象构造转写到单纯情形。这样便可再次应用模型范畴转移定理，并确立单纯情形下 Reedy 模型结构的存在性，即在 $\mathcal{M}\mathrm{od}_Q$ 上。

最后，我们转向 Quillen 等价 (8)。首先，逐对象应用得到的函子在模范畴上定义良好，这是因为底层函子 (5) 在单纯集合与拓扑空间上的幺半性。（对于 (8) 中的右伴随，还需使用伴随单位 $Q \to S|Q|$ 来限制模结构。）此外，显然这些函子仍构成一个伴随对，因为用单位元和余单位表述的伴随条件（参见 [9, 定理 3.1.5 (2)], ）与额外的模结构无关，并且该条件在单纯集合或拓扑空间的基范畴中成立，当且仅当它在此处成立。其次，(8) 中的右伴随保纤维化和弱等价，因为它们由遗忘函子创建，而且 S 根据 Quillen 伴随 (6) 保持 Λ 序列的弱等价和纤维化。同样，等价这一性质继承自底层的、作用于 Λ 序列的 Quillen 等价 (6)。□

命题 3.5（Turchin [53]）。对于 $M \subset R^N$，一个 n 维光滑流形，Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 右 $\mathcal{F}_{frn}$-模 $\mathcal{F}_{fr\,M}$ 是关于上述 Reedy 模型结构的余纤维对象。如果 M 是平行化的，那么 $\mathcal{F}_M$ 同样是 $\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathcal{F}_n}$ 中的余纤维对象。

证明。 [53, 引理 2.3] 中证明了，不含零元运算的 $\mathcal{F}_{fr\,M}$，关于投射模型结构，是一个余纤维的对称右 $\mathcal{F}_{frn}$-模。由定理 3.4 的最后一条断言可知，这意味着Λ 模 $\mathcal{F}_{fr\,M}$ 在 $\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathcal{F}_{frn}}$ 中具有余纤维性。

关于 $\mathcal{F}_M$ 的陈述并未在 [53], 中明确出现，但可以通过省略标架，直接从 [53, 引理 2.3] 的证明中得到。□

3.5. 右算子模的归纳与限制。设 $f : P \to Q$ 是（单纯或拓扑） Λ-运算子的一个态射。对于右 P-模 M，我们考虑沿 f 的限制 $\mathrm{Res}^Q{}_P$，它是同一个 Λ 序列 M，但赋予了沿 f 拉回的右 Q-模结构。类似地，对于右 Q-模 N，我们可以考虑诱导模 $\mathrm{Ind}^P{}_Q M$。注意，任意 Q-模都可以写成自由对象的一个（自反）余等化子 $N \cong$

coeq $(F_Q F_Q N \rightrightarrows F_Q N)$。于是，我们可以将 $\mathrm{Ind}^P{}_Q M$ 定义为相应的余等化子

$$\mathrm{Ind}_Q^P M = \mathrm{coeq}\left(\mathbb{F}_P \mathbb{F}_Q N \rightrightarrows \mathbb{F}_P N\right).$$

请注意，尽管两个函子 $\mathrm{Res}^Q{}_P$ 和 $\mathrm{Ind}^P{}_Q M$ 当然都依赖于态射 f，但我们的记号中省略了 f。原因是，在后续应用中，f 的选择总是固定的，而且上下文会清楚地表明这一点。

归纳函子和限制函子已在 [23] 中得到详细研究。特别是，它们构成一个伴随对

$$\mathrm{Ind}_Q^P : \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_Q \rightleftarrows \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_P : \mathrm{Res}_P^Q. \tag{9}$$

命题 3.6（见 [23, 定理 16.B], [17, 定理 3.8]）。函子 (9) 构成一个奎伦对。若底层态射 $f : P \to Q$ 是连通分支逐点余纤维的运算子之间的弱等价，则 (9) 是一个奎伦等价。

证明。我们指出， [23, 定理 16.B] 给出了同样的结论，但针对的是投射模型结构，而不是我们在此考虑的 Reedy 结构。不过，我们仍可从该文献中得知 (9) 是一个伴随。由于 $\mathrm{Res}^Q{}_P$ 在对象上是恒等函子，它显然创建弱等价和纤维化，因此也保留它们；对于 $\mathcal{M}\mathrm{od}_P$ 和 $\mathcal{M}\mathrm{od}_Q$，这些都是底层Λ 序列范畴中的弱等价和纤维化。因此，(9) 是一个奎伦伴随。关于奎伦等价的结论见 [17, 定理 3.8]。□

3.6. Λ 运算子的有理同伦论。Fresse 在 [22, 26] 中发展了运算子和Λ-运算子的有理同伦论。这里我们概述主要结果。

首先，可以在 dg 余合作子 $\mathrm{dg}\mathcal{O}\mathrm{p}^{\mathrm{c}}$ 的范畴上赋予模型范畴结构，其指定态射类如下。

- 弱等价是逐对象的拟同构。
- 余纤维化是指在正上同调次数上为单射的态射。
- 纤维化通过相对于无圈余纤维化的右提升性质来定义。

定理 3.7（Fresse [26, 定理 1.4]）。上述指定态射类在 $\mathrm{dg}\mathcal{O}\mathrm{p}^{\mathrm{c}}$ 上诱导出良定义的模型范畴结构。该模型结构是余纤维生成的，且生成（无圈）余纤维化可以取为整体维数有限（分别为可数）、集中于有限范围元数内的余合作子之间的（无圈）余纤维化。

随后可通过右传递将该模型范畴结构扩展到微分分次 Hopf 余拟序列和 dg Λ Hopf 余拟序列。

定理 3.8（Fresse [26, 定理 1.6 及第 4.2] 节）。在 dg Hopf 余拟序列 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\mathcal{O}\mathrm{p}^{\mathrm{c}}$ 的范畴以及 dg ΛHopf 余拟序列 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{O}\mathrm{p}^{\mathrm{c}}$ 的范畴上，通过沿自由/遗忘伴随获得的右模型范畴转移，存在定义良好的余纤维生成模型范畴结构

$$dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{O}\mathrm{p}^{\mathrm{c}} \rightleftarrows dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\mathcal{O}\mathrm{p}^{\mathrm{c}} \rightleftarrows dg\mathcal{O}\mathrm{p}^{\mathrm{c}}.$$

[3]逐分量余纤维性意味着，每个 P(r)、Q(r) 在T or s$\mathcal{S}$et 中都是余纤维的。在 s$\mathcal{S}$et 中，这一条件没有实际意义，因为所有对象都是余纤维的。

具体而言，这意味着在 dg$\mathcal{H}$opf$\Lambda\mathcal{O}$p^{c} 和 dg$\mathcal{H}$opf$\mathcal{O}$p^{c} 这两个范畴中，弱等价是拟同构，纤维化是 dg$\mathcal{O}$p^{c}中的纤维化态射，而余纤维化则通过提升性质得到。

接下来，我们回顾有理同伦论中单纯集合与微分分次交换代数之间的（Sullivan）伴随，参见 [22, 第 7 节。2]

$$\Omega : s\mathcal{S}et \rightleftarrows (dg\mathcal{C}om)^{op} : \mathrm{G}$$

函子 G 是松幺半群的，因此逐元数地应用 G 可得到一个从单纯运算子到 dg Hopf 余算子的函子，我们也将其记为 G。

定理 3.9（Fresse [26, 第 2.1、4 节2]）。逐元数地应用 G 可扩展为奎伦对

$$\Omega_\sharp : s\mathcal{S}et\mathcal{O}\mathrm{p} \rightleftarrows (dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\mathcal{O}\mathrm{p}^{c})^{op} : \mathrm{G} \qquad \Omega_\sharp : \Lambda\, s\mathcal{S}et\mathcal{O}\mathrm{p} \rightleftarrows (dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{O}\mathrm{p}^{c})^{op} : \mathrm{G}.$$

左伴随函子 Ω♯ 还具有以下性质，其中 P 是 s$\mathcal{S}$et$\mathcal{O}$p 或 Λs$\mathcal{S}$et$\mathcal{O}$p 中的一个运算子。

- 存在一个 dg 交换代数序列的自然态射 Ω♯(P) → Ω(P)。
- 若 P 是余纤维的，且 P(1) 连通并具有有限有理同调型，那么对于任意 r，态射 Ω♯(P)(r) → Ω(P(r)) 都是拟同构。

具体而言，Ω♯(P) 可定义如下。任意运算子都可以写成自由对象的一个（自反）余等化子

$$P \cong \mathrm{coeq}\,(\mathbb{F}\mathbb{F}\,P \rightrightarrows \mathbb{F}\,P),$$

其中 F 是自由算子函子。利用 Ω♯ 通过伴随将余极限映为极限，并且对于自由对象有 Ω♯(FX) = FΩ(X)，我们得到

$$\Omega_\sharp(P) \cong \mathrm{eq}\,(\mathbb{F}^{c}\Omega(P) \rightrightarrows \mathbb{F}^{c}\Omega(\mathbb{F}\,P)).$$

我们称 Ω♯(P) 为单纯形拟运算 P 的微分分次 Hopf 余拟序列模型。对于余纤维单纯形拟运算，我们将其有理化 P$^{\mathbb{Q}}$定义为 G(Ω♯(P))$^{co}{}_{f}$，其中 (Ω♯(P))$^{co}{}_{f}$ 是 Ω♯(P) 的一个余纤维替换。

我们还通过分别应用奇异链函子 S 和几何实现，将这些概念推广到拓扑运算子。

3.7. 算子模的有理同伦论。算子模的有理同伦论可以沿用 Fresse 的运算子有理同伦论的思路来发展，后者已在前一小节中概述。我们在此略述其构造，将一些技术性验证留待即将发表的工作 [29], ，其中将更详细地发展算子模的有理同伦论。

首先，设 C 是一个固定的 dg 余算子。右 C-dg 余模的范畴记作 dg$\mathcal{M}$od^{c} $_{C}$。可以在 dg 余运算子范畴 dg$\mathcal{O}$p^{c} 上赋予模型范畴结构，其指定态射类如下。

- 弱等价是逐元数拟同构。
- 余纤维化是指在正上同调次数上为单射的态射。
- 纤维化是通过相对于无圈余纤维化的右提升性质来定义的。

定理 3.10 ([29])。上述指定态射类在 $\mathrm{dg}\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\ C}$ 上诱导出良定义的模型范畴结构。该结构是余纤维生成的。生成（无圈）余纤维化可以取为总体维数有限（分别为可数）、且集中于有限范围元数上的余合作子之间的余纤维化。

接下来，设 C 是一个 dg (Λ) Hopf 余拟序列，并考虑 dg Λ Hopf 余模 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\mathcal{M}\mathrm{od}^c$ 和 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c$ 的范畴。

定理 3.11 ([29])。在 dg Hopf C -余模 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\ C}$ 范畴以及 dg ΛHopf C -余模 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\ C}$ 范畴上，存在良定义的余纤维生成模型范畴结构；这些结构通过沿自由/遗忘伴随进行右模型范畴转移而得到

$$dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_C \rightleftarrows dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\mathcal{M}\mathrm{od}^c_C \rightleftarrows dg\mathcal{M}\mathrm{od}^c_C.$$

在这两个范畴 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\ C}$ 和 $\mathrm{dg}\mathcal{H}\mathrm{opf}\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\ C}$ 中，弱等价是拟同构，纤维化是指在 $\mathrm{dg}\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\ C}$ 中为纤维化的那些态射，而余纤维化则由提升性质得到。

前一小节中的函子 Ω♯ o 也有一个自然的扩张，适用于运算子模。

定理 3.12 ([29])。设 P 是一个单纯运算子，或一个单纯 Λ 运算子，并令 C := Ω♯(P)。逐元数地应用 G 可扩展为奎伦伴随

$$\Omega_\sharp : \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_P \rightleftarrows (dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_C)^{op} : \mathrm{G}.$$

设 M 是一个右 P-模。进一步假设 P 和 M 是余纤维的，且 P(1) 和 M (1) 连通并具有有限有理同调型。那么对于任意 r，态射 Ω♯(M)(r) →Ω(M(r)) 都是拟同构。

具体而言，Ω♯(M) 可定义如下。我们将 M 写成一个（自反）余等化子

$$M \cong \mathrm{coeq}\,(\mathbb{F}_P\mathbb{F}_P M \rightrightarrows \mathbb{F}_P M).$$

于是我们得到

$$\Omega_\sharp(M) \cong \mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(P)}\Omega(M) \rightrightarrows \mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(P)}\Omega(\mathbb{F}_P M)\right).$$

我们称 Ω♯(M) 为单纯 P-模 M 的微分分次霍普夫余运算子余模模型。我们还通过应用奇异链函子 S，将这一概念推广到拓扑运算子模。

3.8. （余）归纳与（余）限制。设 $\mathrm{f}:\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ 是（微分分次）Λ Hopf 余拟序列的一个态射，并设 M 是 C 上的右 Λ Hopf 余模。那么，通过余限制（即将上余合成与 f 复合），可赋予 M 一个 D 上的右 ΛHopf 余模结构。我们将所得的右 D 余模记为 $\mathrm{coRes}^{D}{}_{C}\,\mathrm{M}$，并在记号中省略 f。

命题 3.13（[29]）。对于 Λ Hopf 余拟序列的态射 $\mathrm{f}:\mathrm{C}\to\mathrm{D}$，余限制函子构成一个 Quillen 伴随

$$\mathrm{coRes}^{D}_{C}:dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}_{C}\rightleftarrows dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}_{D}:\mathrm{coInd}^{C}_{D}. \tag{10}$$

若 f 是弱等价（即拟同构），则上述伴随是 Quillen 等价。

右伴随函子 $\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}$（余诱导）有如下显式描述。任意右 D-余模 N 都可以写成一个（可反射的）等化子

$$N=\mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^{c}_{D}N\rightrightarrows\mathbb{F}^{c}_{D}\mathbb{F}^{c}_{D}N\right).$$

相应地（隐含地利用右伴随保持极限这一事实），我们有 $\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}\mathrm{N}$ 是等化子

$$\mathrm{coInd}^{C}_{D}N=\mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^{c}_{C}N\rightrightarrows\mathbb{F}^{c}_{C}\mathbb{F}^{c}_{D}N\right). \tag{11}$$

证明。直接验证可知，(11) 定义了余限制函子的右伴随。为此，简记 $\mathrm{Mor}_{D}(\dots)=\mathrm{Mor}^{dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{D}}(\dots)$，并用 $\mathrm{Mor}_{\Lambda}(\dots)$ 表示 dg Hopf Λ 序列范畴中的态射。

具体而言，对于 C-余模 M 和 D-余模 N，我们有如下自然双射链。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mor}_{D}\left(\mathrm{coRes}^{D}_{C}M,N\right)&\cong\mathrm{Mor}_{D}\left(\mathrm{coRes}^{D}_{C}M,\mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^{c}_{D}N\rightrightarrows\mathbb{F}^{c}_{D}\mathbb{F}^{c}_{D}N\right)\right)\\
&\cong\mathrm{eq}\left(\mathrm{Mor}_{D}\left(\mathrm{coRes}^{D}_{C}M,\mathbb{F}^{c}_{D}N\right)\rightrightarrows\mathrm{Mor}_{D}\left(\mathrm{coRes}^{D}_{C}M,\mathbb{F}^{c}_{D}\mathbb{F}^{c}_{D}N\right)\right)\\
&\cong\mathrm{eq}\left(\mathrm{Mor}_{\Lambda}\left(M,N\right)\rightrightarrows\mathrm{Mor}_{\Lambda}\left(M,\mathbb{F}^{c}_{D}N\right)\right)\\
&\cong\mathrm{eq}\left(\mathrm{Mor}_{C}\left(M,\mathbb{F}^{c}_{C}N\right)\rightrightarrows\mathrm{Mor}_{C}\left(M,\mathbb{F}^{c}_{C}\mathbb{F}^{c}_{D}N\right)\right)\\
&\cong\mathrm{Mor}_{C}\left(M,\mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^{c}_{C}N\rightrightarrows\mathbb{F}^{c}_{C}\mathbb{F}^{c}_{D}N\right)\right)\\
&\cong\mathrm{Mor}_{C}\left(M,\mathrm{coInd}^{C}_{D}N\right)
\end{aligned}$$

为证明（10）是 Quillen 伴随，我们将稍作迂回。首先，如上所述的同一构造和论证表明，存在一个 Quillen 伴随

$$\mathrm{coRes}^{D}_{C}:dg\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}_{C}\rightleftarrows dg\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}_{D}:\mathrm{coInd}^{C}_{D} \tag{12}$$

在 C 和 D 上的微分分次余模范畴之间。特别注意，右伴随函子 $\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}$ 与上述在微分分次 Λ Hopf 余模上构造的函子一致，因为微分分次$\mathcal{H}$opf$\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{C}$中的极限是在微分分次$\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{C}$中生成的。显然，(12) 是一个 Quillen 伴随，因为左伴随 $\mathrm{coRes}^{D}{}_{C}$ 逐对象地就是恒等函子，因而保持弱等价（即拟同构）和余纤维化（即在正次数上为单射的态射）。

因此，$\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}$ 将微分分次$\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{D}$ 中的弱等价和纤维化映射为微分分次$\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{C}$中的弱等价和纤维化。然而，微分分次$\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{D}$（分别地，微分分次$\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{C}$）中的弱等价和纤维化继承自微分分次$\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{D}$（分别地，微分分次$\mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{C}$）。因此，作为 (10) 中的右伴随，$\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}$也将（无挠）纤维化映射为（无挠）纤维化，从而 (10) 是一个 Quillen 伴随。

接下来，假设命题中的 f 是弱等价。我们要证明这个伴随是 Quillen 等价。由于 $\mathrm{coRes}^{D}{}_{C}$ 创建弱等价，只需证明以下结论（见 [19, 引理 3.3]）。

断言 1：若 $\mathrm{N} \in \mathcal{M}\mathrm{od}^{c}{}_{D}$ 是纤维化的，则伴随余单位 $\mathrm{coRes}^{D}{}_{C}\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}\,\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 是弱等价。

为证明该断言，注意到余诱导和余限制是在底层的普通（即非-Λ-Hopf）dg 余合作子余模范畴中创建的。此外，考虑某个纤维化替换$\tilde{}\ \hat{}\,\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 以及交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{coRes}^{D}_{C}\mathrm{coInd}^{C}_{D}\,N & \longrightarrow & N \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathrm{coRes}^{D}_{C}\mathrm{coInd}^{C}_{D}\hat{N} & \longrightarrow & \hat{N} \end{array}.$$

左侧的垂直箭头是弱等价，因为根据 Ken Brown 引理，态射 $\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}\mathrm{N} \to \mathrm{coInd}^{C}{}_{D}\,\hat{}\,\mathrm{N}$ 是弱等价，而且余限制保弱等价。因此，上方的水平箭头是弱等价，当且仅当下方的水平箭头是弱等价。将 $\hat{}\,\mathrm{N} = \mathrm{BB}^{c}\mathrm{N}$ 取为标准的巴–余巴构造后，我们便将断言 1 归结为以下陈述。

断言 2：伴随余单位 $\mathrm{coRes}^{D}{}_{C}\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}\mathrm{BB}^{c}\,\mathrm{N} \to \mathrm{BB}^{c}\,\mathrm{N}$ 是一个弱等价。

为验证 断言 2，注意到底层微分分次对称序列上的映射具体为 ，

$$(N \circ \mathrm{B}^{c}\,D \circ C, d) \to (N \circ \mathrm{B}^{c}\,D \circ D, d), \tag{13}$$

其中 d 泛指各微分，左侧是 $\mathrm{coRes}^{D}{}_{C}\mathrm{coInd}^{C}{}_{D}\mathrm{BB}^{c}\mathrm{N}$ 的底层微分分次对称序列，右侧则是 $\mathrm{BB}^{c}\mathrm{N}$ 的底层微分分次对称序列。该映射将 C 因子通过 f 映到相应的 D 因子。微分包含若干部分，分别来自 C、D 上的微分、余巴构造、N 上的余作用以及上余合成。现在考虑 (13) 两侧由因子 $\mathrm{N} \circ \mathrm{B}^{c}\mathrm{D}$ 的总上同调次数给出的递增、穷尽且有下界的滤过。在 (13) 两侧，微分 d 中唯一不提高该次数的部分，分别是由最右侧因子 C 和 D 上的微分诱导的部分。因此，由 K¨unneth 公式可知，映射 (13) 在伴随分次复形上诱导拟同构，进而本身也是拟同构。这就证明了断言 2，因而也证明了该命题。我们强调，在断言 2 的证明中，使用非负分次上链复形至关重要。否则，我们的滤过不一定有下界，相应的伴随谱序列也就不一定收敛到上同调。□

最后，我们指出，（余）归纳与取微分形式相容，如下所示：

命题 3.14. 设 $S \to T$ 是 $s\mathcal{S}et$ 或 $\mathcal{T}op$ 中的运算子态射，且 M 是右 S-模。那么存在右 Λ Hopf $\Omega_\sharp(T)$ 余模的自然同构

$$\Omega_\sharp(\mathrm{Ind}_S^T M) \cong \mathrm{coInd}_{\Omega_\sharp(S)}^{\Omega_\sharp(T)} \Omega_\sharp(M). \tag{14}$$

证明。$\Omega_\sharp(M)$ 定义为等化子

$$\Omega_\sharp(M) = \mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(S)}\Omega(M) \rightrightarrows \mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(S)}\Omega(\mathbb{F}_S M)\right).$$

作为右伴随，余诱导函子与极限可交换，因此（14）的右侧等于

$$\mathrm{eq}\left(\mathrm{coInd}^{\Omega_\sharp(T)}_{\Omega_\sharp(S)}\mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(S)}\Omega(M) \rightrightarrows \mathrm{coInd}^{\Omega_\sharp(T)}_{\Omega_\sharp(S)}\mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(S)}\Omega(\mathbb{F}_S M)\right) = \mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(T)}\Omega(M) \rightrightarrows \mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(T)}\Omega(\mathbb{F}_S M)\right).$$

另一方面，我们有

$$\mathrm{Ind}_S^T M = \mathrm{coeq}\left(\mathbb{F}_T\mathbb{F}_S M \rightrightarrows \mathbb{F}_T M\right).$$

但由于 $\Omega_\sharp$ 根据伴随关系将余极限映为极限

$$\Omega_\sharp(\mathrm{Ind}_S^T M) = \mathrm{eq}\left(\Omega_\sharp(\mathbb{F}_T M) \rightrightarrows \Omega_\sharp(\mathbb{F}_T\mathbb{F}_S M)\right) = \mathrm{eq}\left(\mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(T)}\Omega(M) \rightrightarrows \mathbb{F}^c_{\Omega_\sharp(T)}\Omega(\mathbb{F}_S M)\right).$$

因此，（14）的两侧相等。 □

3.9. Hopf 余拟序列及余模的 W 构造。Boardman-Vogt W 构造是拓扑运算子的一种特殊余纤维化分解 [10]。Berger 和 Moerdijk [5] 将其推广到一般对称幺半模型范畴中的运算子。 [24], 引入了 Hopf 余拟序列的 W 构造的对偶版本 Λ，并在 [11] 中将其扩展到 Hopf 上余代数余模 Λ。

本文中，W 构造的技术定义并不重要。我们只会用到 Λ Hopf 余拟序列及余模存在一个具有特别良好性质的纤维化分解，具体如下述命题所述。

命题 3.15（[24], [11]）。设 C 是一个约化的 Λ Hopf 余拟序列。那么存在一个纤维化分解

$$C \xrightarrow{\sim} W C,$$

W 构造，具有以下性质：

- 作为 dg 余算子，$WC = B\,{}^\circ WC$ 是 dg 运算子 ${}^\circ WC$ 的算子巴构造。特别地，WC 作为分次余合作子是余自由的。
- 微分分次拟序列 ${}^\circ WC$ 带有一个运算子的拟同构 $B_c C \xrightarrow{\sim} {}^\circ WC$，它来自 C 作为 dg 余合作子时的余巴构造。

接下来令 M 为一个 Λ Hopf C 余模。那么存在一个 Λ Hopf W C 余模 W M，它是 M 在 Λ Hopf W C 余模范畴中的纤维化分解

$$M \xrightarrow{\sim} W M .$$

我们称之为 M 的 W 构造。它具有以下性质：

- 作为 dg 余算子 $\mathrm{W M} = \mathrm{B}_{\circ W C}{}^{\circ}\mathrm{W M}$ 是一个 W C 上余模 W M 的模巴构造。特别地，W M 是分次 W C 上余模上的余自由对象。
- dg 模 ${}^{\circ}\mathrm{W M}$ 带有一个来自 M 的余巴构造的 ${}^{\circ}\mathrm{W C}$ 模拟同构 $\mathrm{B}_{C\ C}\mathrm{M} \xrightarrow{\sim} {}^{\circ}\mathrm{W M}$。

3.10. 映射空间。令

$$\Omega(\Delta^r) = \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_r, dt_1, \ldots, dt_r]$$

为 r-单纯形上的多项式微分形式所构成的微分分次交换代数。这些代数组成一个单纯微分分次交换代数 $\Omega(\Delta^\bullet)$。

设 C 和 D 为 Λ Hopf 余拟序列。那么 $C \otimes \Omega(\Delta^\bullet)$ 和 $D \otimes \Omega(\Delta^\bullet)$ 构成定义在 $\Omega(\Delta^\bullet)$ 上的 Λ Hopf 余拟序列。换言之，我们将基环从 Q 扩张到 $\Omega(\Delta^\bullet)$。接着，我们将 C 与 D 之间的映射空间定义为单纯集

$$\mathrm{Map}_{dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{O}\mathrm{p}^c}(C, D) := \mathrm{Mor}_{dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{O}\mathrm{p}^c/\Omega(\Delta^\bullet)}(C \otimes \Omega(\Delta^\bullet), D \otimes \Omega(\Delta^\bullet))$$

由扩张基环 $\Omega(\Delta^\bullet)$ 上的 Λ Hopf 余拟序列态射组成。

类似地，设 M 和 N 是两个右 C-余模。我们将 M 与 N 之间的映射空间定义为单纯集

$$\mathrm{Map}_{dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_C}(M, N) := \mathrm{Mor}_{dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{C\otimes\Omega(\Delta^\bullet)}/\Omega(\Delta^\bullet)}(M \otimes \Omega(\Delta^\bullet), N \otimes \Omega(\Delta^\bullet))$$

由扩张基环 $\Omega(\Delta^\bullet)$ 上的右 Λ Hopf $C \otimes \Omega(\Delta^\bullet)$ 余模态射组成。

遗憾的是，上述映射空间的定义并不能直接使 Hopf 余拟序列或 Hopf 余模的范畴成为单纯模型范畴——所需公理并非全部满足，只有稍弱的版本，详见 [28] 以了解更详细的讨论。不过， [28, 29] 证明了，上述映射空间的定义仍与为任意模型范畴 [22, II.2], [18] 所定义的“真正”映射空间弱等价。

3.11.（余）运算子的扭曲构造。设 C 是一个 dg 余算子，而 $\mathrm{P} = \mathrm{C}^*$ 是其对偶微分分次代数。与任意运算子一样，P(1) 中的一元运算构成一个微分分次代数，特别是一个微分分次李代数。这个微分分次李代数通过代数导子作用于该运算子，作用公式如下：对于 $\mathrm{x} \in \mathrm{P}(1)$、$\mathrm{y} \in \mathrm{P}(\mathrm{r})$,

$$x \cdot y = x \circ_1 y - (-1)^{|x||y|} \sum_{j=1}^{r} y \circ_j x.$$

对偶地，P(1) 也通过余代数导子作用于 C。对偶作用可以用与上式相同的公式定义，但其中 x $\circ_1$ (–) 和 (–) $\circ_j$ x 应解释为复合

$$C(r) \to C(1) \otimes C(r) \xrightarrow{x \otimes id} C(r),$$

其中，第一个箭头是与 $\circ_1$ or $\circ_j$ 对偶的余代数余合成。

特别地，设 m ∈ P(1) 是一个 Maurer-Cartan 元素，也就是说，它是一个次数1元素，满足

$$dm + m \circ_1 m = 0.$$

那么，赋予扭曲微分 d +m· 且复合保持不变的 P 也是一个 dg 余算子，我们记作 P^m。类似地，赋予扭曲微分 d +m· 的 C 也是一个 dg 余算子，记作 C_m。

接下来，设 C 是一个 Hopf 余拟序列。那么，P(1) 带有交换余乘法 Δ : P(1) →(C (1) ⊗ C (1))*。我们声称，如果 Maurer-Cartan 元素 m 是本原的，也就是说

$$\Delta m = m \otimes \epsilon + \epsilon \otimes m \in P(1) \otimes P(1) \subset (C(1) \otimes C(1))^*,$$

其中 ϱ ∈P(1) 是拟序列单位，那么作用 m· 在 C (r) 上也关于交换代数结构是一个导子。为此，只需验证每个复合

$$C(r) \to C(1) \otimes C(r) \xrightarrow{m \otimes id} C(r)$$

是一个导子，其中第一个箭头可以是任意一种可能的余拟序列上余合成。设 y, z ∈C (r)，并用 Sweedler 记号表示上余合成，例如 y → P y′ ⊗ y″。接着利用上余合成是交换代数映射这一事实，以及 P ϱ(x′)x″ = x，验证：

$$\begin{aligned} m \cdot (xy) &= \sum m((xy)')(xy)'' = \sum (-1)^{|y'||x''|} m(x'y')x''y'' \\ &= \sum \left((-1)^{|y'||x''|} m(x')\epsilon(y')x''y'' + (-1)^{|y'||x''|+|x'|} \epsilon(x')m(y')x''y'' \right) \\ &= \sum (m(x')x''y + (-1)^{|x|} xm(y')y'') = (m \cdot x)y + (-1)^{|x|} x(m \cdot y). \end{aligned}$$

特别地，我们得出 C^m 仍是一个微分分次 Hopf 余拟序列。这一构造也可以推广到余拟序列右余模的情形。设 M 是 C 的一个余拟序列右 Hopf 余模。于是我们将 x ∈P(1) 对 a ∈M(r) 的右作用定义为

$$a \cdot x = \sum_{j=1}^{r} a \circ_j x \tag{15}$$

使用与余合作子情形类似的记号“$\circ_j$”。若 m 是一个本原 Maurer-Cartan 元素，则我们将扭曲的 C_m-余模 M^m 定义为 M，其余作用和交换代数结构保持不变，但微分 d – (–) ·m。

4. 构形空间类型的模与余模

4.1. 余自由 Com 模。令 X 为任意空间或单纯集。于是我们考虑右 ΛCom-模 F_X，使得

$$F_X(r) = X^{\times r}$$

对于 r = 1、2、.....。 Λ-运算通过遗忘因子简单地定义，

$$\mu_j : X^{\times r} = F_X(r) \to F_X(r-1) = X^{\times r-1}$$
$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_r).$$

右侧的 Com-作用使用对角映射 Δ： X → X ×X 定义。例如，二元乘积在第一个“槽位”上的右作用为

$$X^{\times r} = F_X(r) \to F_X(r+1) = X^{\times r+1}$$
$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, x_1, x_2, \dots, x_r),$$

an通过等变性和歌剧代数公理，该公式完全确定了该作用 n.

构造 X → F_X 显然具有函子性。此外，我们有如下结果。

引理 4.1。上述函子 F 构成如下伴随

$$U : \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathsf{Com}} \rightleftarrows \mathcal{T}op : F$$

其中，左伴随 U 将一个 ΛCom模 M 赋予其一元部分 U(M) =M(1)。在单纯形情形中，也有一个类似的伴随

$$U : \Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathsf{Com}} \rightleftarrows s\mathcal{S}et : F.$$

证明。首先注意，U ∘F 是恒等映射。设 M 是一个右 Λ Com-模，X 是一个单纯集。假设 g : U(M) → X 是单纯集态射。接下来我们验证，存在唯一的右 Λ Com 模态射 G : M → F_X，使得 U(G) = g。我们首先将 G 构造为一个 Λ 序列态射。它在 G(r) 上定义为以下复合

$$M(r) \xrightarrow{\prod_{j=1}^{r} \lambda_j} \prod_{j=1}^{r} M(1) \xrightarrow{\prod_{j=1}^{r} g} \prod_{j=1}^{r} X = F_X(r),$$

其中， λ_j: M (r) →M (1) 是由集合映射 [1] → [j]（满足1 ↦ j）给出的 Λ运算。我们验证这个映射 G 保持 Λ-结构。由于 S_r-等变性显然成立，只需考虑与生成 Λ-态射 μ_1 的相容性；这些态射表示零元运算在第一个槽上的作用。对于 x ∈ M(r)

$$\mu_1(G(x)) = \mu_1(g(\lambda_1(x)), \dots, g(\lambda_r(x))) = (g(\lambda_2(x)), \dots, g(\lambda_r(x)))$$
$$= (g(\lambda_1(\mu_1(x))), \dots, g(\lambda_{r-1}(\mu_1(x)))) = G(\mu_1(x)).$$

此外请注意，此时 G 已由其交织 Λ 运算 λ_j 的要求唯一确定。

因此，只需检查 G 是否也保留右侧的 Com 作用。同样，由于 S_r-等变性，只需考虑由二元乘积生成元 $m \in \mathrm{Com}(2)$ 在第一个位置上作用所生成的作用 $c_{12} = (-) \circ_1 m$。我们计算

$$\begin{aligned} c_{12}(G(x)) &= c_{12}(g(\lambda_1(x)), g(\lambda_2(x)), \dots, g(\lambda_r(x))) = (g(\lambda_1(x)), g(\lambda_1(x)), g(\lambda_2(x)), \dots, g(\lambda_r(x))) \\ &= (g(\lambda_1(c_{12}(x))), g(\lambda_2(c_{12}(x))), g(\lambda_3(c_{12}(x))), \dots, g(\lambda_{r+1}(c_{12}(x)))) = G(c_{12}(x)), \end{aligned}$$

使用第二个等式中 Λ 结构与Com作用的相容性。 □

4.2. 构形空间型模。任何拓扑或单纯 Λ 运算子 P 都带有一个典范映射 Λ 运算子 $P \to \mathrm{Com}$。因此，通过限制，上述右模 F_X 可成为任意 Λ 运算子上的右模。

定义 4.2. • 若伴随余单位 $F \circ U(X) \to X$ 是弱等价，我们称右 Λ Com 模 M 为幂型。

- 设 P 是一个良基点的 Λ 运算子，M 是一个右 P 模。若同伦诱导右模 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{Com},h}_P M$ 为幂型，则称 M 为构形空间型。

换言之，若映射

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{Com},h}_P M \to F_{(\mathrm{Ind}^{\mathrm{Com},h}_P M)(1)}$$

是一个弱等价。在 $P(1) = *$ 为平凡空间的特殊情形下，我们还有 $(\mathrm{Ind}^{\mathrm{Com},h}_P M)(1) = M(1)$。我们还要指出，函子 F 和 U 保持所有弱等价，因此上述定义中出现的伴随余单位也可以解释为导出伴随余单位。

通过使用 $\mathcal{T}\mathrm{op}$ 与 $s\mathcal{S}\mathrm{et}$ 之间的等价，我们将上述定义推广到拓扑空间中的运算子和右模。下面的例子说明了该定义的合理性。

命题 4.3。设 M 是一个 n 维流形。

- Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 框架构形空间 $\mathcal{F}_{fr\,\mathbf{M}}$ 作为 Λ 运算子 mod- 的右模，且其上的 $\mathcal{F}_{frn}$ 是构形空间型。
- 假设 M 是平行化的。则 Fulton-MacPherson-Axelrod-Singer 紧化构形空间 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 作为 Λ 模 $\mathcal{F}_n$ 上的右模，是构形空间型。

证明。右 $\mathcal{F}_n$ 模 $\mathcal{F}_M$ 根据命题 3.5 是（Reedy）余纤维的。因此

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{Com},h}_{\mathcal{F}_n}\mathcal{F}_{\mathbf{M}} = \mathrm{Ind}^{\mathrm{Com}}_{\mathcal{F}_n}\mathcal{F}_{\mathbf{M}}.$$

右侧对象显然是 $F_{\mathbf{M}} = F_{U(\mathcal{F}_M)}$。

同样，$\mathcal{F}_{fr\mathbf{M}}$在右 $\mathcal{F}_{frn}$模范畴中也是 Reedy 余纤维的，因此

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{Com},h}_{\mathcal{F}^{fr}_n}\mathcal{F}^{fr}_{\mathbf{M}} = \mathrm{Ind}^{\mathrm{Com}}_{\mathcal{F}^{fr}_n}\mathcal{F}^{fr}_{\mathbf{M}}.$$

右侧很容易再次看出等于 F_M，因此是幂型。 □

供后文使用 我们还将记录一些构形空间型模的性质。 e.

