arXiv:2302.07391v2 [math.AT] 8 May 2024

范畴相干性的拓扑证明

PIERRE-LOUIS CURIEN 和 GUILLAUME LAPLANTE-ANFOSSI

"We shall construct KP_n, as a CW-complex, in Section 2 and show that it is an $(n-1)$-ball. This gives an instant one-step proof of MacLane's theorem in full generality."– Mikhail M. Kapranov

Abstract. 我们利用相关图表构成单连通 CW 复形的 1-骨架这一事实，为范畴化的非对称幺半群给出一个简短的拓扑相干性证明。我们还为对称幺半范畴的 Mac Lane 相干定理提供了一个"一步式"拓扑证明，这一思路由 Kapranov 于 1993年 提出。我们的分析基于组合同伦这一概念，并进一步研究其在多面体复形这一特殊情形中的应用，由此得到第二种几何相干性证明，该证明与 Mac Lane 的原始论证非常接近。我们运用莫尔斯理论证明，这第二种方法的适用范围（严格来说）不及第一种方法。我们详细分析了这两种方法如何帮助我们推导出这两个范畴相干性结果，并探讨了向高阶范畴推广的可能性。

Introduction

这个 n维置换-结合多胞体是一个CW复形，其面与 $n+1$ 个字母的带括号有序划分之间存在双射。M. Kapranov 首先在通过曲线模空间研究高维杨–巴克斯特方程以及 Knizhnik–Zamolodchikov方程的解时引入了它$\mathcal{M}_{0,\ n+1}(\mathbb{R})$ [Kap93]。后来，V. Reiner 和 G. M. Ziegler 将其实现为一个凸多胞体 [RZ94], ；最近，F. Castillo 和 F. Liu 又通过嵌套辫扇实现了它，见 [CL23]。

本研究源于想要理解以下题词：它摘自 [Kap93]的导言：置换-结合多胞体与对称幺半范畴的 Mac Lane相干定理之间究竟有何确切关系？我们证明，前者的单连通性蕴含后者，从而进一步阐明并证明了 Kapranov 的主张（见定理2.16）。

Date：2024年5月9日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 18N20，次要分类号 52B11。*Key words and phrases.* 范畴化歌剧、范畴相干性、Seifert–Van Kampen定理、多胞体、MacLane相干定理、重写理论、莫尔斯理论。第二作者获 Andrew Sisson基金和澳大利亚研究理事会未来学者奖 FT210100256 资助。

这一结论通过一个适用于任意单连通正则CW复形的通用“拓扑相干定理”得出（定理1.1）。将其应用于歌剧多面体——另一类编码范畴化非对称歌剧的多胞体 [DP15, COI19, Lap22], 我们也由此得到了相关相干定理的“一步式”证明。

不过，代价并不高。对于这两个定理，都需要在拓扑方面的 1-骨架（分别为 2–胞腔）与范畴方面的典范态射（分别为双函子性、自然性以及相干条件的应用）之间，给出精确的双射对应（命题2.6 和2.13）。由于置换结合多面体的 2-骨架对应于不同于 Mac Lane 理论中的其他基本典范态射和相干条件（一方面是六边形以及对合编织的自然性，另一方面是十二边形），因此需要证明这两种表述是等价的；这并非易事，参见备注 2.17。还有第三种等价的表述（因而也是相干性的另一种证明），归功于 D. Barali´c、J. Ivanovi´c 和 D. Petri´c [BIP19], ，它对应于另一种多胞体的 2-骨架。与置换-结合多胞体不同，这种多胞体是单纯的，参见备注 2.14。

我们进一步以重写理论的思路，探究 Mac Lane 原始论证的一种拓扑呈现。我们研究赋有一般位置定向向量的多面体复形，或等价地，研究依照 [BB97], 意义下的莫尔斯函数；它们的 1-骨架自然具有终止且合流的重写系统（命题 1.12）。我们着重研究出链连通的单连通多面体复形。对其 1-骨架上有向路径的研究，引出第二个相干性的一般证明（定理1.9）。特别是，这个第二定理适用于所有多胞体，使我们得以为前述两个相干性结果各自给出第二种“重写理论”证明。对于歌剧多面体，我们的重写证明简化了 Do˘sen 和 Petri 的原始证明´c [DP15], 见注2.2。

值得注意的是，虽然上述多面体复形的 1-骨架上有抽象重写系统，但歌剧多面体这一族（包括编码非对称幺半范畴的结合多面体）还具有项重写系统，其结构更为丰富，也是我们另一篇配套论文的研究主题 [CLA24]。相比之下，我们将论证，针对对称幺半范畴的抽象重写方法并无助益，见注 2.18。

在仿射胞腔复形上运用莫尔斯理论 [BB97], 我们通过证明第二种方法的普适性（严格）低于第一种方法，从而将这两种方法联系起来（命题1.5）。

我们的两个一般性拓扑相干定理可用于证明其他涉及多胞体的范畴论结果，例如幺半群范畴之间的幺半群函子的相干性 [Eps66], 参见第3.1节。它们也有助于阐明文献中的一些论述，例如 [KV94命题 3 的证明。9], 参见第3.2节。这一切都表明，值得进一步研究 n-范畴相干性与适当空间的 n-连通性之间的关系。尽管关于 2-范畴相干性的拓扑证明早已见于[Gur11], 近期，S. Barkan 在∞-算子语境下取得了高维结果 [Bar22], ，而本文的结果很可能对应于其中的严格 $n = 1$ 情形。

1. Topological coherence

1.1. Van Kampen 意义下的相干性。设 X 是一个正则CW复形，并令 X_k、 $k \geqslant 0$ 表示其 k-骨架。对于 X 的一条边 e，记其附着映射为 $f_e : \mathbb{S}^0 \to X_0$。考虑范畴 $\mathcal{A}(X)$，其对象集为 X_0，并且对每条边 $e \in X_1$，有生成态射 $\alpha_e :\ f_e(-1) \to f_e(1)$ 和 $\alpha_e^{-1} :\ f_e(1) \to f_e(-1)$。$X$ 上的一条组合路径是由 α 和 α^{-1} 态射组成的可复合序列（即由 α 和 α^{-1} 构成的一个词）。具有相同端点的两条组合路径 $\gamma, \gamma' \in \mathcal{A}(X)(x, y)$ 称为平行路径。

设 A 是 X 的一个 2-胞腔，$f_A :\ \mathbb{S}^1 \to X_1$ 是它的附着映射，并且 $x \in X_0$ 是 f_A 的像中的一个顶点。于是 f_A 定义了一个态射 $\gamma_A \in \mathcal{A}(X)(x, x)$，它由其像中的边序列 $e_1, \ldots, e_n$ 给出，该序列从 x 开始并遵循 $\mathbb{S}^1$ 的逆时针定向。这里，若 f_A 在 e_i 上的定向与 f_{e_i} 的定向一致，则选取 α_{e_i}；否则选取 $\alpha_{e_i}^{-1}$。如果两个平行组合路径 γ, γ' 恰好相差一个形如 $\alpha_e \alpha_e^{-1} = \mathrm{id}_{f_e(1)}$ 或 $\alpha_e^{-1} \alpha_e = \mathrm{id}_{f_e(-1)}$ 的关系，或者相差一个形如 $\gamma_A = \mathrm{id}_x$ 的关系，其中涉及上述某个 2-胞腔 A 和顶点 x，则称它们是初等组合同伦的。也就是说，可以通过使用关系 $\gamma_A = \mathrm{id}_x$，将 γ 的某个（可能为空的）子词替换为等价子词，从而将 γ 改写为 γ'，或将 γ' 改写为 γ。更一般地，如果两个平行组合路径可以通过一系列初等组合同伦相互关联，则称它们组合同伦。

范畴 $\mathcal{A}(X)$ 按关系 $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \mathrm{id}$ 取商，得到由 α 态射生成的自由群胚 $\mathcal{F}(X)$。令 $\mathcal{C}(X)$ 表示群胚 $\mathcal{F}(X)$ 按关系 $\gamma_A = \mathrm{id}_x$ 进一步取商所得的对象，其中对每个 2-胞腔 A，任选一个 x。换言之，$\mathcal{C}(X)$ 是 $\mathcal{A}(X)$ 按组合同伦等价关系取商所得的对象。注意，对于每个 2- 胞腔 A，$\mathcal{C}(X)$ 的定义不依赖于 x 的选择。事实上，若 $x' \neq x \in A_0$ 定义了关系 $\gamma'_A = \mathrm{id}_{x'}$，则在 $\mathcal{F}(X)$中有 $\gamma'_A = \delta \gamma_A \delta^{-1}$，其中 $\mathcal{A}(X)(x, x')$ 中的态射 δ 由 γ_A诱导。因此，路径 γ 能够使用 $\gamma_A = \mathrm{id}_x$ 改写为 γ'，当且仅当它能够使用 $\gamma'_A = \mathrm{id}_{x'}$改写为 γ'。

令 $\Pi(X)$ 表示 基本群胚 X，也就是其对象为 X 中的点、态射为这些点之间路径的同伦类的群胚。

定理 1.1. *X 上的任意两条平行组合路径组合同伦，当且仅当 X 的每个路径连通分支都是单连通的。*

证明. 对于 $Y \subseteq X$，记 $\Pi(X)Y$为基本群胚的全子范畴，该子范畴由 X 中属于 Y的对象张成。于是，我们有一个群胚同构

$$\Pi(X)X_0 \cong \mathcal{C}(X)\ .$$

为证明这一点，可以分三步进行。首先，证明$\Pi(X_1)X_0$ 的 1-骨架的基本群胚 X 由 1-胞腔的粘接映射所生成的映射同伦类自由生成，也就是说，由 α-态射 [Bro06，9.1。5]自由生成。由此得到 $\Pi(X_1)X_0 \cong \mathcal{F}(X)$。其次，证明 $\Pi(X_2)X_0$ 的 2-骨架的基本群胚 X 是自由群胚 $\Pi(X_1)X_0$ 对关系 $\gamma_A = 1$取商所得的群胚；其中 A 是 X [Bro06，9.1。6]中的一个 2-胞腔。通过反复应用塞弗特–范坎彭定理即可证明这一点；于是有 $\Pi(X_2)X_0 \cong \mathcal{C}(X)$。第三，证明包含映射 X_2 到X 中诱导基本群胚的一个同构 $\Pi(X_2)X_0 \cong \Pi(X)X_0$ [Bro06，9.1。7],

