arXiv:2302.07428v1 [math.RT] 15 Feb 2023

关于具有除代数 D 的 p-进域上的 $GL_2(D)$ 超奇异表示

WIJER ATHNE MUDIYANSELAGE MENAKE WIJERATHNE

Abstract. 我们通过计算某个紧诱导的商空间中 pro-p Iwahori子群不变向量空间的一组基，研究特征为 0 的 p-进域上除代数 D 的 $GL_2(D)$ 的模-p 超奇异表示。本文推广了 Hendel 和 Schein 的结果。

1. Introduction

1.1. 研究动机。设 F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其整数环为 $\mathcal{O}_F$，剩余域为 $\mathbb{F}_q$，其中 $q = p^f$，且 f 为 $F/\mathbb{Q}_p$ 的惯性次数。1994 年，Barthel 和 Livne 开创了对 $GL_2(F)$ 的光滑不可约模-p 表示的研究，见 [1]。这项研究在确立 [4] 和 [3] 中的模-p Langlands 对应方面发挥了重要作用。设 F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其整数环为 $\mathcal{O}_F$，剩余域为 $\mathbb{F}_q$，其中 $q = p^f$，且 f 为 $F/\mathbb{Q}_p$ 的惯性次数。他们证明，$GL_2(F)$ 的任意不可约表示都来自以下商空间：

$$\mathrm{ind}_{KZ}^{G}\sigma/(T-\lambda)\mathrm{ind}_{KZ}^{G}\sigma,$$

其中 $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$，$\mathrm{ind}_{KZ}^{G}\sigma$ 是不可约光滑表示 σ 的紧诱导，σ 属于 KZ（其中 $K = GL_2(\mathcal{O}_F)$，且 Z 是 $GL_2(F)$的中心），而 T是标准球Hecke算子（定义见 [1]中的命题 8）。他们的分类包含了一类称为超奇异表示的新型表示，当 $\lambda = 0$ 时便会得到这类表示。Breuil 通过显式计算 $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}\sigma/(T)$的 $I(1)$-不变子空间，证明了当 $F = \mathbb{Q}_p$时这些表示是不可约的，其中 $I(1)$是 $GL_2(\mathbb{Z}_p)$的 pro-p-Iwahori子群（见 [2]中的定理 3.2.4）。Schein（见 [9] 和 [10]）与 Hendel（见 [5]）推广了这些方法，并在 $F \neq \mathbb{Q}_p$的情形下，求得商空间 $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}\sigma/(T)$的 $I(1)$-不变子空间的一个无限维基。

1.2. 方法与结果。本文主要采用 Hendel 的论文（见 [5]）中给出的方法，求得 $GL_2(D)$ 的商空间 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma/(T)$ 的 $I(1)$-不变子空间的一个无限维基。这里，D 是一个有限维中心 F- 除代数，其维数为 w^2，整数环为 $\mathcal{O}_D$，剩余域为 $\mathbb{F}_{q^w}$。$K = GL_2(\mathcal{O}_D)$，Z 是中心，而 Z' 是由

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主类11F70；次类11F85。*Key words and phrases.* 超奇异表示，模-p 局部朗兰兹对应，模表示。

$\begin{pmatrix} \varpi_D & 0 \\ 0 & \varpi_D \end{pmatrix}$。 T 是 Hecke代数中的一个函数，其支集位于双陪集

$$KZZ' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_D \end{pmatrix} KZZ'$$

（完整描述请参见定义2.2）。

我们将 $[g, v]$ 记作 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma$ 中的一个元素，其中 $g \in G$ 和 $v \in V_\sigma$，正如 Breuil 在 [2] 中首次引入的那样。有关此记号的完整描述，请参见第1节。此外，令 $I_n = \{\sum_{i=0}^{n-1} \varpi_D^i[\mu_i] : \ \mu_i \in \mathbb{F}_{q^w}\}$ 为 $\mathcal{O}_D/(\varpi_D^n)$ 的一组显式陪集代表元，其中 $I_0 = \{0\}$。

如引理2.1所述， $K = GL_2(\mathcal{O}_D)$ 的不可约表示与 $G = GL_2(k_D)$ 的不可约表示之间存在一一对应关系，后者称为权。

现在，我们为 $n \geq 1$ 定义 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma$ 中的以下元素：

$$s_n^k = \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \mu_{n-1}^k \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \text{ where } 0 \leq k \leq q^w - 1,$$

$$t_n^s = \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \bigotimes_{s \neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_s^{r_s - 1} y_s] \text{ where } 0 \leq s \leq wf - 1,$$

其中 $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} \varpi_D^i[\mu_i]$。命题3.3和3.4全面介绍了前文提到的记号。因此，本文的主定理如下：