引理 4.4. 设 P 是一个单纯运算子或良基点拓扑 Λ 运算子，且 f : M → N 是 P 上模的弱等价。那么，M 是构形空间型，当且仅当 N 也是。

ˆ 证明. 为了计算同伦诱导模，我们选取余纤维化分解 M → M 和 ˆN →N，并取 f 的一个提升 ˆf : ˆM →ˆN。于是有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_P^{\mathsf{Com}} \hat{M} & \longrightarrow & F_{M(1)} \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathrm{Ind}_P^{\mathsf{Com}} \hat{N} & \longrightarrow & F_{N(1)} \end{array}$$

其中，竖直箭头是弱等价。因此，上方的水平箭头是弱等价，当且仅当下方的水平箭头也是。□

引理 4.5. 设 g : P → Q 是一个（单纯或良基点拓扑） Λ 运算子的态射，且 M 是一个 Λ P-模。那么，M 是构形空间型，当且仅当 $\mathrm{Ind}^{Q}{}_{,\ {}^{h}P}\mathrm{M}$ 也是构形空间型。

证明。利用引理 4.4，我们可以用一个余纤维 P-模替换 M，或者直接从一开始就假设 M 是余纤维的。由伴随性，$\mathrm{Ind}^{Q}{}_{P}\mathrm{M}$ 也是余纤维的。此外，我们有

$$\mathrm{Ind}_P^{\mathsf{Com}} M \cong \mathrm{Ind}_Q^{\mathsf{Com}} \mathrm{Ind}_P^{Q} M,$$

因此，如果其中一个模是幂型的，那么另一个也是幂型的。 □

4.3. 构造：一个自由的 Com^c-余模。设 A 是一个（带单位的）微分分次交换代数。于是我们定义一个右余合作子 Com^c Hopf Λ-余模 F_A，使得

$$\mathbf{F}_A(r) = A^{\otimes r}$$

对于 r = 1、2、.....。这些 Λ-运算

$$\mathbf{F}_A(r) \to \mathbf{F}_A(r+s)$$

得到 通过将恒等映射张量 r 次，并与单位元张量（s 次）来定义。特别地，

$$\mu_j^*(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r-1}) = (a_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_{r-1}),$$

其中张量积的第 j 个位置上是单位元 1。右 Com^c-余作用以自然的方式由代数乘积给出。此外，构造 F_A^c 显然关于 A 具有函子性。

引理 4.6。函子 F : A → F_A^c 构成一个伴随

$$\mathbf{F} : dgCom \leftrightarrows dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\mathsf{Com}^c} : U^c,$$

其中右伴随 U^c 是对一元连通分支的限制，$\mathrm{U}^c(\mathrm{M}) = \mathrm{M}(1)$。

证明。首先显然，$U^c \circ F = id_{dgCom}$。设 M 是一个右 Com^c Hopf Λ-余模，A 是一个微分分次交换代数。设 $g : A \to U^c(M)$ 是一个微分分次交换代数态射。下面将证明，存在唯一的 Com^c-余模态射 $G : F_A \to M$，使得 $U^c(G) = g$。由此即可证明该断言。为构造 G，考虑 Λ-运算

$$\lambda_j : M(1) \to M(r)$$

来自集合映射 $[1] \to [j]$，满足 $1 \mapsto j$。然后我们在 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \in F_A(r)$ 上定义 G，使得

$$G(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) := \lambda_1(g(a_1)) \cdots \lambda_r(g(a_r)). \tag{16}$$

显然，G 是微分分次交换代数态射，因为 λ_j 和 g 也是如此；并且容易验证 G 保持 Λ-结构。因此，G 是 Λ Hopf 序列的映射，而且作为这样的映射已经是唯一的，因为 $F_A(r)$ 由 $F_A(1) = A$ 经由 Λ 运算和乘积生成。因此，我们只需验证 G 也保持 Com^c-余作用。为此，只需验证下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_A(r+1) & \xrightarrow{G} & M(r+1) \\ \downarrow{\scriptstyle c_{12}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{12}} \\ \mathbf{F}_A(r) & \xrightarrow{G} & M(r) \end{array},$$

其中，竖直箭头 c_{12} 是 Com^c-余作用，它来自映射 $[r+1] \to [r]$，该映射将 $j \mapsto$ 发送到 $\min(j-1, 1)$。我们计算

$$\begin{aligned} G(c_{12}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+1})) &= G(a_1 a_2 \otimes \cdots \otimes a_{r+1}) = \lambda_1(g(a_1 a_2))\lambda_2(g(a_3)) \cdots \lambda_r(g(a_{r+1})) \\ &= \lambda_1(g(a_1))\lambda_1(g(a_2))\lambda_2(g(a_3)) \cdots \lambda_r(g(a_{r+1})) \\ &= c_{12}(\lambda_1(g(a_1))\lambda_2(g(a_2))\lambda_3(g(a_3)) \cdots \lambda_{r+1}(g(a_{r+1}))) \\ &= c_{12}(G(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+1})), \end{aligned}$$

在验证第四个等式时，我们利用了 Com^c 余作用与 Λ 结构的相容性。

□

4.4. 构形空间类型的余模。

定义 4.7。• 我们称右 Λ Com Hopf 余模 M 为幂型的，如果伴随单位 $X \to F \circ U^c(X)$ 是弱等价。

• 设 C 为一个 Λ Hopf 余拟序列，M 为右 C-余模。若同伦余诱导右模 $\mathrm{coInd}_{Com,h\,P}$ M 是幂型的，则称 M 为构形空间类型的。

我们再次注意到，函子 F 和 U^c 保持弱等价，因此伴随单位也可以看作导出伴随单位。

命题 4.8. 若 M 是单纯或拓扑余纤维的构形空间型右模，则 $\Omega^\sharp M$ 是构形空间型右余模。

证明. 这是因为，根据命题 3.14，函子 $\Omega^\sharp$ 在余纤维对象上与归纳函子和余归纳函子相互交织。□

引理 4.4 和 4.5 还有对偶版本，其证明方式相同。

引理 4.9. • 如果 M $\to$ N 是 dg Λ (Hopf) C 余模之间的弱等价，那么 M 是构形空间型，当且仅当 N 也是如此。

• 如果 M 是 dg Λ (Hopf) D 余模，且 C $\to$ D 是 dg Λ Hopf 余合作子之间的态射，那么 $\mathrm{coInd}_{C\,D}$ M 是构形空间型，当且仅当 M 也是如此。

结合上述结果与命题 4.3，可得：

推论 4.10. 设 M 是一个 n 维流形。那么，将 $\mathcal{F}_{fr\mathbf{M}}$视为右 $\Lambda\,\mathcal{F}_{frn}$-模时，任何（dg Hopf）余运算子余模模型都是构形空间型。若 M 可平行化，那么，将 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$视为右 $\Lambda\,\mathcal{F}_n$-模时，其任何（dg Hopf）余运算子余模模型也都是构形空间型。

4.5. 作为 C-余模的自由性。设 C 是一个微分分次 Λ Hopf 余拟序列。代数单位随后赋予它一个 Hopf Λ 余合作子的典范映射

$$\mathrm{Com}^c \to C,$$

换言之，Com^c 是 Hopf Λ 余合作子范畴中的始对象。这尤其意味着，任意右余运算子式的 Com^c (Hopf Λ-)余模都通过余限制自然地成为一个 C-余模。特别地，前一小节中的 Com^c-余模 F_A 对于任意 C 都是一个 C-余模。

还要注意，与之前一样，我们有一个遗忘函子

$$U^c : dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_C \to dg\mathcal{C}om$$

使得 $\mathrm{U}^c(\mathrm{M}) = \mathrm{M}(1)$。

于是我们可以如下加强引理 4.6。

命题 4.11。设 C 是一个约化的 Λ Hopf 余拟序列，即 $\mathrm{C}(1) \cong \mathrm{Q}$。则函子 U 构成一个伴随

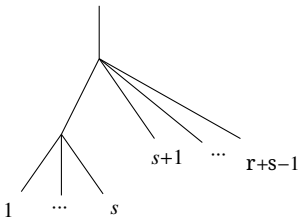
$$\mathbf{F} : dg\mathcal{C}om \leftrightarrows dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_C : U^c$$

其中左伴随 F 是第 4.3 节中定义的函子。

证明。我们可以沿用引理 4.6 的证明思路。同样，给定一个微分分次交换代数映射 $\mathrm{g} : \mathrm{A} \to \mathrm{U}^c(\mathrm{M})$，其中 M 是一个 C -余模，我们构造一个 C -余模映射 $\mathrm{G} : \mathrm{F}_A \to \mathrm{M}$，使得 $\mathrm{U}^c(\mathrm{G}) = \mathrm{g}$。这个映射自动唯一，因为如引理 4.6 的证明所示，即使将其视为 Λ Hopf 序列之间的映射，它也是唯一的。此外，它必然由 (16) 给出，但我们必须验证该映射 G 保持完整的 C -余作用。为此，只需检查下列图表是否交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_A(r+s-1) & \xrightarrow{G} & M(r+s-1) \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \mathbf{F}_A(r)\otimes C(s) & \xrightarrow{G\otimes id_C} & M(r)\otimes C(s), \end{array} \qquad (17)$$

此处竖直箭头是由 tre 产生的余合作子余作用 e



注意，由于通过余限制构造了 F_A 上的右 C-余作用，(17) 中左侧的垂直箭头可分解为经过 F_A (r) ⊗Com^c(s) 的映射。我们计算

$$(G \otimes id_C)(c(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+s-1})) = G(a_1 \cdots a_s \otimes a_{s+1} \otimes \cdots \otimes a_{r+s-1}) \otimes 1 \tag{18}$$
$$= \lambda_1(g(a_1 \cdots a_s))\lambda_2(g(a_{s+1})) \cdots \lambda_r(g(a_{r+s-1})) \otimes 1 \tag{19}$$
$$= \lambda_1(g(a_1)) \cdots \lambda_1(g(a_s))\lambda_2(g(a_{s+1})) \cdots \lambda_r(g(a_{r+s-1})) \otimes 1 \tag{20}$$

另一方面

$$c(G(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+s-1})) = c(\lambda_1(g(a_1)) \cdots \lambda_{r+s-1}(g(a_{r+s-1}))) \tag{21}$$
$$= c(\lambda_1(g(a_1))) \cdots c(\lambda_{r+s-1}(g(a_{r+s-1}))), \tag{22}$$

利用余合作子余作用与交换代数结构的相容性。我们还需要使用余合作子余作用与 Λ-结构的相容性。先考虑 j > s 的情形。此时，相容性表示为下图的交换性

$$\begin{array}{ccc} M(1) & \xrightarrow{\lambda_j} & M(r+s-1) \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ M(1) & \xrightarrow{\lambda_{j-s+1}\otimes 1} & M(r) \otimes C(s) \end{array} .$$

这里，我们将 1 记作单位元包含到 C (s) 中的包含映射。特别地

$$c(\lambda_j(g(a_j))) = \lambda_{j-s+1}(g(a_j))) \otimes 1.$$

在 j ≤ s 的情形下，相容性表示为

$$\begin{array}{ccc} M(1) & \xrightarrow{\lambda_j} & M(r+s-1) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ M(1) \otimes C(1) & \xrightarrow{\lambda_1 \otimes \tilde{\lambda}_j} & M(r) \otimes C(s) \end{array} .$$

其中，$\tilde{\lambda}_j$：C (1) →C (s) 是 C 上适当的 Λ-运算。现在，由于 C 是约化的，即 C(1) =Q，左下方的因子 C (1) 可以省略，左侧的垂直箭头是˜恒等映射，而运算 λ_j 再次由包含单位元给出。因此

$$c(\lambda_j(g(a_j))) = \lambda_1(g(a_j))) \otimes 1.$$

将这些公式代入 (22)，可见最终结果与 (22) 一致，从而完成了对 G 与右侧 C-共作用相容性的证明。□

5. 构形空间类型的余模的性质

5.1. 等价条件。

~ ˆ 命题 5.1. 设 M 是一个 Λ Hopf C 余模。设 M → M 是范畴中（普通）C 余模的一个纤维化替换。那么，M 是构形空间型，当且仅当复合

$$\mathbf{F}_{M(1)} \to \mathrm{coInd}_{C}^{\mathsf{Com}^c} M \to \mathrm{coInd}_{C}^{\mathsf{Com}^c} \hat{M}$$

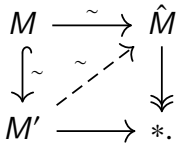
是一个拟同构。

ˆ 证明。首先，假设 M 在 Λ Hopf C 余模范畴中是纤维化的。根据伴随关系，它在普通 C 余模范畴中也具有纤维化性。此外，由于极限是在普通余模范畴中构造的，因此在哪个范畴中取余诱导并不重要。因此，在这种情况下，命题的表述就归结为具有构形空间型的定义。

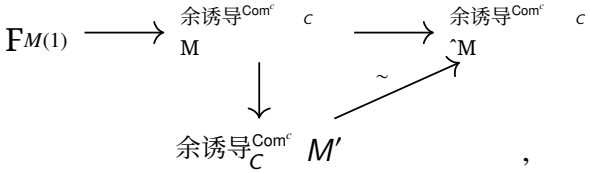
因此，我们只需证明命题中的条件与所选取的纤维化替换 ˆM 无关。等价地，我们固定一个纤维化替换

$$M \overset{\sim}{\hookrightarrow} M',$$

对于该替换，我们可以假设该映射是一个余纤维化。然后通过提升可得到一个交换图



但这样我们就有一个相应的图



并且，上方的复合是拟同构，当且仅当下方的复合也是拟同构。 □

我们最感兴趣的情形如下：

推论 5.2. 设 M 是一个 Λ Hopf e_n^c 余模。当且仅当该映射

$$\mathbf{F}_{M(1)} \to \mathrm{coInd}_{\mathsf{e}_n^c}^{\mathsf{Com}^c} \mathrm{B}_{\mathsf{e}_n^c} \mathrm{B}_{\mathsf{e}_n^c}^c M \cong \mathrm{B}_{\mathsf{Com}^c} \mathrm{B}_{\mathsf{e}_n^c}^c M$$

是拟同构时，M 才是构形空间型；这里我们使用余模的巴构造和余巴构造，见 [23]。

证明。M 的巴-余巴分解是纤维化的，因此我们可以应用命题 5.1。最后一个同构使用了余诱导的显式公式。□

还可以进一步简化。注意，存在一个（普通的）分次余代数的态射（对于 $n \geq 2$）

$$\mathsf{e}_n^c \to \mathsf{Lie}_n^c,$$

其中 李$^c{}_n$ 是支配移位李余代数、且李余括号次数为 $n-1$的余合作子。特别地，任意 e_n^c 余模 M 也是一个 李$_n^c$-余模。此外，有一个微分分次对称序列的态射

$$\mathrm{B}_{\mathsf{Com}^c}\mathrm{B}^c_{\mathsf{e}_n^c} M \cong (M \circ \mathsf{Com}\{n\} \circ \mathsf{Lie}_0 \circ \mathsf{Com}^c, d) \to \mathrm{B}^c_{\mathsf{Lie}_n^c} M \cong (M \circ \mathsf{Com}\{n\}, d) \tag{23}$$

它由 李$_0 \circ$Com^c 到其一元部分的投影得到。特别地，注意到复合

$$\mathbf{F}_{M(1)} \to \mathrm{B}_{\mathsf{Com}^c}\mathrm{B}^c_{\mathsf{e}_n^c} M \to \mathrm{B}^c_{\mathsf{Lie}_n^c} M$$

将任意 $x \in F_{M(1)}(r)$ 映到其在 $M(r) \subset B^{c}{}_{李_n^c} M$ 中的像；由于 $F_{M(1)}$ 上的 李$_n^c$-余作用是平凡的，这就给出了一个良定义的映射。

命题 5.3. 对于 $n \geq 2$，一个 Λ Hopf e_n^c 余模是构形空间型，当且仅当微分分次对称序列的映射

$$\mathbf{F}_{M(1)} \to \mathrm{B}^c_{\mathsf{Lie}_n^c} M$$

是一个拟同构。

证明. 只需证明映射 (23) 在每个元数上分别是拟同构。按照因子 $M \circ \mathsf{Com}\{n\}$ 的总元数，对 (23) 左侧赋予一个滤过。显然，该滤过在每个元数上都有界，因此谱序列收敛到上同调。伴随分次对称序列具有如下形式

$$(\mathrm{B}^c_{\mathsf{Lie}_n^c} M) \circ (\mathsf{Lie}_0 \circ \mathsf{Com}^c, d),$$

右侧因子（$\mathsf{Lie}_0 \circ \mathsf{Com}^c$,d）是交换余代数的拟群运算 Koszul 复形。由于后者具有 Koszul性，它在元数 > 1 上无挠，命题便可轻易得出。□

5.2. 代数 Cohen-Taylor 型谱序列。文献中有多种构造谱序列的方法，用于计算“良好”流形的构形空间的上同调 [14, 41, 52]

$$E^1 = \mathsf{LS}_{H(M)} \Rightarrow H(\mathcal{F}_M)$$

其 E^1 页被识别为 $\mathsf{LS}^{H(M)} := F_{H(M(1))} \circ \mathsf{Lie}_n^c$。我们指出，在一般情形下，也可以纯代数地轻松构造这样的谱序列。具体而言，设 M 是一个构形空间型的右 e_n^c-余模。我们考虑巴-余巴分解

$$\hat{M} = \mathrm{B}_{\mathsf{e}_n^c}\mathrm{B}^c_{\mathsf{e}_n^c} M\,.$$

$\hat{}$ 余模 M 是拟自由的，且 e_n^c 具有按李余括号数量自然分级的分次。这里我们假设 $n \geq 2$。此分次在 M 上诱导出一个递增、有下界且完备的滤过 $\hat{}$

$$\mathcal{F}^0\hat{M} \subset \mathcal{F}^1\hat{M} \subset \cdots.$$

ˆ ˆ 更确切地说，若将 M 明确写作 $= (\mathrm{M} \circ \mathsf{e}_n\{\mathrm{n}\} \circ \mathsf{e}_n^c, \mathrm{d})$，则 $\mathcal{F}_p\mathrm{M}$ 由那些在因子 e_n^c中含有 $\leq \mathrm{p}$ 个李余括号的元素张成。注意，该滤过有界，因为余括号具有正次数，且 ˆM 是非负分次的。因此，伴随谱序列收敛到上同调。E^0 页（伴随分次）具有如下形式

$$(\mathrm{B}_{\mathsf{Com}^c}\mathrm{B}^c_{\mathsf{e}^c_n} M) \circ \mathsf{Lie}^c_n,$$

并且根据推论 5.2，其上同调为

$$E^1 = \mathbf{F}_{H(M(1))} \circ \mathsf{Lie}^c_n. \tag{24}$$

目前，我们只需要以下应用，其证明使用上述谱序列，直到 E^1 页。

命题 5.4. 设 C 是一个与 e_n^c 拟同构的 Λ Hopf 余拟序列，其中 $\mathrm{n} \geq 2$。设 $\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 是构形空间类型的 Λ Hopf C-余模之间的态射。假设映射 f 的一元部分

$$U(f) : M(1) \to N(1)$$

是拟同构。那么 f 也是拟同构。

证明. 首先，由于 e_n^c 的范畴与 C-余模范畴 Quillen等价，只需考虑 e_n^c 余模的情形。其次，对 M 和 N 进行条-余条分解，将它们视为右（非 Hopf）e_n^c余模后，只需证明图中的下方箭头

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathrm{BB}^c\,\mathrm{M} & \xrightarrow{\mathrm{BB}^c\,\mathrm{f}} & \mathrm{BB}^c\,\mathrm{N} \end{array}$$

是一个弱等价。不过，我们可以在两边都赋予上文所述的滤过 $\mathcal{F}(-)$，并考虑伴随谱序列。根据命题之前的说明，两边的 E^1 页都与 (24) 一致，这是因为根据假设，$\mathrm{H}(\mathrm{M}(1)) \cong \mathrm{H}(\mathrm{N}(1))$。此外，很容易验证，由 $\mathrm{BB}^c\mathrm{f}$ 诱导的映射在 E^1 页上是一个同构。因此可得，$\mathrm{BB}^c\,\mathrm{f}$，进而 f，是一个拟同构。□

5.3. 对角元。

定义 5.5. 设 A 是一个微分分次交换代数。若一个次数为 n 的元素$\Delta = \mathrm{P}\Delta' \otimes \Delta'' \in \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}$ 满足以下条件，则称其为 A 的一个对角元（次数为 n）。

a. Δ 是闭的，即 $\mathrm{d}\Delta = 0$。

b. Δ 是分次（反）对称的，

$$\tau\Delta = (-1)^n\Delta,$$

其中 τ： $\mathrm{A} \otimes \mathrm{A} \to \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}$ 交换因子。

c. 对于所有 a ∈ A，我们有

$$(a \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes a) \cdot \Delta \in A \otimes A. \tag{25}$$

与对角元 Δ 相关的欧拉类为

$$E(\Delta) = \sum \Delta' \Delta'' \in A.$$

注意，我们不要求 Δ 满足任何非退化性条件——根据我们的定义，元素 Δ = 0 也是一个对角元。此外，当 n 为奇数时，由对称性可知，欧拉类 E(Δ) 总是为零。

一个对角元通过以下公式在 A 上定义一个次数为 n 的余乘法

$$a \mapsto \sum \sum a\Delta' \otimes \Delta'',$$

事实上，还定义了 Frobenius 代数结构的一个分次版本。还要注意，对角元的任意倍数仍然是一个对角元。

我们将看到，对于一个构形空间型的 Λ Hopf e_n^c 余模，至少在相差一个尺度因子的意义下，可以在其一元部分的上同调上关联一个对角元。

引理 5.6. 设 C 是一个 dg Λ Hopf 余合作子，M 是一个 Λ Hopf C 余模。那么存在一个上同调群的长正合序列

$$\cdots \to H^p(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)) \to H^p(M(1)) \oplus H^p(M(2)) \to H^p(M(1) \otimes C(2)) \xrightarrow{c} H^{p+1}(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c}(M)(2)) \to \cdots. \tag{26}$$

此外，该序列中的所有态射都与 S_2 作用相容，也与 $\mathrm{H}^q(\mathrm{coInd}^{\mathsf{Com}^c} C(\mathrm{M})(2))$ 的乘法作用相容，即对任意 $\mathrm{x} \in \mathrm{H}^q(\mathrm{coInd}^{\mathsf{Com}^c} C(\mathrm{M})(2))$，都有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^p(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)) & \longrightarrow & H^p(M(1)) \oplus H^p(M(2)) & \longrightarrow & H^p(M(1) \otimes C(2)) & \longrightarrow & H^{p+1}(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle x\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle x\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle x\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle x\cdot} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{p+q}(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)) & \longrightarrow & H^{p+q}(M(1)) \oplus H^p(M(2)) & \longrightarrow & H^{p+q}(M(1) \otimes C(2)) & \longrightarrow & H^{p+q+1}(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}.$$

证明. 我们可以假设 M 是纤维化的，因为将 M 替换为纤维化分解不会改变 (26)。根据构造，余诱导余模的元数 2 部分在微分分次交换代数范畴 dg$\mathcal{C}$om 中构成一个拉回方块：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c}(M)(2) & \longrightarrow & M(1) = M(1) \otimes \mathsf{Com}^c(2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
M(2) & \longrightarrow & M(1) \otimes C(2)
\end{array}. \tag{27}$$

注意，在 dg$\mathcal{C}$om 中的极限是在微分分次向量空间中构造的，因此该图也是微分分次向量空间中的一个拉回图。

我们声称该图是一个同伦拉回图。由此立即可得长正合序列 (26)。(27) 是微分分次交换代数的交换图，因此它也自然与 $H^q(\mathrm{coInd}^{\mathsf{Com}^c}{}_C(M)(2))$ 的乘法作用相容。

为证明该断言，我们可以将 M 替换为另一个纤维化替换。实际上，我们甚至可以在普通（非 Hopf）微分分次 C-余模的范畴中进行这一替换，因为微分分次 Hopf C-余模范畴中的极限（例如余诱导 $^{\mathsf{Com}^c}{}_C(M)$）是在普通微分分次 C-余模范畴中构造的。不过，取巴-余巴构造作为纤维化替换后，我们可以明确看到 (27) 中的下方水平箭头是一个纤维化（即满射），因此断言得证。□

下面假设 M 是构形空间型的。那么，上面的连接同态 c 特别地诱导出映射

$$H^p(C(2)) \xrightarrow{1\otimes(-)} H^p(M(1)\otimes C(2)) \xrightarrow{c} H^{p+1}(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)) = H^p(M(1)\otimes M(1)). \qquad (28)$$

定义 5.7. 设 M 是一个 Λ Hopf C-余模，且为构形空间型；C 是一个 Λ Hopf 余拟序列，并满足 $H(C) = \mathsf{e}_n^c$。那么，我们称对角元

$$\Delta_M \in H^n(M(1)\otimes M(1))$$

M 的对角元是余括号 $B \in \mathsf{e}_n^c(2) = H(C(2))$ 在复合 (28) 下的像，即

$$\Delta_M = c(1\otimes B)\,.$$

引理 5.8. 元素 $\Delta_M \in H^n(M(1)\otimes M(1))$ 确实是 $H(M(1))$ 的一个次数为 n 的对角元，符合定义 5.5 的含义。其欧拉类为零，$E(\Delta_M) = 0$。

证明. 在此情形下，闭性无需考虑。(26) 的 S_2-等变性蕴含了对称性。为证明 (25)，令 $a \in H(M(1))$，并设

$$\tilde{a} := (a\otimes 1) - (1\otimes a) \in H(M(1))\otimes H(M(1)) = H(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)).$$

因此我们必须证明 $\tilde{a}\Delta_M = 0$。然而，由于长正合序列 (26) 与 $H(M(1))\otimes H(M(1))$ 的乘法作用相容，我们有

$$\tilde{a}\Delta_M = c(\underbrace{\tilde{a}\cdot(1\otimes B)}_{=0}) = 0,$$

因为 $H(M(1))$ 上的乘法作用可经由乘法映射 $H(M(1))\otimes H(M(1)) \to H(M(1))$ 分解，而该映射会消去 $\tilde{a}$。

Fina同样，由序列 (26) 的恰当性可知，欧拉类属于映射的核

$$H^n(\mathrm{coInd}_C^{\mathsf{Com}^c,h}(M)(2)) = H^n(M(1)\otimes M(1)) \to H^n(M(1))\oplus H^n(M(2)).$$

特别地，映射到 $H^n(M(1))$ 的映射就是两个因子的乘法，因此 Δ_M 的欧拉类消失，$E(\Delta_M) = 0$。□

这一术语源自以下主要例子。

例 5.9。在本例中，我们将在实数域上进行讨论。设 M 是一个可定向的紧致 n 维流形。从 M 的紧支撑上同调到 M 的上同调的映射 $H_c(M) \to H(M)$ 可由一个元素表示

$$\Delta_{\mathbf{M}} \in \bigoplus_p (H_c^p(\mathbf{M}))^* \otimes H^p(\mathbf{M}) \cong \bigoplus_p H^{n-p}(\mathbf{M}) \otimes H^p(\mathbf{M}),$$

在最后一步使用庞加莱对偶。我们称 $\Delta_{\mathbf{M}} \in H^n(M \times M)$ 为 M 的对角元。若 M 是闭的，则 $\Delta_{\mathbf{M}}$ 是 $M \times M$ 中对角线的庞加莱对偶，因此得名。但请注意，一般而言，$\Delta_{\mathbf{M}}$ 未必在任何意义上都是非退化的，例如当 $n \geq 1$ 时，我们有 $\Delta_{\mathbb{R}^n} = 0$。

接下来，假设 M 是平行化的。那么，$\Delta_{\mathbf{M}}$ 的一个德拉姆代表可按如下方式计算。首先，我们有切丛的单位球面丛的包含映射

$$STM \cong \mathbf{M} \times S^{n-1} \to \mathcal{F}_{\mathbf{M}}(2)$$

作为边界中对应于构形中的两点无限接近的部分。令 $\eta \in \Omega^{n-1}{}_{dR}(S^{n-1})$ 为 S^{n-1} 上的标准体积形式，并令 $\beta \in \Omega^{n-1}{}_{dR}(STM)$ 为其在 $STM \cong M \times S^{n-1}$ 上的拉回。令 $\alpha \in \Omega^{n-1}{}_{dR}(\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(2))$ 为一个支撑集位于 STM 管状邻域中的 $n-1$-形式，并延拓 β。为简单起见，我们还可以假设 $d\alpha = 0$ 在 STM 的一个（较小）邻域内。特别地，$d\alpha$ 代表 $H^n(M \times M)$ 中的一个上同调类，我们断言它就是上文定义的对角 Δ_M。事实上，对于 $\gamma \in \Omega_{dR,c}(M)$，我们验证有

$$\int_{y \in M} d\alpha(x,y)\gamma(y) = \int_{\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(2) \to M} d\alpha(x,y)\gamma(y) = \int_{STM \to \mathbf{M}} \alpha(x,y)\gamma(y) = \gamma(x).$$

这里我们先对因子 M 积分。然后，我们将此积分替换为沿投影 $\pi_1 : \mathcal{F}_{\mathbf{M}}(2) \to M$ 的纤维进行的纤维积分。我们不严格地将 $\gamma(y) := \pi_2^*\gamma$ 记作 γ 在第二个投影 $\pi_2 : \mathcal{F}_{\mathbf{M}}(2) \to M$ 下拉回至 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(2)$ 的结果。对于第二个等式，我们应用斯托克斯定理。对于第三个等式，我们利用了按构造 α 在 STM 上与 β 一致这一点。

但是，我们构造 $\Delta_{\mathbf{M}}$ 的德拉姆代表的方法，与在长正合序列中通过连接同态得到 β 的像的方法相同，即

$$\cdots \to H^p(\mathbf{M} \times \mathbf{M}) \to H^p(\mathbf{M}) \oplus H^p(\mathcal{F}_{\mathbf{M}}(2)) \to H^p(\mathbf{M} \times S^{n-1}) \xrightarrow{c} H^{p+1}(\mathbf{M} \times \mathbf{M}) \to \cdots.$$

但在 $M = \Omega\#(\mathcal{F}_{\mathbf{M}})$ 的情形下，这与长正合序列 (26) 的实系数版本一致。这表明，按照定义 5.7 得到的代数对角元（其在实上同调中的像）在此例中与流形 M 的对角元一致，因此这个名称是恰当的。还要注意，该推导表明，对角线与 M 的平行化选择无关。

5.4. 示例：Lambrechts-Stanley 型余模。设 A 是一个微分分次交换代数，且 $\Delta \in A \otimes A$ 是 A 的一个次数为 n、欧拉类为零的对角元 $E(\Delta) = 0$ in（按定义 5.5 的意义）

。那么我们考虑如下右 Λ Hopf e_n^c 余模$\mathsf{LS}^{\Delta}{}_{A,n}$ 。作为一个分次交换代数

$$\mathsf{LS}^{\Delta}_{A,n}(r) = \mathbf{F}_A(r) \otimes \mathsf{e}_n^c(r)/\sim \; = A^{\otimes r} \otimes \mathsf{e}_n^c(r)/\sim,$$

以及附加关系

$$a_i\omega_{ij} = a_j\omega_{ij}, \tag{29}$$

其中， ω_{ij}是 e_n^c 的余括号生成元，见第 2.5 节；对于 $\in \mathrm{A}$ 和 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{r}$，我们规定

$$a_j := 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{a}_{j\text{-th}} \otimes \cdots \otimes 1 \in A^{\otimes r}.$$

我们将微分定义为由 A 在因子 F_A 上诱导的微分，并额外规定

$$d\omega_{ij} = \Delta_{ij} := \sum \Delta_i' \Delta_j''. \tag{30}$$

注意，对角元的定义条件 (25) 是必要的，这样关系 (29) 才能在微分下保持闭性。此外，留给读者验证：在给定 (29) 的情况下，Arnold 关系 (1) 的微分也为零。

接下来，我们讨论 $\mathsf{LS}^{\Delta}{}_{A,n}$ 上的余合作子 $\Lambda\, \mathsf{e}_n^c$ 余模结构。首先注意，张量积 $\mathrm{F}_A \otimes \mathsf{e}_n^c$ 从其各因子继承了一个 Λ Hopf e_n^c 余模结构。更具体地说，由于 F_A 是余合作子 Com^c-余模，而 e_n^c 是余合作子 e_n^c-余模，$\mathrm{F}_A \otimes \mathsf{e}_n^c$ 是 $\mathsf{Com}^c \otimes \mathsf{e}_n^c = \mathsf{e}_n^c$ 的余模。

我们只需检查附加关系 (29) 和微分 (30) 是否与 Λ 结构以及 e_n^c 余作用相容。具体而言，微分需要与这些运算交换，而 (29) 定义了一个理想序列（每个元数对应一个理想），该序列在余作用下闭合。

对于 Λ 运算，这两条结论显然成立，因为对 (29) 或 (30) 应用一个 Λ 运算，只会得到一个元数更高的类似关系。

余作用的情形也一样，除非余作用同时作用于指标 i 和 j，也就是说，这两个指标都属于某个余作用所折叠的指标子集。在这种情况下，(30) 与余作用相容归结为以下命题

$$\sum \Delta_i' \Delta_i'' = E(\Delta)_i = 0,$$

我们通过要求 Δ 的欧拉类消失来确保这一点。对于 (29)，我们只需检查 $\mathsf{a}_i - \mathsf{a}_i = 0$，这显然总是成立的。

我们称 $\mathsf{LS}^{\Delta}_{A,\ n}$ 为 Lambrechts-Stanley 型的 Λ Hopf e_n^c 余模，因为 Lambrechts 和 Stanley 在 [45], 中使用了非常相似的对象，讨论的是 A 为 Poincar´e 对偶代数且 Δ 为其对角线的特殊情形。在他们的情形中，他们也没有考虑右侧的 e_n^c 余作用，因此无需满足欧拉类消失这一条件。

还要注意，我们始终有分次对称序列的同构，

$$\mathsf{LS}^{\Delta}_{A,n} = \mathsf{Com}^c \circ A \circ \mathsf{Lie}_n^c.$$

命题 5.10. Λ Hopf e_n^c 余模 $\mathsf{LS}^{\Delta}{}_{A,n}$ 是构形空间型。

证明. 根据命题 5.3，只需检验该态射

$$\mathbf{F}_A \to \mathrm{B}^c_{\mathsf{Lie}^c_n}\mathsf{LS}^{\Delta}_{A,n}$$

是一个拟同构。为此，我们在两侧都按照 A 因子的总次数取下降滤过。这个滤过是有界的，因为所有其他携带次数的因子都是非负分次的。在伴随分次上看不到 F_A 上的微分，因此伴随分次映射可识别为

$$\mathbf{F}^\natural_A \to \mathrm{B}^c_{\mathsf{Lie}^c_n}(\mathsf{LS}^{\Delta}_{A,n})^\natural,$$

其中 $(-)^\natural$ 表示我们考虑的是微分为零的对象。但是，由于 $(\mathsf{LS}^{\Delta}_{A,\ n})^\natural$ 是由 $\mathrm{F}^\natural{}_A$ 共生成的自由李$^c{}_n$ 余模，这个态射是一个拟同构，因此命题得证。□

注 5.11. 设 M 是一个具有对角线 Δ 的构形空间型右 e^c_n-余模，并再次考虑第 5.2 节的谱序列。该谱序列的 E^1 页 (24) 作为分次对称序列，与 $\mathsf{LS}^{\Delta}{}_{H(M(1)),\ n}$ 一致。事实上，利用我们的主要结果定理 10.1 可以验证，E^1 页上的微分就是 $\mathsf{LS}^{\Delta}{}_{H(M(1)),\ n}$ 上的微分。本文其他地方不会用到这一事实，因此将证明留给读者或未来的研究。

6. SLie_∞ 代数、Maurer-Cartan 空间与阻碍理论

6.1. 滤过完备的曲弯 SLie_∞-代数。沿用 [16] 下文将使用（曲弯）L_∞-代数的次数平移版本，其定义使得 Maurer-Cartan 元素的上同调次数为 0，而非 +1。为强调这一次数移位，我们将这些代数称为（曲弯）SLie_∞-代数。

A cu分次向量空间 g 上的曲弯 SLie_∞-代数结构是一组映射 s

$$\{\mu_k : S^k(V) \to V[-1]\}_{k\geq 0}$$

它们满足如下形式的一组二次方程

$$\sum_{k+l=n+1}\ \sum_{\sigma\in Sh(l,k+1)} \pm\mu_k(\mu_l(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(l)}),x_{\sigma(l+1)},\dots,x_{\sigma(n+1)}) = 0,$$

其中内层求和遍及所有 (k, l)-洗牌置换，而符号是与置换 σ 作用于元素 $\mathrm{x}_1,\dots$、x_{n+1}相对应的 Koszul 符号。若曲弯 SLie_∞-结构的曲率 μ_0 消失，则它就是一个（真正的）SLie_∞-结构。

滤过完备的曲弯 SLie_∞-代数是一个 SLie_∞-代数 g，连同一个下降完备滤过

$$\mathcal{F}^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset \mathcal{F}^2\mathfrak{g} \supset \mathcal{F}^3\mathfrak{g} \supset \cdots$$

与 SLie_∞-运算 $\{\mu_k\}_{k\geq 0}$ 相容，具体而言

$$\mu_k(\mathcal{F}^{p_1}\mathfrak{g},\dots,\mathcal{F}^{p_k}\mathfrak{g}) \subset \mathcal{F}^{p_1+\cdots+p_k}\mathfrak{g}. \tag{31}$$

滤过完备弯曲 SLie$_\infty$-代数 g 中的 Maurer-Cartan 元素是满足以下条件的 0 次元 m：

$$\mathrm{curv}(m) := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mu_k(m,\dots,m) = 0.$$

我们将 Maurer-Cartan 元素的集合记为

$$\mathsf{MC}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g}_0 \mid \mathrm{curv}(x) = 0\}.$$

设 $\mathrm{m} \in \mathrm{g}$ 是任意一个 0 次数元素。于是我们可以构造一个滤过完备的曲 SLie$_\infty$-代数 $\mathfrak{g}^m$，其底层分次向量空间为 g，而 SLie$_\infty$-运算为

$$\mu_k^m(x_1,\dots,x_k) := \sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!}\mu_{k+l}(m,\dots,m,x_1,\dots,x_k).$$

我们称 $\mathfrak{g}^m$ 是由 g 经 m 扭曲得到的。特别地，注意到 $\mu_0^m = \mathrm{curv(m)}$，因此若 m 是一个 Maurer-Cartan 元素，曲 SLie$_\infty$-代数 $\mathfrak{g}^m$ 实际上是一个（真正的，即非曲）SLie$_\infty$-代数。在这种情况下，μ_1^m 是一个微分，即对于所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{g}$，都有 $\mu_1^m(\mu_1^m(\mathrm{x})) = 0$。

6.2. SLie$_\infty$-代数的图式形式体系。L$_\infty$-代数或 SLie$_\infty$-代数有若干种等价定义。这里我们将采用 [28, 节中的表述，它非常适合我们的目的。设 g 是如上所述的滤过完备 SLie$_\infty$-代数。取任意一个分次交换代数 $\mathcal{R}$，并考虑完备张量积

$$\mathfrak{g}\hat{\otimes}\mathcal{R} = \lim_{\leftarrow}(\mathfrak{g}\otimes\mathcal{R}/\mathcal{F}^p\mathfrak{g}\otimes\mathcal{R}).$$

因此，这是一个基于 $\mathcal{R}$的（弯曲）SLie$_\infty$-代数。此外，根据极化，只需知道对于每个 $\mathcal{R}$ 以及次数为 0 的 $\mathrm{x} \in \mathrm{g}\hat{\otimes}\mathcal{R}$，函数的值

$$\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R}}(x) := \mathrm{curv}(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\mu_k(x,\dots,x).$$

我们通常将基环扩张到 $\mathcal{R}$ 视为隐含操作，并写作 $\mathcal{U}^{\mathfrak{g}} = \mathcal{U}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R}}$，或者在 g 的含义可由上下文明确时，甚至写作$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R}}$。这样便编码了任意次数的自变量对应的所有 μ_k。在非弯曲情形下，要求级数从 $\mathrm{k} = 1$开始。此外，SLie$_\infty$-关系可以简洁地编码为如下陈述：

$$D\mathcal{U}(x)[\mathcal{U}(x)] = 0 \tag{32}$$

对于上述所有 x 和 $\mathcal{R}$，其中 D 表示关于 x 的导数。等价地，若不使用导数，也可以将其表述为：

$$\mathcal{U}(x + \epsilon\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}(x) \tag{33}$$

其中，ϱ 是一个次数为 -1 的形式变量，我们将其添入环 $\mathcal{R}$。

曲弯 SLie$_\infty$-代数之间的态射 $\mathrm{F}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一组线性映射

$$\{F_k : S^k(V)\to V\}_{k\geq 0}$$

与滤过相容，即

$$F_k(\mathcal{F}^{p_1}\mathfrak{g},\dots,\mathcal{F}^{p_k}\mathfrak{g})\subset\mathcal{F}^{p_1+\cdots+p_k}\mathfrak{h}. \tag{34}$$

并且满足一个多项式方程组。同样，我们可以将态射 F 编码为级数

$$F(x)=\sum_k\frac{1}{k!}F_k(x,\dots,x)$$

定义在零次元素 $\mathrm{x}\in\mathfrak{g}\hat{\otimes}\mathcal{R}$ 上。于是，F 所满足的方程组就是

$$\mathcal{U}^{\mathfrak{h}}(F(x))=DF(x)[\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(x)]$$

对所有的 x 和上述的 $\mathcal{R}$a 都成立。同样，这也可以写成无导数形式

$$F(x)+\epsilon\mathcal{U}^{\mathfrak{h}}(F(x))=F(x+\epsilon\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(x)) \tag{35}$$

其中 ϱ 是一个平方为零的 -1 次变量。

一个（平坦）SLie$_\infty$-态射是一个满足 $\mathrm{F}_0=0$ 的弯曲 SLie$_\infty$-态射。

6.3. 滤过完备 SLie$_\infty$-代数的 Maurer-Cartan 空间。滤过完备曲弯 SLie$_\infty$-代数 g 的 Maurer-Cartan 空间定义为单纯集

$$\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})=\mathrm{MC}(\mathfrak{g}\hat{\otimes}\Omega(\Delta^\bullet)),$$

其中 $\Omega(\Delta^k)$ 是 k-单形上的多项式微分形式构成的微分分次交换代数。我们将回顾这个空间的若干性质。首先，$\pi_0\mathrm{Maurer–Cartan}_\bullet(\mathfrak{g})$ 可识别为 Maurer-Cartan 元素的规范等价类。设 $\tau\in\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。定理 [6, 5.5] 证明，高阶同伦群可计算为扭曲的 SLie$_\infty$-代数的同调群

$$\pi_k(\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g}))\cong H_k(\mathfrak{g}^\tau):=H^{-k}(\mathfrak{g}^\tau)$$

对于 $\mathrm{k}\geq 1$。对于 $\mathrm{k}\geq 2$，这里的群运算就是加法；而对于 $\mathrm{k}=1$，则通过 Campbell-Baker-Hausdorff 公式定义，参见同上。显然，若 g 为有限型，或至少每个 $\mathfrak{g}^\tau$ 都是有限同调型，那么$\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$ 的任一连通分支的所有同伦群也都是如此。在这种情况下，π_1 自动是幂零群，并且由于相容关系 (31)，它以幂零方式作用于高阶同伦群。因此 $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$（的每个连通分支）都是幂零空间。

此外，$\mathrm{Maurer–Cartan}_\bullet(\mathfrak{g})$ 的上同调由 g 的某种 Chevalley-Eilenberg 复形计算。通常，为此需要要求 g 是有限型幂零的，见 [6,推论 1.3]。然而，在我们的大多数例子中，幸运的是，g 实际上是一个 SLie$_\infty$-余代数 c 的对偶，$\mathfrak{g}=\mathrm{c}^*$，而且其同调是有限型的。在这种情况下，可以

证明（见 [54]），连通分支 Maurer–Cartan$_\bullet(\mathfrak{g})_\tau$ 的上同调由（余）Chevalley-Eilenberg 复形计算

$$C_{CE}(\mathrm{trunc}(\mathfrak{c}^m))$$

扭曲 $\mathfrak{c}^m$ c 的次数（余）截断。更具体地说，trunc($\mathfrak{c}^m$) 是 $\mathfrak{c}^m$ 关于所有负上同调次数元素以及零次中的恰当元素的商。

6.4. SLie$_\infty$ 障碍理论。这里我们回顾曲率 SLie$_\infty$-代数背景下的基本障碍理论。我们专注于最简单的情形。关于这些技术的全面概述及其更一般的版本，请参阅 [49]。

我们希望找出曲率滤过完备 SLie$_\infty$-代数中存在 Maurer-Cartan 元素的条件。为此，我们假设 g 还带有第二个完备滤过

$$\mathcal{G}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset \mathcal{G}^1\mathfrak{g} \supset \cdots$$