由此完成同构 $\Pi(X)X_0 \cong \mathcal{C}(X)$ 的证明。于是定理成立，因为 X 的每个路径连通分支都是单连通的，当且仅当其基本群胚$\Pi(X)$ 是平凡的；而这又当且仅当其全子范畴 $\Pi(X)X_0$ 是平凡的。□

注意，任何 CW复形都是局部道路连通的，因此它是连通的，当且仅当它是道路连通的。因此，在前面的定理中，我们本可以将“路径连通分支”替换为“连通分支”。

我们称 X 是 组合连通的，如果 X的任意两个顶点之间都存在一条组合路径。在前面的证明过程中，我们特别证明了以下结果。

推论 1.2。 正则*CW*复形 X 是组合连通的，当且仅当它是连通的。

1.2。 **Morse `相干性**。 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个多面体复形。设 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 是 定义在 <style id='18}> X 的边上的一般向量， X其含义是，对于顶点的任意一对 x， $y \in X$ 若它们属于 X的同一条边， $\langle \vec{v}$则有 $x\rangle \neq \langle \vec{v}$， $y\rangle$。这样的一个一般向量 $\vec{v}$ 在 X的边上诱导出自然定向：从泛函 $\langle \vec{v}$取最小值的源顶点 $-\rangle$ 指向其取最大值的目标顶点。

关于多面体复形，一个基本且非常有用的事实是，对于任意面$F \subseteq X$ 的 X，都存在唯一的源顶点 $\mathrm{sc}(F)$ ，使得其所有邻接边 $e \subseteq F$均为出边；同时还存在唯一的汇顶点 $\mathrm{sk}(F)$ ，其邻接边全部为入边，参见[Zie95，定理 3。7]更一般地，将邻接边 $e \subseteq X$ 全部为入边的顶点称为局部汇点；当 X 只有一个这样的顶点时，我们称其为全局汇，并将其记作 $\mathrm{sk}(X)$。

令 $H := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, y\rangle = 0\}$ 为与 $\vec{v}$正交的线性超平面。对于每个顶点$x \in X$，选取 $\varepsilon > 0$ ，使得 $\langle \vec{v}, x\rangle$ 与 $\langle \vec{v}, x\rangle + \varepsilon$ 之间的区间不包含任何其他顶点在“高度”函数 $\langle \vec{v}, -\rangle$下的像。

定义1.3。 顶点的出链$\mathrm{Lk}^+(x, X)$ 是顶点 $x \in X$ 与 $\mathcal{F} \cap (H + x + \varepsilon\vec{v})$ 这一族面 $\mathcal{F}(x$的交集 $X)$， $= \{F \subseteq X \mid : (F) = x\}$ 与仿射超平面$H + x + \varepsilon\vec{v}$的交集。

回想一下 [Zie95第2节1] 中的内容： 多胞体 P/x 在顶点 P 处的顶点图形 x是通过用一个超平面切割 P 而得到的，该超平面切去唯一的顶点 x。这样的切割在 $(k-1)$-面 P/x 与 k-面 P之间建立了一个双射，其中后者包含x [Zie95命题24]。

引理 1.4。 对于任意 $k \geqslant 0$， $\mathcal{F}(x$的 k-面与$\mathrm{Lk}^+(x\, X)$的$(k-1)$-面之间存在一个双射。

证明。 每个按包含关系极大的面 $\mathcal{F}(x, X)$ 都是一个多胞体 P，其交集 $P \cap (H + x + \varepsilon\vec{v})$ 是 P/x 在 P处的 x顶点图形。根据 [Zie95， 命题 2， 4],与 k面的 P和 $(k-1)$面的 P/x之间存在双射。汇集 $\mathcal{F}(x, X)$所有极大面的这些双射，并作出适当的识别，即可得到所需的整体双射。□

本节将重点讨论出射链接连通的多面体复形。下面的命题阐明了这一条件的拓扑意义。

命题 1.5。设 X 为多面体复形。若存在一般向量 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$，使得每个顶点的出链都是连通的，那么 X 的每个路径连通分支都是单连通的。

证明。设 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 是相对于 X 一般的，并假设每个顶点的出链都是连通的。由于 $\vec{v}$ 在边上一般，它在 X 上定义了莫尔斯函数 $\langle \vec{v}, - \rangle$，其含义见 [BB97，定义 2.2]。与经典莫尔斯理论一样，可以通过考察连续的水平集来确定 X 的同伦型。对于 $t \in \mathbb{R}$，记 X_t 为 X 的闭子空间，其中包含满足 $\langle x, \vec{v} \rangle$ 至少为 t 的点 x。设 x 是 X 中高度为 $h = \langle x, \vec{v} \rangle$ 的顶点。首先注意到，对某个足够小的 $\epsilon > 0$，$X_{h+\epsilon}$ 与 $X_{h'}$ 同伦等价，其中 $h' > h$ 是下一个更大的、存在顶点的高度。也就是说，X 的同伦型只会在顶点处发生变化（见 [BB97，引理 2.3]）。接着，证明 X_h 与 $X_{h+\epsilon}$ 和沿着 x [的出链粘接的、以 x 的出链为底的锥所构成的推出同伦等价（见 BB97，引理 2.5]）。根据我们的假设，x 的出链是连通的，因此以它为底的锥是单连通的。由于单连通空间沿连通空间的推出总是单连通的（这是塞弗特–范坎彭定理的一个应用），由归纳法可知，X 的每个路径连通分支都是单连通的（见 [BB97，推论 2.6] 的第 (3) 点）。□

命题 1.5 的逆命题一般并不成立：许多单连通多面体复形（例如图 1所示的复形）对于许多（有时甚至是所有）一般位置定向向量的选择，都有不连通的出向链接。

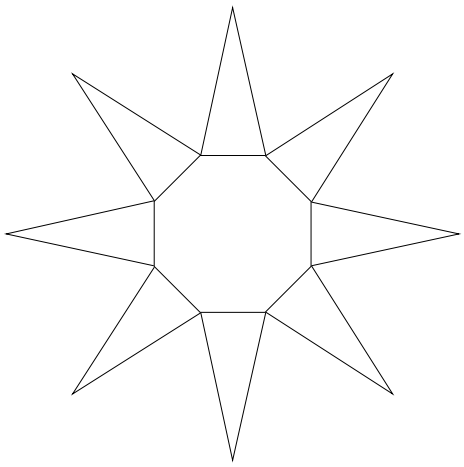


FIGURE 1. 一个单连通多面体复形，对每一种一般向量的选择，它的出向链接都是不连通的。

具有连通出向链接的一类重要复形是多胞体，这将在接下来的几节中成为我们研究的主要对象。

命题 1.6. 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个多胞体，且 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 相对于 P是一般的。那么， P 的每个顶点的出向链接都是连通的。

证明。 定义线性超平面 $H := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v},\ y\rangle = 0\}$，并考虑两个半空间 H^-: $= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v},\ y\rangle < 0\}$和 $H^+ := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v},\ y\rangle < 0\}$。由于 $\vec{v}$不垂直于 P的任何边，它将顶点图形 P/x的顶点划分为两个连通分支：位于 H^-中的顶点，它们对应于 P在 x处的入向边；以及位于 H^+中的顶点，它们对应于 P在 x处的出向边。因此， x 的出链是连通的，证明完毕。□

从现在起，我们假设所考虑的多面体复形 X 都赋有正则 CW 结构，并配备了一般向量 $\vec{v}$。结合命题 1.5 与定理 1.1，可知任何出向链接均连通的多面体复形 X 都满足如下性质：“在X 上的任意两条平行组合路径都是组合同伦的”。现在我们将沿着另一条更具组合性的路径（确实如此！）推导同一结论，并由此接近 [ML63，定理 31]。

一条组合路径 γ上 X是 有向的 当任意一对 (e, f) 相邻边 γ满足 $\mathsf{sk}(e) = \mathrm{sc}(f)$时。如果不存在歧义，我们将省略形容词“组合”，只称其为“有向路径”。

本节余下部分将使用组合连通性的概念；正如我们在推论 1.2中所见，对于我们所考虑的空间，它等价于连通性。

引理 1.7。 设 X 是一个多面体复形，带有一般向量 $\vec{v}$，且每个顶点的出链都是组合连通的。设 e、e' 是 X 的两条边，使得$\mathrm{sc}(e) = \mathrm{sc}(e')$，并假设存在从$\mathrm{sk}(e)$ 和$\mathrm{sk}(e')$ 分别通向局部汇点 s 和 s' 的有向路径。那么，我们有 $s = s'$。

证明。定义顶点 x 的高度 $\mathfrak{h}(x)$ 为从 x 出发、位于 X 中的最长有向路径的长度。由于 $\vec{v}$ 是一般的且 X_0 是有限的，这一定义良好。我们对 $\mathfrak{h}(x)$ 进行归纳。对于满足 $\mathfrak{h}(x) = 0$ 的顶点 x，命题显然成立。假设上述断言对所有满足 $\mathfrak{h}(x) = n$ 的顶点 $x \in X$ 都成立，并考虑一个满足 $\mathfrak{h}(x) = n + 1$ 的 x。由于出链 $\mathsf{Lk}^+(x, X)$ 是组合连通的，因此存在一条组合路径 θ，它位于 $\mathsf{Lk}^+(x, X)$ 中，连接分别对应于 e 和 e' 的顶点（引理 1.4）。 θ 确定了 X 的一列边 $e_0 := e, e_1, \ldots, e_k, e' =: e_{k+1}$，对所有 $0 \leqslant i \leqslant k + 1$ 都有 $\mathsf{sc}(e_i) = x$。此外，每一对相邻边 e_i, e_{i+1} 都确定了 X 的一个二维面 F_{i+1}。现在，对每个满足 $1 \leqslant i \leqslant k$ 的 e_i，选取一条从 $\mathsf{sk}(e_i)$ 出发并经过 $\mathsf{sk}(F_i)$ 的最长有向路径。这些路径都终止于某个局部汇点 s_i，其中包括 $s_0 := s$ 和 $s_{k+1} := s'$。由于对所有 $0 \leqslant i \leqslant k+1$ 都有 $\mathfrak{h}(\mathsf{sk}(e_i)) < \mathfrak{h}(x)$，我们可以对从 $\mathsf{sk}(e_i)$ 通向 s_i 和 s_{i+1} 的两条有向路径应用归纳法，从而得到 $s_i = s_{i+1}$。因此，我们得到 $s = s_0 = s_1 = \cdots = s_k = s_{k+1} = s'$，证毕。□