定理1.1。（定理 4.4）设 D 是一个定义在 F 上、维数为 w^2 的有限维中心 F-除代数，并设 e 和 f 分别是 F 关于 $\mathbb{Q}_p$ 的分歧次数和惯性次数。假设 $2 < r_j < p-3$ 对于 $0 \leq j \leq wf-1$ 成立，并令

$$\begin{aligned} S_m^l &= \{s_n^{p^l(r_l+1)}\}_{n \geq m} \cup \{\beta s_n^{p^l(r_l+1)}\}_{n \geq m}, \\ T_m^l &= \{t_n^l\}_{n \geq m} \cup \{\beta t_n^l\}_{n \geq m}, \\ S_m &= \cup_{l=0}^{wf-1} S_m^l, \\ T_m &= \cup_{l=0}^{wf-1} T_m^l. \end{aligned}$$

于是，空间 $(\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma/(T))^{I(1)}$ 中关于 $I(1)$-不变向量空间 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 的 I-特征基为

$$S_1 \cup \{[\mathrm{Id}, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}], [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]\} \quad when \ e = 1, wf > 1,$$

$$S_1 \cup \{[\mathrm{Id}, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}], [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]\} \cup T_1 \quad when \ e > 1, wf > 1.$$

1.3. 文章结构。本文结构如下。第2节讨论 $GL_2(D)$ 的模-p 表示的一些预备结果，并在引理2.1中证明：极大紧子群 $K = GL_2(\mathcal{O}_D)$ 的每个不可约光滑表示与 $GL_2(k_D)$ 的不可约表示之间存在一个双射。第3节考察 $I(1)$-不变向量的性质，第4节则通过求得空间 $(\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma/(T))^{I(1)}$ 的一个基来证明主定理。其中若干结果是将 Hendel 在 [5] 中的工作推广到 $GL_2(D)$ 的情形后得到的。

致谢。我谨向我的博士导师 Kwangho Choiy 致以衷心的感谢，感谢他在整个研究项目中始终如一的支持、指导与鼓励。在整个过程中，他提供了宝贵的建议和反馈；若没有他持续的帮助与指导，我不可能完成这个项目。

2. Notations and preliminaries

设 D 是一个有限维中心 F-除代数，其维数为 w^2，定义在 F 上。设 $\mathcal{O}_D$ 表示其整数环，一致化元为 ϖ_D。分别设 e 和 f 为 $F/\mathbb{Q}_p$ 的分歧次数和惯性次数。剩余域 $k_D = \mathcal{O}_D/(\varpi_D)$ 同构于 $\mathbb{F}_{q^w}$，其中 $q = p^f$。考虑乘法群 $G = GL_2(D)$，它由所有元素取自 D 的 2×2 可逆矩阵构成。设 K 表示 G 的极大紧开子群。

引理2.1. $K = GL_2(\mathcal{O}_D)$ 的不可约光滑表示与 $GL_2(k_D)$ 的不可约表示之间存在一个双射。

证明. 为方便读者，我们在此给出证明，其思路遵循 [7] 第2.3节中的论述。由于 $K(1) = 1 + \varpi_D M_2(\mathcal{O}_D)$ 是 K 的开正规子群，且 $K(1)$ 是 pro-p，因此对于 K 的任意光滑不可约表示 V，有 $V^{K(1)} \neq 0$。此外，由于 $K(1)$ 是 K 的正规子群，我们有 $V^{K(1)}$ 是 V 的一个 K-稳定子空间。因此，我们可以得出结论：V 是 $K/K(1) \cong GL_2(k_D)$ 的一个表示，且 $V = V^{K(1)}$。反过来，对于 $K/K(1)$ 的一个光滑不可约表示 σ，我们定义映射 φ，使得

$$\varphi : K \longrightarrow K/K(1).$$

我们定义一个膨胀映射 $\widetilde{\sigma}$，它将 $K/K(1)$ 的元素映至 K，使得

$$\widetilde{\sigma}(k) = \sigma(\varphi(k))$$

从而得到所需的不可约表示。 □

2.1. 权。从这里开始，我们将 $GL_2(k_D)$ 的不可约光滑 mod-p 表示称为权。给定向量 $\vec{r} = (r_0, \cdots, r_{wf-1}) \in \{0, 1, ..., p-1\}^{wf}$，其中 wf 是 k_D 关于 $\mathbb{F}_p$ 的有限扩张的次数，该权的一个模型记作 (V_σ)，其空间由齐次多项式 $Sym^{\vec{r}}\overline{\mathbb{F}}_p = \bigotimes_{j=0}^{wf-1} Sym^{r_j}\overline{\mathbb{F}}_p$ 构成，基为 $\{\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j-i_j} y_j^{i_j}\}_{\vec{i}=0}^{\vec{r}}$。于是，$\sigma$ 在 $GL_2(k_D)$ 上的作用由下式给出，

$$\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big(\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j-i_j} y_j^{i_j}\Big) = \bigotimes_{j=0}^{wf-1} (a^{p^j} x_j + c^{p^j} y_j)^{r_j-i_j} (b^{p^j} x_j + d^{p^j} y_j)^{i_j}. \qquad (1)$$