且该滤过也与 SLie$_\infty$-运算相容。明确地说，我们允许用于障碍理论的这个滤过不同于上文的滤过 $\mathcal{F}^p$，后者用于处理收敛问题。

假设 g 的曲率满足 $\mu_0 \in \mathcal{G}^1\mathfrak{g}$。那么，尽管 μ_1 并未在 g 上定义一个微分，它仍然在伴随分次 $\hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}\mathfrak{g}$ 上定义了一个微分，因为

$$\mu_1(\mu_1(x)) = \pm\mu_2(\mu_0, x) \in \mathcal{G}^{q+1}\mathfrak{g}$$

对所有 $x \in \mathcal{G}^q\mathfrak{g}$。此外，还有如下结果。

引理 6.1. 设 g 是如上所述的滤过完备弯曲 SLie$_\infty$-代数，且对于某个 $p \geq 1$ 满足 $\mu_0 \in \mathcal{G}^p\mathfrak{g}$

$$H^1(\hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}\mathfrak{g}) = 0.$$

那么存在一个零次元素 $m \in \mathcal{G}^p\mathfrak{g}$，使得曲率 $\mathrm{curv}(m) \in \mathcal{G}^{p+1}\mathfrak{g}$。

证明。根据 SLie$_\infty$-关系，弯曲 SLie$_\infty$-代数的曲率 μ_0 始终是一个闭的次数 1 元素，

$$\mu_1(\mu_0) = 0.$$

因此，由伴随分次的第一上同调消失可知，存在某个次数为 0 的 $m \in \mathcal{G}^p\mathfrak{g}$，使得 $\mu_0 + \mu_1(m) \in \mathcal{G}^{p+1}\mathfrak{g}$。因此

$$\mathrm{curv}(m) = \mu_0 + \mu_1(m) + \frac{1}{2}\mu_2(m, m) + \cdots \in \mathcal{G}^{p+1}\mathfrak{g},$$

利用 $p \geq 1$。 □

推论 6.2. 设 g 是如上所述的滤过完备弯曲 S李$_\infty$−代数，使得 $\mu_0 \in \mathcal{G}^1\mathfrak{g}$ 且

$$H^1(\hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}\mathfrak{g}) = 0.$$

那么，$\mathcal{G}^1\mathfrak{g}$ 中存在一个 Maurer-Cartan 元素。

证明。我们证明 通过构造一列元素 $m_0, m_1, m_2, \cdots \in \mathcal{G}^1\mathfrak{g}$，使得 t

$$\operatorname{curv}(m_k) \in \mathcal{G}^{k+1}\mathfrak{g} \tag{36}$$

$$\text{and} \qquad x_k := m_k - m_{k-1} \in \mathcal{G}^k\mathfrak{g}. \tag{37}$$

首先，我们令 $m_0 = 0$。假设通过归纳法，已如上构造出 m_{k-1}。那么，扭曲的曲线 L_∞-代数 $\mathfrak{g}^{m_{k-1}}$ 满足引理 6.1 在 $p = k$ 时的假设。（注意，扭曲不会对伴随分次上的微分产生影响。）因此，根据该引理，我们得到一个元素 $x_k \in \mathcal{G}^k\mathfrak{g}$，使得

$$\operatorname{curv}_{\mathfrak{g}^{m_{k-1}}}(x_k) = \operatorname{curv}_{\mathfrak{g}}(m_{k-1} + x_k) \in \mathcal{G}^{k+1}\mathfrak{g}.$$

因此，我们令 $m_k := m_{k-1} + x_k$。最后， $\mathcal{G}^1\mathfrak{g}$ 中所需的 Maurer-Cartan 元素为

$$m = \lim_{k\to\infty} m_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

利用级数由 (37) 可知是收敛的。

□

7. Hopf 上余代数余模的变形复形

代数变形理论中一个反复出现的主题是，两个（足够良好的）代数对象之间的映射集合，可以与某个微分分次李代数或 L_∞-代数的 Maurer-Cartan 元素相对应；我们将其称为变形微分分次李代数，或变形复形。Fresse 和作者在 [28] 中已证明，这一主题可应用于 Hopf 余拟序列或Λ Hopf 余拟序列。在这里，我们将介绍他们针对 Λ Hopf 余模的构造的一种变体。

7.1. 变形复形的构造。我们固定一个约化的 dg Λ Hopf 余合作子 C。假设给定两个满足以下性质的 Λ Hopf 余模 M 和 N。

a. N 是一个 dg C-余模中的拟余自由对象，由对称序列 W 余生成，因此 $N = (F^c c\ W, d)$。

b. M 是一个拟自由的 Λ Hopf 集合，由对称序列 V 生成。具体而言，ˆ这意味着如下内容。令 V 为由 V 生成的自由 Λ Hopf 集合，即，

$$\hat{V}(r) \cong \oplus_{f:[k]\hookrightarrow[r]} V(k),$$

其中直和遍历所有保序单射。因此，M(r) 是由 V(r) 生成的拟自由微分分次交换代数，故 $M(r) = S(V(r))$。为简便起见，我们将写作

$$S_\Lambda V = S(\hat{V}).$$

c。此外，我们要求生成对称序列 V 配备一个穷尽的递增滤过，其各项均为有限维对称序列

$$0 = \mathcal{F}^0 V(r) \subset \mathcal{F}^1 V(r) \subset \cdots$$

也就是说，它与 Λ Hopf C 余模结构按如下意义相容。首先，我们将生成对称序列 V 上的滤过延拓到 $\hat{V}$，再通过定义将其延拓到 M：

$$\mathcal{F}^p M(r) = \mathcal{F}^p(S_\Lambda V)(r) = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m \le p \\ m \ge 0}} \operatorname{im}\left(\mathcal{F}^{p_1}\hat{V}(r) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{p_m}\hat{V}(r)\right).$$

- 接下来，我们首先要求 M 上的微分与此滤过相容，即 $d\mathcal{F}_p M(r) \subset \mathcal{F}_p M(r)$。

- 其次，我们要求余模余作用与此滤过相容，即对于 $x \in \mathcal{F}_p M(r)$，其余作用的像包含于 $\mathcal{F}_p M(r-s+1) \otimes C(s)$。

请注意，根据构造，该滤过自动与交换代数结构及 Λ 结构相容。

我们将满足上述技术条件的一对 Λ Hopf C 余模 (M, N) 称为一对良好对 Λ Hopf C 余模。一般而言，对于微分分次对象 X，我们用 $X^\flat$ 表示其底层分次对象，即将 X 的微分设为零即可得到 $X^\flat$。

引理 7.1. 设 (M , N) 是 Λ Hopf C 余模的良好对，且 $\mathcal{R}$ 是任意分次交换代数。则生成元的嵌入和余生成元的投影诱导出一个双射

$$\mathrm{Mor}_{g\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\mathcal{R}\otimes C^\flat}/\mathcal{R}}(\mathcal{R}\otimes M^\flat, \mathcal{R}\otimes N^\flat) \to \mathrm{Mor}_{\mathbb{S}/\mathcal{R}}(\mathcal{R}\otimes V, \mathcal{R}\otimes W).$$

这里，$\mathrm{Mor}^{g\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\mathcal{R}\otimes C^\flat}/\mathcal{R}}(\cdots)$ 表示基环为 $\mathcal{R}$、定义在 $A\otimes C^\flat$ 上的右 Λ-Hopf 余模之间的态射集合，而 $\mathrm{Mor}^{\mathbb{S}/\mathcal{R}}(\ldots)$ 表示 $\mathcal{R}$-模中的对称序列之间的态射集合。

证明. 记 $\iota : V \to M$ 为生成元的嵌入，记 $\pi : N \to W$ 为余生成元的投影。因此，引理中的映射将模态射 $F : \mathcal{R}\otimes M^\flat \to \mathcal{R}\otimes N^\flat$ 与对称序列态射 $f = \pi \circ F \circ \iota : \mathcal{R}\otimes V^\flat \to \mathcal{R}\otimes W^\flat$ 对应起来。

假设给定一个对称序列映射 $f : \mathcal{R}\otimes V \to \mathcal{R}\otimes W$。接下来我们将构造一个相应的 Λ Hopf $C^\flat$ 余模映射 F，使得 $\pi \circ F \circ \iota = f$，从而证明满射性。为简化记法，我们还将省略记号中的 $\mathcal{R}$，并默认始终在基环 $\mathcal{R}$上工作，且所有对象都已替换为其 $\mathcal{R}$-扩张。

然后我们利用 M 上的滤过，通过归纳法构造 F。为此，还需注意，根据我们的条件，$\mathcal{F}_p M^\flat$ 是一个分次 $C^\flat$-余模，因此我们可以写成

$$M^\flat = \operatorname{colim} \mathcal{F}^p M^\flat .$$

首先， $\mathcal{F}^0 \mathrm{M}^\flat = \mathsf{Com}^c$ 由每个元数中的单位元张成。因此，F 必然定义在$\mathcal{F}^0 \mathrm{M}^\flat$ 上，且为以下复合

$$\mathcal{F}^0 M^\flat = \mathsf{Com}^c \to N^\flat .$$

此映射是分次 Λ Hopf $\mathrm{C}^\flat$-余模之间的映射。接下来，假设我们已经定义了一个 Hopf $\mathrm{C}^\flat$-余模之间的映射Λ

$$F : \mathcal{F}^{p-1} M^\flat \to N^\flat,$$

使得 $\pi \circ \mathrm{F} \circ \iota = \mathrm{f}|_{\mathcal{F}^{p-1}V}$，并且我们希望将此映射延拓到 $\mathcal{F}_p \mathrm{M}^\flat$。我们依次通过对元数进行嵌套归纳来完成这一过程。我们用 $\mathcal{F}_p \mathrm{M}^\flat_{\leq q}$表示元数截断。假设我们已经定义了截断 Hopf C -余模之间的映射 Λ

$$F : \mathcal{F}^p M^\flat_{\leq r-1} \to N^\flat,$$

使得 $\pi \circ \mathrm{F} \circ \iota$ 与 f 的适当限制一致，并且我们希望将 F 延拓到元数 r。（归纳的基例 $\mathrm{r} = 0$ 为空。）我们首先定义一个合适的对称序列映射

$$g : \mathcal{F}^p M^\flat_{\leq r} \to W,$$

来扮演 $\pi \circ \mathrm{F}$ 的角色。为此，令 $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_k \in \mathcal{F}\mathrm{p}\, \mathrm{M}^\flat(\mathrm{r})$，其中 $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k \in \hat{}\mathrm{V}(\mathrm{r})$。若 $\mathrm{k} \geq 2$，则每个 x_j 必然都是 $\mathcal{F}\mathrm{p}_{-1}\, \hat{}\mathrm{V}$ 的元素，我们利用归纳定义的 F，并令 $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \pi(\mathrm{F}(\mathrm{x}_1) \cdots \mathrm{F}(\mathrm{x}_k))$。若 $\mathrm{k} = 1$，则 $\mathrm{x} = \lambda(\mathrm{x}')$，其中 $\mathrm{x}' \in \mathrm{V}$，而 λ 是某个Λ-运算。若 λ 是恒等运算，则令 $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$。否则，$\mathrm{x}' \in \mathrm{V}(\mathrm{r}')$，其中某个 $\mathrm{r}' < \mathrm{r}$，我们令 $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \pi(\lambda(\mathrm{F}(\mathrm{x}'))$；这是因为根据归纳法，F 已在较低元数上定义。最后，我们定义 $\mathrm{F} : \mathcal{F}\mathrm{p}\, \mathrm{M}^\flat_{\leq}\mathrm{r} \to \mathrm{N}^\flat$ 为唯一的分次 C $\flat$-余模映射，使得 $\pi \circ \mathrm{F} = \mathrm{g}$。换言之，我们将每个 $\mathrm{x} \in \mathcal{F}\mathrm{p}\, \mathrm{M}^\flat_{\leq}\mathrm{r}$ 映到唯一的 $\mathrm{y} \in \mathrm{M}^\flat(\mathrm{r})$，使得 $\pi(\mathrm{y}) = \mathrm{g}(\mathrm{x})$，并且对于每个余作用 Δ，都有

$$\Delta(F(x)) = (F \otimes id_C)(\Delta).$$

特别要注意，如果 $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_k$ 是一个非平凡乘积，那么根据归纳假设以及乘积与余作用的相容性，元素 $\mathrm{y} = \mathrm{F}(\mathrm{x}_1) \cdots \mathrm{F}(\mathrm{x}_k)$满足这些方程。因此，我们的 F 与乘积相容。类似地，也可以用同样的论证证明它与 r-截断的 Λ 运算相容。此外，根据定义，F 显然保持 C -余作用。并且显然， $\pi \circ \mathrm{F} \circ \iota$ 与 f 一致。最后不难看出，这样定义的 F 在较低的元数和滤过次数上确实限制为前几步归纳中得到的 F。

因此，我们特别证明了引理中映射的满射性。然而，追溯上述构造可知，每一步的定义都由以下要求唯一确定：F 必须是 Hopf $\mathrm{C}^\flat$-模之间的态射，且 $\pi \circ \mathrm{F} \circ \iota = \mathrm{f}$。因此，引理中的映射也是单射，进而如所声称的那样是一个双射。□

注 7.2. 注意，V 上的穷尽升滤过在内同态空间 $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{S}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ 上诱导出下降完备滤过。

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(V, W) = \mathcal{F}^1\mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(V, W) \supset \mathcal{F}^2\mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(V, W) \supset \cdots$$

使得

$$\mathcal{F}^p\mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(V, W)$$

由满足条件的那些 m 个 在 $\mathcal{F}_{p-1}V$ 上为零的态射。在引理的设定下，我们还可得 e

$$\mathrm{Mor}_{\mathbb{S}/\mathcal{R}}(\mathcal{R}\otimes V,\mathcal{R}\otimes W)\cong(\mathcal{R}\hat{\otimes}\mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(V,W))_0\,, \tag{38}$$

其中右侧是张量积的 0 次数子空间，并且按照上述滤过取完备化。请注意，此处的结论用到了 $\mathcal{F}_pV$ 的有限维性。

到目前为止，我们忽略了余模上的微分。事实证明，这些微分会导出一个完备的曲弯 SLie_∞-结构。

命题 7.3. 设 C 为一个约化的 ΛHopf 余拟序列，且 (M, N) 是如上所述、生成元和余生成元分别为 V 和 W 的一对良好 ΛHopf C 余模。那么，在分次向量空间上存在一个滤过完备的曲弯 SLie_∞-结构

$$\mathrm{Def}(M,N):=\mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(V,W)$$

使得对于任意微分分次交换代数 $\mathcal{R}$， $\mathcal{R}\hat{\otimes}\mathrm{Def}(M,N)$ 中的 Maurer-Cartan 元素与 $\mathcal{R}$ 上的右 ΛHopf C-余模态射一一对应

$$\mathcal{R}\otimes M\to\mathcal{R}\otimes N\,.$$

这个一一对应更准确地说由引理 7.1 中的映射给出，即 Maurer-Cartan 元素 f 对应于一个模态射 F，其到（余）生成元的限制-投影为 f。

证明。由引理 7.1 可形式地得到证明，这与 Hopf 余拟序列的类似命题的证明相同 [28, 定理 21]。

特别地，利用第 6.2 节中针对 SLie_∞-代数的图式形式体系，我们将编码弯曲 SLie_∞-运算的生成函数定义为

$$\mathcal{U}(f)=\pi\circ(d_N\circ\Phi(f)-\Phi(f)\circ d_M)\circ\iota, \tag{39}$$

其中 π 和 ι 分别是到余生成元的投影和生成元的嵌入，而 Φ 是引理 7.1 中同构的逆。关于验证此生成函数定义了一个 SLie_∞-代数结构，请参见下文命题 7.4 的证明，其中展示了一个更一般的命题。

然而，显然 Maurer–Cartan 方程 $\mathcal{U}(\mathrm{f})=0$ 等价于 $\Phi(\mathrm{f})$ 与微分相交织，因此它是 dg ΛHopf C 余模的一个态射。

□

7.2. 微分分次李代数作用。接下来，令 (M, N) 为如上所述的 ΛHopf C -余模的良好对，并令 g 为一个滤过完备微分分次李代数。假设 g 通过双导子作用于 M。具体而言，这意味着对于齐次的 $\mathrm{x}\in\mathrm{g}$ 以及 $\mathrm{m},\mathrm{m}'\in\mathrm{M}$，我们有如下相容性方程

$$\begin{aligned}
&x\cdot(mm')=(x\cdot m)m'+(-1)^{|x||m|}m(x\cdot m')\\
&x\cdot\mu_j^c(m)=\mu_j^c(x\cdot m)\\
&\Delta(x\cdot m)=((x\cdot)\otimes id_C)\Delta(m),
\end{aligned} \tag{40}$$

其中，x· 表示 x 的作用，μ_j^c 是 (4) 中所述的定义性 Λ-运算，而 Δ 表示 C -余作用。我们还假设 g 在 M 上的作用与 g 和 M 上的滤过相容，即

$$\mathcal{F}^p\mathfrak{g}\cdot\mathcal{F}^q M\subset\mathcal{F}^{q-p}M. \tag{41}$$

命题 7.4. 在上述设定下，存在一个滤过完备的带曲率 SLie_∞-代数结构于

$$\mathfrak{g}\ltimes \mathrm{Def}(M,N):=\mathfrak{g}[1]\oplus\mathrm{Def}(M,N)$$

满足以下性质：

- 对于任意分次交换代数 $\mathcal{R}$，Maurer-Cartan 元素 $\mathrm{m}=\mathrm{Z}+\mathrm{f}\in \mathsf{MC}(\mathcal{R}\hat{\otimes}(\mathfrak{g}\ltimes \mathrm{Def}(\mathrm{M},\mathrm{N})))$ 与由一个 $\mathrm{Z}\in\mathcal{R}\hat{\otimes}\mathfrak{g}$ 中的 Maurer-Cartan 元素和一个 Λ Hopf 右 C-余模上的态射组成的序对之间存在一一对应关系，所述余模定义于 $\mathcal{R}$

$$\Phi(f):(M\otimes\mathcal{R})^Z\to N\otimes\mathcal{R}.$$

- $\mathfrak{g}\ltimes\mathrm{Def}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ 的 SLie_∞-运算 (ν_k) 按如下意义扩展了两个因子上的运算：如果 $_k$ 的所有输入都属于 g，且将输出投影到 g，则这些运算与 g 上的微分分次李代数结构一致。此外，如果所有输入都属于 Def(M, N)，则输出也属于该空间，并且其结构与命题 7.3 中 Def(M , N) 上的带曲率 SLie_∞-结构一致。最后，带有混合输入（部分来自 g，部分来自 Def(M , N)）的 SLie_∞-运算取值于 Def(M , N)。[4]

证明。我们将再次使用第 6.2 节中概述的 SLie_∞-代数形式体系，并将生成函数定义为

$$\mathcal{U}(Z+f)=\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(Z)+\pi\circ(d_N\circ\Phi(f)-\Phi(f)\circ(d_M+Z\cdot))\circ\iota,$$

其中我们简写了

$$\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(Z)=dZ+\frac{1}{2}[Z,Z],$$

其括号和微分均取自 g。下面以形式（32）验证 SLie_∞-关系。我们需要用到，对于一个 Λ Hopf 余模映射 F，有 $\Phi(\pi\circ\mathrm{F}\circ\iota)=\mathrm{F}$。特别地，对于映射 Φ(f) 的一个导子 D，我们有

$$\Phi(f+\epsilon\pi\circ D\circ\iota)=\Phi(\pi\circ(\Phi(f)+\epsilon D)\circ\iota)=\Phi(f)+\epsilon D.$$

接下来我们计算

$$\mathcal{U}(Z+f+\epsilon\mathcal{U}(Z+f))=\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(Z+\epsilon\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(Z))+\pi\circ(dX-X(d+Z\cdot+\epsilon\mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(Z)\cdot))\circ\iota$$

with

$$X:=\Phi(f+\epsilon\pi\underbrace{(d\Phi(f)-\Phi(f)(d+Z\cdot))}_{\text{derivation of }\Phi(f)}\iota)=\Phi(f)+\epsilon(d\Phi(f)-\Phi(f)(d+Z\cdot)).$$

[4]这就是我们（滥）用半直积记号的原因。

利用 $d^2 = 0$ 并将 $F := \Phi(f)$ 简记为 F，我们计算

$$\begin{aligned} dX - X(d + Z\cdot + \epsilon \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}(Z)\cdot) &= dF - F(d + Z\cdot) + \epsilon F((dZ)\cdot + (Z\cdot)(Z\cdot) - \mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(Z)\cdot) \\ &= dF - F(d + Z\cdot). \end{aligned}$$

代入后，我们得到

$$\mathcal{U}(Z + f + \epsilon \mathcal{U}(Z + f)) = \mathcal{U}^{\mathfrak{g}}(Z) + \pi(dF - F(d + Z\cdot))\iota = \mathcal{U}(Z + f)$$

如所要求的。

由上述构造和讨论，SLie_∞-结构的所述性质显然成立。□

7.3. 微分分次李代数作用与映射空间。设 g 是一个滤过完备微分分次李代数。g 的指数群是由下式给出的单纯群

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathfrak{g}) = Z_0(\mathfrak{g} \hat{\otimes} \Omega(\Delta^\bullet))$$

它由闭的零次元素 $Z_0(-)$ 构成，复合由 Baker-Campbell-Hausdorff 乘积 $*$ 给出。也就是说，对于 $x, y \in Z_0(g \hat{\otimes} \Omega(\Delta^\bullet))$，我们有

$$x * y = \log(e^x e^y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \cdots .$$

再次设 M 是一个右 Λ Hopf C-余模，并假设 g 通过双导子作用于 M。于是特别地，我们得到一个单纯幺半群映射

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Map}(M, M),$$

因此，指数群 g 在 M 上有一个作用。给定右 ΛHopf C-余模的映射 $f : M \to N$，我们还可得到一个单纯集合映射

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Map}(M, N) \tag{42}$$

其作用方式为作用于 f（即与 f 复合）。

现在假设我们处于第 7.1 节的设定中，也就是说，M、N 构成一个良好对。那么，我们可以将映射空间写成形变 SLie_∞-代数的 Maurer-Cartan 空间

$$\mathrm{Map}(M, N) = \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{Def}(M, N)).$$

为方便起见，我们也将与映射 f 对应的 Maurer-Cartan 元素记为 $f \in \mathrm{MC}(\mathrm{Def}(M, N))$。此外，我们记

$$\mathrm{Def}(M \xrightarrow{f} N) := \mathrm{Def}(M, N)^f$$

扭曲的 S李$_\infty$-代数。注意，这是一个真正的 S李$_\infty$-代数，而不是曲率型代数。扭曲不会改变 Maurer-Cartan 空间，但 $\mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{Def}(M_f \to N))$ 有一个由零 MC 元给出的特定基点，它对应于 f。下面我们将需要以下结果。

命题 7.5。设 M、N 是一对良好的 ΛHopf C 余模，$f : M \to N$ 是 Hopf C 余模的一个映射，g 是一个微分分次李代数，并且按照第 7.2 节的定义，g 在 M 上有一个良好的作用。令 $\mathfrak{g}_{ab}$ 为 g 的阿贝尔化，并将其视为一个 S李$_\infty$ 代数。那么存在一个 S李$_\infty$-态射

$$\Phi : \mathfrak{g}_{ab} \to \mathrm{Def}(M \xrightarrow{f} N)$$

与滤过相容，使得单纯集映射 (42) 与 Maurer-Cartan 空间上的态射一致

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathfrak{g}) = \mathsf{MC}_\bullet(\mathfrak{g}_{ab}) \to \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{Def}(M \xrightarrow{f} N)) = \mathrm{Map}(M, N).$$

这正是其余运算伴随对应物 [28, 命题 24] 关于余模的版本。不过，鉴于上面的命题 7.4，我们也可以通过以下引理形式化地得到一个自包含的证明。

引理 7.6. 设 g 是一个微分分次李代数，其通过（可能是弯曲的）SLie$_\infty$-导子作用于（可能是弯曲的）SLie$_\infty$-代数 h。我们假设 g 和 h 都配备了相容的下降完备滤过

$$\mathfrak{g} = \mathcal{F}^1\mathfrak{g} \supset \mathcal{F}^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$
$$\mathfrak{h} = \mathcal{F}^1\mathfrak{h} \supset \mathcal{F}^2\mathfrak{h} \supset \cdots$$

并且 g 在 h 上的作用与滤过相容。设 $\alpha \in \mathsf{MC}(\mathfrak{h})$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。那么存在一个（可能是弯曲的）SLie$_\infty$-态射

$$\mathfrak{g}_{ab} \to \mathfrak{h}$$

与滤过相容，该态射来自 g 的阿贝尔化，并且其在 Maurer-Cartan 空间上诱导的映射

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathfrak{g}) = \mathsf{MC}_\bullet(\mathfrak{g}_{ab}) \to \mathsf{MC}_\bullet(\mathfrak{h})$$

与指数群作用于给定 MC 元 α 所得到的映射一致。

证明。我们先明确写出 g 对 h 的作用。该作用由运算 $\nu_k(x; y_1, \ldots, y_k)$ 给出，其中 $k \geq 0$；对于给定的 $x \in \mathfrak{g}$，与 x 相关联的（曲）预 S李$_\infty$-导子为

$$x\cdot = \{\nu_k(x; -)\}_{k\geq 0}.$$

这些来自李代数的导子，以及 h 上的 S李$_\infty$-结构本身，均由一个 S李$_\infty$-导子 D 编码。那么，g 对 h 的作用具体来说意味着有

$$[D, x\cdot] = (dx)\cdot \qquad\qquad [x\cdot, y\cdot] = [x, y]\cdot . \tag{43}$$

现在我们再次使用第 6.2 节的图式形式体系来编码 SLie$_\infty$-态射。令 $\mathcal{R}$ 为一个分次交换代数，且 $x \in \mathfrak{g} \hat{\otimes} \mathcal{R}$ 是一个零次元素。于是我们可以将 SLie$_\infty$-导子 $x\cdot$ 取指数，得到一个（预）SLie$_\infty$-态射

$$\exp(x\cdot) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(x\cdot)^k.$$

根据 (43) 的第一个等式，这满足

$$(1+\epsilon D)\circ\exp(x\cdot)\circ(1-\epsilon D)=\exp(x\cdot+\epsilon dx\cdot),$$

其中 ϱ 是一个变量 次数为 -1。然后我们通过生成函数定义 SLie_∞-态射

$$F(x)=\exp(x\cdot)(\alpha)$$

将 α 放入 SLie_∞-态射的所有槽位中。在这种表述下，$\mathfrak{h}$ 上的 SLie_∞-结构的生成函数就是

$$\mathcal{U}^{\mathfrak{h}}(y)=D(y),$$

而 $\mathfrak{g}_{ab}$ 的生成函数是

$$\mathcal{U}^{\mathfrak{g}_{ab}}(x)=dx,$$

我们以式 (35) 的形式验证 SLie_∞-关系：

$$\begin{aligned}F(x+\epsilon dx)&=\exp(x\cdot+\epsilon dx\cdot)(\alpha)\\&=(1+\epsilon D)\circ\exp(x\cdot)\circ(1-\epsilon D)(\alpha)\\&=(1+\epsilon D)(\exp(x\cdot)(\alpha))\\&=F(x)+\epsilon\mathcal{U}_{\mathfrak{h}}(F(x)),\end{aligned}$$

其中，在倒数第二行中，我们用到了 $\mathrm{D}(\alpha)=0$，因为 α 是一个 Maurer-Cartan 元素。 □

命题 7.5 的证明。命题 7.4 在 $\mathfrak{g}\oplus\mathrm{Def}(\mathrm{M}_f\to\mathrm{N})$ 上给出了一个 SLie_∞-结构。考察该命题证明中的定义可知，这个 SLie_∞-结构编码了 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Def}(\mathrm{M}_f\to\mathrm{N})$ 上的作用。因此，我们可以运用引理 7.6 得到所需的 SLie_∞-态射。追溯各项定义不难验证，诱导的 Maurer-Cartan 空间之间的映射确实由指数群的作用给出。□

8. 图形（余）算子与（余）模

本节旨在介绍若干利用（费曼）图定义的余运算子和余模。这些对象大多已见于文献。其构造将在第 8.1 节中回顾的余运算子Graphs_n 由 Kontsevich 在 [38] 中定义。余模 $\mathsf{Graphs}_{V,\,n}$ 的定义（实质上）出现在 [12]，中，而李代数 $\mathsf{HGC}_{V,\,n}$则可在 [20] 中以一种受限形式找到。

一般来说，图复形可以通过两种方式之一来定义：要么使用一般的代数与运算子构造，要么采用组合的方法。前一种方法的优点是，大多数形式性质，例如代数结构的存在，或关于微分的等式 $\mathrm{d}^2=0$，都可以直接从构造中得出。后一种组合式的图复形方法则简单得多，也可能更受运算子理论非专业人士的青睐。不过，在组合图景中，像 $\mathrm{d}^2=0$ 这样的恒等式通常需要更繁琐地显式证明，而且有些公式（例如关于微分的公式）似乎凭空出现。

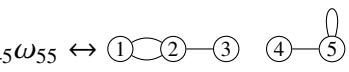
这里我们将采用一种混合方法，以大体上组合的形式引入图复形，同时利用代数结构来尽量减少需要

手动验证的恒等式数量。这要求我们暂时考虑比最终使用的图复形稍大的图复形。具体而言，我们暂时考虑对顶点的价数没有限制的图复形，而之后总是将其限制为（内部）≥ 3 价图，从而得到小得多的复形。我们将用上标“#”标示这一点，例如 $\mathsf{Graphs}^{\#}_{V,n}$ 表示没有价数限制的中间图复形，而我们之后实际使用的对象是 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$。

8.1. Kontsevich Λ Hopf 余拟序列 Graphs_n。对于固定整数 n，我们定义自由分次交换代数

$$\mathsf{Gra}_n(r) = \mathbb{Q}[\omega_{ij} = (-1)^n \omega_{ji} \mid 1 \leq i, j \leq r],$$

其生成元 ω_{ij} 的次数为 $n-1$。$\mathsf{Gra}_n(r)$ 中的元素可理解为具有 r 个编号顶点的图的线性组合，并且对于每个因子 ω_{ij}，顶点 i 与顶点 j 之间都有一条边，例如

$$\omega_{12}^2\omega_{23}\omega_{45}\omega_{55} \leftrightarrow$$  .

类似地，我们可以构造 dg 交换代数的对称序列 as

$$\mathsf{Graphs}_n^{\#}(r) = \bigoplus_{k\geq 0} (\mathsf{Gra}_n(r+k) \otimes \mathbb{Q}[n]^{\otimes k})_{S_k}.$$

$\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n(r)$ 中的元素可理解为图的线性组合，这些图具有 r 个编号的“外部”顶点，以及任意（有限）个 k 个未编号的“内部”顶点。在图示中，我们将后者画成黑色。

 $\in$图$^{\#}{}_n(3)$

我们也明确说明上述定义中包含的次数和符号约定。图的上同调次数为

$$(n-1)(\#\text{edges}) - n(\#\text{internal vertices}).$$

换言之，内部顶点的次数为 $-n$，边的次数为 $n-1$。对称群作用下的余不变量转化为图的以下符号约定，具体取决于 n 的奇偶性：

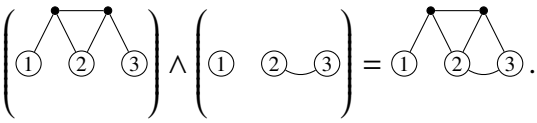
- 当 n 为偶数时，我们将图视为附带一组边的排序；该排序源自相应单项式 ω_{ij} 中各因子的排序。通过置换 p 改变边的排序，会使符号乘以 sgn(p)。

- 当 n 为奇数时，图带有一个由因子 Q[n], 诱导的内部顶点集合的排序，而通过置换 p 改变这一排序会使符号乘以 sgn(p)。此外，由于 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$，边必须定向，并且我们将相差一个符号的两种不同定向视为相同。

$$\longrightarrow = -\longleftarrow$$

请注意，我们经常在图示中省略这些定向数据（边的排序、顶点的排序以及边的方向），因此符号未定义。

每个空间 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n(\mathrm{r})$ 都是自由分次交换代数，交换乘积通过在 r 个外部顶点处将图粘合起来得到，例如：



(44)

为了确定这幅图以及后续类似图中的符号，必须指定右侧图的定向数据。我们保留左侧图上边或顶点的自然排序，并将它们的排序直接拼接起来。

此外，空间族 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n$ 还具有分次（对称）Λ-余合作子的结构。首先，$\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n$ 上的右 S_r 作用通过置换外部顶点的编号来定义。要定义余合作子余合成，只需指定以下形式的约化余合成

$$\Delta_s : \mathsf{Graphs}_n^{\#}(r) \to \mathsf{Graphs}_n^{\#}(r-s+1) \otimes \mathsf{Graphs}_n^{\#}(s)$$

相应于子集 $\{1,\ldots,\mathrm{s}\} \subset \{1,\ldots,\mathrm{r}\}$。那么，对于图 $\Gamma \in \mathsf{Graphs}^{\#}{}_n(\mathrm{r})$，

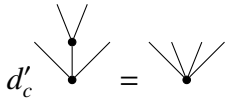
$$\Delta_s(\Gamma) = \sum_{\substack{\gamma\subset\Gamma \\ 1,\ldots,s\in\gamma}} \pm(\Gamma/\gamma) \otimes \gamma,$$

对所有包含外部顶点 $1,\ldots,\mathrm{s}$ 且不包含其他外部顶点的子图求和[5] $\gamma \subset \Gamma$，并且令 Γ/γ 表示将 γ 收缩为一个编号为 1 的新外部顶点，并将外部顶点 $\mathrm{s}+1,\ldots,\mathrm{r}$ 重新编号为 $2,\ldots,\mathrm{r}-\mathrm{s}+1$ 后得到的图。符号是将 γ 的边或顶点移至右侧时，相对于 Γ 中边 / 顶点的排序所对应的非洗牌置换的符号。最后，Λ-运算 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n(\mathrm{r}) \to \mathsf{Graphs}^{\#}{}_n(\mathrm{r}+1)$ 是通过在图中添加一个零价外部顶点来定义的。

我们通过边收缩在 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n$ 上定义一个微分。为简化后续证明，我们将其分为两部分定义。第一部分定义在图 $\Gamma \in \mathsf{Graphs}^{\#}{}_n$ 上，形式如下

$$d'_c\Gamma = \sum_e \pm\Gamma/e,$$

其中求和遍历连接两个不同内部顶点的所有边，Γ/e 表示将边 e 收缩后得到的图。



(45)

[5]子图是 Γ的顶点集和边集的子集，并且对于子图 γ中包含的每条边，其端点也都属于 γ。

如果边和顶点的排列使得 e 是第一条边，将排列中的第一个内部顶点连接到第二个内部顶点，那么符号为“+”；在 Γ/e 中，其余边和顶点的排列与 Γ 中的相同。我们把验证 $(d'_c)^2 = 0$ 留给读者，并且 d'_c 保持 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n$ 上的 Λ Hopf 余拟序列结构。也就是说，d'_c 关于 Λ 余合作子结构是一个余导子，并且关于交换代数结构是一个导子。

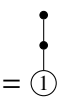
接下来，我们要应用第 3.11 节的扭曲构造。为此，我们考虑对偶运算子 $(\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n)^*$，其元素也可以自然地视为图。我们将 d'_c 的对偶微分记作 δ' 分裂。（它在组合上由分裂内部顶点给出。）我们定义元素

$M_| =$  $\in (\mathsf{Graphs}^{\#}_n(1))^*$

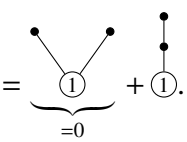
引理 8.1. 元素 $-M_| \in (\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n(1))^*$ 是一个 Maurer-Cartan 元素，即，

$$\delta'_{split} M_| - M_| \circ_1 M_| = 0.$$

证明。我们计算

$\delta'_{split} M_| =$ 

其中的定序 方式是使边和顶点自上而下定序并定向。此外 ，

$M_| \circ_1 M_| =$  $+$.

右侧的第一个图因对称性而为零。第二个图中的顶点和边按自上而下的顺序定序并定向。□

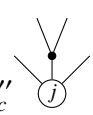
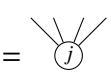
因此，与第 3.11 节一样，我们可以赋予 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n$ 微分 $d := d'_c - M_{|}^{\cdot}$，从而得到一个 dg Λ Hopf 余拟序列。

到目前为止，我们一直在研究相对较大的余合作子 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_n$。接下来定义商

$$\mathsf{Graphs}_n(r) = \mathsf{Graphs}^{\#}_n(r)/J(r)$$

它是由满足以下条件之一的图张成的子空间 J(r)：图中有一个仅由内部顶点组成的连通分支，或者含有价为 ≤ 2的内部顶点。我们将 dg ΛHopf 余拟序列结构可下降到这个商这一点留给读者验证。

这里只需指出，组合地，微分 d 通过收缩边起作用，其中 $d''_c = -M_{|}^{\cdot}$ 这一部分收缩内部顶点与外部顶点之间的边。

d''_c  $=$ 

存在一个从 Λ Hopf 余拟序列 Graphs_n 到 n-Poisson 余运算子的自然映射

$$\mathsf{Graphs}_n \to \mathsf{Pois}^c_n \tag{46}$$

该映射将任何含内部顶点的图映为零，并将顶点 i 和 j 之间的任意边映为代数生成元 ω_{ij} Pois_n^c，见第 2.5 节。另外，再次注意，对于 $\mathrm{n} \geq 2$，我们有 $\mathsf{e}_n^c = \mathsf{Pois}_n^c$。我们只引用以下结果。

定理 8.2（Kontsevich、Lambrechts-Voli´c [38], [46]）。映射 (46) 是一个拟同构。

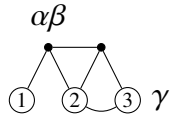
8.2. Hopf 图$^{\#}{}_n$ 余模 图$^{\#}{}_{V,\ n}$。设 V 是一个有限维正分次向量空间，n 是一个整数。于是我们定义分次交换代数的集合

$$\mathsf{Gra}_{V,n}(r) = \mathsf{Gra}_n(r) \otimes S(V)^{\otimes r}.$$

元素可以理解为带有 r 个编号顶点的图，并且还可以用 V 中的零个或多个元素进行装饰，或者等价地，每个图都用 S (V) 中的一个元素进行装饰。接下来考虑

$$\mathsf{Graphs}^{\#}_{V,n}(r) := \bigoplus_{k\geq 0} (\mathsf{Gra}_{V,n}(r+k) \otimes \mathbb{Q}[n]^{\otimes k})_{S_k}.$$

这个空间的元素是带有 r 个编号的外部顶点以及任意数量未编号内部顶点的图的线性组合。在图示中，我们仍将后者画成黑点。



$\gamma \in \mathsf{Graphs}^{\#}_{V,n}(r)$, with $\alpha, \beta, \gamma \in V$.