两条平行有向路径称为初等组合同伦，如果它们作为无向路径相同。若它们之间可通过一系列针对有向路径的初等组合同伦相互关联，则称它们组合同伦。

下述命题1.8 及其推论定理1.9 以拓扑学术语表述了 Mac Lane 在 [ML63定理 31]中使用的原始证明技巧。请注意，命题1.8 首先涉及有向路径，而定理1.9 讨论一般的无向情形。

命题 1.8. 设 X 是一个多面体复形，且 $\vec{v}$ 在 X 的边上是一般的。考虑以下三个性质：

(i) 每个顶点的出链都是组合连通的；*(ii)* 每个连通分支中都有一个全局汇；*(iii)* X 上任意两条平行的有向组合路径都是组合同伦的。那么， X 满足 *(i)* 当且仅当它满足 *(ii)* 和 *(iii)*。

证明。首先，我们证明 (i) 蕴含 (ii)。假设同一个连通分支中有两个局部汇点 s_1 和 s_2。考虑一条连接 s_1 与 s_2 的组合路径 γ，其存在性由推论 1.2 保证。我们对 γ 中峰的数量进行归纳，也就是这样的顶点 x 的数量：它是两条边 e、e' 的源点 $\mathsf{sc}(e) = x = \mathsf{sc}(e')$，其中这两条边属于 γ。路径 γ 至少有一个峰，否则 s_1 和 s_2 不可能都是局部汇点。如果 γ 只有一个峰，则由引理 1.7 可得 $s_1 = s_2$。现在假设对于任意 $k \leqslant n$，若 γ 有 k 个峰，则有 $s_1 = s_2$。若 γ 有 $n+1$ 个峰，考虑 γ 中第一个峰 $x = \mathsf{sc}(e) = \mathsf{sc}(e')$。由引理 1.7，存在一条从 $\mathsf{sk}(e')$ 到 s_1 的有向路径 δ。用 δ 替换 γ 中终止于 e' 的初始部分，便得到一条有 n 个峰的路径；由归纳假设可得 $s_1 = s_2$，证明完毕。

其次，我们证明 (i) 蕴含 (iii)。假设 X 是连通的，否则我们对每个连通分支应用相同的推理。根据上一段，我们知道 X 有一个全局汇 $\mathsf{sk}(X)$。假设每个顶点的出链都是组合连通的。设 γ 和 γ' 是连接两个顶点 x 和 y 的两条平行有向路径。我们证明它们是组合同伦的。我们对 m 进行归纳，其中 m 是 x 和 y 之间在 X 中有向路径的最大长度。不失一般性，我们可以假设 $y = \mathsf{sk}(X)$，因为如果 $y \neq \mathsf{sk}(X)$，我们总能找到一条连接 y 和 $\mathsf{sk}(X)$ 的有向路径。当 $m = 0$ 和 $m = 1$ 时，结论显然成立。假设该命题对 $m = k-1$ 的情形成立，$k \geqslant 2$，并考虑满足 $m = k$ 的两条路径 γ 和 γ'。令 e 和 e' 分别表示 γ 和 γ' 中与 x 相邻的边。我们分三种情况讨论。

(1) 如果 $e = e'$，我们可以对 $\gamma \backslash e$ 和 $\gamma' \backslash e'$应用归纳假设。(2) 如果 $e \neq e'$ 和两条边位于 X的同一个二维面 F 上，那么根据归纳假设，我们有 γ 和 γ' 分别与路径 δ 和 δ' 组合同伦，这两条路径定义如下：它们分别沿着包含 e 和 e'的唯一路径，从 $x = \mathsf{sc}(F)$ 到 $\mathsf{sk}(F)$，然后沿着同一条任意有向路径从 $\mathsf{sk}(F)$ 到 y。根据定义， δ 和 δ' 组合同伦，因此由组合同伦等价关系的传递性可得结论。(3) 假设 $e \neq e'$，并且 e 和 e' 不在 X的同一个二维面上。由于 x 的出链是组合连通的，因此该链中存在一条组合路径 θ，连接分别对应于 e 和 e' 的顶点（引理 1.4）。对于路径 θ上的 X 的每条边 e_i，在 X 中选择一条有向路径 γ_i，从 x 到 $y = \mathsf{sk}(X)$

经过 e_i。现在，对 θ中相邻的 e_i 和 e_{i+1} 对应的每一对平行有向路径$(\gamma_i,\ \gamma_{i+1})$应用上文的第（2）点，再根据组合同伦等价关系的传递性即可得出结论。

最后，我们证明 (ii) 和 (iii) 蕴含 (i)。假设每一对平行有向组合路径都是组合同伦的。我们证明，对于任意顶点 x，其出链是组合连通的。事实上，取两条边 $e,\ e'$，它们属于 X，且源点为 x，并考虑将它们延伸为从 x 到 $\mathsf{sk}(X)$ 的有向路径 $\gamma,\ \gamma'$。根据假设，这两条路径是组合同伦的，也就是说，存在一列从 γ 到 γ' 的平行有向路径。这些路径中各自的首条边所组成的集合，在 x 的出链中定义了一条连接 e 和 e' 的组合路径。因此，这条出链是组合连通的。□

定理 1.9。设 X 是一个带有一般向量 $\vec{v}$ 的多面体复形，并且每个顶点的出链都是组合连通的。那么，X 上任意两条平行组合路径都是组合同伦的。

证明。假设 X 是连通的，否则对每个连通分支分别应用这一论证。由命题 1.8，多面体复形 X 有一个全局汇 $\mathsf{sk}(X)$，因此结论对有向路径成立。下面说明这蕴含无向情形。设 γ 是 X 上连接 x 与 y 的一条无向组合路径。对于沿着 γ 的每个顶点 z，都可以选取一条从 z 到 $\mathsf{sk}(X)$ 的有向路径 δ_z。注意，对于 γ 的任意一条边 $e\colon z \to z'$，根据假设，有向路径 δ_z 与 $\delta_{z'}e$ 组合同伦。从 x 出发，每次沿一条边归纳前进，并利用同伦等价关系的传递性，可得 γ 与 $\delta_y^{-1}\delta_x$ 组合同伦。再取另一条与 γ 平行的组合路径 γ'，同样的论证表明 γ' 与 $\delta_y^{-1}\delta_x$ 组合同伦。因此，γ 与 γ' 组合同伦，证明完毕。□

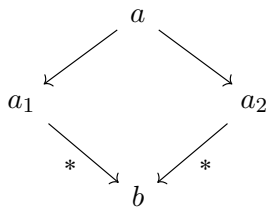
正如命题1.5 所示，定理1.9 适用的多面体复形类是单连通复形的真子类。这意味着定理1.9 的逆命题不成立，因此 Mac Lane 最初的证明远未达到定理1.1所具有的普遍性。不过，这对我们的目的已足够，因为——正如我们在命题1.6中所见——它适用于任意多胞体。

一般定向多面体复形的另一个特点是，它们的 1-骨架定义了抽象重写系统，而这些系统具有终止性和合流性，下面我们将对此进行说明。

1.3. **重写系统**。关于重写系统的更多详情，请参阅 [BN98]。

定义 1.10。一个抽象重写系统是一个集合 A，并配有一个二元关系 $\to$。

我们用 $\xrightarrow{*}$ 表示 $\to$的自反传递闭包。我们称 $(A,\ \to)$ 为 局部合流（分别称为 合流），如果对所有 $a,\ a_1,\ a_2 \in A$ 满足 $a_1 \leftarrow a \to a_2$（分别满足 $a_1 \xleftarrow{*} a \xrightarrow{*} a_2$）的情形，都存在一个项 b 使得 $a_1 \xrightarrow{*} b \xleftarrow{*} a_2$。该图表



称为 局部合流图。若每个约化序列 $a \to a_1 \to a_2 \to \cdots$ 最终都会终止，则称重写系统具有 终止性 。元素 $a \in A$ 若 可约的，则存在一个 $a' \in A$ 使得 $a \to a'$；否则称其为 不可约的 —— 这是重写术语中 local sink 的同义词！我们称 b 为 范式，属于 a，如果 $a \xrightarrow{*} b$ 且 b 不可约。

给定一个多面体复形 X 和一个一般向量 $\vec{v}$，可以考虑由 $\vec{v}$ 在 X的顶点上定义的抽象重写系统。

定义 1.11. 顶点重写系统 是有序对 $(X_0, \to)$ 由顶点集合 X_0 构成，该集合属于 X；此外还配有以下关系：若 $x \to y$ 且 x 和 y 是同一条边的顶点，并且 $\langle v, x\rangle < \langle v, y\rangle$。

根据此定义，当且仅当在 $x \xrightarrow{*} y$ 中存在一条从x 到 y 的有向路径时， X_1。定理 1.9 的假设要求重写系统 $(X_0, \to)$ 是终止且合流的。

命题 1.12. 设 X 是一个多面体复形， $\vec{v}$ 是一个一般向量。若每个顶点的外向链接都是组合连通的，则重写系统 $(X_0, \to)$ 是终止且合流的。