滥用记号，我们用 σ 表示与向量 V_σ 对应的、定义在一个 $\overline{\mathbb{F}}_p$-向量空间上的 K 的不可约光滑表示。我们将 σ 膨胀为 KZZ' 的一个表示，使 Z 和 Z' 平凡作用。我们将 σ 从 KZZ' 到 G 的紧诱导定义如下:

$$\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma := \{f : G \longrightarrow V_\sigma | f(hg) = \sigma(hg) = \sigma(h)(f(g)),\ \forall g \in G, h \in KZZ'\}$$

在 f上的 $g \in G$作用由 $(gf)(g') = f(g'g)$ 和 $f(kg) = \sigma(k)(f(g))$ 给出，当 $k \in KZZ'$ 时成立。对于 $g \in G, v \in V_\sigma$，我们将 $[g, v]$ 记为 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma$中的一个元素，其定义如下,

$$[g, v](g') = \sigma(g'g).v \ \ if \ \ g' \in KZZ'g^{-1},$$
$$[g, v](g') = 0 \ \ if \ \ g' \notin KZZ'g^{-1}.$$

因此，$[g, v]$ 上的 $g \in G$ 作用由 $g'([g, v]) = [g'g, v]$ 给出，此外对于 $k \in K$, $[gk, v] = [g, \sigma(k)v]$。另外，$\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma$ 中的任意元素 $f \in$都可以写成$f = \sum_{i\in I}[g_i, v_i]$, 其中 $g_i \in G, v_i \in V_\sigma$，且 I是一个有限集（参见 [2]第 2.3 节）。

2.2. Hecke代数。

定义 2.2. 权 V_σ的 Hecke代数,

$$\mathcal{H}(V_\sigma) := \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma).$$

我们有 $\mathcal{H}(V_\sigma)$ 同构于由函数 $\varphi : G \longrightarrow End(V_\sigma)$ 构成的 $\overline{\mathbb{F}}_p$-向量空间，满足

$$\varphi(k_1gk_2) = k_1 \cdot \varphi(g) \cdot k_2 \tag{2}$$

对于 k_1、$k_2 \in KZZ'$ 和 $g \in G$ （参见 [1] 第 2.2 节）。

设 φ 是这样的一个函数，$g \in G$、$v \in V_\sigma$，且 T 是 Hecke代数中支集为双陪集 $KZZ'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_D\end{pmatrix}KZZ'$ 的函数，使得 $T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_D\end{pmatrix} \in \mathrm{End}_G(V_\sigma)$ 是一个线性投影（参见 [6] 中的命题 45 ）。

于是我们有如下公式（参见 [1] 中的公式 8），

$$T([g, v]) = \sum_{g'KZZ'\in G/KZZ'} [gg', \varphi(g'^{-1})(v)]. \tag{3}$$

2.3. Cartan分解。令,

$$I = \{\begin{pmatrix}a & b\\ \varpi_D c & d\end{pmatrix} \mid a \in \mathcal{O}_D,\ d \in \mathcal{O}_D,\ b \in \mathcal{O}_D,\ c \in \mathcal{O}_D\},$$
$$I(1) = \{\begin{pmatrix}a & b\\ \varpi_D c & d\end{pmatrix} \mid a \equiv d \equiv 1 \mod(\varpi_D),\ b \in \mathcal{O}_D,\ c \in \mathcal{O}_D\},$$

其中 I 是 Iwahori子群，而 $I(1)$ 是 I 的 pro-p-Sylow 子群。此外，令,

$$\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_D\end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \varpi_D & 0\end{pmatrix} \text{ and } w = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

G 的 Cartan分解如下:

$$G = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} KZZ'\alpha^{-n}KZZ' = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \left(IZZ'\alpha^{-n}KZZ' \sqcup IZZ'\beta\alpha^{-n}KZZ'\right), \tag{5}$$

其中， Z 是 G 的中心， Z' 是由 $\begin{pmatrix} \varpi_D & 0 \\ 0 & \varpi_D \end{pmatrix}$生成的群，且 β将 $I(1)$规范化。注意，

$KZZ'\alpha^{-n}I = KZZ'\alpha^{-n}I(1)$、 $IZZ'\alpha^{-n}I = IZZ'\alpha^{-n}I(1)$和
$IZZ'\beta\alpha^{-n}I = IZZ'\beta\alpha^{-n}I(1)$（参见 [2], [5] 和 [8]）。