我们如下定义一个分次 Hopf 右余合作子 图$^{\#}{}_n$-余模结构。首先，交换代数结构与 图$^{\#}{}_n$ 中的定义相同，即在外部顶点处粘合图，类似于 (44)。此外，通过子图收缩，图$^{\#}{}_{n,\ V}$ 被赋予一个右 图$^{\#}{}_n$-余合作子余模结构。更确切地说，记

$$\Delta_s : \mathsf{Graphs}^{\#}_{V,n}(r) \to \mathsf{Graphs}^{\#}_{V,n}(r-s+1) \otimes \mathsf{Graphs}^{\#}_{n}(s)$$

对应于子集 $\{1, \ldots, \mathrm{s}\} \subset \{1, \ldots, \mathrm{r}\}$ 的余代数余作用。于是，对于图$\Gamma \in$图$^{\#}{}_{V,\ n}(\mathrm{r})$,

$$\Delta_s(\Gamma) = \sum_{\substack{\gamma\subset\Gamma \\ 1,\ldots,s\in\gamma}} \pm(\Gamma/\gamma) \otimes \gamma,$$

求和遍历所有包含外部顶点 $1, \ldots, \mathrm{s}$ 且不包含其他外部顶点的子图 $\gamma \subset \Gamma$，并且 Γ/γ 表示通过将 γ 收缩为一个新的、编号为 1 的外部顶点，并将外部顶点 $\mathrm{s}+1, \ldots, \mathrm{r}$ 重新编号为 $2, \ldots, \mathrm{r}-\mathrm{s}+1$ 后得到的图。

Λ-运算 图$^{\#}{}_{V,\ n}(\mathrm{r}) \to$ 图$^{\#}{}_{V,\ n}(\mathrm{r}+1)$ 的定义方式是在图中添加一个零价外部顶点。

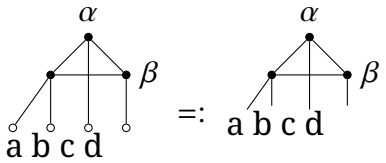
图$^{\#}{}_{V,n}$ 上的微分（目前）仅定义为运算 d'_c：按照（45），收缩一对内部顶点之间的一条边。

8.3. 分次李代数 $\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,n}$。接下来我们定义李余代数 $\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n}$ 和 $\mathrm{HG}_{V,n}$，推广 [20] 中类似的构造。为此，令 $\mathrm{V}_1 := \mathrm{V} \oplus \mathrm{Q1}$，它由在 V 上添加一个一维向量空间得到，该空间由次数为 0 的符号 1 张成。取 V 的一组基 $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_N$，并将其扩充为 V_1 的一组基 $\mathrm{e}_0 := 1, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_N$。令 $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_N$ 为 V_1^* 的对应对偶基。

此外，令 $\overline{\mathsf{Graphs}}^{\#}{}_{n,V}$ 为 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_{n,V}$ 的商，方法是将所有具有价数为 1 的外部顶点的图以及所有不连通的图置为零。于是，作为一个微分分次向量空间，我们定义

$$\mathbf{HG}^{\#}_{V,n} = \bigoplus_{r\geq 1} \overline{\mathsf{Graphs}}^{\#}_{n,V}(r) \otimes_{S_r} (V_1^*)^{\otimes r}.$$

元素可以看作带腿图（或带毛发的图），每条腿（或每根毛发）都由 V_1^* 中的一个元素标记。



其中 $\alpha, \beta \in \mathrm{V}$，且 a、b、c、$\mathrm{d} \in \mathrm{V}_1^*$。

下文中，通常如图所示，我们不会画出毛发末端的（外部）顶点。例外的是只有一个外部顶点的图；若不画出该顶点，这类图便无法有意义地绘制。

$$\begin{matrix}\alpha \\ \circ \\ a\end{matrix} \qquad \text{with } \alpha \in V,\, a \in V_1^*. \tag{47}$$

这些单顶点图张成了 $V_1^* \otimes V \cong \mathcal{H}om(V_1, V)$ 在 $\mathbf{HG}^{\#}\mathrm{V,n}$ 中的一个副本 .

接下来，我们将在 $\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n}$ 上定义一个李容许余乘法，并定义 $\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n}$ 在 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_{V,n}$ 上的一个李容许余作用。

定义 8.3。我们将图 $\Gamma \in \mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n}$ 或 $\Gamma \in \mathsf{Graphs}^{\#}{}_{V,n}$ 的切割定义为 Γ 的半边和装饰集合的一个子集 I，它满足以下条件：

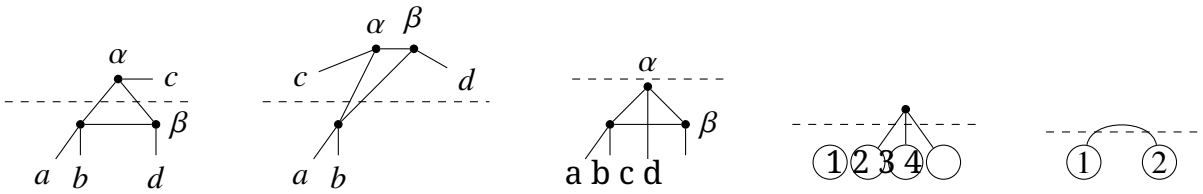
- 如果我们将 I 中的所有半边和装饰从其所属顶点上拆下，那么这些半边和装饰都包含在同一个连通分支中，该连通分支不包含与这些半边关联的任何顶点。我们称这个连通分支为上部，其补集为下部。

- 下部至少包含一个外部顶点。

如果下部是连通的，我们就称该切割为连通切割；如果下部包含所有外部顶点，我们就称该切割为内部切割。我们用 $\mathrm{I} \subset \Gamma$ 表示 I 是 Γ 的一个切割。

请注意，如果某个装饰包含在 I 中，那么只有当 I 仅由该装饰构成且不包含其他任何内容时，这些条件才可满足。我们称之为退化割。否则，I 是半边集合的子集。我们称 I 中的元素为割半边。图示上，割可以通过以下方式表示：

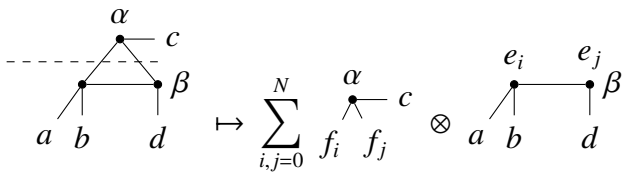
在图上画一条水平线，使其穿过所有割半边而不与其他边相交，并使与割半边相接的顶点位于线下方。以下是图 $\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,\,n}$ 上的 图$^{\#}{}_{V,\,n}$ 的割的示例。



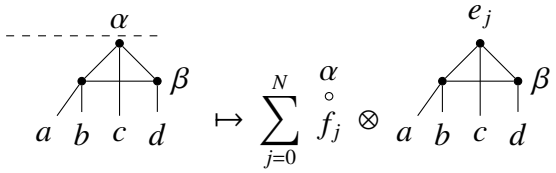
现在，我们使用以下构造，从 $\Gamma \in \mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n}$ 的一个连通切割 I 生成 $\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n} \otimes \mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n}$ 的一个元素，即两个毛图。

a. 我们将切割半边从其所连接的顶点上拆下，也就是说，我们“沿虚线切割”。

b. 接着，我们为每个切割半边添加一个一价外部顶点，并用 $\mathrm{f}_j \in \mathrm{V}_1^*$ 对其进行装饰。我们用 e_j 对切割半边原先所连接的顶点进行装饰，并对每个切割半边的所有 $\mathrm{j} = 0$、...、N 求和。换言之，我们将切割半边形式化地替换为 $\mathrm{V}_1^* \otimes \mathrm{V}_1$ 中的对角线。在此，我们将用特殊元素 $1 = \mathrm{e}_0 \in \mathrm{V}_1$ 进行的装饰视为完全没有装饰。以下示例将说明这一过程：



c. 在仅由一个装饰组成的退化割 I 这一特殊情形下，仍应用相同的过程，生成一个形如 (47) 的单顶点图，其顶点带有 α 和 f_j 装饰。



d. 我们用 Sweedler 型记法表示这样生成的图

$$\sum \Gamma^I \otimes \Gamma_I,$$

并将 Γ^I 称为该切割的上图，将 Γ_I 称为下图。

李可容许　　图 $\Gamma \in \mathrm{HG}^{\#}{}_{V,n}$ 上的余乘法[6] 由对所有连通切割求和给出　　s

$$\Delta\Gamma = \sum_{\substack{I \subset \Gamma \\ \text{conn. cut}}} \sum \Gamma^I \otimes \Gamma_I \in \mathbf{HG}^{\#}_{V,n} \otimes \mathbf{HG}^{\#}_{V,n}. \tag{48}$$

[6]关于李可容许代数的定义，见第 2.2 节。

某些 $\Gamma \in$ 图$_{n,V}$ 上的李可容余作用由完全相同的公式定义，只是求和范围为所有内部切割，即上部不包含外部顶点的那些切割。

$$\Delta_m \Gamma = \sum_{\substack{I \subset \Gamma \\ \text{int. cut}}} \sum \Gamma^I \otimes \Gamma_I \in \mathbf{HG}^{\#}_{V,n} \otimes \mathsf{Graphs}^{\#}_{V,n}. \tag{49}$$

命题 8.4。公式 (48) 和 (49) 在 $\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,\,n}$ 上定义了一个微分分次李容许余代数结构，并在 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_{V,\,n}$ 上定义了一个与微分分次 Λ Hopf 余模结构相容的微分分次李容许余作用，其微分为 d'_c。特别地，$\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,\,n}$ 是一个微分分次李余代数，而其对偶空间 $\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,\,n} = (\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,\,n})^*$ 是一个微分分次李代数，作用于 $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_{V,\,n}$，并保持 Λ Hopf $\mathsf{Graphs}^{\#}{}_{n}$-余模结构。

证明。对于 $\Gamma \in \mathrm{HG}^{\#}{}_{V,\,n}$，我们计算余结合子

$$A(\gamma) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(\Gamma) - (id \otimes \Delta) \circ \Delta(\Gamma)$$

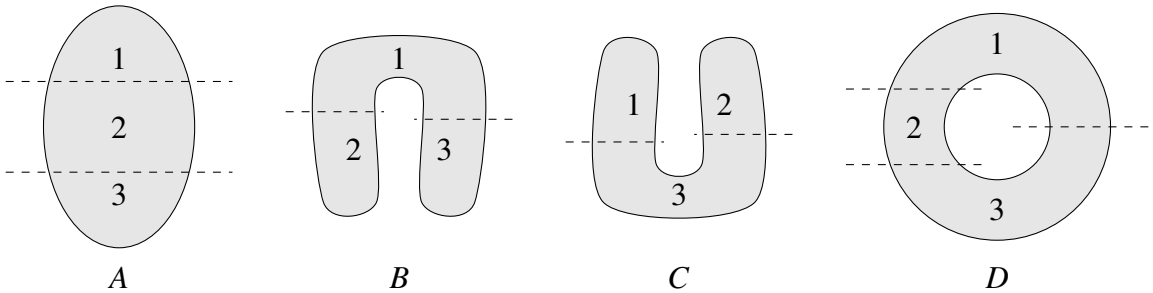
并验证其反对称化为零。我们有

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta(\Gamma) = \sum_{\substack{I \subset \Gamma \\ \text{conn. cut}}} \sum_{\substack{J \subset \Gamma^I \\ \text{conn. cut}}} \sum (\Gamma^I)^J \otimes (\Gamma^I)_J \otimes \Gamma_I. \tag{50}$$

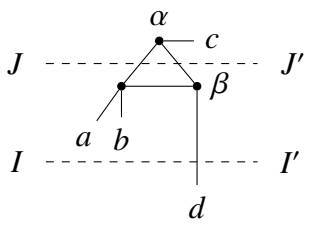
而

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(\Gamma) = \sum_{\substack{J' \subset \Gamma \\ \text{conn. cut}}} \sum_{\substack{I' \subset \Gamma_{J'} \\ \text{conn. cut}}} \sum \Gamma^{J'} \otimes (\Gamma_{J'})^{I'} \otimes \Gamma_{I'}. \tag{51}$$

每个求和都遍历一对切割，这对切割将原连通图 Γ 切分为三个连通部分。(50) 与 (51) 的区别在于，(50) 中第二次切割经过上部，而 (51) 中第二次切割经过下部。我们可以根据所产生的图的三个部分之间的关联关系对这些双重切割进行分类：若两个部分有公共界面，沿着该界面即可通过某种切割组合将它们切开，则称这两个部分关联。这些关联模式对应于具有三个顶点的连通有向无环图，如下所示：



例如 ，这是一个带有两处切割的示例图，对应于第一个模式：



我们依次考虑分别对应于模式 A、B、C、D 的双重切割。对于模式 A，这些切割既出现在求和 (50) 中，也出现在 (50) 中，因为可以先在下方切割，再在上方切割，或者以相反的顺序进行。因此，在余结合子中，也就是 (50) 与 (50) 的差中，这些项会相互抵消。对于模式 D，同样可以得出这一结论。对于模式 B，相应的切割只出现在求和 (50) 中，因为不可能在下部进行第二次切割。因此，这些项会对结合子有所贡献。然而，由于在 (50) 中，每对切割都可以按两种顺序进行，因此对余结合子的相应贡献在交换第二和第三个张量因子时保持对称。因此，反对称化结果为零。同理，对应于关联模式 C 的项都来自 (51)，但在交换第一个和第二个张量因子时保持对称。总之，这说明余结合子的反对称化为零。

类似地，我们考虑$\mathsf{HG}_{V,n}$对$\mathsf{Graphs}_{n,V}$的余作用。我们需要证明余模余结合子在前两个位置上是对称的。为此，对于 $\Gamma \in \mathsf{Graphs}_{n,V}$，我们比较

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta_m(\Gamma) = \sum_{\substack{I \subset \Gamma \\ \text{int. cut}}} \sum_{\substack{J \subset \Gamma^I \\ \text{conn. cut}}} \sum (\Gamma^I)^J \otimes (\Gamma^I)_J \otimes \Gamma_I. \tag{52}$$

而

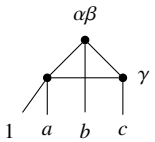
$$(id \otimes \Delta_m) \circ \Delta_m(\Gamma) = \sum_{\substack{J' \subset \Gamma \\ \text{int. cut}}} \sum_{\substack{I' \subset \Gamma_{J'} \\ \text{int. cut}}} \sum \Gamma^{J'} \otimes (\Gamma_{J'})^{I'} \otimes \Gamma_{I'}. \tag{53}$$

同样，两个求和都遍历 Γ 的（某些）双重切割，但需注意，对于内部切割，所有外部顶点都必须位于切割的下部。同样，图被切割后产生的三个部分之间，先验上可能有上文所示的 4 种关联模式。对于模式 A 、 C 、 D，与上文相同的论证表明，相应的结合子贡献要么为零，要么关于前两个因子对称。然而，对于模式 B，先前的论证并不适用：由于（52）的第一个求和中我们只对内部切割求和，因此只有一种允许的切割顺序，而非两种：外部顶点必须位于连通分支 3 中，因此唯一允许的切割顺序是先将连通分支 1 和 2 的并集与 3 分开，然后再切割 1 和 2。幸运的是，（52）的双重求和中不存在关联模式为 B 的双重切割：根据定义，Γ' 中唯一的外部顶点来自切割，这是“内部切割”的定义所致。但要实现关联模式 B，第二次切割 J 必须满足所有外部顶点都位于上部 $(\Gamma')^J$，而 $(\Gamma')^J$ 中没有外部顶点。然而，根据我们对切割的定义，这是不允许的——下部必须至少包含一个外部顶点。

上述论证表明，我们在 $\mathrm{HG}_{V,n}$ 上有一个定义良好的分次李可容余代数结构，并在 图$_{V,n}$ 上有一个李可容余作用。

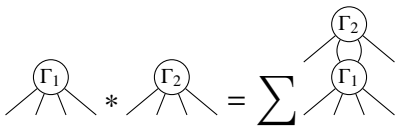
□

我们来组合地描述对偶李代数 $\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,\,n} = (\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,\,n})^{*}$ 。$\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,\,n}$ 的生成元可与带毛图对应；这些图在内部顶点处可以带有一个或多个 V 中的装饰*，且每根毛都带有一个 V 中的装饰$_{1}$。



with $\alpha, \beta, \gamma \in V^{*}$ and $a, b, c, d \in V$

两个此类图的李可容乘积 $\Gamma_1 * \Gamma_2$ 通过对所有将毛与 Γ_1 中的装饰进行部分匹配的方式求和得到：将毛与带装饰的顶点粘合，并乘以这些装饰的自然配对。毛上的装饰 1 需特殊处理： Γ_1 的这些毛可以连接到 Γ_2的任意顶点。下面给出该乘积的示意图：

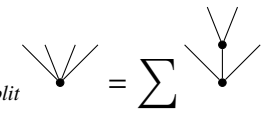


李括号是交换子 $[\Gamma_1, \Gamma_2] = \Gamma_1 * \Gamma_2 - (-1)^{|\Gamma_1||\Gamma_2|}\Gamma_2 * \Gamma_1$。

$\mathrm{HG}^{\#}{}_{V,\,n}$ 上的微分由操作 d'_c 收缩两个内部顶点之间的一条边给出。$\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,\,n}$ 上的对偶微分是对偶操作

$$\delta'_{split} = (d'_c)^{*}.$$

组合地，t his 可以识别为以所有可能的方式拆分一个顶点的操作 ，



(54)

8.4. 微分与李代数 $\mathrm{HGC}_{V,n}$。注意，任意 Maurer-Cartan 元素 Z ∈ $\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,n}$ 都可用于扭曲 $\mathrm{Graphs}^{\#}{}_{V,n}$ ，使其成为某个 Λ Hopf $\mathrm{Graphs}^{\#}{}_{n}$ 余模 $(\mathrm{Graphs}^{\#}{}_{V,n})^{Z}$。具体来说，其底层的分次 Λ Hopf $\mathrm{Graphs}^{\#}{}_{n}$ 余模保持不变，但 $(\mathrm{Graphs}^{\#}{}_{V,n})^{Z}$ 中的微分被修改为 d +Z·。

接下来我们确定一个特定的 Maurer-Cartan 元素

引理 8.5。该元素

$$M_2 = -\sum_{j=0}^{N} \begin{array}{c} f_j \\ \bullet \\ | \\ e_j \end{array} \in \mathbf{HGC}^{\#}_{V,n}$$

是一个 Maurer-Cartan 元素，也就是说，

$$\delta'_{split} M_2 + \frac{1}{2}[M_2, M_2] = 0.$$

证明。写成如下形式会比较方便

$$M_2 = -\underbrace{\begin{array}{c}\bullet\\|\\1\end{array}}_{A} - \underbrace{\sum_{j=1}^{N}\begin{array}{c}f_j\\\bullet\\|\\e_j\end{array}}_{B}.$$

然后我们计算

$$\delta'_{split}A = \begin{array}{c}\bullet\\|\\1\end{array} \qquad \delta'_{split}M_2 = -\sum_{j=1}^{N}\left(\begin{array}{c}\bullet\ f_j\\|\\e_j\end{array} + \begin{array}{c}f_j\\\bullet\\|\\e_j\end{array}\right)$$

其中的排序方式使得边和顶点均按从上到下的顺序排列并定向。此外，$\frac{1}{2}[\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_2] = \mathrm{M}_2 * \mathrm{M}_2$, 并且我们有

$$A * A = \begin{array}{c}\bullet\\|\\1\end{array} \qquad A * B = \sum_{j=1}^{N}\begin{array}{c}\bullet\ f_j\\|\\e_j\end{array} \qquad B * A = 0 \qquad B * B = \sum_{j=1}^{N}\begin{array}{c}f_j\\\bullet\\|\\e_j\end{array}.$$

因此 Maurer–Cartan 方程成立。 □

因此，我们可以用这个 Maurer-Cartan 元素 M_2 扭曲微分分次李代数 $\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,n}$。我们定义微分分次李代数

$$\mathbf{HGC}_{V,n} \subset (\mathbf{HGC}^{\#}_{V,n})^{M_2}$$

为由以下内容生成的微分分次李子代数：其所有内部顶点的价均为 ≥ 3 的图 .

引理 8.6. 微分分次李子代数 $\mathrm{HGC}_{V,n} \subset (\mathrm{HGC}^{\#}{}_{V,n})^{M_2}$ 是良定义的，也就是说，具有 ≥ 3 价内部顶点的图的微分和李括号，都是仅含 ≥ 3 价内部顶点的图的线性组合。

证明。李括号定义为如上所述的切割的对偶运算。它将两幅图粘合起来，在此过程中不会降低顶点的价。

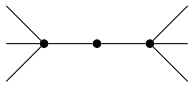
然而，微分 δ' 分裂 $+ [\mathrm{M}_2, -]$ 包含一些可能产生一价和二价顶点的项，我们必须检查这些项是否两两抵消。

设 $\Gamma \in \mathrm{HGC}_{V,n}$ 是一个仅含 ≥ 3价顶点的图。那么 δ' 拆分Γ 中含有一价顶点的项，均可通过在任意内部顶点上连接一个一价顶点得到。这些项恰好被 $[\mathrm{M}_2, \Gamma] = \mathrm{M}_2 * \Gamma - (-1)^{|\Gamma|}\Gamma * \mathrm{M}_2$ 中（$*$ 表示李容许乘积）由该求和项产生的项抵消

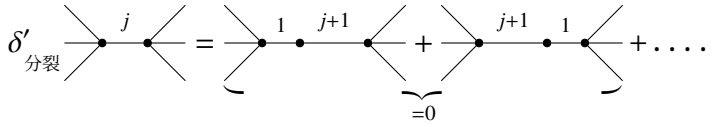
$$\begin{array}{c}\bullet\\|\\e_0\end{array} * \Gamma.$$

接下来我们考察 $\delta'_{\text{拆分}}\Gamma + [M_2, \Gamma]$ 中可能出现的含二价顶点的项。我们区分四种情形:

a. 与两个内部顶点连通的二价顶点。

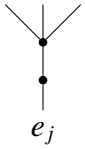


这些项由 $\delta'_{\text{分裂}}$ 产生。然而，它们总是成对出现，分别来自左侧顶点和右侧顶点的分裂，而且这两项的符号相反。例如，对于偶数 n，我们可以明确写出边的编号，从而得到抵消（其中只展示了 Γ 中对应于一条边的项）：

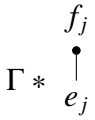


对于奇数 n，抵消的情形类似。

b. 与一个内部顶点和一个外部顶点连通的二价顶点。



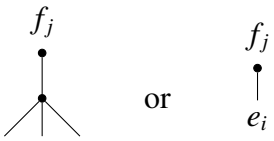
微分中每个这样的项都出现两次，一次来自上方内部顶点的分裂，另一次来自该项



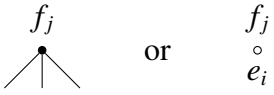
在 $[M_2, \Gamma]$ 中出现。

c. 与两个外部顶点相连的二价顶点。同样，消去方式与前一种情况类似。

二价顶　　点与一个内部顶点或外部顶点相连，并带有一个装饰。



这些项可能由微分作用于图而产生



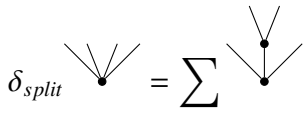
但和之前一样，每一项都通过两种方式得到，并且彼此抵消：一是分裂顶点并在左侧得到 $M_2 * \Gamma$，二是在右侧得到 $M_2 * \Gamma$ 和 $\Gamma * M_2$。

□

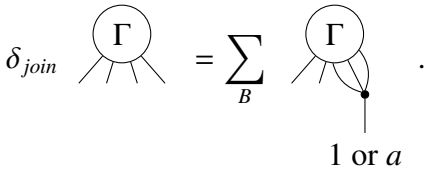
下面我们明确给出 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 上诱导微分 $\delta = \delta'_{\text{分裂}} + [\mathrm{M}_2, -]$ 的组合描述。我们将其分解为两部分

$$\delta = \delta_{split} + \delta_{join}.$$

该部分 δ_{split} 通过分裂内部顶点起作用



但与类似的 $\delta'_{\text{分裂}}$ 不同，我们在右侧仅保留不会产生二价或一价顶点的此类分裂。二价或一价项会被 $[\mathrm{M}_2, -]$ 中相应的项抵消，正如前面的证明所示。$[\mathrm{M}_2, -]$ 中剩余的项构成 δ_{join}。具体而言，δ_{join} 通过将一组 1-装饰毛与零个或一个 $\in V$-装饰毛融合成一个新的 1-装饰毛或 a-装饰毛而起作用。



8.5. Hopf Λ 图$_n$ 余模 图$_{V,\ n}$。总而言之，截至目前我们定义了以下对象：

- 带微分 d'_c 的 dg 余算子 图$^{\#}{}_n$。Maurer-Cartan 元素 $-\mathrm{M}_1 \in$(图$^{\#}{}_n$(1))* 使我们能够将微分扭曲为 $\mathrm{d}_c = \mathrm{d}'_c - \mathrm{M}_1\cdot$（见第 3.11 节），并转到由 ≥ 3-价图张成的商 dg 余算子 图$_n$。

- 带有微分 δ'_{split} 对偶于 d'_c 的微分分次李代数 $\mathrm{HGC}^{\#}_{V,n}$。利用 Maurer-Cartan 元素 $\mathrm{M}_2 \in \mathrm{HGC}^{\#}_{V,n}$，我们将微分扭曲为 $\delta = \delta'_{split} + [\mathrm{M}_2, -]$ 并可转而考虑由 ≥ 3价图张成的微分分次李子代数 $\mathrm{HGC}_{V,n}$。

- 带有微分 d'_c 的 Λ Hopf $\mathrm{Graphs}^{\#}_n$-余模$\mathrm{Graphs}^{\#}_{n,V}$，配备了微分分次李代数 $(\mathrm{HGC}^{\#}_{V,n}, \delta'_{split})$ 的相容作用。

Maurer-Cartan 元素 M_2 还使我们能够将 $\mathrm{HGC}^{\#}_{V,n}$ 在$\mathrm{Graphs}^{\#}_{n,V}$ 上的作用扭曲为 $(\mathrm{HGC}^{\#}_{V,n})^{M_2}$ 在扭曲的余合作子 $(\mathrm{Graphs}^{\#}_n, \mathrm{d}'_c)$ 余模 $(\mathrm{Graphs}^{\#}_{n,V})^{M_2}$上的作用。当然，该微分分次李作用也限制到微分分次李子代数 $\mathrm{HGC}_{V,n} \subset (\mathrm{HGC}^{\#}_{V,n})^{M_2}$。

此外，我们可以按照第 3.11 节通过 Maurer-Cartan 元素 $-\mathrm{M}_1$ 进行扭曲，从而得到一个 图$_{V,\ n}$-余模（图$^{\#}_{V,\ n}$）$^{-M_1+M^2}$。更确切地说，这个扭曲模具有相同的底层分次 Hopf Λ 序列，并且作用和余作用的公式也相同，但微分为 $\mathrm{d}'_c - \mathrm{M}_1\cdot + \mathrm{M}_2\cdot$。

接下来我们定义商

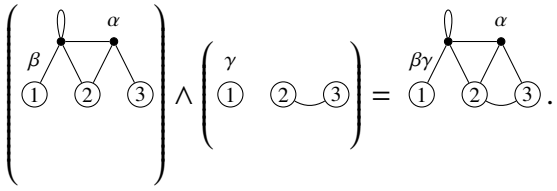
$$\mathsf{Graphs}_{V,n}(r) := (\mathsf{Graphs}^{\#}_{V,n})^{-M_1+M_2}(r)/I(r),$$

其中，I(r) 由所有满足以下条件的图张成：其连通分支不含外部顶点，或者其内部顶点的价数为 ≤ 2，其中 V-装饰计入价数时按 1 计算。与引理 8.6 类似，可以验证微分可下降到商上。Hopf 余合作子 Graphs_n 余模结构也可下降到商上，因为交换乘积、 Λ 结构以及 Graphs_n 余作用都无法移除价数较低的顶点。最后，微分分次李代数 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 的作用也可下降为对 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 的作用，并与 Hopf Graphs_n 余模结构相容，因为这一作用同样无法移除价数较低的顶点。

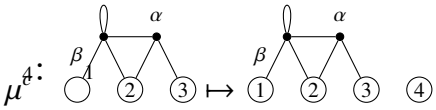
由于对象 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 在本文中起着核心作用，我们在此概述其各种代数结构。

- 空间 $\mathsf{Graphs}_{V,n}(\mathrm{r})$ 由图的形式线性组合构成，这些图有 r 个带编号的外部顶点和任意数量的内部顶点。所有顶点都可以带有零个、一个或多个 V 的元素作为装饰。所有内部顶点的价数至少为三，每个 V 的装饰在计算价数时按 +1 计入。为确定符号，图带有一个取决于 n 的定向。

- 每个空间 图$_{V,n}(\mathrm{r})$ 都是分次交换代数，其乘积由图的并构成，并将外部顶点识别为同一顶点。



- 对称群 S_r 通过置换外部顶点的编号作用于 图$_{V,n}(\mathrm{r})$。这里存在一个 Λ 结构，其 Λ 运算是向图中添加零价外部顶点。



- 通过收缩子图，图$_{V,n}$ 具有一个右侧的运算子 图$_n$ 余模结构，例如：



沿典范拟同构$\mathsf{Graphs}_n \to \mathsf{Pois}^c_n$ 进行余限制，我们还可在$\mathsf{Graphs}_{V,n}$上得到$\mathsf{Pois}^c{}_n$ 余模结构，从而在 $\mathrm{n} \geq 2$ 时得到e^c_n-余模结构。

• $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 上的微分 d_c 通过收缩一条连接两个不同顶点的边来作用，其中至少一个顶点必须是内部顶点。

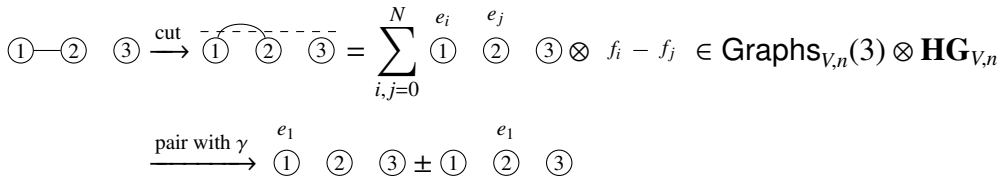


特别需要注意的是，将上面的微分描述为三个项之和虽然更为繁琐，却给出了一个组合上相对简单的公式。然而，我们的方法的优点在于，d_c 自动平方为零，并且与所有其他代数结构相容。

• 存在一个 dg Lie 代数 $\mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 在 $\mathsf{Graphs}_{V,\,n}$上的作用。 $\gamma \in \mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 在$\Gamma \in \mathsf{Graphs}_{V,\,n}$ 上的作用通过组合方式定义：从 Γ 中切割出一个子图（该子图随后属于 $\mathrm{HG}_{V,\,n}$），然后将该子图与 $\gamma \in \mathrm{HGC}_{V,\,n} = \mathrm{HG}^*{}_{V,\,n}$进行配对。例如，作用

$$\gamma = 1 - e_1 \in \mathbf{HGC}_{V,n} \qquad \text{on} \qquad \Gamma = \textcircled{1}\!\!-\!\!\textcircled{2} \quad \textcircled{3} \in \mathsf{Graphs}_{V,n}(3)$$

计算如下。

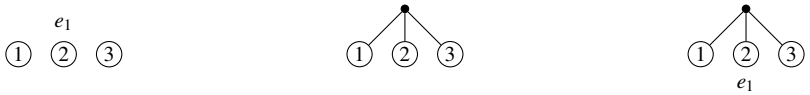


• 上述代数结构彼此之间均相容。

8.6. $\mathsf{Graphs}_{V,\,n}$ 作为 Λ Hopf Com^c 余模的拟自由性。使用余模 $\mathsf{Graphs}_{V,\,n}$ 之所以方便，主要原因在于它作为一个分次的 Λ Hopf Com^c 余模是自由的，正如我们将在本小节中解释的那样。首先，令

$$\mathsf{IG}_{V,n}(r) \subset \mathsf{Graphs}_{V,n}(r)$$

为由内部连通图张成的子空间，也就是说，这些图在删除所有外部顶点后仍保持连通。例如，在下面的列表中，前两个图是内部连通图，最后一个则不是。



每个图都能唯一地分解为内部连通分支的并。例如，上方三个图中的第三个，是前两个图的并（将外部顶点识别起来）。由于这个并按定义就是图$_{V,n}$(r)上的乘积，我们得出图$_{V,n}$(r)是一个自由的分次交换代数，

$$\mathsf{Graphs}_{V,n}(r) = S(\mathsf{IG}_{V,n}(r)),$$

其生成元为内部连通图。接下来，令

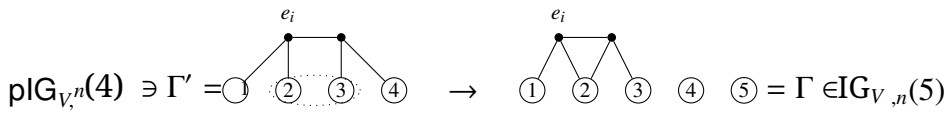
$$\mathsf{pIG}_{V,n}(r) \subset \mathsf{IG}_{V,n}(r)$$

由所有外部顶点的价数均为一的图所张成的子空间张成。例如，上方三个图中的第二个属于 $\mathsf{pIG}_{V,\,n}(3)$。

然后我们注意到，内部连通图的集合 $\mathsf{IG}_{V,\,n}$ 还是一个自由的右 $\Lambda\,\mathsf{Com}^c$-余模，由子集 $\mathsf{pIG}_{V,\,n}$ 生成。事实上，设 $\Gamma \in \mathsf{IG}_{V,\,n}$ 是某个图。那么可以通过以下运算从一个图 $\Gamma' \in \mathsf{pIG}_{V,\,n}$ 得到它：

- 使用Λ-结构，为 Γ 中的每个零价外部顶点向 Γ' 添加零价外部顶点。
- 使用 Com^c-余作用，对 Γ 中的每个价数为 ≥ 2的外部顶点，融合 Γ' 的外部顶点子集。
- 必要时，使用对称群作用对外部顶点重新编号。

下图展示了这一过程：



这里的虚线椭圆表示通过 Com^c-余作用融合的顶点。Γ 中的顶点 4 和 5 由 Λ 运算添加。可以看出，Γ唯一确定了图 Γ' 以及从 Γ' 得到 Γ 所需的分次 $\mathrm{Hopf}\,\mathsf{Com}^c$ 余作用（顶点重新编号除外）。因此，我们得出结论：$\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 作为分次 $\Lambda\,\mathrm{Hopf}\,\mathsf{Com}^c$ 余模是自由的，其生成元为 $\mathsf{pIG}_{V,n}$。关于这一自由性陈述的更正式表述，请参见命题 9.1 及其下文的证明。

8.7. 滤过 $\mathcal{F}$。我们将在余模 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 和微分分次李代数 $\mathsf{HGC}_{V,n}$上考虑两种滤过。根据假设，V 是有限维正分次向量空间。我们令 $|\mathrm{V}|$ 为 V 中非零元素的最高次数，或者令其为 $|\mathrm{V}| := 1$，如果 $\mathrm{V} = 0$。

然后，我们考虑按 $3|\mathrm{V}|$ 乘以边数再加上 V 中装饰的总次数所定义的递增完备滤过，即

$$\mathcal{F}^p\mathsf{Graphs}_{V,n}$$

由所有满足以下条件的图 Γ 张成

$$3|V|\#\text{edges} + \#\text{total decoration degree} \leq p.$$

例如，$\mathcal{F}^0$图$_{V,\,n} \cong \mathsf{Com}^c$。此外，显然每个图都包含在某个$\mathcal{F}^p$图$_{V,\,n}$ 中，因为图是有限的，因此滤过是穷尽的。最后，容易

看出该滤过与 dg Λ Hopf 余模结构相容。更确切地说，乘积保持边数和装饰，因此

$$\mathcal{F}^p\mathsf{Graphs}_{V,n} \wedge \mathcal{F}^q\mathsf{Graphs}_{V,n} \subset \mathcal{F}^{p+q}\mathsf{Graphs}_{V,n}.$$

Λ 结构也同样如此。微分和 Pois_n^c-余作用至多会减少边数，因此也与滤过相容。最后请注意，给定边数和装饰时，图只有有限多个。因此，每个子空间$\mathcal{F}^p\mathsf{Graphs}_{V,n}(\mathrm{r})$ 都是有限维的。

我们同样考虑微分分次李余代数 $\mathrm{HG}_{V,n}$，并在其上施加如下滤过： $\mathcal{F}$ 由 3|V|乘以边数再加上装饰度，然后减去毛上的装饰度。更确切地说，图 Γ 属于 $\mathrm{HG}\,\mathcal{F}^p\mathrm{HG}_{V,n}$，当且仅当

$$3\#\text{edges} + \#\text{total decoration degree} \le p,$$

其中我们计算总装饰度时，将 V-装饰计为正，将 V^*-装饰计为负。（这与对偶化会翻转上同调次数符号的约定一致。）与之前一样，该滤过与微分相容。此外，该滤过与李余括号相容，而 $\mathrm{HG}_{V,n}$ 对$\mathsf{Graphs}_{V,n}$-的余作用也相容——这些运算保持边数和总装饰度不变。

此外，我们在对偶空间 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 上施加对偶滤过，使得

$$\mathcal{F}^p\mathbf{HGC}_{V,n} = \{x \in \mathbf{HGC}_{V,n} = \mathrm{HG}^*_{V,n} \mid x(\mathcal{F}^{p-1}\mathbf{HG}_{V,n}) = 0\}.$$

特别注意，$\mathcal{F}^{-|V|}\mathrm{HGC}_{V,n} = \mathrm{HGC}_{V,n}$。另请注意，$\mathrm{HGC}_{V,n}$ 不是前幂零的，不过$\mathcal{F}^1\mathrm{HGC}_{V,n}$ 是。

结合以上观察以及上一小节的自由性结果，我们得到了以下引理。

引理 8.7。带有上述滤过的运算子右 $\mathsf{C} = \mathsf{Graphs}_n$ Λ Hopf 余模 $\mathsf{M} = \mathsf{Graphs}_{V,n}$ 满足第 7.1 节的条件 b 和 c。

此外，$\mathsf{g} = \mathcal{F}^1\mathrm{HGC}_{V,n}$ 在 $\mathsf{M} = \mathsf{Graphs}_{V,n}$ 上的作用满足第 7.2 节的条件，即：

- $\mathcal{F}^1\mathrm{HGC}_{V,n}$ 通过双导子作用于运算子右 $\mathsf{C} = \mathsf{Graphs}_n$ Λ Hopf 余模 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$，即等式 (40) 成立。
- 该作用保持滤过不变，即式（41）成立。

8.8. 滤过 $\mathcal{G}$。类似地，我们考虑 图$_{V,n}$ 按边数定义的滤过 $\mathcal{G}$。具体而言， $\mathcal{G}^p$图$_{V,n}$ 由所有满足以下条件的图 Γ 张成：

$$\#\text{edges} \le p.$$

类似地，考虑 $\mathrm{HG}_{V,n}$ 上的类似滤过，使得 $\mathcal{G}^p\mathrm{HG}_{V,n}$ 由至多含有 p 条边的毛图张成。这些滤过与 Λ Hopf 余模结构相容，定义在

图$_{V,n}$、HG$_{V,n}$上的微分分次李余代数结构，以及 HG$_{V,n}$ 在图$_{V,n}$上的余作用相容。（这一论证略微简化了上一小节中的论证。）空间$\mathcal{G}^p$图$_{V,n}$ 通常不是有限维的。

再次，我们将 HG$_{V,n}$ 上的递增穷尽滤过 $\mathcal{G}$ 对偶化为 HGC$_{V,n}$上的下降完备滤过。我们有

$$\mathbf{HGC}_{V,n}/\mathcal{G}^1\mathbf{HGC}_{V,n} \cong \mathfrak{gl}'_V := \mathcal{H}om(V, V_1).$$

此外，注意到

$$\mathcal{G}^0\mathsf{Graphs}_{n,V} \cong \mathbf{F}_{S(V)},$$

其中 F$_{S(V)}$ 的定义如上文第 4.3 节所述。为便于后续使用，我们记录以下技术性结果。

引理 8.8。典范包含映射 $\mathrm{F}_{S(V)} \to \mathsf{Graphs}^{\flat}_{n,V}$ 在分次 Λ Hopf Com^c-余模范畴中有一个单侧逆

$$\tilde{F} : \mathsf{Graphs}^{\flat}_{n,V} \to \mathbf{F}_{S(V)}.$$

这个态射将所有至少含有一条边的图映为零，并在 $\mathcal{G}^0$Graphs$_{n,V}$ = F$_{S(V)}$上是恒等映射。

证明。这显然。 □

引理 8.9. 设 M 是一个 Λ Hopf e$_n^c$ 余模，V 是一个正分次向量空间。设 $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{M}(1)$ 是微分分次向量空间态射。它诱导出一个微分分次交换代数态射$\phi : \mathrm{S}(\mathrm{V}) \to \mathrm{M}(1)$。则存在一个 Λ Hopf (We$_n^c$)$^{\flat}$ 余模态射

$$F : \mathsf{Graphs}^{\flat}_{n,V} \to W\,M^{\flat}$$

其在 $\mathcal{G}^0$Graphs$_{n,V}$ = F$_{S(V)}$ 上的限制与典范态射一致

$$\mathbf{F}_{S(V)} \to W\,M$$

它是将命题 4.11 的伴随应用于给定的微分分次交换代数态射 $\phi : \mathrm{S}(\mathrm{V}) \to \mathrm{M}(1) = \mathrm{W}\,\mathrm{M}(1)$ 后得到的 Hopf We$_n^c$ 余模态射。特别地，F 在限制于 $\mathcal{G}^0$Graphs$_{V,n}$ = F$_{S(V)}$时保持微分。

~ ~证明。由引理 7.1，存在唯一的 F 如上，使得 $\pi \circ \mathrm{F} \circ \iota = \pi \circ \mathrm{F} \circ \iota$ 其中 F 是引理 8.8 中的态射，而 ι 和 π 分别是生成元的嵌入和余生成元的投影，如引理 7.1 中所述。注意，此处 F , F，因为态射 F 不保持 We$_n^c$余作用。（尽管它在 $\mathcal{G}^0$Graphs$_{n,V}$ 上保持该余作用。）