证明。 由于 $\vec{v}$ 是一般的，因此沿边严格递增，故它定义了一个偏序；又由于集合 X_0 是有限的，重写系统 $(X_0, \to)$ 是终止的。根据命题 1.8， X的每个连通分支中都有一个全局汇。由此可得合流性：设任意一对顶点 x, y 位于同一连通分支中，由于 $\vec{v}$ 是一般的，存在有向路径 $x \xrightarrow{*} s \xleftarrow{*} y$ 通向该连通分支的全局汇 s 。 □

推论 1.13。 任意定向多胞体 P的顶点上的抽象重写系统都是终止且合流的。此外，每对顶点都有唯一范式 $\mathrm{sk}(P)$。

回顾一下，若多胞体 P 的每个顶点都恰好关联 $\dim P$ 条边，则称其为单纯的 。

引理 1.14。 若多胞体 P 是单纯的，则 (P_0的局部合流图与 $\to$) 的2-面的定向边界之间存在双射。

证明。 当 P 是单纯的时，每个顶点 P/x 的顶点图形 x 都是一个单纯形 [Zie95，命题 2。16], 其中 P/x 中的每条边都对应于 P的一个二维面（引理 1.4）。因此，每一对边 e， e' 其源点为 $x = \mathrm{sc}(e) = \mathrm{sc}(e')$，都确定了 P的一个二维面。 □

在如此一般的层面上，我们无法再多说什么。对于下一节将要讨论的那一类特定的歌剧范畴，其重写系统具有更多结构（它们是项 重写系统），并在一篇配套论文中进行了研究 [CLA24]。

2. Categorical coherence

2.1. 范畴化非对称算子。 本节中，我们始终考虑不带单位元的结构。除非另有说明，均默认“非幺”这一修饰语。

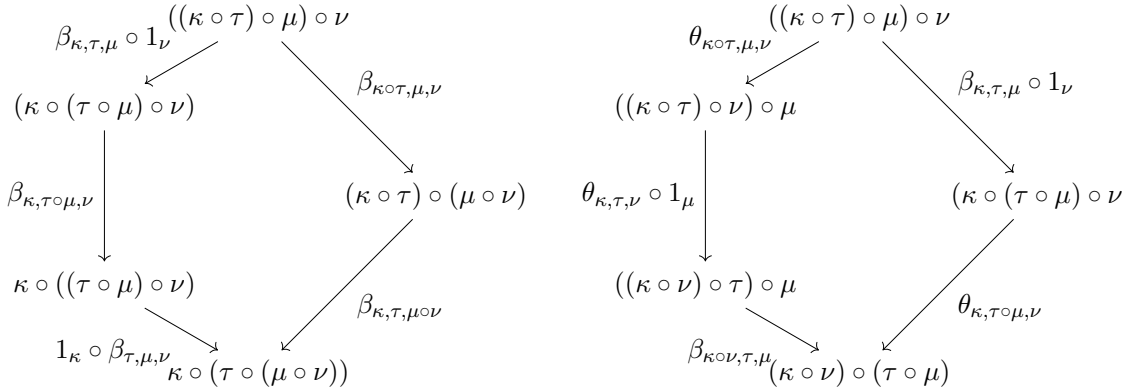
定义 2.1。 一个 范畴化非对称歌剧 $\mathcal{P}$ 是一个集合 $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 由小范畴构成，并配备双函子

$$\circ_i \quad : \quad \mathcal{P}(n)\times\mathcal{P}(k)\longrightarrow\mathcal{P}(n+k-1)\ , \quad \text{for } 1\leqslant i\leqslant n\ ,$$

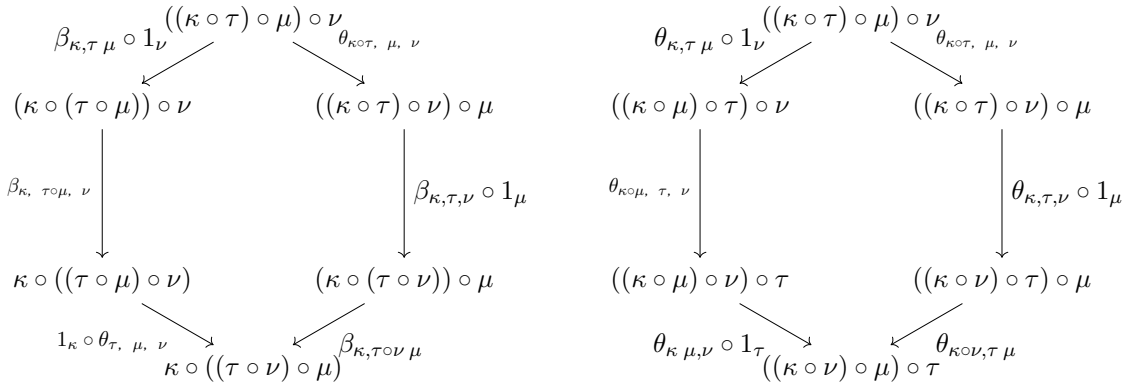
并且对每个 $\kappa\in\mathcal{P}(m)$, $\mu\in\mathcal{P}(n)$, $\nu\in\mathcal{P}(k)$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$ ，都有自然同构

$$\begin{aligned}\beta_{\kappa,\mu,\nu} \quad &: \quad (\kappa\circ_i\mu)\circ_{j+i-1}\nu\xrightarrow{\cong}\kappa\circ_i(\mu\circ_j\nu)\ ,\\ \theta_{\kappa,\nu,\mu} \quad &: \quad (\kappa\circ_i\nu)\circ_{j+k-1}\mu\xrightarrow{\cong}(\kappa\circ_j\mu)\circ_i\nu\ , \quad \text{when } i<j\ ,\end{aligned}$$

使得以下图表交换：五边形



以及六边形恒等式



.

上述图表适用于所有可复合的 β 和 θ；它们取决于索引 i，j，k，为便于阅读，索引已省略。请注意，集中于元数 1 的范畴化非对称歌剧就是非对称幺半范畴。

如命题 2.6 下文所述，我们可以将一个对象 $\mu \in \mathcal{P}(n)$ 描绘成一棵平面树，其中一个顶点标记为 μ，n 个叶子和一个根（即一个花冠）。$\circ_i$ 双函子对应于将一个花冠嫁接到另一个花冠之上的操作。反复应用 $\circ_i$ 可以用完全嵌套平面树来表示，其顶点由 $\mathcal{P}$中的对象标记，见图2。平面树的嵌套是由若干子树（即嵌套）组成的集合，这些子树彼此包含或互不相交。如果嵌套中嵌套的数量达到最大值，即等于该树的内部边数，那么它就是完全嵌套 [Lap22，定义 2。2]。

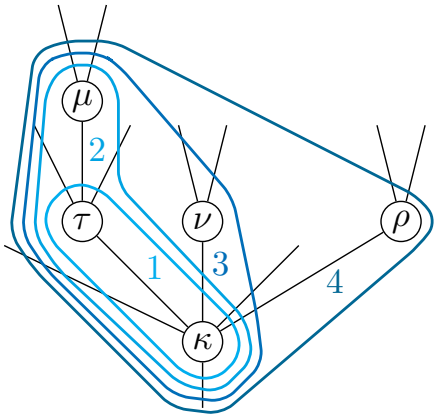


FIGURE 2. 一棵完全嵌套平面树。

这两条 β 和 θ 箭头分别对应于算子的顺序公理与并行公理，并联系了对具有 3 个顶点的树进行完全嵌套的两种可能方式，见图表 3。此外，对于每棵具有 4 个顶点的平面树，都有一个相干图（五边形或六边形），见图表 4。