接下来，利用自由性结果命题 4.11，我们看到，F 在 F$_{S(V)}$ 上的限制由 F 在一元部分 S (V) 上的限制唯一确定；而根据后者的自由性，它又由 F 在 V 上的限制唯一确定。但根据构造，我们将 V 映到 W M(1) = M(1) 中的余循环，因此映射 S (V) → W M (1) 与微分相容。因此，根据命题 4.11，F 限制在$\mathcal{G}^0$图$_{V,\ n}$ = F$_{S(V)}$ 上时也与微分相容。□

8.9. 边谱序列与构形空间型。设 $Z \in \mathcal{G}^1\mathrm{HGC}_{V,n}$ 为一个 Maurer-Cartan 元素。我们在此研究由上述滤过 $\mathcal{G}^p$图$^Z{}_{V,n}$ 按边数得到的谱序列，该谱序列定义在图$^Z{}_{V,n}$ 上。首先注意，Z 由至少含有一条边的图构成，

$$Z = Z_1 + Z_{\geq 2},$$

其中，Z_1 是恰有一条边的图的线性组合，而 $Z_{\geq 2}$ 是有两条或更多边的图的线性组合。具体而言，Z_1 具有如下示意形式

$$Z_1 = \underbrace{\sum(\text{const}) \overset{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{\underset{\beta}{\bullet}}}_{A} + \underbrace{\sum(\text{const})\ \alpha \text{ —— } \beta}_{B} \tag{55}$$

还要注意，$\mathrm{HGC}_{V,n}$ 上的李括号保持边数不变，而微分恰好生成一条边。由这些观察可知，元素 Z_1 本身是一个 Maurer–Cartan 元，

$$dZ_1 + \frac{1}{2}[Z_1, Z_1] = 0.$$

于是很容易验证，Z_1 的 Maurer–Cartan 方程表明，单顶点部分 A 编码了 V_1, 上的交换乘积，而零顶点部分 B 编码了该乘积的一个对角元$\Delta \in V_1 \otimes V_1$，见定义 5.5。为明确对角元对 Z 的依赖关系，下文也将其记为 $\Delta(Z) := \Delta$。

扭曲的 Λ Hopf 右 e_n^c 余模 $\mathsf{Graphs}^{Z_1}{}_{V,n}$ 与边滤过在 $\mathsf{Graphs}^Z{}_{V,n}$上诱导的谱序列的 E^1 页（至少作为对称序列）一致。存在一个右 Λ Hopfe_n^c 余模之间的映射

$$\mathsf{Graphs}^{Z_1}_{V,n} \to \mathsf{LS}^{\Delta}_{V_1,n},$$

该映射将所有带有内部顶点的图映为零，将外部顶点 i 和 j 之间的一条边映为生成元 ω_{ij}，并将顶点 j 上的装饰 v 映为生成元 v_j。

于是得到如下结果。

命题 8.10。该映射

$$\mathsf{Graphs}^{Z_1}_{V,n} \to \mathsf{LS}^{\Delta}_{V_1} \tag{56}$$

是一个拟同构。

证明。首先注意，左侧的微分包含三项

$$d = d_c + A\cdot + B\cdot,$$

其中，A、B $\in \mathrm{HGC}_{V,n}$ 是 MC 元 $Z_1 = A + B$ 的两个部分，如式 (55) 所示；d_c 的作用是收缩一条边。d_c 和 A· 各自会移除一个内部顶点和一条边，而 B·会移除一条边，同时保持内部顶点的数量不变。特别地，微分

关于顶点数量，它是次数为 -1 的齐次元素，而式 (56) 的两边都按数量分次

$$\text{(cohomological degree)} + \#\text{edges}.$$

只需考虑该分次固定的子复形。在这些子复形上，我们进一步考虑按数量定义的有界滤过

$$p(\Gamma) = \#\text{edges} - \#(\text{internal vertices}).$$

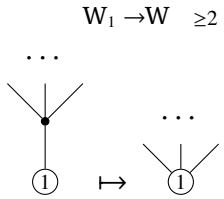
在伴随分次复形上，微分的 $\mathrm{B}\cdot$ 部分不可见，而命题的陈述等价于映射

$$\mathsf{Graphs}^{A}_{V,n} \to \mathsf{LS}^{0}_{V_1,n}$$

是一个拟同构。还要注意，右侧的微分为零，因此实际上我们需要证明左侧的上同调与右侧一致。对此，我们按照类似于 [12, 46] 中证明的方法，对元数作归纳。假设我们已知元数为 $\mathrm{r}-1$ 时该结论成立。然后我们作如下分解

$$\mathsf{Graphs}^{A}_{V,n}(r) = W_0 \oplus W_1 \oplus W_{\geq 2},$$

其中 $\mathrm{W}_0 \cong$ 图$^{A}{}_{V,\ n}(\mathrm{r}-1)$ 是由外部顶点 1 的价数为零的图所张成的子复形，W_1 是由顶点 1 为一价的图所张成的子空间，而 $\mathrm{W}_{\geq 2}$ 是由顶点 1 至少为二价的图所张成的子空间。（这里，每个 V 装饰都计作对价数的贡献 $+1$。）箭头表示微分的各个部分。特别是，微分的这一部分



若可行，则收缩顶点 1 处的边；容易验证这是一个满射。其核由如下图张成：顶点 1 或者（i）带有一个 V-装饰，或者（ii）有一条边连接到另一个外部顶点。根据这些观察和归纳法，容易验证 H(图$^{A}{}_{V,n}$) 有一个基，由满足以下条件的图张成。

- 没有内部顶点。
- 顶点 j 要么带有 V 标记，要么至多有一条边与索引更大的顶点相连，也就是说，与顶点 $\mathrm{j}+1$、$\mathrm{j}+2$、.....、n 中的某一个相连。

众所周知，这类图也构成了 (56) 右侧的一个基，参见例如 [51]。要直接看出这一点，也可以注意到 $\mathsf{LS}^{0}_{V,n}$ 是 $\mathsf{Graphs}^{A}{}_{V,n}$ 对所有至少含有一个内部顶点的图以及恰好含有一个内部顶点的图的微分所张成的子空间取商所得。因此，只需证明 $\mathrm{H}(\mathsf{Graphs}^{A}{}_{V,n})$ 中的每个上同调类都有一个不含内部顶点的代表元，而我们刚刚已经证明了这一点。□

由于$\mathsf{LS}^{\Delta}{}_{V_1,n}$ 属于构形空间型，我们得到以下推论。

推论 8.11. Λ Hopf e^{c}_{n} 余模$\mathsf{Graphs}^{Z_1}{}_{V,n}$ 属于构形空间型。

推论 8.12. 对任意 Maurer-Cartan 元素 $Z \in \mathcal{G}^{1}\mathrm{HGC}_{V,n}$ Hopf e^{c}_{n} 余模$\mathsf{Graphs}^{Z}{}_{V,n}$ 属于构形空间型。此外，微分分次向量空间之间的典范映射

$$V_1 \to \mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(1) \tag{57}$$

是一个弱等价，并且$\mathsf{Graphs}^{Z}{}_{V,n}$ 按照定义 5.7 的对角类为上文定义的 $\Delta(Z) \in V_1 \otimes V_1$。

证明. 根据命题 5.3，我们需要验证对称序列之间的态射

$$\mathbf{F}_{\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(1)} \to \mathrm{B}^{c}_{\mathsf{Lie}^{c}_{n}}\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n} \tag{58}$$

是一个拟同构。我们在两边都取关于边数的滤过。相对于此滤过，该态射在 E^1 页上诱导的映射可识别为

$$\mathbf{F}_{\mathsf{Graphs}^{Z_1}_{V,n}(1)} \to \mathrm{B}^{c}_{\mathsf{Lie}^{c}_{n}}\mathsf{Graphs}^{Z_1}_{V,n},$$

根据推论 8.11，这是一个拟同构。因此，由谱序列的标准结果可知，映射 (58) 也是一个拟同构。

接下来，(57) 是拟同构这一事实，可由上文对右侧的上同调所作的显式计算得出。

最后，要计算对角元，回顾定义 5.7。我们从余括号生成元开始

$$b \in H^{n-1}(\mathsf{e}^{c}_{n}(2)),$$

并得到元素

$$1 \otimes b \in H^{n-1}(M(1) \otimes \mathsf{e}^{c}_{n}(2)).$$

要计算连接同态的值，我们需要找到上余合成态射下的一个原像；为此可以取图

$$L = \textcircled{1}\!\!-\!\!-\!\!\textcircled{2} \in \mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(2).$$

其微分为

$$\sum \begin{matrix} \Delta' & \Delta'' \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{matrix} \in \mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(2).$$

这是元素 Δ 在包含映射 $\mathrm{F}_M(2) \to$ 图$^{Z}{}_{V,\,n}(2)$下的像，因此 Δ确实是图$^{Z}{}_{V,\,n}$ 的对角元，正如所需。□

8.10. 补述：同伦交换代数。我们将使用同伦交换代数的两种模型。首先，令$\mathsf{Com}_\infty = \mathrm{B}^c \mathsf{Com}^!$ 为交换运算子Com的最小分解，其中$\mathsf{Com}^! = \mathsf{Lie}_0^c$ 是 Koszul 对偶余拟运算。再令 $\widehat{\mathsf{Com}}_\infty = \mathrm{B}^c\mathrm{BCom}$ 为Com的条-余条分解。运算子Com_∞ 和 $\widehat{\mathsf{Com}}_\infty$ 都继承自Com自然的 Λ-运算子结构，并且我们有如下 Λ 运算子的典范拟同构

$$\mathsf{Com}_\infty \to \widehat{\mathsf{Com}}_\infty \to \mathsf{Com}.$$

设 V 是一个微分分次向量空间。那么，V 上的Com_∞-结构（分别地，Com_∞-结构）是 Com_∞（分别地，$\widehat{\mathsf{Com}}_\infty$）在 V 上的左作用。

若微分分次向量空间 V_1 带有典范余循环$1 \in V_1$，则其上的Com_∞-结构或 $\widehat{\mathsf{Com}}_\infty$-结构是（强）含幺的，当且仅当左作用可扩张为（见（3））$(\mathsf{Com}_\infty)_1$ 或$(\widehat{\mathsf{Com}}_\infty)_1$ 的左作用，并将零元运算映为 1。具体而言，对于Com_∞-结构，这意味着 1 是交换乘积的单位元，且在任意位置代入 1 都会使高阶Com_∞-同伦归零。对于 $\widehat{\mathsf{Com}}_\infty$-结构，高阶同伦在代入 $1 \in V_1$, 后不一定归零，但它们满足由 Λ 结构所决定的相容关系。

我们还要指出，V 上的Com_∞-结构（分别地，$\widehat{\mathsf{Com}}_\infty$-结构）与卷积微分分次李代数中的一个 Maurer-Cartan 元素是同一组数据

$$\mathfrak{b}_V := \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\overline{\mathsf{Com}^!}, \mathrm{End}_V) \qquad \text{or} \qquad \hat{\mathfrak{b}}_V := \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\overline{\mathsf{BCom}}, \mathrm{End}_V),$$

见 [47, 第 10.1]节。此外，请注意，$(\mathsf{BCom}(r))^*$ 的元素可以视为具有 r 个叶子的根树的线性组合，而 $(\mathsf{Com}^!(r)^*)$ 的元素同样可以视为李树的线性组合，即模去 Jacobi（IHX）关系的根二叉树。因此，对于有限维的 $\hat{}V$，$\mathfrak{h}_V$（分别为 $\mathfrak{h}_V$）的元素可以视为这类树的线性组合，其叶子由 V^* 的元素标记，根则由 V 的一个元素标记。存在一个自然的微分分次李代数映射 $\hat{}\mathfrak{h}_V \to \mathfrak{h}_V$，它反映了运算子 $\mathsf{Com}_\infty \to \widehat{\mathsf{Com}}_\infty$ 的映射。

$\widehat{V_1 = V \oplus \mathbb{Q}1}$ 上的带单位 Com_∞- 和 Com_∞-结构，也可以分别编码为适当的微分分次李代数 $\mathfrak{h}_V$、1 和 $\hat{}\mathfrak{h}_V$、1 中的 Maurer-Cartan 元素。为描述这些微分分次李代数 $\hat{}$，首先考虑 Maurer-Cartan 元素 $m_0 \in \mathfrak{h}_{V_1}$（分别为 $m_0 \in \mathfrak{h}_{V_1}$），它对应于使 1 成为单位元的“最小”交换代数结构。具体而言，在该交换代数结构中，与 1 的乘积是恒等映射，但所有其他乘积均为零。于是，$\mathfrak{h}_{V,1} \subset \mathfrak{h}^{m_0} V^!$ 和 $\hat{}\mathfrak{h}_{V,1} \subset \hat{}\mathfrak{h}^{m_0} V_1$ 是非单位版本经 m_0 扭曲后得到的微分分次李子代数。为简单起见，假设 V 是有限维的，则子代数 $\mathfrak{h}^{m_0} V,1$ 正是腿由 $V^* \cong 1^\perp \subset V_1^*$ 标记的树的线性组合的子空间。类似地，$\hat{}\mathfrak{h}_V$、1 也可以识别为腿由 V^* 标记的树的线性组合。不过，嵌入 $\hat{}\mathfrak{h}_{V,1} \to \hat{}\mathfrak{h}^{m_0} V_1$ 是通过对在顶点上添加 V_1^* 中的增广的所有方式求和给出的。

我们还要指出，按照约定，我们在此将微分视为与微分分次向量空间 V 相关联的数据，而不将其视为同伦交换结构的一部分。

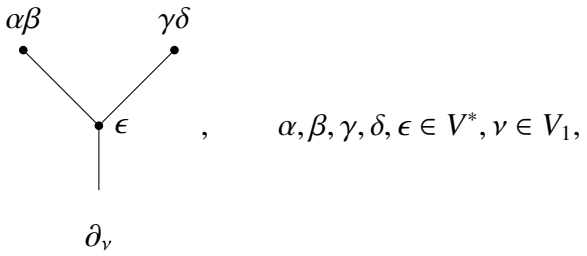
8.11. 复杂度滤过与一元部分的同伦类型。设 $\Gamma \in \mathrm{HGC}_{V,n}$ 是一个具有 e 条边和 v 个顶点的图。于是，我们称 Γ 的复杂度为 e –v。或者说，复杂度是将 Γ 的所有毛发粘合在一起所得到的图中的环数

后得到的环数。微分保持复杂度，而李括号使复杂度相加，因此这在微分分次李代数 $\mathbf{HGC}_{V,n}$ 上定义了一个完备分次。我们将相应的下降完备滤过记为 $C^\bullet\mathbf{HGC}_{V,n}$，即 $C^p\mathbf{HGC}_{V,n} \subset \mathbf{HGC}_{V,n}$ 是由复杂度为 $\geq p$ 的图生成的子空间。

让我们来研究商微分分次李代数

$$\mathbf{HGC}^{\mathrm{tree}}_{V,n} := \mathbf{HGC}_{V,n}/C^1\mathbf{HGC}_{V,n}.$$

元素是恰有一根毛的树图级数，如下所示



$$, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon \in V^*, \nu \in V_1,$$

微分由顶点分裂给出，而李括号由嫁接树给出。

与前一小节相比，可以很容易地看出，$\mathcal{G}^{\mathrm{l}}\mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}{}_{V,n} \cong \hat{}\mathrm{h}_{V,1}$，因此其中的 Maurer-Cartan 元素特别确定了 V_1 上的含单位 $\widehat{\ }\mathrm{Com}_\infty$-结构。

具体而言，设 $Z \in \mathcal{G}^{\mathrm{l}}\mathrm{HGC}_{V,n}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。我们可以将 Z 分解为复杂度各异的部分，

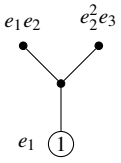
$$Z = Z_0 + Z_1 + \cdots .$$

注意，这里我们不严格地沿用记号 Z_j 来表示复杂度为 j 的部分，而在前一小节中，下标指的是边数。于是，Z 在 $\mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}{}_{V,n}$ 中的像由 Z_0，确定，并可与之等同；后者又可解释为 $\hat{}\mathrm{h}_{V,1}$ 中的 Maurer-Cartan 元素，因而对应于 V_1 上的含单位 $\widehat{\ }\mathrm{Com}_\infty$-结构。

接下来考虑对象 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$。我们可以将 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 上的复杂度分次扩展为：规定一个具有 v 个内部顶点和 e 条边的图具有复杂度 e –v。$\mathrm{HGC}_{V,n}$ 和 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 上的复杂度分次与 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 对 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 的作用相容，具体而言，如果 $\gamma \in \mathrm{HGC}_{V,n}$ 的复杂度为 p，且 $\Gamma \in \mathrm{Graphs}_{V,n}$ 的复杂度为 q，那么 $\gamma \cdot \Gamma$ 的复杂度为 q – p。此外，我们可以赋予 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 一个递增穷尽滤过，使得 $C^p\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 由复杂度为 $\leq p$ 的图张成。该滤过与 $\mathrm{HGC}_{V,n}$的作用以及微分分次交换代数结构相容。由于复杂度分次与 $\mathrm{HGC}_{V,n}$的作用相容，该滤过可扩展到任意扭曲版本 $\mathrm{Graphs}^Z\mathrm{V,n}$。我们将特别研究微分分次交换子代数

$$C^0\mathrm{Graphs}^Z_{V,n}(1) \subset \mathrm{Graphs}^Z_{V,n}(1).$$

C^0图$^Z{}_{V,\ n}(1)$ 的元素是树图的线性组合。



引理 8.13. 设 V 是一个分次向量空间，且 $Z \in \mathcal{G}^{1}\mathrm{HGC}_{V,n}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。则以下结论成立。

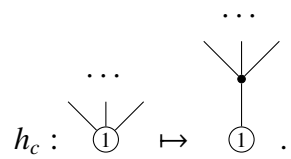
- 这些包含映射
$$V_1 \to C^0\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(1) \to \mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(1) \tag{59}$$
是微分分次向量空间之间的拟同构。

- 通过同伦传递，从 $C^0\mathsf{Graphs}_{Z\,V,n}(1)$（或等价地，从 $\mathsf{Graphs}_{Z\,V,n}(1)$）上的微分分次交换代数结构得到的 V_1 上的典范（幺元）$\overbar{\mathsf{Com}}_\infty$结构，与上文由复杂度零部分 Z_0 编码的幺元 Com_∞结构同构。

证明。我们已经在推论 8.12 中看到，式（59）中两个箭头的复合是一个拟同构。

其余结论可直接由以下观察得出：$C^0\mathsf{Graphs}^{Z}{}_{V,n}(1)$ 实际上是强幺元的 $\overbar{\mathsf{Com}}_\infty$-代数 V_1，的典范整直化，该代数的定义类似于典范整直化的弱幺版本，见 [34, 定理 6.3.2]。然而，由于 [34] 的陈述是在略有不同的框架下表述的，我们将在此通过运用命题 8.10 证明中的思路，概述该引理的另一种更初等的证明。

首先，回顾一下，$\mathsf{Graphs}^{Z}{}_{V,n}(1)$ 上的微分具有如下形式 $\mathrm{d} = \mathrm{d}_c + \mathrm{d}_Z$ 其中 d_c 由边收缩给出，而 d_Z 是 Z 的作用。我们可以定义一个针对微分 d_c的同伦 h_c：添加一个内部顶点，用一条边将其与外部顶点 1 相连，并将所有边和装饰从 1 移到这个新顶点。图示如下：



这个同伦属于同伦传递数据

$$V_1 \underset{p_0}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} (C^0\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(1), d_c) \circlearrowleft h\,.$$

投影 p_0 在顶点 1 处有零个或一个装饰且没有其他顶点和边的图上是恒等映射，而 p_0 在所有其他图上为零。应用同调扰动引理 [15, 引理 2.4]，我们便得到同伦传递数据

$$V_1 \underset{p}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} (C^0\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(1), d_c + d_Z) \circlearrowleft h$$

with

$$p = p_0 + p_c d_Z h_c\,.$$

特别地，我们得出包含映射 ι 是一个拟同构，因此引理的第一个结论随之成立。此外，上述同伦传递数据可以直接代入同伦传递公式中。这里我们假设读者熟悉同伦传递，一般性讨论见 [47, 第 10 节。3] 这里只需指出，Com_∞ 的生成元是 $\mathsf{Lie}_{0,\infty}^{c}(\mathrm{r})$ 中的余合作，因此可以识别为具有 r 个叶子的树的线性组合，其中 $\mathrm{r} = 2、3、\ldots\ldots$。为了求出这类树 T 在 $\mathrm{End}(V_!)(\mathrm{r})$ 中的像，只需将树重新解释为复合树，其中每条内部边表示一个同伦 h，每个顶点表示 $C^0\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n}(1)$ 中的一个乘积，叶子表示包含映射 ι，根表示投影 p。代入上述公式后，只需简单检验即可确认，与树 T 对应的运算确实与 Z 中形状为 T 的项相同。由此便得到了引理的第二个结论。□

9. 图与变形复形：Com^c 余模

在上一节中，我们引入了 Λ Hopf 余合作子 e_n^c 余模 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$。最终，为了证明我们的主要结果定理 1.1，我们需要研究从 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 出发的 Λ Hopf e_n^c 余模映射的障碍理论。本节为实现这一目标所采取的一个主要中间步骤，是研究 Λ Hopf Com^c-余模映射。由于 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 作为 Λ Hopf Com^c 余模是拟自由的，这项研究可以更容易地进行，见第 8.6 节。文献中已经用过类似的论证，见 [1, 2, 25]。

9.1. Com^c 余模映射。再次设 $\mathcal{R}$ 为一个分次交换代数。我们将研究以下集合

$$\mathrm{Mor}_{\Lambda HRMod-\mathsf{Com}^c/\mathcal{R}}(\mathsf{Graphs}_{V,n}^{\natural}\otimes\mathcal{R}, M^{\natural}\otimes\mathcal{R})$$

从 $\mathsf{Graphs}^{\natural}_{V,n}$ 到某个其他 Λ-Hopf 右 Com^c 余模 M 的底层分次余模 $\mathrm{M}_{\natural}$ 的 Λ-Hopf 右 Com^c 余模态射。由 $\mathsf{Graphs}_{V,n}$ 作为分次 Λ Hopf Com^c 余模的自由性（见第 8.6 节），可立即得到以下结果。

命题 9.1. 对于分次交换代数 $\mathcal{R}$ 和右 Λ Hopf Com^c 余模 M，该映射

$$\phi : \mathrm{Mor}_{\Lambda HRMod-\mathsf{Com}^c/\mathcal{R}}(\mathsf{Graphs}_{V,n}^{\natural}\otimes\mathcal{R}, M^{\natural}\otimes\mathcal{R}) \to \mathrm{Mor}_{g\mathbb{S}/\mathcal{R}}(\mathsf{pIG}_{V,n}^{\natural}\otimes\mathcal{R}, M^{\natural}\otimes\mathcal{R})$$

将左侧的态射 F 映为与生成元的嵌入复合

$$\mathsf{pIG}_{V,n}^{\natural} \hookrightarrow \mathsf{Graphs}_{V,n}^{\natural} \xrightarrow{f} M^{\natural}$$

是一个双射。

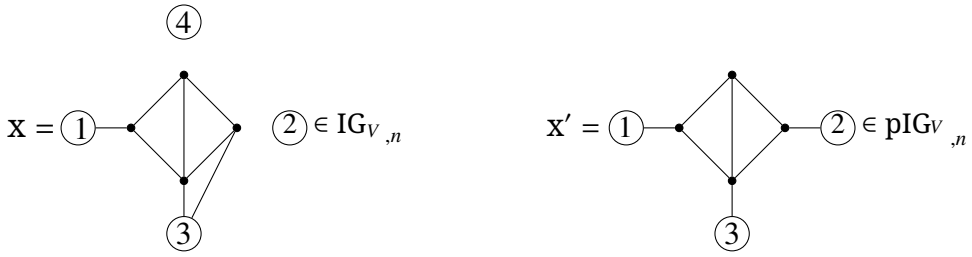
证明. 我们将描述该命题所述映射的一个双边逆 U。首先，设有一个对称序列的态射

$$f \in \mathrm{Mor}_{g\mathbb{S}/\mathcal{R}}(\mathsf{pIG}_{V,n}^{\natural}\otimes\mathcal{R}, M^{\natural}\otimes\mathcal{R})$$

我们的目标是构造一个 Λ Hopf Com^c 余模的态射

$$F = U(f) : \mathsf{Graphs}_{V,n}^{\natural}\otimes\mathcal{R} \to M^{\natural}\otimes\mathcal{R}.$$

假设给定了某个元素 $x \in \mathrm{Graphs}^{\flat}\, V,n(r) \otimes \mathcal{R}$。利用 $\mathrm{Graphs}^{\flat}\, V,n(r) \otimes \mathcal{R}$ 作为 $\mathcal{R}$ 上的分次交换代数的自由性，只需假设 $x = x_1 \cdots x_k$，其中每个 x_j 都属于生成向量空间 $\mathrm{IG}_{V,n}(r)$。显然，在这种情况下，我们将 $F(x) = F(x_1) \cdots F(x_k)$ 定义为 $M^{\flat} \otimes \mathcal{R}$中的相应乘积。因此，我们可以直接假设 x 是一个内部连通图。接着，用 S j 表示 x 的外部顶点 j 处相接的半边集合，其中 $j = 1, \ldots, r$。断开这些边后，我们得到一个元素 $x' \in \mathrm{pIG}_{V,n}(S_1 \sqcup \cdots \sqcup S\, r) \otimes R$，并且存在唯一的右 $\Lambda\mathrm{Com}^c$-余作用 $\Delta : \mathrm{pIG}(S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_r) \otimes R \to \mathrm{IG}_n(r) \otimes R$，使得 $\Delta(x') = x$。下面的图将通过一个例子说明这一构造。



接下来定义 $F(x) := \Delta(F(x'))$，其中我们也不严谨地用 Δ 表示相应的 $\Lambda\mathrm{Com}^c$- 在 $\mathrm{LS}_{A,n} \otimes \mathcal{R}$ 上的余作用。因此，我们可以假设 $x \in \mathrm{pIG}_n(r) \otimes \mathcal{R}$，并在这种情况下定义 $F(x) = f(x)$。

至此，$F = U(f)$ 的构造完成。我们需要验证若干性质。首先，需要验证 F 确实保持该 Hopf Λ Com^c-余模结构。根据构造，$F(x_1 \cdots x_k) := F(x_1) \cdots F(x_k)$，且显然 F 是 Hopf 集合族的态射。根据 Hopf 结构的相容性，我们还需要仅在交换代数生成元 IG_n 上验证与 $\Lambda\, \mathrm{Com}^{c}{}_{n}$-余模结构的相容性。对于这些生成元，与 $\Lambda\mathrm{Com}^c$-余作用的相容性同样可直接由定义得出。

接下来，我们需要验证按上述方式构造的 U 确实是 ϕ 的双侧逆。首先，根据构造显然有 $\phi(U(f)) = f$，正如所需。其次，注意到上文从 f 构造 F 的每一步，都是由与 Hopf $\Lambda\, e_n^c$-余模结构的相容性所必然要求的。依此论证可知，任意 Hopf $\Lambda\, \mathrm{Com}^c$-余模态射 F 都由其在生成元 $\mathrm{pIG}_{V,n}$ 上的限制唯一确定；换言之，ϕ 是单射，从而完成证明。□

注意，命题 9.1 仅涉及分次 Hopf 余模态射。要使这样的态射 $F = U(f)$ 成为真正的微分分次 Hopf 余模态射，我们还需要额外要求它与微分相容，即

$$d_M F - F d_{\mathrm{Graphs}_{V,n}} = 0. \tag{60}$$

为简化这一点，首先注意表达式 $d_M F - F d^{\mathrm{Graphs}_{V,n}}$ 是 F 的双导子。这意味着，只需稍微调整命题 9.1 证明中的论证，便可知等式 (60) 实际上等价于

$$(d_M F - F d_{\mathrm{Graphs}_{V,n}}) \circ \iota = 0.$$

换言之，只需在 Λ Hopf Com^c-余模生成元上验证该等式。下面推导 $F = U(f)$ 所满足的显式等式。对于第一项，即涉及 M 上微分的项，

我们得到

$$d_M U(f) \circ \iota = d_M f.$$

接下来考察 $d^{\mathrm{Graphs}_n} = d_c$ 的贡献。回想一下，这个微分会收缩图中的一条边。以生成元 $x \in \mathrm{pIG}_{V,n}(r)$ 为例。一般而言，收缩边可能会产生非内部连通图，并且

$$d_{\mathrm{Graphs}_{V,n}} x = \sum x_1 \cdots x_k$$

它是内部连通分支的乘积之和 $x_j \in \mathrm{IG}_n(r)$。然后，按照上文 U 的构造可知

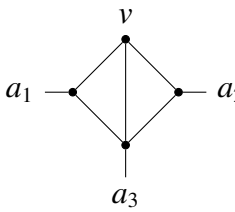
$$\begin{aligned} U(f)(d_{\mathrm{Graphs}_{V,n}} x) = U(f)(\sum x_1 \cdots x_k) = \sum U(f)(x_1) \cdots U(f)(x_k) \\ = \sum \Delta(f(x'_1))) \cdots (\Delta(f(x'_k)), \end{aligned} \tag{61}$$

在最右侧使用 M 上的乘积。此外，我们在此（不严格地）使用了记号 $x'_j \in \mathrm{pIG}_n$ 和 Δ 表示通过顶点去连接得到的元素，并使用了如命题 9.1 的证明中那样的 $\Lambda\,\mathrm{Com}^c$ 余作用。

9.2. 毛图复形及其 SLie_∞-结构。设 M 是一个右 $\Lambda\,\mathrm{Hopf}\,\mathrm{Com}^c$ 余模。作为一个分次向量空间，毛图复形定义为

$$\mathrm{HGC}_{M,V,n} := \mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(\mathrm{pIG}^\natural_{V,n}, M^\natural).$$

这里的记号 $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{S}}(\cdots)$ 指的是对称序列之间分次态射所构成的分次向量空间。对我们而言，最重要的特例是 $M = F_A$，其中 A 是某个微分分次交换代数。在这种情况下，$\mathrm{HGC}_{A,V,n} := \mathrm{HGC}_{F_A,V,n}$ 中的元素可以视为一系列 V-装饰图，其外腿由 A 标记，例如



$$, \qquad a_1, a_2, a_3 \in A, v \in V.$$

此外，$\mathrm{HGC}_{M,V,n}$ 上还存在一个按图的边数定义的完备下降滤子。它具有这样的性质：只要 A 是有限型且非负分次的，每个 $\mathcal{G}$-分次商（可识别为具有固定边数的图所构成的子空间）都是有限型。因此，我们看到，$\mathrm{HGC}_{M,V,n}\hat{\otimes}\mathcal{R}$ 中的零次元素集合可识别为 $\mathrm{Mor}_{\mathbb{S}/\mathcal{R}}(\mathrm{pIG}^\natural n \otimes\mathcal{R}, M^\natural \otimes\mathcal{R})$ 的集合；根据命题 9.1，它也可识别为 $\mathrm{Mor}_{\Lambda HRMod-\mathrm{Com}^c/\mathcal{R}}(\mathrm{Graphs}^\natural V,n \otimes \mathcal{R}, M^\natural \otimes\mathcal{R})$ 的集合，即分次 $\Lambda\,\mathrm{Hopf}\,\mathrm{Com}^c$-余模之间的态射集合。沿用上一小节的记号，对于 $f \in \mathrm{HGC}_{M,V,n}\hat{\otimes}\mathcal{R}$ 中的零次元素，我们将相应的分次 $\Lambda\,\mathrm{Hopf}\,\mathrm{Com}^c$-余模态射记作 $U(f) : \mathrm{Graphs}^\natural V,n \otimes\mathcal{R} \to M^\natural \otimes\mathcal{R}$。于是，方程 (60) 可转化为关于 f 的一个无常数项幂级数：

$$\mathcal{U}(f) := [d, U(f)] \circ \iota = (d_M U(f) - U(f) d_{\mathrm{Graphs}_{V,n}}) \circ \iota.$$

所有项都关于 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{R}$-线性的且具有函子性。此外，我们声称 $\mathcal{U}(\mathrm{f})$ 满足 (33) 形式的 S李$_\infty$-关系，

$$\mathcal{U}(f + \epsilon\mathcal{U}(f)) = \mathcal{U}(f).$$

事实上，我们首先注意到，由于 U(f) 是 Hopf 余模的态射，[d, U(f)] 是 U(f) 的双导子，即令 ϱ 为次数为 −1 的形式变量，并将其添加到我们的基环中，

$$U(f) + \epsilon[d, U(f)]$$

是 Hopf 余模的态射。然而，这个态射与 ι 的复合显然是 f +ϱ$\mathcal{U}$(f)，因此

$$U(f + \epsilon\mathcal{U}(f)) = U(f) + \epsilon[d, U(f)].$$

但随后我们如所愿地得到，

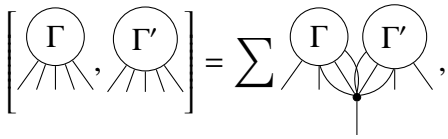
$$\mathcal{U}(f + \epsilon\mathcal{U}(f)) = [d, U(f + \epsilon\mathcal{U}(f))] \circ \iota = [d, U(f) + \epsilon[d, U(f)]] \circ \iota = [d, U(f)] \circ \iota + 0 = \mathcal{U}(f).$$

因此，我们得出上一节讨论的以下推论。

推论9.2. 在 HGC$_M$Lie$_\infty$-结构上存在一个滤过完备的 SLie$_\infty$-结构，使得 HGC$_{M,V,n}$ $\hat{\otimes}\mathcal{R}$ 中的 Maurer-Cartan 元素与 dg Hopf Com^c-余模态射 Graphs$_{V,n}$ $\otimes\mathcal{R}$ → M 一一对应。特别地，取 $\mathcal{R}$ = Ω(Δ•)，

$$\mathrm{Map}_{dg\mathcal{H}\mathrm{opf}\Lambda\mathcal{M}\mathrm{od}^c_{\mathrm{Com}^c}}(\mathrm{Graphs}_{V,n}, M) \cong \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{M,V,n}).$$

我们也可以推导图上的 SLie$_\infty$-运算的组合形式，针对特殊情形 M = F$_A$。为此，再看一遍 (61)。注意，微分只收缩一条边，因此内部连通图 $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k$ 只有一个共同的外部顶点，它们都连接到该顶点，并且在那里可能连接多条半边。所有其他外部顶点的价数仍为一，因为 x ∈ plG$_{V,n}$。这意味着，从组合角度看，k 元 SLie$_\infty$ 运算 μ_k（k ≥ 2）作用于图 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathrm{HGC}_{A,V,n}$ 时，是对所有将一组毛发融合为一根毛、并形成连通图的方式求和，如下图所示（k = 2时）。



当 k = 1 时，微分 μ_1 由相同的过程给出，不过还包含一项附加项 d_A，它继承自 A 上的微分；另外还有一项分裂内部顶点的运算，它继承自plCG$_{V,n}$ = (plG$_{V,n}$)*。

注9.3. 迄今为止，我们遇到了两个非常相似的图复形 HGC$_{V,\,n}$ 和 HGC$_{M,\,V,\,n}$。事实上，对于 M(r) = $\mathrm{V}_1^{\otimes r}$，这两个分次向量空间是同构的，因此我们采用相似的记号。不过，我们还要强调，它们具有不同的代数结构，发挥着不同的作用：HGC$_{V,\,n}$ 是一个微分分次李代数，其李括号的次数为零；而 HGC$_{M,\,V,\,n}$ 则具有另一种 SLie$_\infty$-代数结构。特别是，SLie-括号的次数为 +1。因此，建议读者将这两个对象 HGC$_{V,\,n}$ 和 HGC$_{M,\,V,\,n}$ 区分开来。

9.3. 分次版本。出于技术原因，我们还将考虑伴随分次右 $\Lambda\mathrm{Hopf}\mathsf{Pois}_n^c$ 余模

$$\mathrm{grGraphs}_{V,n} = \mathrm{gr}_{\mathcal{G}}\mathrm{Graphs}_{V,n},$$

其中我们采用按边数定义的滤过 $\mathcal{G}$，如第 8.8 节所述。注意，$\mathrm{grGraphs}_{V,n}$的微分消失，并且 Pois_n^c 余作用是从Com^c-余作用余限制得到的，

$$\mathrm{grGraphs}_{V,n} = \mathrm{coRes}^{\mathsf{Pois}_n^c}_{\mathsf{Com}^c}\mathrm{grGraphs}_{V,n}.$$

还要注意，$\mathrm{grGraphs}_{V,n}$ 作为右侧 Λ Hopf Com^c 余模是自由的；证明$\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 是拟自由的论证同样适用，见上文。类似地，对于右侧 $\Lambda\mathrm{Hopf}\,\mathsf{Com}^c$ 余模 M，我们考虑图复形 $\mathrm{HGC}_{M,V,n}$上按边数定义的下降完备滤过。具体而言，

$$\mathcal{G}^p\mathrm{HGC}_{M,V,n}$$

由具有 $\geq$ p条边的图的级数组成。注意，诱导在关联（完备）分次对象 $\hat{}\mathrm{grHGC}_{M,V,n}$ 上的 SLie_∞结构是阿贝尔的，而微分仅仅是从 M 继承而来的。于是得到命题 9.1 和推论9.2的如下分次版本。

命题 9.4. 对于每个分次交换代数 $\mathcal{R}$ 以及 Λ Hopf Com^c-余模 M，与生成元的嵌入复合

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{R}\otimes\mathsf{Com}^c}(\mathcal{R}\otimes\mathrm{grGraphs}^\flat_{V,n}, \mathcal{R}\otimes M^\flat) \xrightarrow{-\circ\tilde{\iota}} (\hat{\mathrm{grHGC}}_{N,V,n}\hat{\otimes}\mathcal{R})_0$$

是一个双射，使得右侧的闭元素恰好是尊重微分的 $\Lambda\mathrm{Hopf}\,\mathsf{Com}^c$ 余模态射的像。

现在设 M 是一个右 Λ Hopf $\mathsf{Pois}^c{}_n$ 余模，并考虑第 7 节变形复形的分次版本

$$\mathrm{Def}(\mathrm{grGraphs}_{V,n}, W\,M) \cong \hat{\mathrm{grDef}}(\mathrm{Graphs}_{V,n}, W\,M)$$

其中 W M 是 M 的 W纤维化分解，见第 3.9 节。这里我们隐式地延拓由 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 上的滤过所诱导的变形复形上的下降完备滤过。

然后，利用余限制与余诱导之间的伴随关系，以及 $\mathrm{grGraphs}_{V,n}$ 是底层 Com^c-余模的余限制这一事实，我们得到变形复形与毛图复形之间如下的比较。

命题9.5. 设 M 是一个右 Λ Hopf $\mathsf{Pois}^c{}_n$ 余模，且 $N := \mathrm{coInd}^{\mathsf{Com}^c}_{W\mathsf{Pois}_n^c}W\,M$。那么存在一个微分分次向量空间的同构

$$\mathrm{Def}(\mathrm{grGraphs}_{V,n}, W\,M) \cong \hat{\mathrm{grHGC}}_{N,V,n}$$

证明。我们将构造一个（先验的）弯曲 SLie_∞-态射，它连接阿贝尔 SLie_∞-代数 $\mathrm{Def}(\mathrm{grGraphs}_{V,n}, W\,M)$ 和 $\hat{}\mathrm{grHGC}_{N,V,n}$。然后我们将验证，该 SLie_∞-态射只有线性分量非零。我们再次使用第 6.2 节的形式体系来

编码这个 SLie$_\infty$-态射。设 $\mathcal{R}$ 是一个分次交换代数，则根据定义，我们有同构

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Def}(\mathsf{grGraphs}_{V,n}, W\,M)\hat{\otimes}\mathcal{R}\right)_0 &\xrightarrow{F,\cong} \mathrm{Mor}_{We_n^c\otimes\mathcal{R}}(\mathsf{grGraphs}_{V,n}\otimes\mathcal{R}, W\,M\otimes\mathcal{R})\\ &\xrightarrow{A,\cong} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Com}^c\otimes\mathcal{R}}(\mathsf{grGraphs}_{V,n}\otimes\mathcal{R}, N\otimes\mathcal{R})\\ &\xrightarrow{(-)\circ\iota,\cong} (\hat{\mathsf{grHGC}}_{N,V,n}\hat{\otimes}\mathcal{R})_0\,.\end{aligned} \tag{62}$$

第一个态射由引理 7.1 得到（另见（38）），中间的识别来自伴随，右侧的识别则由命题 9.4 给出。特别要注意，W M 是拟自由的，且余诱导模 N $\subset$ W M 可以识别为由满足其上余合成落在 W M $\circ\mathsf{Com}^c$ 中的元素组成的子对称序列。伴随映射 A 将态射 f 映射为其自身；注意，由于与 We_n^c-余作用相容，f 的像必须位于 N 中。

显然，上述所有箭头都是通过对结构运算作 $\mathcal{R}$-线性延拓得到的，因此复合定义了一个幂级数

$$\Phi(x) = (A(F(x)))\circ\tilde{\iota}$$

其各项是通过对定义在 Q 上的多重线性映射作 $\mathcal{R}$-线性延拓得到的。为检验 Φ 是否编码了一个非平坦的 SLie$_\infty$-态射，我们可以按（35）的形式检验 SLie$_\infty$-关系。首先注意到

$$A(F(x+\epsilon\mathcal{U}(x))) = A((1+\epsilon d)F(x)) = (1+\epsilon d)A(F(x)).$$

因此

$$\Phi(x+\epsilon\mathcal{U}(x)) = (1+\epsilon d)A(F(x))\circ\tilde{\iota} = \Phi(x)+\mathcal{V}(\Phi(x))$$

如所需。接下来我们检验事实上 Φ(x) 关于 x 是线性的，其中 $\mathcal{U}$ 是 SLie$_\infty$-代数 Def(grGraphs$_{V,n}$, W M) 的生成函数，而 $\mathcal{V}$ 是 $\hat{}$grHGC$_{N,V,n}$ 的生成函数。为此注意，F(x) 的 k 次线性部分由取值于 S^kIG$_{V,n}$ 中的态射构成。但限制到生成元上时，所有这些部分在 k , 1 时都为零。此外，正如我们上面所见，这个线性部分必定是一个同构，因为（62）中的三个映射都是双射。□

稍后我们将需要上述命题的以下推论，以联系毛图复形与变形复形。

推论 9.6. 设 M 是一个具有构形空间型的 Λ Hopf Pois^c $_n$-余模。设 N :=coInd$^{\mathsf{Com}^c}$ $_{W\mathsf{Pois}_n^c}$ (W M)。则我们有以下微分分次向量空间之间的态射

$$\mathrm{Def}(\mathsf{grGraphs}_{V,n}, W\,M)\cong\hat{\mathsf{grHGC}}_{N,V,n}\leftarrow\hat{\mathsf{grHGC}}_{M(1),V,n}$$

其中，左侧态射是同构，右侧箭头是拟同构。这里，右侧箭头由典范拟同构 $\mathrm{F}_{M(1)}\to$N 诱导，我们使用简写记号 HGC$_{M(1),V,n}$ = HGC$_{\mathbf{F}_{M(1)},V,n}$。

证明。这里唯一需要验证的是右侧的箭头是一个拟同构。不过请注意，构造 ? $\mapsto$ $\hat{}$grHGC$_{?,V,n}$ 是一个函子。此外，根据 K¨unneth 定理，它将 Λ Hopf Com^c-余模之间的拟同构映为拟同构。□

10. 主要结果及定理 1.1 的证明

本节将证明以下结果，这是对引言中主要定理 1.1 的略微加强。

定理 10.1. 设 $n \geq 2$，且 M 是一个构形空间型的右 Λ Hopf e_n^c-余模，使得 $H := H(M(1))$ 连通且有限维。那么存在一个 Maurer-Cartan 元素 $Z \in \mathcal{G}^1 HGC_{\bar{H},n}$ 以及一个右 Λ Hopf We_n^c-余模之间的拟同构

$$\Phi : \mathsf{Graphs}_{\bar{H},n}^{Z} \to W M .$$

10.1. 定理 10.1 的证明。我们一次性固定上同调代表元 $H \to M(1)$，也就是说，我们将 H（非典范地）视为 M(1) 中余循环的一个子空间。通过限制，我们还¯得到一个从正分次部分 $H \to M(1)$ 出发的映射。我们希望在命题 7.4 的曲 $SLie_\infty$-代数中构造一个 Maurer-Cartan 元素

$$m \in \mathcal{G}^1 \mathbf{HGC}_{H,n} \ltimes \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}_H, W M) =: \mathfrak{g}.$$

我们将右侧 g 视为带有按图中边数定义的下降完备滤过的空间 $\mathfrak{g} = \mathcal{G}^0\mathfrak{g} \supset \mathcal{G}^1\mathfrak{g} \supset \cdots$。

我们首先构造一个一阶的 Maurer-Cartan 元素，即一个次数为一的元素 $m_0 \in \mathfrak{g}$，使得

$$\mathrm{curv}(m_0) \in \mathcal{G}^1\mathfrak{g}.$$

我们取 $m_0 \in \mathrm{Def}(\text{图}_{\bar{H},n}, W M)$，也就是说，$HGC_{\bar{H},n}$ 中的连通分支为零。但查看命题 7.3 中对 Maurer-Cartan 元素的描述可知，Maurer-Cartan 元素对应于 Hopf $(We_n^c)^\flat$-余模的态射

$$F : \mathsf{Graphs}_{\bar{H},n}^{\flat} \to W M^\flat$$

这些态射使微分 $dF = Fd$ 相互交织，其中 $m_0 = \pi \circ F \circ \iota$ 由生成元的嵌入和余生成元的投影得到。对于一阶的 Maurer-Cartan 元素，方程 $dF = Fd$ 只需在 $\mathcal{G}^0$图 $_{\bar{H},n} = F_{S(\bar{H})}$ 上成立。接下来，我们可以调用引理 8.9，在给定固定包含映射 $H \to M(1)$ 的情况下构造此映射 F。由于根据该引理，F 在$\mathcal{G}^0$图$_{\bar{H},n}$ 上的限制与微分相容，因此元素 m_0 正是所需的一阶 Maurer-Cartan 元素。

接下来我们想要使用 $SLie_\infty$-障碍理论来构造一个 Maurer-Cartan 元素 m_1 in$\mathcal{G}^1\mathfrak{g}^{m_0}$。首先，我们计算相关的障碍空间，并证明它们均为零。

命题 10.2。在定理 10.1 的设定下，并令 g 如上所述，我们有

$$H(\hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^1\mathfrak{g}^{m_0})) = 0.$$

我们将此命题的证明推迟到下一小节，继续证明定理 10.1。

利用命题 10.2，我们可以立即应用推论 6.2，得出曲弯的 SLie_∞-代数 $\mathfrak{g}^{m_0}$ 包含一个 Maurer-Cartan 元素 $m_1 \in \mathcal{G}^1\mathfrak{g}^{m_0}$。等价地，$m_0 + m_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的一个 Maurer-Cartan 元素。令我们写作

$$m_0 + m_1 = Z + m'$$

其中 $Z \in \mathcal{G}^1\mathrm{HGC}_H$，且 $m' \in \mathrm{Def}(\mathrm{Graphs}_{H,n}, W\,M)$。具体而言，$m'$ 随后编码了右 Hopf $\Lambda\mathrm{We}_n^c$ 余模的一个态射

$$\Phi : \mathrm{Graphs}^Z_{\bar{H},n} \to W\,M\,.$$

为了完成定理的证明，我们需要证明 Φ 是一个拟同构。但两边都是构形空间类型的 We_n^c-余模。因此，我们可以运用命题 5.4 得出结论：若一元部分 $U(\Phi) : \mathrm{Graphs}^Z{}_H(1) \to W\,M(1)$ 是拟同构，则该映射也是拟同构。但根据推论 8.12 的最后一条断言，对于任意 Maurer-Cartan 元素 $Z \in \mathcal{G}^1\mathrm{HGC}_H$，微分分次向量空间之间的典范映射 $H \hookrightarrow \mathrm{Graphs}^Z{}_H(1)$ 是拟同构。此外，复合

$$H \hookrightarrow \mathrm{Graphs}^Z_{\bar{H},n}(1) \to W\,M(1)$$

经过$\mathcal{G}^0\mathrm{Graphs}^Z_{\bar{H},n}$，由 m_0，决定，并且与我们在开头固定的拟同构 $H \to M(1) \to W\,M(1)$ 一致。因此，命题 5.4 的条件均已满足，定理得证。□

10.2. 命题 10.2 的证明。证明中我们始终使用按边数划分的滤过 $\mathcal{G}$，因此省略 $\hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}} =$ 中相应的下标：$\hat{\mathrm{gr}}$。首先注意到

$$\hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}{}^1\mathfrak{g}^{m_0} = \hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}{}^1\mathbf{HGC}_{\bar{H},n} \oplus \mathcal{G}^1\mathrm{Def}(\mathrm{grGraphs}_{V,n}, W\,M)$$

具有微分

$$d = d_{act} + d_{\mathrm{Def}}, \tag{63}$$

其中

$$d_{act} : \hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}{}^1\mathbf{HGC}_{\bar{H},n} \to \mathcal{G}^1\mathrm{Def}(\mathrm{grGraphs}_{V,n}, W\,M)[1]$$

是毛图对 Maurer-Cartan 元素 m_0 的作用所产生的部分，而 d_{Def} 是变形复形上的微分。特别要注意，$\hat{\mathrm{gr}}_{\mathcal{G}}{}^1\mathrm{HGC}_{\bar{H},n}$上的微分为零。因此，我们可以将问题改述为证明映射 d_{act} 是微分分次向量空间之间的拟同构。推论 9.6 表明，变形复形与毛图复形 $\mathrm{HGC}_{M(1),\bar{H},n}$ 拟同构。此外，通过构造中选取的拟同构 $H \to M(1)$，我们得到一条复形之间的拟同构链

$$\hat{\mathrm{gr}}\mathbf{HGC}_{\bar{H},n} = \hat{\mathrm{gr}}\mathrm{HGC}_{H,\bar{H},n} \to \hat{\mathrm{gr}}\mathrm{HGC}_{M(1),\bar{H},n} \xrightarrow{\text{Cor. 9.6}} \mathrm{Def}(\mathrm{grGraphs}_{V,n}, W\,M). \tag{64}$$

因此，我们只需证明这个复合与 d_{act}一致，或者至少证明它诱导相同的上同调同构。为此，我们首先需要展开 d_{act}的定义。令 $\Gamma \in \hat{\mathrm{gr}}\mathrm{HGC}_{\bar{H},n}$ 为一个次数为 k 的元素（由于微分为零，它自动是闭的）。考虑

分次交换代数 $\mathcal{R} = \mathrm{Q}[\varrho]/\varrho^2$，其中 ϱ 的次数为 $-k$。令 $\mathrm{grF} : \mathrm{gr}\mathbb{图}_{V,n} \to \mathrm{W\,M}$ 为由我们的 m_0 编码的 Λ Hopf We_n^c 余模态射。具体而言，grF 经由典范态射 $\mathrm{F}_{S(\bar{\ }H)} \to \mathrm{W\,M}$ 因子分解，因此对所有含边的图都为零。于是，根据定义，$\mathrm{d}_{act}\Gamma$ 满足

$$m_0 + \epsilon d_{act}\Gamma = \pi \circ (F \circ e^{\epsilon\Gamma\cdot}) \circ \iota = \pi \circ (F + \epsilon F(\Gamma \cdot -)) \circ \iota.$$

更具体地说，我们再次将毛图复形（其底层分次向量空间）识别为

$$\hat{\mathrm{gr}}\mathbf{HGC}_{\bar{H},n} \cong \mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(\mathrm{grpl}\mathbb{G}_{V,n}, \mathbf{F}_H),$$

这里我们（稍微滥用一下记号）用 F_H 表示其元数为 r 的分量为 $\mathrm{H}^{\otimes r}$的 S-模。于是 $\mathrm{F}(\Gamma \cdot \iota(-))$ 是复合

$$\mathrm{grpl}\mathbb{G}_{V,n} \xrightarrow{\Gamma\cdot} \mathbf{F}_H \hookrightarrow \mathbf{F}_{S(\bar{H})} \to \mathbf{F}_{M(1))} \to W\,M\,.$$

但这与沿着 (64) 从 Γ 得到的态射一致，参见推论 9.6。 □

11. 自同构空间与定理 1.2 的证明

11.1. 定义与一般事实。一般而言，我们用 $\mathrm{Map}'(\cdots)$ 表示映射空间的子空间，它由那些在上同调上诱导同构 $\hat{}$ 的态射所在的连通分支组成。设 M 是一个 Λ Hopf C 余模，并设 M 是一个纤维化且余纤维的分解。于是，我们将 M 的同伦自同构空间定义为

$$\mathrm{Aut}^h(M) = \mathrm{Map}'(\hat{M}, \hat{M}) \subset \mathrm{Map}(\hat{M}, \hat{M}).$$

这是一个单纯幺半群，其同伦类型与纤维化余纤维分解的选择无关，见 [22, section II. 2.2]。此外，由于每个拟同构特别会在上同调上诱导同构，因此存在一个单纯幺半群映射

$$\mathrm{Aut}^h(M) \to \mathrm{GL}(H(M(1))),$$

其中我们将右侧视为离散群。特别要注意，Aut^h(M) 的同一个连通分支中的所有态射在上同调上诱导出相同的映射。我们将恒等元的原像记为

$$\mathrm{Aut}^h(M)_{[1]} \subset \mathrm{Aut}^h(M).$$

这不应与恒等元的连通分支混淆——Aut^h(M)[1] 可能具有多个连通分支。

同伦自同构群通常很难计算，其中一个困难在于，我们通常无法获得“简单的”纤维化替换和余纤维替换。不过，我们有如下识别原理。

命题 11.1. 设 $\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 是 Λ Hopf C 余模之间的拟同构，其中 M 余纤维且 N 纤维化。设 G 是一个作用于 M 的单纯群，即存在一个单纯幺半群映射 $\mathrm{G} \to \mathrm{Map}(\mathrm{M}, \mathrm{M})$。

• 那么，由与 f 复合所诱导的映射

$$G \to \mathrm{Map}'(M, N)$$

是一个弱等价，那么作为单纯幺半群，G 与 $\mathrm{Aut}^h(\mathrm{M})$ 弱等价。

• 令 $\mathrm{Map}'(\mathrm{M}, \mathrm{N})_{[f]} \subset \mathrm{Map}'(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 由诱导出与 f 相同的映射 $\mathrm{H}(\mathrm{M}(1)) \to \mathrm{H}(\mathrm{N}(1))$ 的态射的连通分支组成。那么，如果诱导映射

$$G \to \mathrm{Map}'(M, N)_{[f]}$$

is a 弱等价，则作为单纯幺半群，G 与 $\mathrm{Aut}^h(\mathrm{M})_{[1]}$ 弱等价 .

证明。第一部分在任意模型范畴中都成立，并已在 [28] 中证明。第二部分的证明只是一个小变体。□

11.2. 图$^Z{}_{V,\,n}$ 的自同构。令 $\mathrm{n} \geq 2$。回忆一下，微分分次李代数 $\mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 作用于 Λ Hopf e_n^c 余模图$_{V,\,n}$ 通过双导子作用。相应地，对于 $\mathrm{Z} \in \mathrm{MC}(\mathcal{G}^1\mathrm{HGC}_{V,\,n})$ 这一 Maurer-Cartan 元素，扭曲微分分次李代数 $\mathrm{HGC}^Z{}_{V,\,n}$ 通过双导子作用于 图$^Z{}_{V,\,n}$。

然而，$\mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 通常并非前幂零：回忆一下，我们有半直积分解

$$\mathbf{HGC}_{V,n} = \mathfrak{gl}'_V \ltimes \mathcal{G}^1\mathbf{HGC}_{V,n},$$

其中部分 $\mathrm{gl}'_V = \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathrm{V}, \mathrm{V})$ 是有限维的，但一般并非幂零。因而我们将考虑前幂零微分分次李子代数

$$\mathbf{HGC}^{nil}_{V,n} := (\mathfrak{gl}'_V)_{<0} \ltimes \mathcal{G}^1\mathbf{HGC}_{V,n} \subset \mathbf{HGC}_{V,n},$$

其中我们将 gl'_{V_1} 替换为其负上同调次数的分次李子代数 $(\mathrm{gl}'_{V_1})^{<0} \subset \mathrm{gl}'_{V_1}$。注意，作为另一种选择，我们也有如下恒等识别

$$\mathbf{HGC}^{nil}_{V,n} = \mathcal{F}^1\mathbf{HGC}_{V,n}$$

即第 8.7 节滤过 $\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{F}^1$-部分，由此也能清楚看出其前幂零性。微分分次代数 $\mathrm{HGC}^{nil}{}_{V,\,n}$ 仍通过限制作用于 $\mathrm{Graphs}_{V,\,n}$，而扭曲版本 $\mathrm{HGC}^{nil,\,Z}{}_{V,\,n}$ 作用于 $\mathrm{Graphs}^Z{}_{V,\,n}$。由前幂零性，我们随后可以过渡到指数群，并得到一个单纯幺半群映射

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n}) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Graphs}^Z_{V,n})_{[1]}.$$

于是我们的主要结果如下。

定理 11.2. 设 V 是有限维正分次向量空间，$\mathrm{n} \in \mathrm{Z}$，且 $\mathrm{Z} \in \mathcal{G}^1\mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。则 $\mathrm{HGC}^{nil,\,Z}{}_{V,\,n}$ 在 图$^Z{}_{V,\,n}$ 上的作用诱导出一个弱等价

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n}) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Graphs}^Z_{V,n}, W\mathrm{Graphs}^Z_{V,n})_{[f]},$$

其中 f : 图$^Z{}_{V,n} \to$ W图$^Z{}_{V,n}$ 是典范拟同构。

结合命题11.1的第二部分，我们由此得到以下推论，它与定理 1.2 相同。

推论 11.3。我们有一个单纯幺半群的弱等价

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n}) \simeq \mathrm{Aut}^h(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})_{[1]}.$$

上述结果是针对我们的微分分次李代数的指数群表述的。不过，有些读者可能更愿意使用分类空间。然而，对于满足适当条件的滤过完备微分分次李代数 $\mathfrak{g}$，以及 $\mathrm{m} \in \mathsf{MC}(\mathfrak{g})$ 中的一个 Maurer-Cartan 元素，我们有弱等价

$$B\mathrm{Exp}_\bullet(\mathfrak{g}^m) \simeq \mathsf{MC}_\bullet(\mathfrak{g})_m \simeq \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{trunc}(\mathfrak{g}^m)),$$

其中，截断 $\mathrm{trunc}(\mathfrak{g}^m)$ 由 $\mathfrak{g}$ 中次数为 < 0 的元素以及零次的闭元素组成。例如，使上述陈述成立的适当条件包括：$\mathfrak{g}$ 是滤过李余代数 $\mathfrak{c}$ 的对偶，并且具有有限维商 $\mathcal{F}_p\mathfrak{g}/\mathcal{F}_{p+1}\mathfrak{g}$，见 [54]。在我们的情形中，这些条件均得到满足，因此可以得出：

推论 11.4。我们有

$$\mathsf{MC}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil}_{V,n})_Z \simeq \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{trunc}(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n})) \simeq B\mathrm{Exp}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n}) \simeq B\mathrm{Aut}^h(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})_{[1]},$$

其中 $\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{nil}{}_{V,n})_Z \subset \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{nil}{}_{V,n})$ 是 Z 的连通分支。

11.3. 定理 11.2 的证明。为了证明定理 11.2，我们将首先把问题重新表述为 Maurer-Cartan 空间的比较。为此，我们调整上一节的讨论。首先注意，存在一个 SLie_∞-代数的态射

$$\pi : \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}) \to \mathfrak{gl}'_V[1]$$

将该态射限制在元数为一的生成元 V 上，并将结果投影到 V 中至多线性的部分。然后我们定义 SLie_∞-子代数

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})' &:= \pi^{-1}((\mathfrak{gl}'_V)_{<0}) \\ &\subset \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}) \cong \mathcal{H}om_{\mathbb{S}}(\mathsf{pICG}_{V,n}, \mathring{W}\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}),\end{aligned}$$

它由满足 $\pi(\mathrm{f})$ 次数为负的态射 f 构成。

引理 11.5. 有如下单纯集的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})') & \xrightarrow{=} & \mathrm{Map}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}, W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})_{[f]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})) & \xrightarrow{=} & \mathrm{Map}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}, W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}) \end{array}.$$

证明。一个 k-单形

$$X \in \mathrm{Map}_k(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}, W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}) = \mathrm{MC}_k(\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})) \\ = \mathrm{MC}(\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n}) \hat{\otimes} \Omega(\Delta^k))$$

属于单　纯形子集 $\mathrm{Map}(\mathsf{Graphs}^Z{}_{V,\ n}, \mathsf{WGraphs}^Z{}_{V,\ n})$ [f] 当且仅当满足以下条件　s:

- 对于某个（因而任意）点 $a \in \Delta_n$，态射

$$ev_a X : \mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n},$$

得　到的限制在上同调上诱导映射 $[\mathrm{ev}_a X]$，满足 $[\mathrm{ev}_a X] = [\mathrm{f}$].

将 $\mathrm{ev}_a X$ 视为 $\mathrm{Maurer–Cartan}(\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z{}_{V,\ n} \to \mathsf{WGraphs}^Z{}_{V,\ n}))$ 中的一个元素　$\cong \mathrm{Hom}_S(\mathrm{plCG}_{V,\ n}, \mathring{}\mathrm{W图}^Z{}_{V,\ n})$ 这意味着线性部分 $\pi(\mathrm{ev}_a X)$ 消失。

但这等价于 X 的 0-形式部分属于 $\mathrm{Def}(\mathrm{图}^Z{}_{V,\ n} \to \mathrm{W图}^Z{}_{V,\ n})'$。由于次数原因，高阶形式部分的系数本来就属于这个子空间，因此实际上

$$X \in \mathrm{MC}_k \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})').$$

反过来，任何这样的 X 显然都满足上述条件，因此引理得证。　□

接下来我们考虑 SLie_∞-态射

$$\Phi : (\mathbf{HGC}^{Z,nil}_{V,n})_{ab} \to \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})$$

它由 $\mathrm{HGC}^Z{}_{,\ }{}^{nil}{}_{V,\ n}$ 在 $\mathrm{图}^Z{}_{V,\ n}$ 上的作用经由命题 7.5 得到。

引理 11.6。上面的 SLie_∞-态射 Φ　取值于 SLie_∞-子代数 $\mathrm{Def}(\mathrm{图}^Z{}_{V,\ n} \to \mathrm{W图}^Z{}_{V,\ n})'$，也就是说，它是一个 SLie_∞-态射

$$\Phi : (\mathbf{HGC}^{Z,nil}_{V,n})_{ab} \to \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})'.$$

证明。设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathrm{HGC}^Z{}_{,}{}^{nil}\mathrm{V,n}$ 和 $\mathrm{x} = \Phi_n(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ 是 SLie_∞-态射的 N元部分的像。于是我们需要验证 x 的线性部分 $\pi(\mathrm{x})$ 不含次数为 0 的部分。然而，无论 Φ 的具体组合形式如何，像 x 都是由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ 通过 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 在 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 上的作用构造而成的。此作用保持图的边数不变。因此，x 的线性部分中的潜在贡献必须来自 $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ 的线性部分（对应于无边图）。但是，$\mathrm{HGC}^Z{}_{,}{}^{nil}\mathrm{V,n} \subset \mathrm{HGC}^Z{}_{,}{}^{nil}\mathrm{V,n}$ 的定义是移除非负次数中的无边图。因此，我们可以假设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathrm{HGC}^Z{}_{,}{}^{nil}\mathrm{V,n}$ 的次数≤ 0。于是 x 的次数为 $\leq 1 - \mathrm{N} \leq 0$。因此，$\pi(\mathrm{x})$ 集中在负次数中，正如所需。□

命题 11.7。设 Φ_1 是引理 11.6 中 SLie_∞-态射 Φ 的线性部分。则在关联边分次复形上诱导的映射

$$\hat{\mathrm{g}}\mathrm{r}\Phi_1 : \hat{\mathrm{g}}\mathrm{r}_{\mathcal{G}} \mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n} \to \hat{\mathrm{g}}\mathrm{r}_{\mathcal{G}} \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})'$$

是一个拟同构。

证明。我们分别在各部分 $\mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}(-)$ 上验证，其中 $k = 0$ 以及 $k \geq 1$ 边。首先注意，根据构造，对于 $k \geq 1$

$$\mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^{\mathcal{Z}}_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^{\mathcal{Z}}_{V,n})' = \mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^{\mathcal{Z}}_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}^{\mathcal{Z}}_{V,n}).$$

此外，我们有

$$\mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}\mathbf{HGC}^{nil,\mathcal{Z}}_{V,n} = \begin{cases} \mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}\mathbf{HGC}_{V,n} & \text{for } k \geq 1 \\ (\mathfrak{gl}'_V)_{<0} & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

且微分消失。

接下来，重新考察上文第 10.2 节中命题 10.2 的证明，并将其专门应用于 $\mathrm{M} = 图_{V,n}$。然后我们在那里计算得出，对所有 k

$$\mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}\mathbf{HGC}_{V,n} \cong H(\mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}\mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}_{V,n} \to W\mathsf{Graphs}_{V,n})).$$

该同构由一个 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 元素对变形复形中与态射 $\mathrm{gr}_{\mathcal{G}}图_{V,n} \to \mathrm{gr}_{\mathcal{G}}W图_{V,n}$ 相对应的元素的作用给出。该态射将带边的图映为零，并在无边图上取自然映射。但这与我们的映射 $\mathrm{gr}_{\mathcal{G}}\Phi_1$ 一致。因此，我们可以直接得出结论：对于 $k \geq 1$，$\mathrm{gr}_{\mathcal{G}}\Phi$ 在所有分次分量 $\mathrm{gr}^k_{\mathcal{G}}(-)$ 上都诱导出拟同构。因此，只需考察分次分量 $\mathrm{gr}^0_{\mathcal{G}}(-)$。不过，这包含在一个交换图中

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{gr}^0_{\mathcal{G}}\mathrm{HGC}^{nil}{}_{V,n} = (\mathfrak{gl}'_V)_{<0} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^0_{\mathcal{G}}\mathrm{HGC}_{V,n} = \mathfrak{gl}'_V & \longrightarrow & (\mathfrak{gl}'_V)_{\geq 0} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}^0_{mG}\Phi_1} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ \mathrm{gr}^0_{\mathcal{G}}\mathrm{Def}(图^{\mathcal{Z}}{}_{V,n} \to W图^{\mathcal{Z}}{}_{V,n})' & \longrightarrow & \mathrm{gr}^0_{\mathcal{G}}\mathrm{Def}(图^{\mathcal{Z}}{}_{V,n} \to W图^{\mathcal{Z}}{}_{V,n}) & \longrightarrow & (\mathfrak{gl}'_V)_{\geq 0} \end{array}.$$

这些行是恰当的，并且根据命题10.2的证明，中间的竖直箭头再次是拟同构。因此，$\mathrm{gr}^0_{mG}\Phi_1$ 也必然是拟同构。□

定理 11.2 的证明。由命题 11.1 可知，只需验证引理 11.6 的 SLie_∞-态射 Φ 在相应的 Maurer-Cartan 空间之间诱导一个弱等价。

为证明这一点，我们希望应用 Goldman-Millson 定理的一个变体，即定理 A.1。我们首先验证该定理适用。首先，定理中的 SLie_∞ 代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别为 $\mathfrak{g} = (\mathrm{HGC}^{nil,\mathcal{Z}}{}_{V,n})_{ab}$ 和 $\mathfrak{h} = \mathrm{Def}(\mathsf{Graphs}^{\mathcal{Z}}{}_{V,n} \to \mathsf{WGraphs}^{\mathcal{Z}}{}_{V,n})'$。定理 A.1 要求这些对象配备的滤过 $\mathcal{F}^\bullet$ 和 $\mathcal{G}^\bullet$，就是第 8.7 节和第 8.8 节中的滤过 $\mathcal{F}^\bullet$ 和 $\mathcal{G}^\bullet$。定理中的 SLie_∞-态射 F 就是上文所述的 Φ。我们来检查定理 A.1 的所有条件是否都满足（编号请参见定理的陈述）：

a. $\mathfrak{g}$ 显然是阿贝尔的，并配备了所需的两个滤过。无边部分是 $\mathrm{gr}^0_{\mathcal{G}}\mathrm{HGC}^{nil}{}_{V,n} = (\mathfrak{gl}'_V)_{<0}$，且没有零次元素，因此 $\mathfrak{g}^0 = \mathcal{G}^1\mathfrak{g}^0$，符合要求。

b. $\mathfrak{h}$ 还配备了所要求的两种相容的完备滤过。

c. 我们检查 SLie_∞ 运算 μ_k 满足 $k \geq 2$ 时的 (82)：事实上，再次考虑通过生成函数 $\mathcal{U}(\mathfrak{f})$（见 (39)）定义 SLie_∞ 结构。$\mathfrak{h}$ 中高阶括号里不属于 $\mathcal{G}^1\mathfrak{h}$ 的一项可能对应于 $\mathcal{U}(\mathfrak{f})(\Gamma)$ 中的一个非零项，该项至少含有二次的 $\mathfrak{f}$，其中 $\Gamma \in \mathrm{Graphs}^Z_{V,n}$ 是一个没有边的内部连通图。然而，没有边的内部连通图仅由外部顶点和一个 V 中的装饰组成。余合作子的余作用无法从这样的图生成一个非内部连通图。但要产生至少二次依赖于 $\mathfrak{f}$ 的项，就必须如此，参见引理 7.1 的证明。因此 (82) 得证。

d. 显然，$\mathcal{G}^p\mathfrak{g} \subset \mathcal{F}_p\mathfrak{g}$ 和 $\mathcal{G}^p\mathfrak{h} \subset \mathcal{F}_p\mathfrak{h}$，因此这些滤过在所要求的意义下是相容的。

e. 由构造可知，态射 $F = \Phi$ 与滤过 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 相容，因为它只使用了 $\mathrm{Graphs}_{V,n}$ 上的 Λ Hopf 余模结构以及 $\mathrm{HGC}^{nil}_{V,n}$-作用，而它们都与这些滤过相容。

f. 根据命题 11.7，线性分量 $F_1 = \Phi_1$ 在相关联的 $\mathcal{G}$-分次复形上诱导一个同构。

因此，定理 A.1 适用于我们的情形，我们由此得出该映射

$$\mathrm{Exp}_\bullet(\mathrm{HGC}^{nil}_{V,n}) = \mathrm{Maurer\text{–}Cartan}_\bullet((\mathrm{HGC}^{nil}_{V,n})_{ab}) \to \mathrm{Maurer\text{–}Cartan}_\bullet(\mathrm{Def}(\text{图}^Z_{V,n} \to \mathrm{WGraphs}^Z_{V,n})') = \mathrm{Map}(\text{图}^Z_{V,n}, \mathrm{WGraphs}^Z_{V,n})$$

是单纯集合的一个弱等价，因此定理 11.2 得证。

□

12. $\mathrm{HGC}_{\bar{H},n}$ 的两个较小变体：$\mathrm{GC}_{H,n}$ 和 $\mathrm{GCp}_{H,n}$

本节将介绍主微分分次李代数 $\mathrm{HGC}_{\bar{H},n}$ 的两个较小版本，它们与研究可定向流形的构形空间有关；这些流形要么是闭的，要么其边界为一个 $n-1$-球面。在这两种情形中，相应的对角元（属于 $H(M) \otimes H(M)$）或 $H(M) \otimes H(M)$ 中的约化对角元都是非退化的。这使得我们能够大幅简化相应的图复形。本节将介绍相关的代数预备知识和较小的图复形。构形空间与它们之间的联系将在下文第 13 节中阐述。

12.1. 与非退化对角类相关的 Maurer Cartan 元。仍设 V 为有限维正分次向量空间，$V_1 := Q1 \oplus V$，且 $n \geq 2$ 为一个整数。我们假设存在一个次数为 n 的非退化 $(-1)^n$-对称元素

$$\Delta \in V_1 \otimes V_1$$

称之为对角线。对称条件意味着 $\tau\Delta = (-1)^n\Delta$，其中 $\tau : V_1 \otimes V_1 \to V_1 \otimes V_1$ 是因子换位。固定一个分次基将会很方便

$\{e_0 := 1, e_1, \ldots, e_N =: \omega\}$ V_1, 的，并令 g^{ij} 为对应于对角元 Δ的矩阵，使得

$$\Delta = \sum_{i,j=0}^{N} g_{ij} e_i \otimes e_j,$$

与 $g^{ij} = (-1)^{n+|e_i||e^j|} g_{ji}$。

注意，V 上分次的正性以及非退化元 Δ 的存在，意味着 V 集中在次数 $1, \ldots, n$ 上，且在次数 n 上为一维。我们假设基元素的编号使得 $e_N = \omega$ 是次数 n 子空间 V^n 的一组基，并作归一化，使得 $g_{0N} = 1$。那么，由对称性和次数原因，

$$g_{N0} = (-1)^n \qquad g_{0j} = g_{j0} = g_{N0} = g_{0N} = 0 \quad \text{for } j = 1, \ldots, N-1.$$

令 $\{f_0, \ldots, f_N\}$ 为 V_1^* 的相应对偶基，并令 h^{ij} 为 g_{ij} 的逆矩阵。于是我们可以将 Δ 与次数 1 元素

$$Z_\Delta = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{N} g_{ij}\, e_i \frown e_j}_{=:L_\Delta} \underbrace{- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N-1} (-1)^{|f_j|} h_{ij} \begin{array}{c} f_i f_j \\ \bullet \\ | \\ \omega \end{array}}_{=:Y_\Delta} \in \mathbf{HGC}_{V,n}. \tag{65}$$

为确定符号，我们在此按图示从左到右、从上到下排列装饰，并将边定向为向右和向下。注意，因子 $(-1)^{|f_i|}$ 确保了当 n 为奇数时，尽管矩阵 h^{ij} 是反对称的，求和项 Y_Δ 仍然非平凡。

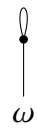
引理 12.1. 设 $V = \oplus_{j>0} V_j$ 是一个正分次有限维向量空间，满足 $V_1 = Q1 \oplus V$ 的欧拉示性数为零，即 $1 + P_j (-1)^j \dim(V_j) = 0$。设 $\Delta \in V_1 \otimes V_1$ 是一个如上所述的非退化元素。那么元素 $Z_\Delta \in HGC_{V,n}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素，即 $\delta Z_\Delta + \frac{1}{2}[Z_\Delta, Z_\Delta] = 0$。

证明。在下文中，我们将图中的所有装饰按从左到右、从上到下的顺序排列，边也同样如此。边的方向由上至下、由左至右。按照这些约定，我们首先计算

$$\delta L_\Delta = - \begin{array}{c} \\ \bullet \\ | \\ \omega \end{array} + \sum_{i=0}^{N-1} \begin{array}{ccc} & f_i & \\ & \bullet & \\ e_i & \diagup\ \diagdown & \\ & \omega & \end{array} .$$

当 $\delta Y_\Delta = 0$时。此外，

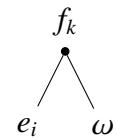
$$[L_\Delta, Y_\Delta] = -\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N-1} 2g_{ij}h_{ij}(-1)^{|e_i||e_j|+|e_j|+n}}_{=(*)}$$



$$+\sum_{i,j=1}^{N-1}(\text{const.})$$



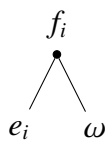
$$-\sum_{i,k=1}^{N}\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} 4g_{ij}h_{jk}(-1)^{|f_i|+n+n+|e_i||f_k|}}_{(**)}$$



$$=$$



$$-\sum_{i=1}^{N-1}$$



.