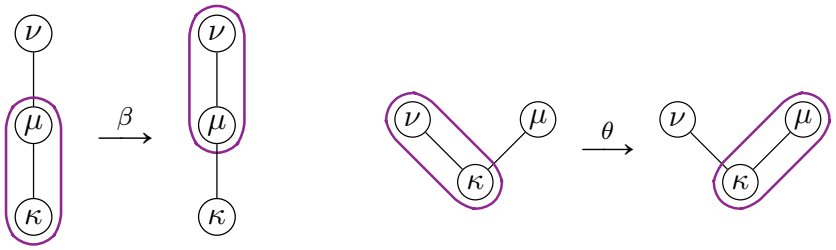


FIGURE 3. 定义范畴化非对称歌剧的 β 和 θ 同构。

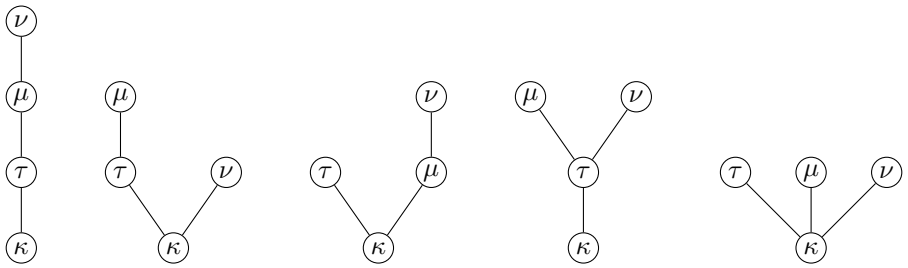


FIGURE 4. 五棵具有四个顶点的平面树，由此得到五边形（前三棵）和六边形（后两棵）恒等式。

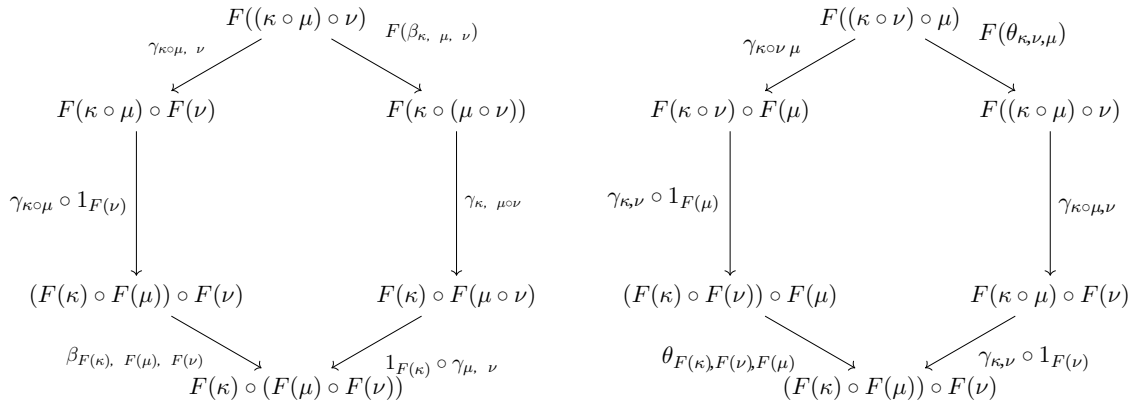
注 2.2。 K. Do˘sen 和 Z. Petri´c 在 [DP15 的第 12] 节中引入了弱 Cat-歌剧的概念。尽管乍看之下两种概念有所不同，但实际上它们是等价的。关键观察如下： θDo˘sen–Petri´c 的同构既包括定义 θ 2.1 中的同构，也包括它们的逆 θ^{-1}。因此，在弱 Cat-歌剧的定义中只有两个五边形相干图，即 $\beta pent_e$）和（$\beta\theta 2_e$）这两个 [DP15 第 9]节中的方程。形如（β $pent_e$）的图表集合，与由定义 2.1中的第一个五边形产生的图表集合相同；而形如（$\beta\theta 2_e$）的图表集合，则被划分为分别由定义 2.1中的第二个和第三个五边形产生的图表集合。

我们将在定理 2.5 中给出范畴化非对称幺半群相干性的两个拓扑证明。我们呈现方式的一个优点是，采用定向方法（见定理 2.5的第二个证明）后，我们得到一个相干性证明，其中 β 和 θ 都作为重写规则处理，这与 [DP15], 中的证明形成对照。后者分两个阶段进行，与 Mac Lane 对对称幺半范畴相干性的证明颇为相似（见注2.18）：先消去 β （重写），再处理 θ。

定义 2.3。 范畴化非对称歌剧的一个 强态射 $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是一族函子 $F_n : \mathcal{P}(n) \to \mathcal{Q}(n)$，并配有自然同构

$$\gamma_{\kappa,\mu} : F_{m-1+n}(\kappa \circ_i \mu) \xrightarrow{\cong} F_m(\kappa) \circ_i F_n(\mu)$$

使得以下图表交换：



.

如果这些自然同构是恒等映射，就称其为严格的。

再一次，上述图表适用于 β 和 θ 箭头的所有实例；为便于阅读，我们省略了 (i,j,k)-指标。请注意，集中于元数 1 的范畴化非对称歌剧之间的强（分别为严格）态射，是非对称幺半范畴之间的强（分别为严格）幺半函子。

2.2. 范畴化非对称歌剧的相干性。 现在我们旨在证明范畴化非对称歌剧的相干性定理。为了陈述该定理，我们在集合族 $S=\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ 上构造自由非对称范畴化拟序。我们定义一个范畴族 $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_n\}_{n\geqslant 1}$，其对象由以下规则给出：

(1) 若 $a\in S_n$，则 a 是 $\mathcal{S}_n$ 的一个对象；**(2)** 若 $t_1\in\mathcal{S}_m$ 且 $t_2\in\mathcal{S}_n$，则对任意 $1\leqslant i\leqslant m$，$t_1\circ_i t_2$ 是 $\mathcal{S}_{m-1+n}$ 的一个对象。

若对象 t_1 属于 $\mathcal{S}_n$，我们就说 t_1 的元数为 n。现在我们定义一个基本态射集合 $M\beta$：对于每个 $t_1\in\mathcal{S}_m$、$t_2\in\mathcal{S}_n$、$t_3\in\mathcal{S}_k$、$1\leqslant i\leqslant m$ 和 $1\leqslant j\leqslant n$，都有 $(t_1\circ_i t_2)\circ_{j+i-1}t_3\leftrightarrow t_1\circ_i(t_2\circ_j t_3)$：$\beta^{-1}$；并且只要 $i<j$，就有 θ：$(t_1\circ_i t_3)\circ_{j-1+k}t_2\leftrightarrow(t_1\circ_j t_2)\circ_i t_3$：$\theta^{-1}$。接着，我们按以下规则定义范畴族 $\mathcal{S}$ 的生成态射：

(1) 若 $\phi\in M$，则 ϕ 是 $\mathcal{S}$的生成态射；**(2)** 若 ϕ：$t_1\to t_2$是 $\mathcal{S}$中的生成态射，且 $t_3\in\mathcal{S}$，则对任意介于 1 和 t_1 的元数之间的 i（分别地，介于 1 和 t_3的元数之间的 j），$\phi\circ_i\mathrm{id}$：$t_1\circ_i t_3\to t_2\circ_i t_3$和 $\mathrm{id}\circ_j\phi$：$t_3\circ_j t_1\to t_3\circ_j t_2$ 都是生成态射。

注意，根据构造，对于每个态射 ϕ：$t_1\to t_2$，对象 t_1 和 t_2 具有相同的元数，我们称 ϕ 具有此元数。接着，我们将 $\mathcal{S}_n$ 定义为所有元数为 n的生成态射所生成的自由范畴。至此，我们完成了范畴族 $\mathcal{S}$ 的构造。

定义 2.4。 我们将 $\mathcal{F}(S)$ 记作范畴族 $\mathcal{S}$ 对局部化（即反转 β 和 θ 态射）、$\circ_i$ 的双函子公理、β 和 θ 的自然性条件，以及定义范畴化非对称歌剧的相干图表（五边形和六边形）取商所得的结果。

由此可得， $\mathcal{F}(S)$ 是由 S 生成的自由范畴化非对称歌剧。也就是说，对于任意范畴化非对称歌剧 $\mathcal{P}$，以及任意函数族 $\rho_n : S_n \to \mathrm{Ob}(\mathcal{P}(n))$，都存在唯一的非对称范畴化歌剧的严格 态射 $\mathcal{F}(S) \to \mathcal{P}$，使其延拓 $\rho = \{\rho_n\}_{n\geqslant 1}$。将其与商映射 $\mathcal{S} \to \mathcal{F}(S)$ 复合，便得到逐层函子 $[[-]]\colon \mathcal{S} \to \mathcal{P}$。

定理 2.5 (相干定理)。 对于任意范畴化非对称歌剧 $\mathcal{P}$、任意函数族 $\rho :\ S \to \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$, 以及任意两个平行态射 $\phi_1, \phi_2 :\ t_1 \to t_2$属于 $\mathcal{S}$，都有 $[[\phi_1]] = [[\phi_2]]$。

为了证明定理 2.5，我们首先需要回顾歌剧多面体的构造。歌剧多面体是一族多胞体，其面与平面树所有嵌套的集合之间存在双射。详情请参阅 [Lap22，第 2] 节；另见 [DP15，第 13] 节以及 [COI19]。给定一棵具有 n 条内部边的平面树 t，以及 t的一个完整嵌套 $\mathcal{N}$，可通过一个由 J.-L. Loday 提出的简单算法，将其与一个点 $M(t,\mathcal{N}) \in \mathbb{R}^n$ 对应起来 [Lap22，第 2.2]节。歌剧多面体 $P_t \subset \mathbb{R}^n$ 是所有极大嵌套$\mathcal{N}$ 中的点 $M(t,\mathcal{N})$的凸包，其中这些极大嵌套属于 t。它的维数为 $n-1$。接着可以证明，按反向包含关系排序的 t的嵌套偏序集，同构于 P_t [的面的偏序集15]Lap22，命题 2.15]。面的维数等于 n 减去对应嵌套中嵌套的数量，后者属于 t。

从叶子向根读取一棵平面树 t，可确定每个顶点处的一组入向边以及一条出边。 t给定集合族 S 和平面树 t，若用 S 中的元素 t 装饰 各顶点，且每个顶点处的入向边数都等于装饰该顶点的 S 元素的元数，那么这种顶点装饰称为容许的。现在，考虑由多胞体构成的集合 $\mathcal{O}(S)$，其中每种容许装饰的平面树 t （用 S中的元素装饰）都对应一份歌剧多面体 P_t 。

命题 2.6。 存在以下对象之间的双射：

(1) $\mathcal{S}$ 中的对象与 $\mathcal{O}(S)$中歌剧多面体的顶点；*(2)* $\mathcal{S}$ 中的生成态射与 $\mathcal{O}(S)$中歌剧多面体的边；*(3)* 双函子性、自然性和相干图表与 $\mathcal{O}(S)$中歌剧多面体的2维面。

证明。对于 S_n 的每个元素 a，我们将其关联到一个平面花冠，其有 n 个叶子，顶点由 a 装饰。接着，我们将 $a \circ_i b$ 与这样一棵平面树等同起来：它由在由 a 装饰的花冠的第 i 个叶子处嫁接由 b 装饰的花冠而得。以此方式继续，并记住花冠嫁接的顺序，我们便得到所有可能的完全嵌套平面树，其顶点由 S 的元素装饰（图 2）。 $\mathcal{S}$ 中的一个生成态射 f，是对全嵌套树 t 应用某一条结合律规则 β 或 θ，且只移动一个嵌套（图 3）。若 t 有 n 条内部边，忘掉被移动的嵌套后，就得到 t 的一个含有 $n-1$ 个嵌套的嵌套结构。我们将 f 与歌剧多面体 P_t 在 $\mathcal{O}(S)$ 中由此嵌套结构标记的边关联起来，见 [Lap22，定义 2.8 和命题 3.11]。接下来需要考察将两个生成态射应用于一棵具有 n 条内部边的给定全嵌套树 t 后可能得到的所有图表。这些图表来自在同一棵全嵌套平面树中移动两个不同的嵌套。先移动这两个嵌套中的一个或另一个，会遇到两种情形：