当 n 为奇数时，蝌蚪图因对称性而消失。当 n 为偶数时，其数值前因子（$*$）为

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N-1} 2g_{ij}h_{ij}(-1)^{|e_i||e_j|+|e_j|} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N-1} g_{ij}h_{ji}(-1)^{|e_j|} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=0}^{N} g_{ij}h_{ji}(-1)^{|e_j|} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^{|e_j|} = -1,$$

利用欧拉示性数条件。类似地，系数（$**$）为

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} 4g_{ij}h_{jk}(-1)^{|f_i|+n+n+|e_i||f_k|} = \delta_{ik}(-1)^{2|f_i|} = \delta_{ik}.$$

显然，我们有 $[Y_\Delta、Y_\Delta] = 0$，因为 f_N 并未作为装饰出现在 Y_Δ中。因此可知，确实有 $\delta Z_\Delta + \frac{1}{2}[Z_\Delta、Z_\Delta] = 0$。□

12.2. 微分分次李代数 $GCx_{V,\ n}$的定义。令 V、 $\Delta \in V_1 \otimes V_1$ 及 Maurer-Cartan 元素 Z_Δ 如上一小节所述。我们考虑扭曲微分分次李代数 $HGC^{Z_\Delta}{}_{V,\ n}$，特别是其中 3 个特定的微分分次李子代数。

12.2.1. 正交辛李代数。首先，定义 $gl_{V_1} = \mathcal{H}om(V_1, V_1)$ 为由线性映射 $V_1 \to V_1$ 构成的分次李代数。和之前一样，我们使用记号

$$\mathfrak{gl}'_V \cong \mathcal{H}om(V, V_1) \cong \{\phi \in \mathfrak{gl}_{V_1} \mid \phi(1) = 0\} \subset \mathfrak{gl}_{V_1}$$

是由消去特殊元素 $1 \in V_1$ 的线性映射构成的分次李子代数。我们将 $gl'_V \subset HGC_{V,\ n}$ 视为一个分次李子代数，其中包含没有顶点和边、只有从上方（由 V^*）和下方（由 V_1）带标记的毛发的图。令

$$\mathfrak{osp}_V = \{\phi \in \mathfrak{gl}'_V \mid \phi \cdot \Delta = \sum_{i,j=0}^{N} g_{ij}(\phi(e_i) \otimes e_j + (-1)^{|\phi||e_i|} e_i \otimes \phi(e_j)) = 0\} \subset \mathfrak{gl}'_V \subset HGC_{V,n}$$

为消去对角元 Δ 的态射所构成的分次李子代数。注意，osp_V 取决于 Δ 的选择，尽管记号中没有体现这一点。

引理 12.2. 在式 (65) 中定义的元素 $L_\Delta \in \mathrm{HGC}_{V,n}$ 与所有元素 $\phi \in \mathrm{osp}_V \subset \mathrm{HGC}_{V,n}$ 都可交换，

$$[\phi, L_\Delta] = 0.$$

证明。图在 L_Δ 中的装饰恰为 Δ，根据定义，它被 ϕ 湮灭。

□

我们还将定义 osp_V的两个值得注意的分次李子代数。首先，零次元素 $\mathrm{osp}_V^0 \subset \mathrm{osp}_V$ 是一个普通李代数。这个分次李代数同一个正交李代数 o(p, q) 或一个辛李代数与一般线性李代数的直和同构，因此得名。此外，对于拓扑应用，负次数部分

$$\mathfrak{osp}_V^{nil} = \{\phi \in \mathfrak{osp}_V \mid |\phi| < 0\}$$

具有重要意义。它是一个幂零分次李代数。

12.2.2. 定义若 $\mathrm{GC}_{V,\,n}$。接下来，令 $\widetilde{\mathrm{HGC}}_{V,\,n}$ 为 $\mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 的扩展版本，其中包括具有零毛的图。换言之，我们可以重复第 8.3 节和第 8.4 节中 $\mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 的定义，只是也允许不带毛的图。具体而言，作为分次向量空间，我们有

$$\widetilde{\mathbf{HGC}}_{V,n} = \mathrm{GC}_{V,n}[1] \oplus \mathbf{HGC}_{V,n},$$

其中，新的部分 $\widetilde{\mathrm{GC}}_{V,\,n}[1]$ 是由不含毛发的图张成的直和项。同样，$\widetilde{\mathrm{HGC}}_{V,\,n}$ 是一个微分分次李代数，其微分和李括号遵循与 $\mathrm{HGC}_{V,\,n}$相同的组合公式。

现在，我们将微分分解为作用于 Z_Δ-扭曲复形 $\widetilde{\mathbf{HGC}}^{Z_\Delta}{}_{\mathrm{V,n}}$

$$\delta^{Z_\Delta} = \delta + [Z_\Delta, -] = \delta_0 + \delta_1$$

分解为两部分： δ_0 一部分保持毛发数量不变或使其减少，另一部分 δ_1 增加一根毛发。

引理 12.3. 对任意 $\Gamma \in \mathrm{GC}_{V,\,n}[1] \subset \widetilde{\mathrm{HGC}}_{V,\,n}$ 有

$$\delta_1^2\Gamma = (\delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_0)\Gamma = \delta_0^2\Gamma = 0.$$

证明。我们有

$$0 = (\delta^{Z_\Delta})^2\Gamma = \delta_1^2\Gamma + (\delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_0)\Gamma + \delta_0^2\Gamma.$$

右侧的第一项是恰好含有两根毛发的图的线性组合，也是唯一包含此类图的项。同样地，注意到 δ_0 无法由带有毛发的图产生不含毛发的图。因此，$(\delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_0)\Gamma$ 是恰好含有一根毛发的图的线性组合。最后，$\delta_0^2\Gamma$ 只包含不含毛发的图。因此，这三项必须分别为零。□

由此可知，$(\mathrm{GC}_{V,\,n}, -\delta_0)$ 是一个微分分次向量空间。此外，我们可以通过以下公式在 $\mathrm{GC}_{V,\,0}$ 上定义李括号

$$[x,y]_{\mathrm{GC}} := (-1)^{|x|}[\delta_1 x, y]_{\mathbf{HGC}} = [x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}}, \tag{66}$$

其中右侧的李括号取自 $\widetilde{\mathrm{HGC}}_{V,n}$，下标对此有所说明。最右边的等式将在下一个命题中一并证明。这一构造是导出括号的一个实例，关于导出括号的一般性综述，参见 [40] 。

命题 12.4. 微分 $-\delta_0$ 和括号 $[-,-]_{\mathrm{GC}}$ 在 $\mathrm{GC}_{V,n}$上定义了一个微分分次李代数结构，使得映射

$$\delta_1 : (\mathrm{GC}_{V,n}, -\delta_0, [-,-]_{\mathrm{GC}}) \to \mathbf{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n} \tag{67}$$

是一个单射微分分次李代数态射。

证明。首先证明 (67) 是一个单射。对于 $\Gamma \in \mathrm{GC}_{V,n}$，图 $\delta_1\Gamma$ 由以下所有方式求和得到：将一根带 ω 标记的毛连接到一个顶点上，或将一个装饰 $\mathrm{a} \in \mathrm{V}^*$ 替换为一根标记为相应对偶元素 $\mathrm{b} \in \mathrm{V}_1$ 的毛，其次数为 $< \mathrm{n}$。因此，可以通过切割唯一的 ω-毛（若存在）并除以顶点数，来定义 δ_1 的一个左逆。特别地，(67) 是单射。

接下来，映射 (67) 与微分相 intertwines：

$$\delta^{Z_\Delta}(\delta_1\Gamma) = (\delta_0 + \delta_1)\delta_1\Gamma = -\delta_1\delta_0\Gamma,$$

利用引理 12.3。接下来，对于次数为 $|\mathrm{x}|$、$|\mathrm{y}|$ 的 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{GC}_{V,n}$，由 $\widetilde{\mathrm{HGC}}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 中微分与李括号的相容性可得，

$$0 = (\delta_0+\delta_1)\underbrace{[x,y]_{\mathrm{HGC}}}_{=0} = [(\delta_0+\delta_1)x, y]_{\mathrm{HGC}} + (-1)^{|x|+1}[x, (\delta_0+\delta_1)y]_{\mathrm{HGC}} = [\delta_1 x, y]_{\mathrm{HGC}} + (-1)^{|x|+1}[x, \delta_1 y]_{\mathrm{HGC}}.$$

这说明了 (66) 的最后一个等式。同理，

$$(\delta_0+\delta_1)[\mathrm{x},\ \delta_1\mathrm{y}]_{\mathrm{HGC}} = [(\delta_0+\delta_1)\mathrm{x},\ \delta_1\mathrm{y}]_{\mathrm{HGC}} + (-1)^{|x|+1}[\mathrm{x},\ (\delta_0+\delta_1)\delta_1\mathrm{y}]_{\mathrm{HGC}} = [(\delta_0+\delta_1)\mathrm{x},\ \delta_1\mathrm{y}]_{\mathrm{HGC}} + (-1)^{|x|}[\mathrm{x},\ \delta_1\delta_0\mathrm{y}]_{\mathrm{HGC}}.$$

取两边恰好含有一根毛的部分，得到

$$\delta_1[x, \delta_1 y]_{\mathrm{HGC}} = [\delta_1 x, \delta_1 y]_{\mathrm{HGC}},$$

这表明映射 (67) 保持李括号。由 (67) 的单射性可知，微分分次李代数 $\mathrm{GC}_{V,n}$ 的定义良好性（即雅可比恒等式和相容性关系）随之成立。

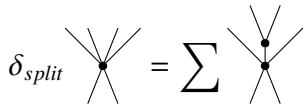
□

或者，也可以根据导出括号的标准结果推导出微分分次李代数结构的良定义性，参见例如 [40, 定理 1.1]。

我们也来说明 $\mathrm{GC}_{V,n}$ 上微分和李括号的组合形式。$\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 和 $\widetilde{\mathrm{HGC}}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 上的微分由 4 项组成

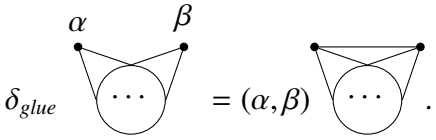
$$\delta = \delta_{split} + \delta_Y + \delta_{glue} + \delta_{join} + \delta_{hair}$$

通过将一个顶点拆分为两个

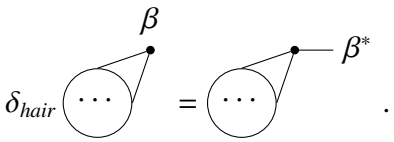


部分 $\delta_Y = -[\mathrm{Y}_\Delta$ 来自式（65）中元素 Y_Δ 的作用。

部分 δ_{glue} 根据给定的非退化配对，通过一条边将两个装饰粘合起来



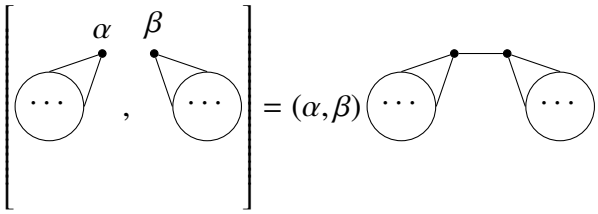
部分 δ_{join} 将多根毛发融合为一个带有一根附着毛发的顶点，这与后续讨论不太相关。最后，δ_{hair} 在一个装饰上附加一根毛发



这里 β^* 是 V_1^* 在由我们的配对给出的恒等关系 V_1^* 下的像。还应注意，隐含地，所有顶点都被视为由符号 1 装饰。

$\mathrm{GC}_{V,n}$ 上的微分由 $-\delta_{split} - \delta_{glue} - \delta_Y$ 给出，而部分 δ_{hair} 诱导了从 $\mathrm{GC}_{V,n} \to$ 到 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 的映射。

$\mathrm{GC}_{V,n}$ 上的李括号与运算 δ_{glue} 的定义类似，只是我们将其应用于两个不同的图。



12.2.3. 纳入 osp_V 以及 $\mathrm{GCx}_{V,n}$ 的定义。接下来我们将结合分次子空间 $\mathrm{osp}_V \subset \mathrm{HGC}_{V,n}$ 和 $\mathrm{GC}_{V,n} \subset \mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$，并考虑分次子空间

$$\mathrm{GCx}_{V,n} := \mathfrak{osp}_V \oplus \mathrm{GC}_{V,n} \subset \mathbf{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n}.$$

注意，这里我们采用命题 12.4 中通过 δ_1 $\mathrm{GC}_{V,n} \to \mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 的包含映射，将 $\mathrm{GC}_{V,n}$ 视为 $\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$的子空间。主要结果如下。

命题 12.5。分次子空间 $\mathrm{GCx}_{V,n} \subset \mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 关于括号和微分封闭，因此是一个微分分次李子代数。

证明中的主要计算如下。对于 $\alpha \in \mathrm{V}^*$，我们定义图

$$X_\alpha := \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j h_{ij} \overset{\alpha f_i f_j}{\bullet} \in \mathrm{GC}_{V,n},$$

其中 (h_{ij}) 是配对矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵。特别地，对于 $\phi \in \mathrm{osp}_V$，我们关注元素

$$X_\phi := X_{\phi^*(f_0)}.$$

于是有：

引理 12.6. $\phi \in \mathrm{osp}_V \subset \mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,\,n}$ 的微分为

$$\delta^{Z_\Delta}\phi = \delta_1 X_\phi.$$

证明。这是一个有些繁琐的计算，我们留给读者完成。 □

命题 12.5 的证明。我们已在命题 12.4 中看到，$\mathrm{GC}_{V,\,n} \subset \mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,\,n}$ 是一个微分分次李子代数，并且知道 $\mathrm{osp}_V \subset \mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,\,n}$ 是一个分次李子代数。由引理 12.6 可知，osp_V 中元素的微分包含于 $\mathrm{GC}_{V,\,n}$中，因此 $\mathrm{GCx}_{V,\,n}$ 在微分下闭合。

仍需验证任意 $\phi \in \mathrm{osp}_V$ 与 $\Gamma \in \mathrm{GC}_{V,\,n}$ 的李括号都包含于$\widetilde{}\mathrm{GC}_{V,\,n}$。具体而言，设 $\Gamma = \delta_1\gamma$ 属于 $\gamma \in \mathrm{GC}_{V,\,n}[1] \subset \mathrm{HGC}_{V,\,n}$。由引理 12.2 可知$[\phi, L_\Delta] = 0$，因此

$$[\phi, [L_\Delta, \gamma]] = (-1)^{|\phi|}[L_\Delta, [\phi, \gamma]].$$

取等式两边恰好含一个毛的部分，得到

$$[\phi, \delta_1\gamma] = (-1)^{|\phi|}\delta_1[\phi, \gamma]$$

左侧是 ϕ 与 Γ的括号。由于 $[\phi, \gamma] \in \mathrm{GC}_{V,\,n}[1] \subset \widetilde{}\mathrm{HGC}_{V,\,n}$，右侧属于 $\mathrm{GC}_{V,\,n} \subset \mathrm{HGC}_{V,\,n}$。

□

ϕ 对 Γ 的作用是“显然的”作用：让对偶态射 ϕ^* 作用于图中的所有装饰，并在顶点上添加装饰 $\phi^*(\mathrm{f}_0)$。

微分分次李代数 $\mathrm{GCx}_{V,\,n}$ 的一个缺陷是它不是（前）幂零的，因为 osp_V 不是。然而，对于许多应用而言，只需考虑稍小一些但前幂零的微分分次李子代数

$$\mathrm{GC}^{ex}_{V,n} = \mathfrak{osp}^{nil}_V \oplus \mathrm{GC}_{V,n} \subset \mathrm{GCx}_{V,n}, \tag{68}$$

通过限制到负次数李子代数 $\mathrm{osp}^{nil}{}_V = (\mathrm{osp}_V)_{<0} \subset \mathrm{osp}_V$ 得到。（上面的直和指的是分次向量空间意义下的直和，而不是微分分次李代数意义下的直和。）

12.3. $\mathrm{GCx}_{V,n}$ 和 $\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 的上同调。最后，我们想比较我们的微分分次李代数 $\mathrm{GCx}_{V,n}$ 和 $\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 的上同调。为此，我们先描述 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 中的若干元素。对于$\alpha,\beta \in \mathrm{V}_1$，有如下元素

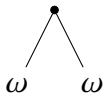
$$L_{\alpha\beta} = \alpha \text{ —— } \beta \in \mathbf{HGC}_{V,n}, \tag{69}$$

即，由 α 和 β 装饰的两根毛发通过一条边连接而成。我们尤其需要元素 $\mathrm{L}_{\omega\omega}$，其两个装饰都由最高次数基元素 $\omega \in \mathrm{V}$ 给出。然后我们计算（参见（65））得到

$$\delta L_{\omega\omega} = [L_\Delta, L_{\omega\omega}] = 0$$

and

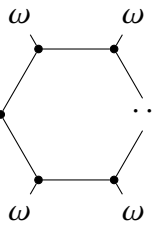
$$[Y_\Delta, L_{\omega\omega}] = \pm \quad = 0$$



由对称性可知。因此有 $\delta\mathrm{L}_{\omega\omega} + [\mathrm{Z}_\Delta, \mathrm{L}_{\omega\omega}] = 0$，从而 $\mathrm{L}_{\omega\omega}$ 是 $\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,\ n}$ 中上同调次数为 $\mathrm{n}+1$ 的余循环。

接下来，我们考虑具有 $\mathrm{k} = 1$、2、.....个顶点和 k 根毛发的刺猬图

$$H_k = \omega \quad \cdots \quad \in \mathrm{HGC}_{V,n}.$$



注意，当 k 和 n 同为偶数或同为奇数时，由对称性可得 $\mathrm{H}_k = 0$。容易验证

$$\delta H_k = [L_\Delta, H_k] = [Y_\Delta, H_k] = 0,$$

因此，H_k 也是 $\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,\ n}$ 中次数为 2k 的余循环。

命题 12.7。包含映射

$$\mathrm{GCx}_{V,n} \oplus \mathbb{Q}L_{\omega\omega} \oplus \bigoplus_{\substack{k\geq 1 \\ k\equiv n+1 \bmod 2}} \mathbb{Q}H_k \to \mathbf{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n} \tag{70}$$

是微分分次向量空间之间的拟同构。此外，它在按照顶点数定义的滤过下，已经在伴随分次复形上诱导出拟同构。

证明。首先注意，该映射确实是微分分次向量空间之间的映射，因为 $\mathrm{L}_{\omega\omega}$ 和 H_k 都是余循环。只需证明关于伴随分次空间的结论——该映射是拟同构这一事实随后可由标准的谱序列论证得出。

留给读者验证，$\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,\ n}$ 的零顶点分次分量的上同调恰为 $\mathrm{QL}_{\omega\omega} \oplus \mathrm{osp}^{nil}_V$。

接着，我们考察具有 $k \geq 1$ 个顶点的关联分次片。注意，包含映射 $\mathrm{GC}_{V,n} \to \mathrm{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n}$ 的映射锥可识别为扩展复形 $\widetilde{\mathrm{HGC}}^{Z_\Delta}_{V,n}$。因此，我们只需等价地证明 $\mathrm{gr}^k_{vert}\widetilde{\mathrm{HGC}}^{Z_\Delta}_{V,n}$ 的上同调由 H_k 张成。注意，关联分次上的微分包含两部分：δ_{glue} 在装饰之间添加一条边，以及 δ_{hair} 在一个装饰处添加一根毛发。为计算上同调，我们考虑按内部（即非毛发）边的数量定义的有界滤过所对应的谱序列。在关联（边）分次上，只有微分的 δ_{hair} 部分保留下来。容易看出，所得复形是 k 个复形的张量积 $N_j V^{\otimes k_j}$ 的直和项，每个顶点对应一个复形。具体而言，V_j 由可附着到顶点 j 的可能装饰和毛发张成。假设顶点 j 有 r_j 条相邻的非毛发边。那么，容易计算出 V_j 的上同调，结果为

$$H(V_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } e_j \neq 2 \\ \mathbb{Q}[-1] & \text{if } r_j = 2 \end{cases}$$

$e_j = 2$ 的剩余上同调由顶点 j 处一个以 ω 为标记的毛张成。但这样一来，对于所有 j，带有 $e_j = 2$ 的唯一可能的图就是刺猬图 H_j。由于它们是闭的，内层谱序列在此处终止，我们也就完成了该命题的证明。□

我们注意到，等式 (70) 左侧的微分分次向量子空间 $\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n}$ 在李括号下并不闭合。不过，至少较小的微分分次向量子空间

$$\mathbb{Q}H_1 \oplus \mathrm{GC}_{V,n} \subset \mathbf{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n},$$

在李括号下是闭合的，因此构成一个微分分次李子代数。这里 H_1 是刺猬余循环中最小的一个，

$$H_1 = \omega .$$

元素 H_1 的次数为 2，并且当 n 为奇数时 $H_1 = 0$ 由对称性得到。令 $\mathcal{F}^\bullet_{vert}$ 表示 $\mathrm{HGC}^{Z_0}_{V,n}$ 上按顶点数定义的下降完备滤过，使得 $\mathcal{F}_{p\ vert}\mathrm{HGC}^{Z_0}_{V,n}$ 由具有 $\geq p$ 个顶点的图张成。

推论 12.8. 微分分次李代数的包含映射

$$\mathrm{GC}'_{V,n} := \underbrace{\mathbb{Q}H_1}_{=0 \text{ for } n \text{ odd}} \oplus \mathrm{GC}_{V,n} \subset \mathcal{F}^1_{vert}\mathbf{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n}$$

在关联分次李代数上诱导出次数为 ≤ 2 的拟同构，其中滤过取为顶点滤过。此外，诱导的映射

$$\mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{GC}_{V,n}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{GC}'_{V,n}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathcal{F}^1_{vert}\mathbf{HGC}^{Z_\Delta}_{V,n}) \tag{71}$$

是弱等价。

证明。拟同构的断言可由命题 12.7 立即得出，因为 (70) 左侧所有不属于 $GC'_{V,\,n}$ 的类，要么次数为 ≥ 3，要么没有顶点。

因此，(71) 中的第二个弱等价是 Goldman-Millson 定理的直接推论，见 [16]。注意，先验地，[16] 中陈述的定理要求该态射在所有次数上都诱导伴随分次复形之间的拟同构。然而，次数为 ≥ 3 的元素在证明中从未出现，因此可以放宽这一条件。

最后，需要验证 $MC_\bullet(GC_{V,n}) \to MC_\bullet(GC'_{V,n})$ 是一个弱等价。这也可以通过相对于 [16] 条件略微放宽的 Goldman-Millson 定理的一个版本来处理。不过，在我们的情形中，最简单的做法是注意到，实际上 $MC_\bullet(GC_{V,n}) = MC_\bullet(GC'_{V,n})$，因为附加类 H_1 不会出现在李括号或微分中，也不会在 Maurer-Cartan 空间的定义中发挥其他作用。□

12.4. 非退化约化对角类与微分分次李代数 $GCp_{H,n}$。接下来我们假设给定了一个次数为 n 的非退化（−1）^{n}-对称“对角”元素

$$\bar{\Delta} \in V \otimes V.$$

我们再次选取 V 的分次基 $e_1, \ldots, e_N$，并定义矩阵 g^{ij}，使得

$$\bar{\Delta} = \sum_{j=1}^{N} g_{ij} e_i \otimes e_j \in V \otimes V,$$

其中 $g_{ji} = (-1)^{n+|e_i||e^j|} g_{ij}$。注意，与前面的小节不同，现在 V 必须集中在次数 $1, \ldots, n-1$。我们用 Δ 构造 1 次元素

$$Z_{\bar{\Delta}} = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij}\ e_i \frown e_j \ \in \mathbf{HGC}_{V,n} \tag{72}$$

引理 12.9. 元素 $Z_{\bar{\Delta}} \in HGC_{V,n}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。

证明. 显然 $\delta Z_{\bar{\Delta}} = [Z_{\bar{\Delta}}, Z_{\bar{\Delta}}] = 0$。 □

与前面的小节一样，我们再次考虑这个扩张微分分次李代数，其底层分次向量空间为

$$\widetilde{\mathbf{HGC}}_{V,n} = GC_{V,n}[1] \oplus \mathbf{HGC}_{V,n},$$

其中 $GC_{V,n}[1]$ 仍是由无毛发图张成的直和项。我们将 微分解为扭曲复形 $Z_{\bar{\Delta}}$-扭曲复形 $\widetilde{\mathbf{HGC}}^{Z_{\bar{\Delta}}}$ V,n 上的微分

$$\delta^{Z_{\bar{\Delta}}} = \delta + [Z_{\bar{\Delta}}, -] = \delta_0 + \delta_1$$

分成一部分 δ_0，它保持毛发数量不变或使其减少；以及一部分 δ_1，它增加一根毛发。于是我们得到微分分次向量空间 $(GC_{V,\,n}, -\delta_0)$，以及微分分次向量空间之间的映射

$$\delta_1 : (GC_{V,n}, -\delta_0) \to HGC_{V,n}^{Z_{\bar{\Delta}}}.$$

同样，我们可以通过以下公式在 $\mathrm{GC}_{V,\,0}$ 上定义李括号

$$[x,y]_{\mathrm{GC}} := (-1)^{|x|}[\delta_1 x, y]_{\mathbf{HGC}} = [x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}},$$

其中右侧的李括号取自 $\widetilde{\mathrm{HGC}}_{V,n}$。

命题 12.10. 微分 δ_0 和括号 $[-,-]_{\mathrm{GC}}$ 在 $\mathrm{GC}_{V,n}$上定义了微分分次李代数结构，使得映射 δ_1 是一个微分分次李代数态射。核 $\mathrm{I} := \ker \delta_1 \subset \mathrm{GC}_{V,n}$ 由不含毛发且在 V^*中没有装饰的图生成。

证明。证明过程与上文命题 12.4 的证明基本平行，因此我们从简。首先，核的描述可由命题 12.4 中单射性的证明推出。此外，与上文一样，方程 $(\delta^{Z_\Delta})^2 = 0$ 以及 $\widetilde{\mathrm{HGC}}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$ 上微分与括号的相容性，给出 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{GC}_{V,n}$满足的以下恒等式：

$$\begin{aligned}
\delta_0^2 x = \delta_1^2 x = (\delta_1\delta_0 + \delta_0\delta_1)x = 0 \\
[\delta_1 x, y]_{\mathbf{HGC}} = (-1)^{|x|}[x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}} \\
\delta_1[x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}} = [\delta_1 x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}}.
\end{aligned}$$

由此立即可知，映射 δ_1 保持李括号和微分。然而，由于 δ_1 不是单射，我们无法直接从 $\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$上的微分分次李代数结构推出 $\mathrm{GC}_{V,n}$ 上的微分分次李代数结构是良定义的。相反，我们手动验证所需的恒等式。首先，对于 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{GC}_{V,n}$ 中次数为 $|\mathrm{x}|, |\mathrm{y}|$ 的元素，我们有

$$[x,y]_{\mathrm{GC}} = [x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}} = (-1)^{(|x|+1)|y|}[\delta_1 y, x]_{\mathbf{HGC}} = (-1)^{|x||y|}[y,x]_{\mathrm{GC}}.$$

因此，李括号具有正确的反对称性。雅可比恒等式如下所示，$\widetilde{\ }$利用 $\mathrm{HGC}_{V,\,n}$上的雅可比恒等式：

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]_{\mathrm{GC}}]_{\mathrm{GC}} &= [x, \delta_1[y, \delta_1 z]_{\mathbf{HGC}}]_{\mathbf{HGC}} = [x, [\delta_1 y, \delta_1 z]_{\mathbf{HGC}}]_{\mathbf{HGC}} \\
&= [[x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}}, \delta_1 z]_{\mathbf{HGC}} + (-1)^{(|x|+1)|y|}[\delta_1 y, [x, \delta_1 z]_{\mathbf{HGC}}]_{\mathbf{HGC}} \\
&= [[x,y]_{\mathrm{GC}}, z]_{\mathrm{GC}} + (-1)^{|x||y|}[y, [x,z]_{\mathrm{GC}}]_{\mathrm{GC}}.
\end{aligned}$$

微分与李括号的相容性如下：

$$\begin{aligned}
\delta_0[x,y]_{\mathrm{GC}} &= (\delta - \delta_1)[x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}} = [\delta_0 x, \delta_1 y]_{\mathbf{HGC}} + (-1)^{|x|+1}[x, \delta_0\delta_1 y]_{\mathbf{HGC}} \\
&= [\delta_0 x, y]_{\mathrm{GC}} + (-1)^{|x|}[x, \delta_1\delta_0 y]_{\mathbf{HGC}} = [\delta_0 x, y]_{\mathrm{GC}} + (-1)^{|x|}[x, \delta_0 y]_{\mathrm{GC}}
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\delta_0 = \delta - \delta_1$ 对李括号满足分配律，因为这对 δ 和δ_1都成立。□

注意，微分分次李代数态射 δ_1 通过商微分分次李代数进行分解

$$\mathrm{GCp}_{V,n} := \mathrm{GC}_{V,n} / \ker \delta_1,$$

以及由此得到的微分分次李代数态射

$$\delta_1 : \mathrm{GCp}_{V,n} \to \mathbf{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}_{V,n}$$

是一个单射。

接下来，我们定义分次李子代数 $\mathrm{osp}_V \subset \mathrm{HGC}_{V,\,n}$ 如前几小节所述，即

$$\mathfrak{osp}_V = \{\phi \in \mathfrak{gl}'(V_1) \mid \phi \cdot \bar{\Delta} = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij}(\phi(e_i) \otimes e_j + (-1)^{|\phi\|e_i|} e_i \otimes \phi(e_j)) = 0\} \subset \mathfrak{gl}'(V_1) \subset \mathbf{HGC}_{V,n}\,.$$

于是我们得到命题 12.5 的如下变体。

命题 12.11。包含映射 $\iota :\ \mathrm{osp}_V \to \mathrm{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}{}_{V,\,n}$ 是一个微分分次李代数态射，即每个元素 $\phi \in \mathrm{osp}_V$ 都是一个余循环，$\delta^{Z_{\bar{\Delta}}}\phi = 0$。此外，单射

$$i : \mathfrak{osp}_V \oplus \mathrm{GCp}_{V,n} \xrightarrow{\iota\oplus\delta_1} \mathbf{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}_{V,n}$$

的像是一个微分分次李子代数。

特别地，这赋予

$$\mathrm{GCpx}_{V,n} := \mathfrak{osp}_V \oplus \mathrm{GCp}_{V,n}$$

具有微分分次李代数结构，扩展了 osp_V 和 $\mathrm{GCp}_{V,\,n}$ 上的结构。该微分分次李代数恰为 osp_V 和 $\mathrm{GCp}_{V,\,n}$ 的半直积，其中利用 osp_V 在 $\mathrm{GCp}_{V,\,n}$ 上的自然作用，该作用通过变换顶点上的 V^*-装饰给出。

命题 12.11 的证明。首先注意到，对于所有 $\phi \in \mathrm{osp}_V$，都有 $[\mathrm{Z}_{\bar{\Delta}}, \phi] = 0$，因为 ϕ 消去了出现在 $\mathrm{Z}_{\bar{\Delta}}$ 中毛发装饰里的对角线。因此，每个这样的 ϕ 在微分下都是闭的。因此，对于 $\mathrm{x} \in \mathrm{GC}_{V,\,n}$，我们有

$$\delta[\phi, x] = (-1)^{|\phi|}[\phi, \delta x].$$

投影到由恰有一根毛发的图生成的子空间上，我们得到

$$\delta_1[\phi, \delta x] = (-1)^{|\phi|}[\phi, \delta_1 x].$$

特别地，这意味着 $\mathrm{GCpx}_{V,\,n}$，作为 $\mathrm{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}{}_{V,\,n}$ 的一个分次子空间，在括号下也是闭的。□

最后，我们可以类似于命题 12.7，对微分分次李代数的上同调进行比较。

命题 12.12。包含映射

$$i : \mathrm{GCpx}_{V,n} \to \mathbf{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}_{V,n}$$

是微分分次向量空间之间的拟同构。映射锥 i 上由顶点数滤过所关联的谱序列具有平凡的 E^2 页。此外，对于 $\mathrm{n} \geq 3$，Maurer-Cartan 空间的连通分支所诱导的映射

$$\pi_0\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{GCp}_{V,n}) \to \pi_0\mathsf{MC}_\bullet(\mathcal{F}^1_{vert}\mathbf{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}_{V,n}) \tag{73}$$

是一个双射。

证明。我们按照命题 12.7 的证明进行。只需证明关于映射锥上的谱序列的陈述即可；这意味着该锥是无挠的，从而 d_1 确实是一个拟同构。

在谱序列的 E^0 页上，我们需要计算所有顶点数 k 对应的 $\mathrm{H}(\mathrm{gr}^k_{vert}\mathrm{cone(i)})$。当 $\mathrm{k}=0$ 时，复形 $\mathrm{gr}^0_{vert}\mathrm{cone(i)}$ 具有如下形式

$$\mathfrak{osp}_V \to \mathfrak{gl}'_V \to \mathrm{span}\{L_{\alpha\beta} \mid \alpha,\beta \in V_1\} \cong (V_1 \otimes V_1 \otimes \mathrm{sgn}_2^n)_{S_2},$$

其中 $\mathrm{L}_{\alpha\beta}$ 是元素 (69)。根据定义，osp_V 是右侧箭头的核，因此上述序列在第一项和第二项处恰当。容易看出，右侧映射的余核是 $\mathrm{QL}_{e_0e_0}$，，因此

$$H(\mathrm{gr}^0_{vert}\mathrm{cone}(i)) \cong \mathbb{Q}L_{e_0e_0}.$$

对于 $\mathrm{k} \geq 1$，我们有

$$\mathrm{gr}^k_{vert}\mathrm{cone}(i) \cong (\mathrm{gr}^k_{vert}\widetilde{\mathbf{HGC}}^{Z_{\tilde{\Delta}}}_{V,n}/I, \delta_{glue}+\delta_{hair})$$

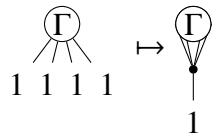
其中 I 由没有毛发且没有装饰的图张成。注意，此处的部分 δ_{hair} 只是在 V-装饰的位置添加一根毛发，并且只添加带有 V^* 装饰的毛发；但它不会像命题 12.7 的证明中微分的相应部分那样，将毛发附着到未装饰顶点上。将其拆分是很方便的

$$(\widetilde{\mathbf{HGC}}^{Z_{\tilde{\Delta}}}_{V,n}/I, \delta_{glue}+\delta_{hair}) \cong U_0 \oplus U_{\geq 1},$$

其中 U_0 是由顶点上没有 V-装饰且所有毛发都带有 $\mathrm{e}_0 = 1$ 装饰的图生成的子复形，而 $\mathrm{U}_{\geq 1}$ 是由所有其他图生成的子复形。特别地，微分 $\delta_{glue}+\delta_{hair}$ 在 U_0 上为零。用命题 12.7 证明中的同样论证可知，对于 $\mathrm{k} \geq 1$，$\mathrm{H}(\mathrm{gr}^k_{vert}\mathrm{U}_{\geq 1}, \delta_{glue}+\delta_{hair}) = 0$。因此，我们的谱序列的 E^1 页可识别为

$$(U_0 \oplus \mathbb{Q}L_{e_0e_0}, \delta_{split}+\delta_{join}).$$

在 [37, 命题 1] 中证明了这个复形是无挠的，因此命题的前两个陈述得以证明。为了完整起见，我们快速回顾一下 [37] 中说明这一无挠性的理由。特别是，运算 δ_{join} 有一项会将图中的所有毛发连接在一起：



对于这一部分，可以构造一个同伦，从而证明其无挠性，详情见 [37]。

最后，我们讨论关于 Maurer-Cartan 空间的陈述。我们希望使用 Goldman-Millson 定理的一个版本。然而，由于我们的谱序列仅在 E^2页收敛，而不是标准版本 [16, 定理 1.1], 所要求的 E^1页，因此我们必须对论证稍作调整。首先注意到，由于条件 $\mathrm{n} \geq 3$，我们的谱序列的 E^1 页

集中在次数 ≤ -1上。事实上，$\mathrm{HGC}_{V\text{中}n}$ 一个具有 v 个顶点、$\mathrm{h} \geq 1$个毛发（均由 $\mathrm{e}_0 = 1$ 装饰）和 e 条边的图的次数为

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= nv - (n-1)e \\ &\leq -\frac{1}{2}(n-3)v - \frac{1}{2}(n-1)h \leq -1, \end{aligned}$$

因为由三价性可知 $\mathrm{e} \geq \frac{3}{2}\mathrm{v} + \frac{1}{2}\mathrm{h}$ 和 $\mathrm{n} \geq 3$。因此，包含映射 $\mathrm{GCp}_{V,n} \to \mathcal{F}^1{}_{vert}\mathrm{HGC}^{Z_\Delta}{}_{V,n}$在次数 ≥ 0 上诱导伴随分次复形的拟同构。考察 [16, 节中 Goldman-Millson 定理π_0部分的证明，我们看到它只要求在次数 0、1、2 上具有拟同构性质。因此，这里仍然适用，并给出双射 (73)。□

为后续使用，我们再次定义一个前幂零变体，参见 (68),

$$\mathrm{GCp}^{ex}_{V,n} = \mathfrak{vsp}^{nil}_V \oplus \mathrm{GCp}_{V,n} \subset \mathrm{GCpx}_{V,n}. \tag{74}$$

13. 应用

在前几节中，我们一般性地研究了构形空间型的抽象 Λ Hopf e^c_n-余模。本节将运用上述代数结果，为流形上的点构形空间构造模型。我们还将讨论自同构群。

13.1. 一般流形构形空间的有理同伦型。设 M 是一个维数为 $\mathrm{n} \geq 2$ 的平行化连通流形。于是，根据命题 4.3，点的紧化构形空间 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 构成一个具有构形空间型的 $\mathcal{F}_n$ 模。此外，根据推论 4.10，微分形式 $\Omega^\sharp(\mathcal{F}_{\mathbf{M}})$ 是一个具有构形空间型的右 Λ Hopf $\Omega^\sharp(\mathcal{F}_n)$-余模。现在，我们利用小圆盘运算子的有理形式性，通过一条拟同构之字形链，将 $\Omega^\sharp(\mathcal{F}_n)$ 与其上同调 e^c_n 联系起来。

$$\Omega_\sharp(\mathcal{F}_n) \to \bullet \leftarrow \mathsf{e}^c_n.$$

我们可以利用命题 3.13 中这些余合作子上的余模范畴的 Quillen 等价，将我们的之字形链扩展为一条由 Λ Hopf 余拟序列及其余模构成的有序对之间的拟同构之字形链

$$(\Omega_\sharp(\mathcal{F}_n), \Omega_\sharp(\mathcal{F}_{\mathbf{M}})) \to \bullet \leftarrow (\mathsf{e}^c_n, M),$$

其中 M 是某个与 $\Omega^\sharp(\mathcal{F}_{\mathbf{M}})$ 拟同构的 Λ Hopf e^c_n 余模。

由引理 4.9 可知，右侧对象 M 仍属于构形空间型。因此，根据我们的主要定理 10.1，存在一个 Maurer-Cartan 元素 $Z \in \mathcal{G}^1\mathrm{HGC}_{\bar{H},\,n}$ 以及一个 Λ Hopf We^c_n-余模的拟同构

$$\mathsf{Graphs}^Z_{\bar{H},n} \to W\,M \leftarrow M,$$

其中 $\bar{\mathrm{H}} = \bar{\mathrm{H}}(\mathrm{M})$ 是 M 的约化上同调。因此我们证明了：

推论 13.1. 设 M 是一个 $n \geq 2$ 维的连通平行化流形，其约化有理上同调 $H = H(M)$ 有限维。那么存在一个 Maurer-Cartan 元素 $Z \in \mathcal{G}^1 HGC_{\bar{H}}$，使得 图$^{Z}_{\bar{H},n}$ 是 $\mathcal{F}_M$ 的一个模型。具体来说，这意味着存在一条由 Hopf 余拟序列及其 Λ-Hopf 余模组成的对象对之间的拟同构之字形链

$$(e^c_n, \mathsf{Graphs}^{Z}_{\bar{H},n}) \to \bullet \leftarrow (\Omega_\sharp(\mathcal{F}_n), \Omega_\sharp(\mathcal{F}_M)).$$

实际上，通常很难确定推论中出现的正确 Maurer-Cartan 元素 Z。不过，对于若干特殊情形，这是可以做到的，接下来我们将对此进行讨论。

13.2. 特殊情形 1：高度连通流形。最简单的情形是高度连通流形。

引理 13.2. 设 $n \geq 3$，V 是有限维正分次向量空间，且其次数为 k 的部分 V^k 对于 $k < \frac{1}{3} n$ 或 $k > \frac{2}{3}n - 1$ 均为零。那么，任何至少含有一个顶点的图 $\Gamma \in HGC_{V,n}$ 的次数为 $|\Gamma| \leq 0$。

证明. 设 $\Gamma \in HGC_{V,n}$ 是一幅图，其中有 e 条边、$v \geq 1$ 个顶点、u 个 V^* 中的装饰，以及 h 根带有 V_1 装饰的毛发。该图的总次数为

$$|\Gamma| = nv - (n-1)e + d + D \tag{75}$$

其中 $d \leq 0$ 是 V^* 中装饰的总次数，$D \geq 0$ 是 V_1 中（位于毛发上的）装饰的总次数。根据三价条件，我们有 $3v + h \leq 2e + u$，或者等价地，$v \leq \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}h$。将其代入 (75)，并结合 V 上的次数界，我们得到

$$\begin{aligned} |\Gamma| &\leq (\frac{2}{3}n - n + 1)e + \frac{n}{3}u - \frac{n}{3}h - \frac{n}{3}u + (\frac{2}{3}n - 1)h \\ &\leq -3(n-3)(e-h). \end{aligned}$$

但由于每根毛都必须连接到一条边上，因此 $e \geq h$；又由于 $n \geq 3$，我们有 $|\Gamma| \leq 0$，如所需。□

推论 13.3. 设 $n \geq 3$，且 M 是一个平行化连通 n 维流形，其上同调为有限维，并满足

$$\bar{H}^k := \bar{H}^k(\mathbf{M}) = 0 \quad for\, k < \frac{n}{3}\, or\, k > \frac{n}{3} - 1.$$

令 $\Delta \in H \otimes H$ 为对角元。那么，推论 13.1 中的 Maurer-Cartan 元素 $Z \in HGC_{\bar{H},n}$ 为 $Z = Z_{\bar{\Delta}}$，见式 (72)。

注意，对角元例如可以按照例 5.9 的方法确定，而且通常是已知的或容易得到的。

证明。我们知道，$Z = Z_{\bar{\Delta}} + Z_1, \text{with } Z_1 \in HGC_{\bar{H},n}$ 项中含有 ≥ 1 顶点，见推论 8.12。但根据引理 13.2，不存在次数为 1 且可能对 Z_1, 有贡献的图，因此也不会对 $Z_1 = 0$有贡献。□

13.3. 特例 2：闭流形。现在设 M 是一个闭的连通平行化流形。这意味着 M 具有庞加莱对偶性，并且对角元 $\Delta \in H(M) \otimes H(M)$ 是非退化的。因此，根据推论 12.8，我们得到：

推论 13.4. 设 M 是一个闭的连通平行化流形，其约化上同调 $\bar{H} = H(M)$，且对角线 $\Delta \in H_1 \otimes H_1$。那么，推论 13.1 中的 Maurer-Cartan 元素 Z 可以取为以下形式：$Z = Z_\Delta + Z_1$，其中 $Z_1 \in \text{Maurer–Cartan}(GC_{\bar{H},n}) \subset \text{Maurer–Cartan}(HGC^{Z_\Delta}_{\bar{H},n})$[7]，且 Z_Δ 如 (65) 所示。

如果对上同调施加适当的次数界，Maurer-Cartan 元素 Z 还可以进一步加以限制。

引理 13.5. 设 V 集中于次数 ≥ 2。令 $\gamma \in GC_{V,n}$ 为一个环阶为 g、带有 D 个 V 中的装饰的图*。那么，γ 的上同调次数满足

$$|\gamma| \leq -(n-3)(g-1) - D + 1.$$

特别地，若 $n \geq 4$ 且 $g \geq 1$，则

$$|\gamma| \leq 0.$$

证明。设 $\gamma \in GC_{V,n}$ 是一张有 v 个顶点、环阶为 g、含 e 条边、$v = e - g + 1$ 个顶点以及 D 个 V 中的装饰的图。那么，三价条件意味着

$$3v = 3(e - g + 1) \leq 2e + D \Leftrightarrow e + 3 \leq D + 3g.$$

此外，装饰的（负）次数为 $\leq -2D$，因为根据假设，V 集中在次数 ≥ 2。因此，γ 的上同调次数为

$$|\gamma| = nv - (n-1)e + (\text{decoration degree}) + 1 \leq e - ng + n - 2D + 1 \leq -(n-3)(g-1) - D + 1.$$

当 $g \geq 2$ 时，第二个不等式显然成立。当 $g = 1$ 时，该图必须至少有一个装饰才能满足三价条件，因此 $D \geq 1$。□

推论 13.6。在推论 13.4 的设定下，若 M 的维数 n 至少为 4 且 $H^1(M) = 0$，则 Maurer-Cartan 元素 $Z_1 \in GC_{\bar{H},n}$ 仅为树图的（可能是无穷）线性组合。

证明。根据前一个引理，$GC_{\bar{H},n}$ 中次数为 $+1$ 的图只有树图。 □

请注意，推论的树部分 Z_1 通常相对容易确定。具体来说，如第 8.11 节所述，Maurer-Cartan 元素 $Z \in HGC_{V,n}$ 的树部分决定了微分分次交换代数 $\text{Graphs}^Z_{n,V}(1)$ 的同伦类型。但这必须与 M 的有理同伦型相同。此外，可以看出，这一条件已经能唯一确定 Z_1，模去规范等价和缩放意义下。我们不再进一步阐述这一点，而是请读者参阅 [12, 第 8] 节和 [33], ，其中证明了由 Z_1编码的循环有理同伦类型由有理同伦型决定。

[7]这里我们将 $GC_{\bar{H},n}$ 视为 $HGC^{Z_\Delta}_{\bar{H}}$ 的微分分次李子代数 $_{n}$，通过命题 12.4 中的嵌入 δ_1。