（A1）如果两个嵌套互不相交，则得到一个双函子性方块；（A2）如果两个嵌套彼此嵌套，但根不同，则得到一个自然性方块；（B）如果两个嵌套彼此嵌套且根相同，则得到一个五边形或六边形，如定义 2.1。

对于这样的图表，我们将歌剧多面体的二维面 P_t 在 $\mathcal{O}(S)$ 与以下嵌套相对应： t 该二维面是通过忘记沿边移动的两个嵌套得到的。关于二维面的更详细分析，请参阅 [CLA24，第 2] 节。□

注记2.7。每一种可能的初始移动选择都会产生一个二维面，这意味着歌剧多面体 P_t 是一个单纯的多胞体 [DP11，第 9]节。引理1.14表明，这一性质确保了几何证明与基于重写理论的相干性证明之间的对应关系；后者的更多细节请参阅 [CLA24]。

命题2.6中的双射，其概念来源在于：歌剧多面体的面的组合结构与树的单子完全对应 [LV12，第 5.6 节。1]换言之，这是因为歌剧多面体（通过胞腔链函子）编码了着色对称歌剧的极小分解；该歌剧的代数是无幺元的非对称运算子，参见 [VdL03]和 [Lap22，第 4 节。1]。

我们现在可以使用关于多胞体的非定向或定向拓扑相干性结果来证明定理 2.5。

定理 *2.5* 的证明。 由命题 2.6 中的第（2）点可知， $\mathcal{S}$的态射与 $\mathcal{O}(S)$上的歌剧多面体的组合路径构成双射。因而， $\mathcal{S}$ 中的两个平行态射定义了 P_t 中某个 $\mathcal{O}(S)$歌剧多面体上的两条平行组合路径。由于歌剧多面体 P_t 是单连通的，定理 1.1 表明这两条组合路径是组合同伦的。根据命题 2.6 中的第（3）点，歌剧多面体的二维面恰好是双函子性或自然性方块、五边形或六边形（见证一个相干条件），如定义 2.1所述。因此， ϕ_1中的两个平行态射 ϕ_2 在 $\mathcal{S}$的商中相等， $\mathcal{F}(S)$因而它们的像 $[[\phi_1]]$， $[[\phi_2]]$在 $\mathcal{P}$中也相等。□

定理的第二个证明*2.5*. 另外，由于歌剧多面体是多胞体，可以使用命题 1.6和定理1.9。如 [Lap22，命题 3。11], 选择一个一般向量 $\vec{v}$ ，其坐标严格递减，由此得到定义 2.1 中给出的图表在二维面上的定向。随后便可得到相干性的拓扑证明，该证明与 Mac Lane 的原始证明非常接近 [ML63，定理 3。1], 并将其适当地推广到范畴化歌剧。□

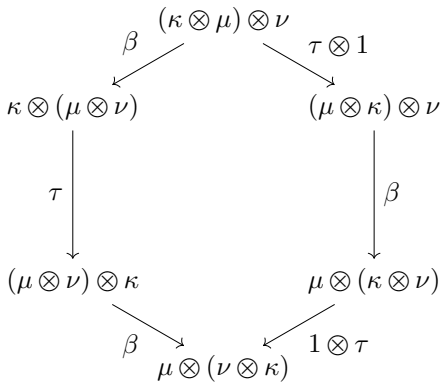
根据注释 2.2，我们知道定理2.5 为弱 Cat-歌剧的相干性提供了另一种更简洁的证明 [DP15，命题 14。2]。顺带一提，它还为循环对称范畴化算子的相干性证明提供了另一种思路 [CO20]。

将上述定理限制到集中于元数 1 的非对称运算子上，范畴 $\mathcal{F}(S)$ 就成为建立在 S 上的自由非对称幺半范畴，从而得到以下推论。

推论 2.8（非对称幺半范畴的 Mac Lane 一致性定理）。对于任意非对称幺半范畴 $\mathcal{C}$、任意函数 $\rho\colon S \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，以及 $\mathcal{S}$ 中的任意两个平行态射 ϕ_1、$\phi_2\colon t_1 \to t_2$，均有 $[[\phi_1]] = [[\phi_2]]$。

备注 2.9。如第1.3节末尾所述，通过选取坐标严格递减的一般向量，在歌剧多面体的顶点上得到的重写系统实际上是项重写系统。命题 2.6 第 (3) 点中类型为 (B) 的面（即相干条件）恰好对应于这些重写系统的临界对，见 [CLA24，第 3 节。4]此外，最近已证明，全嵌套平面树上的相关偏序集是格 [DS24]。

2.3. 对称幺半范畴。现在，我们沿用上述风格表述并证明 Mac Lane 关于对称幺半范畴的相干性定理。回顾一下，在对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中，除了自然同构 β（其分量为 $\beta_{\kappa,\mu,\nu}\colon (\kappa\otimes\mu)\otimes\nu \to \kappa\otimes(\mu\otimes\nu)$）之外，还有对合自然变换 τ（其分量为 $\tau_{\mu,\nu}\colon \mu\otimes\nu \to \nu\otimes\mu$）。这里，我们用 $\kappa,\mu,\nu,\ldots$ 表示该范畴中的对象，与第 2.1 节和第 2.2 节使用的记号一致。除了将定义 2.1 中第一个五边形里的 $\circ$ 替换为 $\otimes$ 得到的五边形之外，还有六边形



对所有对象 κ、μ、ν，属于 $\mathcal{C}$。

为了陈述相干定理，我们在一组 S 生成对象上构造一个自由范畴。我们定义一个小范畴 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$，其对象集

$$\mathcal{T}_S = \bigcup \{\mathcal{T}_A \mid A \text{ is a non-empty finite subset of } S\}$$

定义如下：

(1) if $a \in S$, then $a \in \mathcal{T}_{\{a\}}$;
(2) if $t_1 \in \mathcal{T}_A$ and $t_2 \in \mathcal{T}_B$, and if $A \cap B = \varnothing$, then $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}_{A\cup B}$.

我们可以将 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$ 的对象看作由 S 上的字母组成的完全加括号的词，其中字母不重复。接着，我们定义一个 M^{ML} 由基本态射 $\beta\colon (t_1\otimes t_2)\otimes t_3 \leftrightarrow t_1\otimes(t_2\otimes t_3)\colon \beta^{-1}$和 $\tau\colon t_1\otimes t_2 \leftrightarrow t_2\otimes t_1$，对每个 t_1、t_2、$t_3 \in \mathcal{T}_S$。接着，我们通过以下规则定义生成态射：$\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$：

(1) 若 $\phi \in M^{\mathrm{ML}}$，则 ϕ 是生成态射；

(2) 若 $\phi\colon\ t_1 \to t_2$ 是生成态射且 $t_3 \in \mathcal{T}_S$，则 $\phi \otimes \mathrm{id}\colon\ t_1 \otimes t_3 \to t_2 \otimes t_3$和 $\mathrm{id} \otimes \phi\colon$ $t_3 \otimes t_1 \to t_3 \otimes t_2$ 是生成态射。

接着，我们将 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$ 定义为由所有生成态射生成的自由范畴。至此，范畴 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$的构造完成。

定义 2.10。我们将 $\mathcal{F}(S)$ 记为 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$ 在局部化（将 β态射取逆）后，再按公理$\tau_{t_1,\ t_2} \circ \tau_{t_2,\ t_1} = 1$、双函子的公理、关于 β 和 τ的自然性条件，以及对称幺半范畴的相干条件取商所得的范畴。

由自由性可知，对于任意对称幺半范畴 $\mathcal{C}$以及任意函数$\rho\colon S \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，存在唯一的函子 $[[-]]^{\mathrm{ML}}\colon \mathcal{S}^{\mathrm{ML}} \to \mathcal{C}$，它扩张 ρ，并将形式的基本态射映射为 $\mathcal{C}$中的实际典范态射。此函子可经由商映射 $[-]^{\mathrm{ML}}\colon \mathcal{S}^{\mathrm{ML}} \to \mathcal{F}(S)$分解。

事实证明，Kapranov 的拓扑证明并非基于上述对 $\mathcal{F}(S)$ 的表示，而是基于该范畴的另一种表示；这种表示在 [BIP19，第 2] 节中有明确说明。我们来回顾一下这种表示。我们如下定义另一个范畴 $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$。它的对象与 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$ 的对象相同。我们定义一组 M^{K} 基本态射 $\beta\colon$ $(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 \leftrightarrow t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3)$：对于每个 t_1、t_2、$t_3 \in \mathcal{T}_S$，以及 τ：对于每个 a、$b \in S$，也就是说，我们将 τ 限定在生成对象上。生成态射的定义方式与 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$ 相同。注意，根据构造，$\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$ 是 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$ 的一个宽子范畴。

定义 2.11。我们将 $\mathcal{F}(S)^{\mathrm{K}}$ 记为 $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$ 对 β 态射作局部化（即将其求逆），并对 $\tau_{a,\ b} \circ \tau_{b,\ a} = 1$施加双函子的公理、关于 β的自然性条件、幺半群范畴的相干条件，以及图 5（左）中实线箭头所给出的十二边形形式的公理，其中 a、b、c 仅取遍 S。

我们在此暂停，反思这两种表述之间的区别。第二种表述中的生成元较少，而且我们不再有六边形。为了帮助理解，下面是 Mac Lane 本人对其六边形公理的阐释（原文照录，只将记号改为与本文一致），见 [ML63]:

> 实例 $\tau_{\kappa\otimes\mu,\ \nu}$ 将一个块 $\kappa\mu$ 与单个字母 ν互换；六边形条件指出，这种互换可以替换为 τ 的两个实例，分别将单个字母与 ν互换。反复使用六边形的实例进行此类替换，便可证明，任意相邻块之间的互换都可以替换为相邻字母之间的互换。

换句话说，六边形现在被视为定义，而非公理。但我们如何保证以这种方式定义的一般 τ 态射确实定义了一个自然变换？这正是十二边形的作用所在。

设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半范畴。再次利用自由性，任意函数 $\rho\colon S \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$都唯一地延拓为一个函子 $[[-]]^{\mathrm{K}}\colon \mathcal{S}^{\mathrm{K}} \to \mathcal{C}$。此函子是 $[[-]]^{\mathrm{ML}}$在 $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$上的限制，并可经由商函子 $[-]^{\mathrm{K}}\colon \mathcal{S}^{\mathrm{K}} \to \mathcal{F}(S)^{\mathrm{K}}$进行分解。

定理 2.12（对称幺半范畴的卡普拉诺夫相干定理）。对于任意两个平行态射 ϕ_1，$\phi_2\colon t_1 \to t_2$ 在 $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$中，均有 $[\phi_1]^{\mathrm{K}} = [\phi_2]^{\mathrm{K}}$。

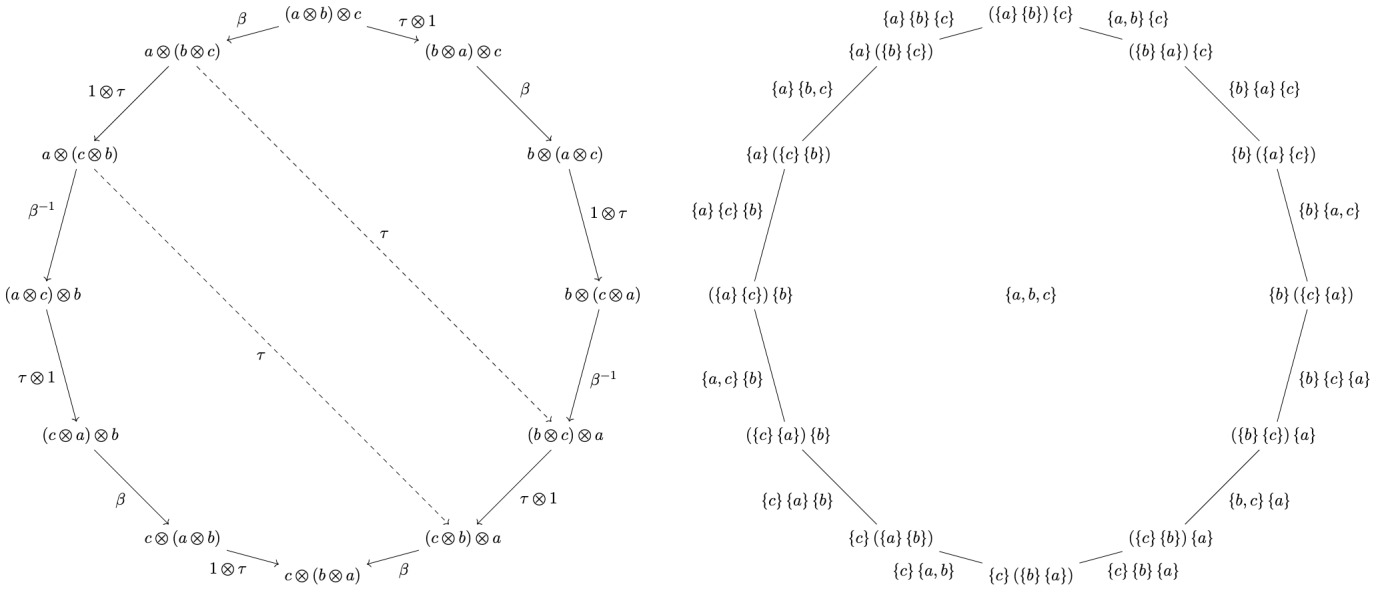


FIGURE 5. 卡普兰诺夫十二边形。

为了证明这种“卡普拉诺夫风格”的相干性，我们需要先回顾置换-结合多胞体的构造。这是一族多胞体，其面与有限集的带括号的有序划分构成双射。详情参见 [Zie95，第 9 节。3] 另见 [Kap93] 和 [RZ94]。给定一个基数为 n 的有限集 A，以及其元素的一个带括号的置换 σ，可以将投影从 n维立方体到具有 $n+1$ 个顶点的循环多边形 [Zie95，例 9.14], 所得的截面 γ^σ 与之关联；该截面在底面上的积分给出 $\mathbb{R}^n$中的一点 $M(\sigma)$。置换-结合多胞体 P_A是由所有 A元素的带括号的置换 σ 所对应的点 $M(\sigma)$构成的凸包。它的维数为 $n-1$。接着可以证明，按照下述规则排序的 A的带括号的有序划分所构成的偏序集，与 P_A [Zie95，定理 9.15]的面所构成的偏序集同构。

A 的带括号的有序划分可以画成平面树，其叶子以 A的一个划分中的各部分作为装饰。子面关系 $\prec$ 由两个条件定义：可以收缩树的一条边；或者移除一个所有入向边都是叶子的节点，并以这些入向边上装饰内容的并集装饰其出向边——此时该边成为叶子。极大面为 A。例如，对于 $A=\{a_1,\ldots\ldots,\ a_7\}$，以下是一个面：

$$(\{a_1\}\{a_4\}\{a_2,a_6\})\{a_3,a_5,a_7\}$$

它由以下两个元素覆盖。

$$\begin{aligned}(\{a_1\}\{a_4\}\{a_2,a_6\})\{a_3,a_5,a_7\} &\prec \{a_1\}\{a_4\}\{a_2,a_6\}\{a_3,a_5,a_7\}\\ (\{a_1\}\{a_4\}\{a_2,a_6\})\{a_3,a_5,a_7\} &\prec \{a_1,a_2,a_4,a_6\}\{a_3,a_5,a_7\}.\end{aligned}$$

给定集合 S，我们来考察由多胞体 $\mathcal{P}(S)$ 构成的集合，其中对每个有限子集 $A \subset S$，都取一个置换-结合多胞体 P_A。

命题 2.13。 存在双射，分别对应于

(1) $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$ 的对象与 $\mathcal{P}(S)$中置换结合多面体的顶点，*(2)* $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$ 的生成态射与 $\mathcal{P}(S)$中置换结合多面体的边，*(3)* 双函子性、自然性和相干图表与 $\mathcal{P}(S)$中置换结合多面体的2维面。

证明。 P_A 的零维面是字母为单元素集合的完全加括号的词，与 $\mathcal{T}_A$的元素显然一一对应。一维面是

- 要么是字母均为单元素集合、但有一个字母是二元素集合 $\{a_i,\ a_j\}$ 的完全加括号的词，并且包含基本态射$\tau_{a_i,\ a_j}$,•的一次应用；要么是一个由单元素集合组成的“近似”完全加括号的词，只移除了一个括号，从而得到子词 $(\{a_i\}\,\{a_j\}\,\{a_k\})$，其中包含基本态射$\beta_{a_i,\ a_j,\ a_k}$ 或$\beta^{-1}_{a_i,\ a_j,\ a_k}$ 的一次应用——边的定向由其端点顶点的形状“决定”。

最后，二维面可以用与命题 2.6 中大致相同的方式进行分析，并可看出它们分别对应于双函子性、 β的自然性，以及五边形和十二边形。我们在图5 （右）中描绘了后者的偏序集视图。读者也可以从该图中自行确认，如何根据右侧无定向的十二边形重构左侧 β 箭头的定向。□

定理 *2.12* 的证明。证明与定理 2.5 的证明类似，可以使用 VanKampen（定理 1.1）方法，也可以使用 Morse（命题 1.6 和定理 1.9）方法。□

注 2.14。或者，也可以对来自 的单纯交换结合多面体 采用相同的策略，该策略涉及对对称幺半范畴的另一种等价表示。 [BIP19], 。

以下命题确立了对称幺半群范畴的 Mac Lane 表示与 Kapranov 表示之间的关系。

命题 2.15 （Kapranov–Mac Lane 比较）。

(1) 设 $\phi_1, \phi_2 :\ t_1 \to t_2$ 是 $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$ 的平行态射，并且假设 $[\phi_1]^{\mathrm{K}} = [\phi_2]^{\mathrm{K}}$。则 $[\phi_1]^{\mathrm{ML}} = [\phi_2]^{\mathrm{ML}}$。 *(2)* 设 ϕ 是 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$ 的一个态射。则存在一个态射 ψ，它属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$，使得 $[\phi]^{\mathrm{ML}} = [\psi]^{\mathrm{ML}}$。

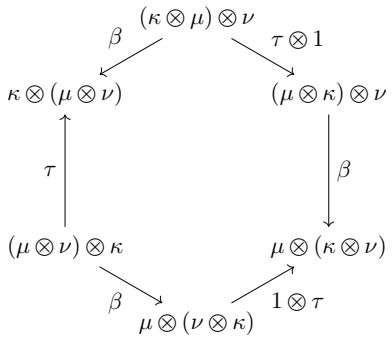
证明。 第（1）点的证明如图 5 （左）所示。两条虚线在上方和下方分别围出两个 Mac Lane 六边形，中间则围出一个自然性方块。具体而言，这两个虚线 τ-态射分别为 $\tau_{a,\ b\otimes c}$ 和 $\tau_{a,\ c\otimes b}$。至于第（2）点，我们注意到，陈述中所述的态射 ψ 可通过反复应用 Mac Lane 在上文定义 2.11 后的引文中描述的步骤得到。□

定理2.16（对称幺半范畴的 Mac Lane 一致性定理）。对于任意对称幺半范畴 $\mathcal{C}$、任意函数 $\rho : S \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，以及任意两个平行态射 $\phi_1, \phi_2 : t_1 \to t_2$，只要它们属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{ML}}$，就有 $[[\phi_1]]^{\mathrm{ML}} = [[\phi_2]]^{\mathrm{ML}}$。