13.4. 特例 3：具有球面边界的流形。我们考虑的最后一种情形是可平行化的流形 M，它们由可定向（但可能不可平行化）的闭流形去掉一个圆盘得到。这些流形不满足庞加莱对偶性。不过，由于闭流形上的庞加莱对偶性，约化对角元

$$\bar{\Delta} \in \bar{H} \otimes \bar{H},$$

且 $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{M})$ 仍然是非退化的。

推论 13.7. 设 M 是从一个维数为 $\mathrm{n} \geq 3$ 的闭连通流形中移去一个圆盘后得到的可平行化流形。设 $\Delta \in \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}$ 是非退化的约化对角元。那么推论 13.1 中的 Maurer-Cartan 元素 Z 可以取为 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{\bar{\Delta}} + \mathrm{Z}_1$，其中 $\mathrm{Z}_1 \in \mathrm{GCp}_{\bar{H},n}$，且 $\mathrm{Z}_{\bar{\Delta}}$ 如式 (72) 所示。

如果还满足 $\mathrm{H}^1(\mathrm{M}) = 0$，那么 Z_1 仅是树图的（可能无限）线性组合。

证明. 设 Z 是推论 13.1 给出的 Maurer-Cartan 元素。那么我们有

$$X := Z - Z_{\bar{\Delta}} \in \mathcal{F}^1_{vert}\mathbf{HGC}_{\bar{H},n}$$

是 $\mathcal{F}^1_{vert}\mathrm{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}_{\bar{H},n}$ 中的一个 Maurer-Cartan 元素。这是因为 Z 由边数为正的图组成，而边数为正且没有顶点的图只有线图。但通过减去 $\mathrm{Z}_{\bar{\Delta}}$，这些线图已被计入。接下来，根据命题 12.12 的第二部分，我们知道包含映射

$$\mathrm{GCp}_{\bar{H},n} \to \mathcal{F}^1_{vert}\mathbf{HGC}^{Z_{\bar{\Delta}}}_{\bar{H},n} \tag{76}$$

在相关 Maurer-Cartan 空间的 π_0 上诱导一个双射。因此，Maurer-Cartan 元素 X 与某个 Maurer-Cartan 元素 $\mathrm{Z}_1 \in \mathrm{GCp}_{V,n}$ 规范等价。

关于推论的最后一条陈述，请注意，$\mathrm{GCp}_{\bar{H},n}$ 是 $\mathrm{GC}_{\bar{H},n}$ 的一个商，因此引理 13.5 显然也适用于 $\mathrm{GCp}_{\bar{H},n}$。我们甚至有 $\mathrm{D} \geq 1$（如引理中所述），因为 $\mathrm{GCp}_{\bar{H},n}$ 中的图都至少有一个装饰。因此，引理指出，如果 $\mathrm{H}^1(\mathrm{M}) = 0$，那么 $\mathrm{GCp}_{\bar{H},n}$ 中不存在次数为 1 且具有正亏格的图。□

13.5. 有理化构形空间的自同构。如果我们已经确定了正确的 Maurer-Cartan 元素 $\mathrm{Z} \in \mathrm{HGC}_{\bar{H},n}$，它描述了如推论 13.1 中所述的右 $\mathcal{F}_n\Lambda$ 模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 的有理同伦型，那么我们可以应用定理 11.2 来计算 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 的有理化的同伦自同构。在对角元非退化的情况下，通过转向第 12 节的较小图复形，可以简化答案。本小节将列出相关结果。

推论 13.8。设 n 为一个整数，V 为有限维正分次向量空间。设 $\Delta \in \mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_1$ 是一个次数为 n 的非退化且 $(-1)^n$-对称元素。设 $\mathrm{Z}_1 \in \mathrm{GC}_{V,n}$ 为一个 Maurer-Cartan 元素，即 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_\Delta + \mathrm{Z}_1 \in \mathrm{HGC}_{V,n}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。那么，存在单纯幺半群之间的弱等价

$$\mathrm{Aut}^h(\mathsf{Graphs}^Z_{V,n})_{[1]} \cong \mathrm{Exp}_\bullet((\mathrm{GC}^{ex}_{V,n})^{Z_1}),$$

其中 $\mathrm{GC}^{ex}_{V,n}$ 按式 (68) 定义。

证明。由推论 11.3 可知

$$\mathrm{Aut}^h(\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n})_{[1]} \cong \mathrm{Exp}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n}) = \mathsf{MC}_\bullet((\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n})_{ab}). \tag{77}$$

通过用 Z_1 扭曲，我们从包含映射 $\mathrm{GC}^{ex}_{V,n} \to \mathrm{HGC}^{nil,Z_\Delta}_{V,n}$（见命题 12.5）得到微分分次李代数之间的映射 $(\mathrm{GC}^{ex}_{V,n})^{Z_1} \to \mathrm{HGC}^{nil,Z}_{V,n}$。因此我们得到一个单纯群的映射

$$\mathsf{MC}_\bullet(((\mathrm{GC}^{ex}_{V,n})^{Z_1})_{ab}) = \mathrm{Exp}_\bullet((\mathrm{GC}^{ex}_{V,n})^{Z_1}) \to \mathrm{Exp}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n}) = \mathsf{MC}_\bullet((\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n})_{ab}) \tag{78}$$

对于阿贝尔 S李$_\infty$代数 $\mathfrak{g}$ 以及所有 $k = 0, 1, 2, \ldots$，我们有 $\pi_k(\text{Maurer–Cartan}_\bullet(\mathfrak{g})) = H^{-k}(\mathfrak{g})$（基点可任意选取）。因此，要验证 (78) 是弱等价，我们必须验证包含映射

$$(\mathrm{GC}^{ex}_{V,n})^{Z_1} \to \mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n} \tag{79}$$

在非正次数上是拟同构。但这可由命题 12.7 得出，具体如下：我们在 (79) 两边取关于顶点数滤过的谱序列。伴随分次态射与 $\mathrm{GC}^{ex}_{V,n} \to \mathrm{HGC}^{nil,Z_\Delta}_{V,n}$ 的伴随分次态射相同。但命题 12.7 蕴含，该伴随分次态射除去类 H_k 和 $L_{\omega\omega}$（所张成的空间）之外是拟同构。然而这些类的次数都为 ≥ 2。因此，由标准的谱序列比较结果可知，(79) 确实在非正次数上是拟同构。□

推论 13.9. 设 n 为一个整数，V 为有限维正分次向量空间。设 $\Delta \in V \otimes V$ 是一个次数为 n 的非退化且 $(-1)^n$-对称元素。设 $Z_1 \in \mathrm{GCp}_{V,n}$ 为一个 Maurer-Cartan 元素，并设 $Z = Z_{\tilde{\Delta}} + Z_1 \in \mathrm{HGC}_{V,n}$ 为如上所述相应的 $\mathrm{HGC}_{V,n}$ 中的 Maurer-Cartan 元素。那么存在一个单纯幺半群之间的弱等价

$$\mathrm{Aut}^h(\mathsf{Graphs}^{Z}_{V,n})_{[1]} \cong \mathrm{Exp}_\bullet((\mathrm{GCp}^{ex}_{V,n})^{Z_1}),$$

其中 $\mathrm{GCp}^{ex}_{V,n}$ 的定义同 (74)。

证明. 证明与推论 13.8 的证明类似，但使用命题 12.12 而非命题 12.7。具体而言，按照推论 13.8 的证明进行，如果我们能够证明包含映射

$$(\mathrm{GCp}^{ex}_{V,n})^{Z_1} \to \mathbf{HGC}^{nil,Z}_{V,n} \tag{80}$$

在非正次数上是拟同构。我们赋予 (80) 的映射锥按顶点数过滤，并考虑伴随谱序列。根据命题 12.12 的证明，E^1 页由 $\mathrm{HGC}^{nil,Z}_{V,n}$ 中在 $\bar{H}^*$ 上没有装饰且所有腿都带有 $e_0 = 1$ 装饰的那些图张成。原则上，(80) 的锥的 E^2 页上的微分可能与命题 12.12 中考虑的微分不同，因为与 Z_1 的单顶点部分作李括号会对 E^1 页上的微分产生贡献。不过请注意，$\mathrm{GCp}^{ex}_{V,n}$ 中的任意单顶点图都必须至少有 3 个 H^* 装饰，并且由于次数原因，其中至多一个可以是顶类 ω。因此，这种单顶点图与任意没有装饰且只有带 e_0 装饰的腿的图作括号，所得结果必须至少有两个装饰，因而在我们谱序列的 E_1 页上是恰当的。所以这些项实际上不会对 E^1 页上的微分产生贡献。

因此，E^1 页与命题 12.12 中考虑的内容一致。由该命题可知，我们的谱序列的 E^2 页为零，因此 (80) 是所需的拟同构。□

我们可以应用这些推论来计算有理化构形空间的自同构。与有理同伦论中的常见情况一样，这一应用需要额外的有限性假设。一般而言，若映射 $M \to M^{\mathbb{Q}}$ 在有理上同调上诱导同构，我们就称右运算子 $\mathcal{F}_n$ 模 M 为 Q-良好

$$H(M) := H^\bullet(M, Q) \cong H(M^{\mathbb{Q}}).$$

（回忆一下，有理化定义为 $M_{\mathbb{Q}}=LG(R\Omega^\sharp(\hat{}M))$。）这意味着每个空间 M (r) 都是 Q-良好的。

例如，设 M 是一个 n 维可平行化流形。若 $n \geq 3$，且 M 紧致并且单连通，则 $M = \mathcal{F}_M$ 是 Q-良好的，因为此时每个 $\mathcal{F}_M$(r) 也都是单连通且紧致的。然而，维数为 $n = 2$ 的构形空间并非 Q-良好，即使 $M = R^2$，也是如此，参见 [36]。因此，以下我们限制在 $n \geq 3$ 的情形。

对于一个 Q-良好的 c 纤维化 $\Lambda\, \mathcal{F}_n$ 模 M，可以类似于 [28, 命题 16] 证明 t

$$\mathrm{Aut}^h(M^{\mathbb{Q}}) \simeq \mathrm{Aut}^h(\Omega^\sharp(M)),$$

其中，左侧取 $\Lambda\, \mathcal{F}_n^{\mathbb{Q}}$模范畴中的同伦自同构，右侧取 Λ Hopf $\Omega^\sharp(\mathcal{F}_n)$ 余模范畴中的同伦自同构。结合上述结果，我们得到以下推论。

推论 13.10. 设 $n \geq 3$，且 M 是一个 n维可平行化流形，使得右运算子 $\Lambda\, \mathcal{F}_n$ 模 $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ 是 Q-良好的。例如，当 M 是单连通紧致流形，或是某个紧致流形的内部时，该条件成立。设 $H = H(M)$ 为约化有理上同调。设 $Z \in \mathcal{G}^1 HGC_{\bar{H},\, n}$ 为推论 13.1 中的 Maurer-Cartan 元素。那么，我们有一个单纯幺半群的弱等价

$$\mathrm{Aut}^h(\mathcal{F}_{\mathbf{M}}^{\mathbb{Q}})_{[1]} \simeq \mathrm{Exp}_\bullet(\mathbf{HGC}^{nil,Z}_{\bar{H},n}).$$

- 进一步假设 M 是闭流形，因此对角元 $\Delta \in H_1 \otimes H_1$ 非退化，并设 $Z_1 \in \overline{GC}_{-H,\, n}$ 为推论 13.4或推论 13.6 中的 Maurer-Cartan 元素。那么，我们有一个单纯幺半群的弱等价

$$\mathrm{Aut}^h(\mathcal{F}_{\mathbf{M}}^{\mathbb{Q}})_{[1]} \simeq \mathrm{Exp}_\bullet((GC^{ex}_{\bar{H},n})^{Z_1}).$$

- 或者，假设 M 是从一个闭流形中去掉一个圆盘得到的，因此约化对角元 $\Delta \in H \otimes H$ 是非退化的。令 $Z_1 \in \overline{GCp}_{-H,\, n}$ 为推论 13.7 中的 Maurer-Cartan 元素。那么存在一个单纯幺半群的弱等价

$$\mathrm{Aut}^h(\mathcal{F}_{\mathbf{M}}^{\mathbb{Q}})_{[1]} \simeq \mathrm{Exp}_\bullet((GCp^{ex}_{\bar{H},n})^{Z_1}).$$

作为推论 13.10 最后一个断言的一个具体应用，我们来考察 $d \geq 2$的 $n = 2d$ 维高度连通流形

$$W_{g,1} := W_g \setminus [0,1]^n. \qquad \text{with} \qquad W_g := \underbrace{(S^d \times S^d)\# \cdots \#(S^d \times S^d)}_{g\times},$$

它们是可平行化的 [42]，并且最近在文献中 [43,44]受到了广泛关注。在这种情况下，Maurer-Cartan 元素 $Z_1 \in \mathrm{GCp}_{\bar{H},n}$ 必须为零，因为 $\mathrm{GCp}_{\bar{H},n}$中不存在次数1的图：事实上，根据引理 13.5，唯一可能的次数为 +1 的图是树图。但是，一个具有 v 个顶点的树图 $\gamma \in \mathrm{GC}_{\bar{H},n}$ 必须至少有 v 个 + 2 装饰，因此其次数为

$$|\gamma| \leq nv - (n-1)(v-1) - \frac{n}{2}(v+2) + 1 = -(\frac{n}{2} - 1)v < 0.$$

因此，根据推论 13.10 的最后一个断言，我们得出单纯幺半群之间存在一个弱等价

$$\mathrm{Aut}^h(\mathcal{F}^{\mathbb{Q}}_{W_{g,1}})_{[1]} \simeq \mathrm{Exp}_\bullet(\mathrm{GCp}_{\bar{H}(W_{g,1}),n}).$$

注意到，这里我们使用了 $\mathrm{GCp}_{\bar{H}(W_{g,1}),n} = \mathrm{GCp}^{ex}_{\bar{H}(W_{g,1}),n}$，因为 $\bar{H}(W_{g,1})$ 集中在唯一的次数 $n-2$ 上，因此没有负次数的线性自同态。

附录 A. Goldman-Millson 定理的一个技术变体

我们将需要 Goldman-Millson 定理的一个较为微妙的变体。它类似于 [16], Dolgushev-Rogers 证明的定理 1.1，但我们需要处理带滤过的完备 SLie_∞-代数，其滤过始于第零滤过次数而非第一滤过次数，因此会导致某些收敛问题。为解决这一问题，我们考虑两种不同的滤过：一种用于确保收敛，另一种用于上同调计算。

定理 A.1（Goldmann-Millson 定理的一个版本）. 设

$$F = \{F_k\}_{k\geq 1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

是满足以下条件列表的 SLie_∞-代数 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}$ 之间的一个 SLie_∞-态射。

a. $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的（即仅仅是一个微分分次向量空间），并且带有两个下降完备滤过

$$\mathfrak{g} = \mathcal{F}^1\mathfrak{g} \supset \mathcal{F}^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$
$$\mathfrak{g} = \mathcal{G}^0\mathfrak{g} \supset \mathcal{G}^1\mathfrak{g} \supset \cdots$$

它们与 SLie_∞-结构（即微分）相容，并且满足

$$\mathfrak{g}^0 = \mathcal{G}^1\mathfrak{g}^0. \tag{81}$$

b. $\mathfrak{h}$ 配备了两个下降完备滤过

$$\mathfrak{h} = \mathcal{F}^1\mathfrak{h} \supset \mathcal{F}^2\mathfrak{h} \supset \cdots$$
$$\mathfrak{h} = \mathcal{G}^0\mathfrak{h} \supset \mathcal{G}^1\mathfrak{h} \supset \cdots$$

与 SLie_∞-结构相容。

c. SLie_∞ 运算 μ_k 满足

$$\mu_k(\mathfrak{h},\dots,\mathfrak{h}) \subset \mathcal{G}^1\mathfrak{h} \tag{82}$$

对所有 $k \geq 2$。

d. 两个滤过 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是相容的，即 $\mathcal{G}^p\mathfrak{g} \subset \mathcal{F}^{q(p)}\mathfrak{g}$，其中 $q(p) \to \infty$ 随 $p \to \infty$ 变化，对 $\mathfrak{h}$ 也类似。换言之，恒等映射 $\mathfrak{g}^{\mathcal{G}} \to \mathfrak{g}^{\mathcal{F}}$ 和 $\mathfrak{h}^{\mathcal{G}} \to \mathfrak{h}^{\mathcal{F}}$ 是连续的，左侧使用由 $\mathcal{G}$ 诱导的拓扑，右侧使用由 $\mathcal{F}$ 诱导的拓扑。

e. T态射 F 与两个滤过 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 相容，即 t

$$F_k(\mathcal{F}^{p_1}\mathfrak{g},\dots,\mathcal{F}^{p_k}\mathfrak{g}) \subset \mathcal{F}^{p_1+\cdots+p_k}\mathfrak{h}, \qquad F_k(\mathcal{G}^{p_1}\mathfrak{g},\dots,\mathcal{G}^{p_k}\mathfrak{g}) \subset \mathcal{G}^{p_1+\cdots+p_k}\mathfrak{h}\,.$$

f. 线性分量 F_1 诱导一个同构

$$H^p(\mathrm{gr}_{\mathcal{G}}\mathfrak{g}) \to H^p(\mathrm{gr}_{\mathcal{G}}\mathfrak{h})$$

对每个 p，关于 $\mathcal{G}$-滤过的伴随分次复形之间。

于是，态射 F 诱导 Maurer-Cartan 空间之间的一个弱等价

$$\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{h}), \tag{83}$$

其中我们使用滤过 $\mathcal{F}^\bullet$ 来完成 Maurer-Cartan 空间定义中的张量积。

为了便于定理的证明，我们首先需要给出关于 Maurer-Cartan 空间的一些技术性结果。

A.1. 1-胞腔与拼接。让我们回顾关于滤过完备 S李$_\infty$-代数 $\mathfrak{g}$ 的 Maurer-Cartan 空间 $\mathrm{Maurer\text{–}Cartan}_\bullet(\mathfrak{g})$ 的一些众所周知的技术性结果。单纯集$\mathrm{Maurer\text{–}Cartan}_\bullet(\mathfrak{g})$ 中的 0-胞腔就是 Maurer-Cartan 元素。1-胞腔是 Maurer-Cartan 元素 $A \in \mathrm{Maurer\text{–}Cartan}(\mathfrak{g}\,\hat{\otimes}\Omega(\Delta^1))$. 具体来说，我们可以将 A 分解为其 0-形式部分和 1-形式部分，并写成

$$A = \alpha(t) + a(t)dt.$$

那么，A 满足的 Maurer–Cartan 方程明确写作

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\mu_k(\alpha(t),\dots,\alpha(t)) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\alpha(t) = D_\alpha a(t) := \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\mu_{k+1}(\alpha(t),\dots,\alpha(t),a(t)). \tag{84}$$

如果存在如上所述的 1-胞腔 A，我们就称它连接 Maurer-Cartan（MC）元 $\alpha(0)$ 和 $\alpha(1)$。我们也称后一个 MC 元规范等价，并略微滥用记号，将 A 称为一个规范变换。下面我们将使用以下众所周知的引理，并给出简要的证明概要。（有关更详细的讨论，参见 [16] 。）

引理 A.2. 设 a(t) $\in$ g $\hat{\otimes}\Omega(\Delta^1)$ 是任意一个 0 次元，且设 $\alpha_0 \in$ MC(g) 是一个 Maurer-Cartan 元素。那么存在唯一的 1-胞腔 A $= \alpha$(t) +a(t)dt，使得 $\alpha(0) = \alpha_0$。

证明。(84) 的第二个方程给出了关于 α(t) 的一个初值问题，例如可以通过对该方程的积分形式进行不动点迭代来求解。

$$\alpha(t) = \int_0^t D_{\alpha(s)} a(s) ds.$$

由此得到的元素 A 会自动满足 Maurer–Cartan 方程，只要初始条件 α_0 满足该方程；简单计算即可验证这一点。□

下一个引理只是 Maurer–Cartan$_\bullet$(g) 是一个 Kan 复形这一事实的特例。x.

引理 A.3。设 A、B $\in$ Maurer–Cartan$_1$(g) 是两个 1-胞腔，其中 A $= \alpha$(t) + a(t)dt 连接 Maurer-Cartan 元素 $\alpha_0 = \alpha(0)$ 和 $\alpha_1 = \alpha(1)$，B $= \beta$(t) + b(t)dt 连接 $\alpha_1 = \beta(0)$ 和 $\alpha_2 = \beta(1)$。那么存在一个 1-胞腔 C $\in$ Maurer–Cartan$_1$(g)，连接 α_0 和 α_2，使得 A、B、C 构成一个 2-胞腔 X $\in$ Maurer–Cartan$_2$(g) 的边界。

证明。为了得到一个相当显式的公式，我们可以用 g $\hat{\otimes}\Omega(\Delta^1)$ 代替 g 应用引理 A.2，从而得到一个 Maurer-Cartan 元素 Y $\in$ Maurer–Cartan(g $\hat{\otimes}\Omega(\Delta^1 \times \Delta^1)$)，使得

$$Y = \alpha(t, s) + a(t, s)dt + b(s)ds$$

且 α(t, 0) $= \alpha$(t)，并且 a(t, 0) = a(t)。那么， α(0, s) + b(s)ds 自动就是一个 1-胞腔，使得 s = 0-初值与 β(0) 一致，因此由初值问题解的唯一性可知， α(0, s) $= \beta$(s)。现在，将 Y 限制在正方形的半个 $\{0 \le s \le t \le 1\} \subset \Delta^1 \times \Delta^1$ 部分，即可得到所需的角填充 X。特别地，C 的形式为

$$C = \alpha(t, t) + (a(t, t) + b(t))dt.$$

特别要注意，a(t, t) = a(t)+b(t)+($\cdots$)，其中 ($\cdots$) 是修正项，由 α、a、b 通过对 g 中的非平凡自然运算（即 SLie$_\infty$ 运算或对多项式系数积分）计算得到。□

引理 A.4. 设 A $= \alpha$(t) + a(t)dt 是一个 1-胞腔，且 c(t) $\in$ g $\hat{\otimes}\,\Omega^0(\Delta^1)$ 是一个任意的次数为 −2 的元素。那么

$$\tilde{A} = \alpha(t) + (a(t) + D_{\alpha(t)} c(t))dt$$

仍是一个 1-胞腔，其中 D$_{\alpha(t)}$ 是式 (84) 中的 α-扭曲微分。

证明. 我们需要验证 MC 方程 (84)。第一个显然成立；对于第二个，只需利用 Maurer-Cartan 元素 α 满足

$$D_\alpha \circ D_\alpha = 0.$$

□

我们还引用以下结果。

引理 A.5（[16, 引理 B.2]）。设 A $= \alpha$(t) + a(t)dt $\in$ Maurer–Cartan$_1$(g) 是一个 1-胞腔。那么存在一个 1-胞腔 $\tilde{A} = \tilde{\alpha}$(t) + $\tilde{a}$dt，使得 $\tilde{a} \in \mathfrak{g}^{-1}$ 为常数，并且 $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0)$， $\alpha(1) = \tilde{\alpha}(1)$。

A.2. 定理 A.1 的证明。我们将分几个步骤证明该定理。首先注意，条件 d 保证恒等映射诱导出单纯集合的态射

$$\mathrm{MC}^{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^1\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$$
$$\mathrm{MC}^{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^1\mathfrak{h}) \to \mathrm{MC}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{h}),$$

其中，我们使用滤过 $\mathcal{G}$ 来定义左侧的 Maurer–Cartan 空间，如记号 $\mathrm{MC}^{\mathcal{G}}_{\bullet}(-)$ 所示，并使用右侧的滤过 $\mathcal{F}$。结合条件 e，这意味着我们有一个单纯集的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MC}^{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^1\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{MC}^{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^1\mathfrak{h}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{MC}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{(83)} & \mathrm{MC}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{h}). \end{array} \tag{85}$$

这里的上方箭头根据标准的 Goldman-Millson 定理 [16,定理 1.1], 是一个弱等价，该定理适用于 SLie_∞-代数的受限态射 $F: \mathcal{G}^1\mathfrak{g} \to \mathcal{G}^1\mathfrak{h}$。

引理 A.6. 在定理 A.1 的条件下，g 中的每个 Maurer-Cartan 元素（分别地，h 中的每个 Maurer-Cartan 元素）都与 $\mathcal{G}^1\mathfrak{g}$（分别为 $\mathcal{G}^1\mathfrak{h}$）中的某个元素规范等价。

证明。根据 (81)，关于 g 的陈述是空泛的。为说明关于 h 的陈述，首先注意到，根据条件 f 和 (81)，我们有 $H^1(\mathrm{gr}_{\mathcal{G}}\mathfrak{h}) = 0$。设 $\beta \in \mathfrak{h}$ 是一个 Maurer-Cartan 元素。于是，根据 Maurer–Cartan 方程和 (82)，我们有

$$d\beta \in \mathcal{G}^1\mathfrak{h}.$$

因此，对于某个次数为 -1 的 b，有 $\beta + db \in \mathcal{G}^1\mathfrak{h}$。于是我们可以利用引理 A.2 构造一个 1-胞腔（即 $\mathfrak{h} \hat{\otimes} \Omega(\Delta^1)$ 中的 Maurer-Cartan 元素）

$$B = \beta(t) + bdt$$

使得 $\beta(0) = \beta$，方法是为 $\beta(t)$ 求解 Maurer-Cartan 方程（一个初值问题）。（注意，解的存在性隐含地依赖于滤过 $\mathcal{F}$，以保证收敛，但与滤过 $\mathcal{G}$ 或其任何性质无关。）B 的 Maurer-Cartan 方程特别表明

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = D_B b = db + O(\mathcal{G}^1\mathfrak{h}),$$

再次使用 (82)，可得

$$\beta(1) = \underbrace{\beta + db}_{\in \mathcal{G}^1\mathfrak{h}} + O(\mathcal{G}^1\mathfrak{h})$$

这是所需的 Maurer-Cartan 元素；在 $\mathcal{G}^1\mathfrak{h}$ 中，它与 β 规范等价。 □

推论 A.7. 映射 (83) 在连通分支上诱导一个满射，即在 π_0 上。

证明. 考虑交换图 (85) 的 π_0。上方的水平箭头在 π_0 上诱导一个双射，根据前面的引理，两个竖直箭头在 π_0 上诱导满射。因此，下方的水平箭头也必定在 π_0 上诱导一个满射。□

引理 A.8。态射 (83) 在 π_0 上诱导出一个单射。

证明。设 $\alpha \in \mathfrak{g}^0 = \mathcal{G}^1\mathfrak{g}^0$ 是一个 Maurer-Cartan 元素，使得 $F(\alpha) \in MC(\mathfrak{h})$ 与 0 规范等价。利用引理 A.5，我们可以假设该规范等价由一个 1-胞腔实现

$$B := \beta(t) + bdt \in \mathfrak{h} \hat{\otimes} \Omega(\Delta^1)$$

使得 $\beta(0) = F(\alpha)$，$\beta(1) = 0$，且 $b \in \mathfrak{h}^{-1}$ 为常数。由 B 的积分形式的 Maurer–Cartan 方程和 (82)，我们看到

$$\mathcal{G}^1\mathfrak{h} \ni \beta(1) - \beta(0) = \int_0^1 D_{\beta(t)} b dt = db + O(\mathcal{G}^1\mathfrak{h}),$$

因此

$$db \in \mathcal{G}^1\mathfrak{h}.$$

因此，根据我们的 Goldman-Millson 定理的假设，存在某个 $a \in \mathfrak{g}^{-1}$，使得 $da \in \mathcal{G}^1\mathfrak{g}$，且 $F_1(a) = b + dc$，其中 $c \in \mathfrak{h}^{-2}$。我们考虑一个 1-胞腔

$$A = (\alpha + (1-t)da) - adt$$

连接 MC 元素 $\alpha + da$ 与规范等价的 MC 元素 α。1-胞腔 F(A) 具有如下形式

$$F(A) = F(\alpha + (1-t)da) - F^{\alpha+(1-t)da}(a)dt = F(\alpha + (1-t)da) - (F_1(a) + O(\mathcal{G}^1\mathfrak{h}))dt.$$

然后我们将 1-胞腔 F(A) 与 B（见引理 A.3）粘合起来，以得到一个 1-胞腔

$$C = \beta'(t) + b'(t)dt$$

连接 $\beta'(0) = F(\alpha + da)$ 与 $\beta'(1) = 0$。此外，根据引理 A.3 的证明，我们可以看到 $b'(t) = -F_1(a) + b + O(\mathcal{G}^1\mathfrak{h})$，因为根据（82），更高阶的括号项属于 $\mathcal{G}^1\mathfrak{h}$。接下来，我们可以应用引理 A.4，通过 c 对 C 施加进一步的规范变换，从而得到一个 1-胞腔

$$D = \beta'(t) + b''(t)dt$$

使得

$$b''(t) = b'(t) + D_{\beta'(t)}c = -F_1(a) + b + dc + O(\mathcal{G}^1\mathfrak{h}) \in \mathcal{G}^1\mathfrak{h}.$$

因此，我们构造出了 $\mathcal{G}^1\mathfrak{h}$ 中连接 $U(\alpha + da)$ 与 0 的一个 1-胞腔。因此，通过将标准的 Goldman-Millson 定理应用于态射 $F: \mathcal{G}^1\mathfrak{g} \to \mathcal{G}^1\mathfrak{h}$，我们得到 Maurer-Cartan 元（即余循环）$\alpha + da$ 是规范平凡的，即恰当的，因此 α 也是如此。

该论证表明，.....的原像

$$[F] : \pi_0 MC_\bullet(\mathfrak{g}) \to \pi_0 MC_\bullet(\mathfrak{h})$$

Maurer-Cartan 元素 $0 \in \mathfrak{h}$（的等价类）的原像只包含一个元素。接下来考虑某个 Maurer-Cartan 元素 $\alpha \in \mathfrak{g}$，并令 $\beta = F(\alpha) \in \mathcal{G}^1\mathfrak{h}$。于是，$\beta$的等价类在上文的 $[F]$ 下的原像，与扭曲的 $SLie_\infty$-代数 $\mathfrak{h}^\alpha$ 中 0 在扭曲态射 F^α 下的原像相同。因此，将已证明的结论应用于这个扭曲态射，即可得到引理的一般结论。□

定理 A.1 的证明。要完成定理 A.1 的证明，还需验证映射 (83) 在 Maurer-Cartan 空间的每个连通分支上诱导同伦群之间的双射。设 $\alpha \in$ Maurer–Cartan(g) 是一个 Maurer-Cartan 元素，且 $\beta = F(\alpha) \in$ Maurer–Cartan(h)。于是，根据 [6, 定理 5.5]，同伦群可由[8]计算得到

$$\pi_k(\mathsf{MC}_\bullet(\mathfrak{g})) = H^{-k}(\mathfrak{g}^\alpha) \qquad \pi_k(\mathsf{MC}_\bullet(\mathfrak{h})) = H^{-k}(\mathfrak{h}^\beta)$$

对 $k = 1$、2、……。因此，我们需要验证扭曲态射

$$F^\alpha : \mathfrak{g}^\alpha \to \mathfrak{h}^\beta$$

是一个拟同构（在非正次数上）。但这可直接由条件 f 和标准的谱序列论证得出。

□

参考文献

[1] G. Arone 和 V. Turchin，《长结空间的高维类似物的有理同调》，《几何与拓扑》18 (2014)，第 3 期，1261–1322。[2] ———, 计算长结空间高维类似物有理同伦的图复形，《傅里叶研究所年刊》65 (2015)，第 1 期，1–62。[3] Scott 和 Singer Axelrod I. M.，《陈-西蒙斯微扰理论。II》，《微分几何杂志》39 (1994)，第 1 期，173–213，可见 hep-th/9304087。[4] Vladimir Arnold，《染色辫群的上同调环》5 (1969)，227–231。[5] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk，《幺半模型范畴中运算子的 Boardman-Vogt 消解》，《拓扑学》45 (2006)，第 5 期，807–849。[6] Alexander Berglund，《通过 L_∞-代数的李理论研究映射空间的有理同伦论》，《同调、同伦与应用》17 (2015)，第 2 期，343–369。[7] Pedro Boavida de Brito 和 Michael Weiss，《流形演算与同伦层》，《同调、同伦与应用》15 (2013)，第 2 期，361–383。[8] ———，《光滑嵌入空间与构形范畴》，《拓扑学杂志》11 (2018)，第 1 期，65–143。[9] Francis Borceux，《范畴代数手册。1》，《数学及其应用百科全书》第 50 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。基础范畴论。MR1291599[10] J. M. 和 Vogt Boardman R. M.，《拓扑空间上的同伦不变代数结构》，《数学讲义》第 347 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1973。

[8]需要指出的是，严格来说，Berglund 的结果并不适用于 g 的情形，因为我们的滤过从 $\mathcal{F}^0$ 开始。然而，鉴于 g 是阿贝尔的，在我们的条件下仍然很容易验证该结论。

[11] Ricardo、Ducoulombier Campos Julien 和 Idrissi，《（余）算子（余）双模的 Boardman-Vogt 消解与 bar/cobar 构造》，发布于 2019年，DOI 10.48550/ARXIV.1911.09474。[12] Ricardo Campos 和 Thomas Willwacher，《点构形空间的一个模型》(2016)，可见 1604.02043。[13] Fred R. Cohen，《C_{n+1}-空间的同调》，$n \geq 0$，《迭代环路空间的同调》，1976年，第 207–351 页。[14] F. R. 和 Taylor Cohen L. R.，《Gel′fand-Fuks 上同调、函数空间的上同调以及构形空间的上同调的计算》，《同伦论的几何应用》（会议录，埃文斯顿，伊利诺伊州，1977年），I，1978年，第 106–143 页。[15] Marius Crainic，《关于扰动引理与变形》(2004)。预印本 arXiv:math/0403266。[16] Vasily Dolgushev 和 Christopher L. Rogers，《滤过 L_∞-代数的 Goldman-Millson 定理的一个版本》，《代数杂志》430 (2015)，260–302。[17] J. Ducoulombier、B. Fresse 和 V. Turchin，《运算子上的（无穷小）双模的投射与 Reedy 模型范畴结构》(2019)。arXiv:1911.03890。[18] W. G. Dwyer 和 D. M. Kan，《同伦代数中的函数复形》，《拓扑学》19 (1980)，第 4 期，427–440。[19] Mehmet Akif 和 G¨uc¸l¨ukan ˙Ilhan Erdal Aslı，《通过轨道空间构造等变同伦的一个模型结构》，《同伦及相关结构杂志》14 (2019)，第 4 期，1131–1141，DOI 10.1007/s40062-019-00241-4。[20] Matteo Felder，《图复形与高亏格 Grothendieck-Teichm¨uller 李代数》(2021)，可见 2105.02056。[21] William 和 MacPherson Fulton Robert，《构形空间的一个紧化》139 (1994)，第 1 期，183–225，DOI 10.2307/2946631。[22] Benoit Fresse，《运算子的同伦与 Grothendieck-Teichm¨uller 群。第 2 部分。有理同伦论方法的应用》，《数学调查与专著》第 217 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2017年。[23] ———，《运算子上的模与函子》，《数学讲义》第 1967 卷，施普林格出版社，柏林，2009。[24] B. Fresse、V. Turchin 和 T. Willwacher，《E_n 运算子的有理同伦》(2017)。arXiv:1703.06123。[25] Benoit 和 Turchin Fresse Victor 和 Willwacher，《关于 R^n 中流形嵌入空间的有理同伦型》，发布于 2020年，DOI 10.48550/ARXIV.2008.08146。[26] Benoit Fresse，《运算子的扩展有理同伦论》，《格鲁吉亚数学杂志》25 (2018)，第 4 期，493–512，DOI 10.1515/gmj-2018-0061。[27] B. Fresse 和 T. Willwacher，《E_n-运算子的内在形式性》，即将在《欧洲数学会杂志》发表 (2015)。arXiv:1503.08699。[28] B. Fresse 和 T. Willwacher，《DG Hopf 余算子的映射空间与 E_n-运算子有理化的同伦自同构》(2020)，可见 arXiv:2003.02939。[29] ———，《运算子模的有理同伦论》(2020)。即将发表。[30] Ezra Getzler 和 J. D. S. Jones，《二重环路空间的运算子、同伦代数与迭代积分》(1994)。arXiv:hep-th/9403055。[31] Thomas G. Goodwillie 和 John R. Klein，《光滑嵌入空间的多重分离》，《拓扑学杂志》8 (2015)，第 3 期，651-674。[32] Thomas G. Goodwillie 和 Michael Weiss，《从浸入理论的角度看嵌入。II》，《几何与拓扑》3 (1999)，103–118（电子版）。

[33] Alastair and Lazarev Hamilton Andrey, 《辛 C_∞-代数》, 莫斯科数学杂志 8 (2008), no. 3, 443–475, 615, DOI 10.17323/1609-4514-2008-8-3-443-475.[34] Joseph Hirsh and Joan Mill`es, 《弯曲 Koszul 对偶理论》, 数学年刊 354 (2012), no. 4, 1465–1520, DOI 10.1007/s00208-011-0766-9. MR2993002[35] Najib Idrissi, 《构形空间的 Lambrechts–Stanley 模型》216 (2019), no. 1, 1–68 页, DOI 10.1007/s00222-018-0842-9, 可见于 1608.08054.[36] Sergei O. and Mikhailov Ivanov Roman, 《一个有限的 Q-坏空间》, 《几何与拓扑》23 (2019), no. 3, 1237–1249, DOI 10.2140/gt.2019.23.1237. [37] A. Khoroshkin, T. Willwacher, and M. ˇZivkovi´c, 《图复形上的微分 II——毛图》, 数学物理快报 107 (2017), no. 10, 1781–1797.[38] Maxim Kontsevich, 《变形量子化中的运算子与动机》, 数学物理快报 48 (1999), no. 1, 35–72。Mosh´e Flato (1937–1998).[39] ———, 《泊松流形的变形量子化》, 数学物理快报 66 (2003), no. 3, 157–216. MR2062626 (2005i:53122)[40] Yvette Kosmann-Schwarzbach, 《导出括号》, 数学物理快报 69 (2004), 61–87, DOI 10.1007/s11005- 004-0608-8. MR2104437[41] Igor KˇrıˇZ, 《论构形空间的有理同伦型》, Ann. of Math. (2) 139 (1994), no. 2, 227–237, DOI 10.2307/2946581.[42] Alexander and Randal-Williams Kupers Oscar, 《W_g1 的标架》, 季刊数学杂志 72 (2021), no. 3, 1029–1053, DOI 10.1093/qmath/haaa057.[43] ———, 《托雷利群的上同调是代数的》, Forum Math. Sigma 8 (2020), Paper No. e64, 52, DOI 10.1017/fms.2020.41.[44] ———, 《偶数维圆盘的微分同胚》, 发表于 2020, DOI 10.48550/ARXIV.2007.13884.[45] Pascal Lambrechts and Don Stanley, 《构形空间的一个卓越微分分次模模型》, 代数几何与拓扑 8 (2008), no. 2, 1191–1222, DOI 10.2140/agt.2008.8.1191. MR2443112[46] Pascal Lambrechts and Ismar Voli´c, 《小 N-圆盘 operad 的形式性》, Mem. Amer. Math. Soc. 230 (2014), no. 1079, viii+116.[47] J.-L. Loday and B. Vallette, 《代数 Operad》, 数学科学基础丛书, Springer, 柏林, 2012.[48] Paolo Salvatore, 《带有可求和标记的构形空间》, 《同伦论中的上同调方法》（贝拉特拉, 1998）, 数学进展, 第 196 卷, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2001, 第 375–395 页。[49] Silvan Schwarz, 《弯曲 L_∞-代数中 Maurer-Cartan 元素存在性的障碍理论及其在 P_∞-代数内在形式性中的应用》(2022)。arXiv:2209.15538.[50] Dev Sinha, 《构形空间的流形论紧化》, 精选数学 (N.S.) 10 (2004), no. 3, 391–428.[51] Dev P. Sinha, 《小圆盘 operad 的（非等变）同调》, OPERADS 2009, S´emin. Congr., 第 26 卷, 法国数学会, 巴黎, 2013, 第 253–279 页（英文, 附英文和法文摘要）。MR3203375[52]Burt Totaro, 《代数簇的构形空间》, 《拓扑学》35 (1996), no. 4, 1057–1067, DOI 10.1016/0040-9383(95)00058-5.[53] Victor Turchin, 《上下文无关流形微积分与 Fulton–MacPherson operad》, 代数几何与拓扑 13 (2013), no. 3, 1243–1271。

[54] Thomas Willwacher，《滤过完备 L_∞-代数的 Maurer-Cartan 空间回忆》(2023)。准备中。

苏黎世联邦理工学院数学系，R¨amistrasse 101，8092 苏黎世，瑞士 电子邮箱:
thomas.willwacher@math.ethz.ch