证明。由于函子 $[[-]]^{\mathrm{ML}}$ 可分解为函子 $[-]^{\mathrm{ML}}$，因此只需证明 $[\phi_1]^{\mathrm{ML}} = [\phi_2]^{\mathrm{ML}}$。根据命题 2.15的第（2）点，存在 ψ_1 和 ψ_2，它们属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$，使得 $[\psi_1]^{\mathrm{ML}} = [\phi_1]^{\mathrm{ML}}$ 且 $[\psi_2]^{\mathrm{ML}} = [\phi_2]^{\mathrm{ML}}$。特别地，$\psi_1$ 和 ψ_2 平行，因此根据定理 2.12 可得 $[\psi_1]^{\mathrm{K}} = [\psi_2]^{\mathrm{K}}$；根据命题2.15 的第（1）点，我们有$[\psi_1]^{\mathrm{ML}} = [\psi_2]^{\mathrm{ML}}$。因此，我们得到 $[\phi_1]^{\mathrm{ML}} = [\psi_1]^{\mathrm{ML}} = [\psi_2]^{\mathrm{ML}} = [\phi_2]^{\mathrm{ML}}$，证明完毕。□

注记 2.17。很容易看出，这个证明还表明范畴 $\mathcal{F}(S)^{\mathrm{K}}$和 $\mathcal{F}(S)$ 是同构的。这个事实的陈述与相干性问题无关，但其证明依赖于 Kapranov 风格一致性。换言之，证明 Kapranov 条件蕴含 Mac Lane 条件并非易事，这与反向结论形成对比（参见命题 2.15）；这正是多胞体的神奇之处！

注记 2.18。请注意，与歌剧多面体的情形相反，似乎不存在这样的定向向量：它在置换结合多面体各边上诱导的定向，与基于独立于定向向量的约定而得到的 β 和 τ 箭头的一致定向相同。这是因为十二边形（图 5，左）包含 β^{-1} 个箭头。对于 [BIP19]中的单纯置换结合多面体，同样的评论也适用。至于 Mac Lane 的原始表示（目前尚不知其与多胞体之间存在对应关系），我们仍可希望找到一个相关的项重写系统。但 Mac Lane 的证明并没有这样做，而是（恰当地！）分两步进行：首先仅对幺半部分进行重写（β 仅此而已），然后利用对称群的 Coxeter 表示处理对称部分。看来这已经是最好的办法了。事实上，尽管 Mac Lane 六边形不涉及 β^{-1} 箭头，但考虑 τ 箭头的定向组合学时，后者就会出现。举例来说，假设我们决定将 β的括号向右移动，在 S 上固定一个全序，并根据最大值所在的位置，将对合 τ 拆分为 τ 和 τ^{-1}。那么，对于 $\mu < \kappa < \nu$ 六边形变为



而从 $(\mu \otimes \nu) \otimes \kappa$ 出发的一对重写所对应的局部合流图，若不将 β 箭头取逆，就无法补全。

3. Perspectives

3.1. **更多应用**。 也可以采用相同的策略，利用 F. Muro 和 A. Tonks [MT14]，证明单位非对称幺半范畴的相干性，其中使用单位结合多面体。

自然会想到，单位结合多面体的构造能否扩展到排列结合多面体，从而为幺元对称幺半范畴的相干性提供拓扑证明。就我们所知，这些构造是否存在于算子层面（即是否存在幺元算子多面体、对称算子多面体和幺元对称算子多面体？）这一问题也仍未解决。

定理 1.1的另一个直接应用，是非对称幺半范畴之间的强非对称幺半函子的相干性 [Eps66]。在这种情况下，相应的拓扑对象是乘法多面体族 [Sta70，For08]。将这一结果推广到非对称范畴化歌剧之间的强态射也同样成立，此时涉及的是乘法多面体族；该族在引言末尾的 [LM23]中有所描述。

与定理2.5的思路相同，我们可以为许多类算子结构的范畴化建立相干性结果，例如 [BMO23]中所述的结构，包括范畴化模算子、带轮恰当算子和排列算子（洗牌代数）等。为了处理循环和对称结构，可以借鉴 [CO20] 中针对循环对称范畴化算子的约化过程。

3.2. **高阶范畴**。 定理 1.1 揭示了相干性与连通性之间的精确关系。除了阐明 Kapranov 的主张 [Kap93], 之外，它还澄清了文献中的其他论述，例如 [KV94，命题 3.9]。其中，开篇的“因为 P_n 是一个凸多胞体”可以更准确地改为“因为 P_n 是单连通的”。

对于（对称）幺半群范畴，定理 1.1 表明，相干性等价于（置换）结合多面体的第一同伦群消失。由于（置换）结合多面体是可缩的，因此其所有同伦群都消失，我们可以期待用拓扑方法证明高维相干性定理。

再高一维，N. Gurski 已在 [Gur11，定理 22 和 23] 中证明，（辫）幺半双范畴的相干性等价于辫群的基本2-群胚消失。S. Barkan 的近期成果为更高维的命题提供了证据，将 ∞-算子的相干图表与某些算子分割复形的连通性联系起来 [Bar22]。看来，本文的结果可以被解释为 [Bar22，定理 B]的严格版本和一个特例。若能了解置换结合多面体如何在严格化过程中出现，以及它们与算子分割复形有何关联，将会很有意思。

致谢。我们感谢2020年9月30日在巴黎举行的 Roberta 研讨会的所有参与者，他们为本文播下了种子。我们感谢 Andrea Bianchi 的启发性讨论、指出初稿中的错误，并提醒我们塞弗特–范坎彭定理。最后，我们感谢 Zoran Petri´c 就弱 Cat-运算子所进行的宝贵讨论，也感谢 Marcy Robertson 以及

匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见使论文得到了实质性的改进。第一作者谨此感谢奥伯沃尔法赫数学研究所，在2020年和2021年以研究员身份多次访问该所；正是这些访问，使本文以及配套论文的大部分工作得以开展。 [CLA24], 第二作者谨此感谢哥本哈根几何与拓扑中心以及位于波恩的马克斯·普朗克数学研究所，本研究的部分工作正是在这两处完成的。

References

[Bar22] Shaul Barkan, *Arity Approximation of ∞-Operads*, arXiv电子印本（2022年），arXiv:2207.07200。[BB97] Mladen Bestvina和Noel Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*, 《数学发明》129（1997年），第3期，445–470。[BIP19] Djordje Barali´c、Jelena Ivanovi´c和Zoran Petri´c, *A simple permutoassociahedron*, 《离散数学》342（2019年），第12期，111591。[BMO23] Michael Batanin、Martin Markl和Jovana Obradovi´c, *Minimal models for graph-related (hy-per)operads*, 《纯粹与应用代数杂志》**227**（2023），第7期，107329。[BN98] Franz Baader和Tobias Nipkow, *Term Rewriting and All That*, 剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[Bro06] Ronald Brown, *Topology and groupoids*, Booksurge出版社，2006年。[CL23] Federico Castillo和Fu Liu, *The permuto-associahedron revisited*, 《欧洲组合学杂志》110（2023年），103706。[CLA24] Pierre-Louis Curien和Guillaume Laplante-Anfossi, *Term rewriting on nestohedra*, arXiv电子印本（2024年），arXiv:2403.15987。[CO20] Pierre-Louis Curien和Jovana Obradovi´c, *Categorified Cyclic Operads*, 《应用范畴结构》28（2020年），第1期，59–112。[COI19] Pierre-Louis Curien、Jovana Obradovi´c和Jelena Ivanovic, *Syntactic aspects of hypergraph polytopes*, 《同伦及相关结构杂志》**14**（2019），第1, 235–279。[DP11] Kosta Do˘sen和Zoran Petri´c, *Hypergraph polytopes*, 《拓扑及其应用》158（2011年），1405–1444。[DP15], *Weak cat-operads*, 《计算机科学中的逻辑方法》11（2015年），第1期，1–23。[DS24] Colin Defant和Andrew Sack, *Operahedron lattices*, arXiv电子印本（2024年），arXiv:2402.12717。[Eps66] D. B. A. Epstein, *Functors between tensored categories*, 《数学发明》**1**（1966），第3, 221–228。[For08] Stefan Forcey, *Convex hull realizations of the multiplihedra*, 《拓扑及其应用》**156**（2008），第2, 326–347。[Gur11] Nick Gurski, *Loop spaces, and coherence for monoidal and braided monoidal bicategories*, 《数学进展》226（2011年），第5期，4225–4265。[Kap93] Mikhail M. Kapranov, *The permutoassociahedron, Mac Lane's coherence theorem and asymptotic zones for the KZ equation*, 《纯粹与应用代数杂志》**85**（1993），第2, 119–142。[KV94] M. M. Kapranov和V. A. Voevodsky, *2-categories and Zamolodchikov tetrahedra equations*, 《纯粹数学研讨会论文集》，第56卷，第177–259页，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。[Lap22] Guillaume Laplante-Anfossi, *The diagonal of the operahedra*, 《数学进展》405（2022年），108494。[LM23] Guillaume Laplante-Anfossi和Thibaut Mazuir, *The diagonal of the multiplihedra and the tensorproduct of A-infinity morphisms*, 《巴黎综合理工学院学报——数学》10（2023年），405–446。[LV] Jean-Louis Loday和Bruno Vallette, *Algebraic operads*, 《数学科学基础丛书》[第346卷，施普林格出版社，柏林，2012年。

[ML63] Saunders Mac Lane,
Natural associativity and commutativity **49** 1963 4, , 《莱斯大学研究》
28 46
（），第期–。[MT14] Fernando Muro和Andrew Tonks,
Unital associahedra **26** 2014 2, , 《Forum
593 620
Mathematicum》（），第期–。[RZ94] Victor Reiner和G¨unter M. Ziegler, *Coxeter-associahedra*, 《
Mathematika**41** 》（1994年），第2期，364–393。[Sta70] James D. Stasheff,
H-spaces from a homotopy point of view，数学讲义，第161卷，施普林格出版社，柏林，1970年。[VdL03] Pepijn
Van der Laan, *Coloured Koszul duality and strongly homotopy operads*，arXiv电子印本（2003年），arXiv:0312147。[
Zie95] G¨unter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*，数学研究生教材，第152卷，施普林格出版社，纽约，1995年。

IRIF, CNRS, Université Paris Cité and πr^2 team, Inria, France.
Email address: curien@irif.fr

School of Mathematics and Statistics, The University of Melbourne, Victoria, Australia.
Email address: guillaume.laplanteanfossi@unimelb.edu.au