令 $\mathcal{A}$ 为 $GL_2(k_D)$ 的布鲁哈-蒂茨树，其顶点与陪集 G/KZZ' 等变双射，正如 [2] 第 2.2 节所述。我们可以如下描述 $\mathrm{ind}_{KZZ'\sigma}^{G}$ 的一个模型。令 $I_0 = \{0\}$ ，且对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \{[\mu_0] + \varpi_D[\mu_1] + \varpi_D^2[\mu_2] + \cdots + \varpi_D^{n-1}[\mu_{n-1}] : \mu_i \in k_D\} \subset \mathcal{O}_D$$

其中 $[\cdot]$ 是 $\mathcal{O}_D$中的乘法代表元。若 $0 \le m \le n$， 令 $[\cdot]_m : I_n \longrightarrow I_m$ 为截断映射，其定义为

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\mu_i]\varpi_D^i \longrightarrow \sum_{i=0}^{m-1}[\mu_i]\varpi_D^i.$$

引理 2.3。令 $\mu, \lambda \in \mathbb{F}_{q^w}$， 则 $[\mu] + [\lambda] \equiv [\mu + \lambda] + \varpi_D^e[P_0(\mu, \lambda)] \ mod \ \varpi_D^{e+1}$， 其中

$$P_0(\mu, \lambda) = \frac{\mu^{q^{we}} + \lambda^{q^{we}} - (\mu + \lambda)^{q^{we}}}{\varpi_D^e}. \tag{6}$$

证明。根据 [9] 中的引理2.2即可得到。 □

对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mu \in I_n$，我们定义：

$$g_{n,\mu}^0 = \begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ g_{n,\mu}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_D\mu & \varpi_D^{n+1} \end{pmatrix},$$
$$g_{0,0}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}, \ g_{0,0}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_D \end{pmatrix} = \alpha.$$

此外，我们有如下关系

$$\beta g_{n,\mu}^0 = g_{n,\mu}^1 w.$$

使用上述记号，我们写作，

$$IZZ'\alpha^{-n}KZZ' = \bigsqcup_{\mu \in I_n} g_{n,\mu}^0 KZZ' \text{ and } IZZ'\beta\alpha^{-n}KZZ' = \bigsqcup_{\mu \in I_n} g_{n,\mu}^1 KZZ'.$$

因此， $g_{n,\ \mu}^0$ 和 $g_{n,\ \mu}^1$ 构成了 G/KZZ'. 的一个代表元系。因此，我们将 Cartan分解 (5) 改写如下，

$$G = (\bigsqcup_{\mu,n} g_{n,\mu}^0 KZZ') \bigsqcup (\bigsqcup_{\mu,n} g_{n,\mu}^1 KZZ').$$

此外，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们令:

$$X_n^0 = IZZ'\alpha^{-n}KZZ' \qquad X_n^1 = IZZ'\beta\alpha^{-n}KZZ'$$
$$B_n^0 = \bigsqcup_{m<n} X_m^0 \qquad B_n^1 = \bigsqcup_{m<n} X_m^1$$
$$X_n = X_n^0 \bigsqcup X_n^1 \qquad B_n = B_n^0 \bigsqcup B_n^1.$$

2.4. 三个基本结果。我们将经常在模组合数学中使用卢卡斯经典定理 [5], , 该定理给出了二项式系数$\binom{m}{n}$ 模 p 同余于零的条件。

定理 2.4。（卢卡斯定理）对于 m、$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和素数 p，有如下同余关系：

$$\binom{m}{n} = \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \ (mod\ p),$$

其中，$m = \sum_{i=0}^{k} m_i p^i$ 和 $n = \sum_{i=0}^{k} n_i p^i$ 分别是 m 和 n 的 p-进展开。按照约定，$\binom{m}{n} = 0$ 当且仅当对于某个 i 有 $m_i < n_i$。

证明。见 [11]。 □

引理2.5。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mu \in I_n$，令 $\varphi : I_n \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ 为 $n \geq 1$ 的集合论映射。则存在唯一多项式 $c(z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}) \in \overline{\mathbb{F}}_p[z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}]$，使得每个变量的次数至多为 $q^w - 1$，并且对于所有 $\mu \in I_n$，$\varphi(\mu) = c(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{n-1})$。

证明。我们利用 [2] 中的引理3.1.6和 [9] 中的引理2.1，通过归纳法证明我们的断言。对于 $n = 1$，我们得到一个集合映射 $\varphi : \mathbb{F}_{q^w} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$，使得矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{q^w-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (q^w-1) & (q^w-1)^2 & \cdots & (q^w-1)^{q^w-1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

模 $q^w - 1$ 可逆。因此，存在唯一的 $(c_0, c_1, \cdots, c_{q^w-1}) \in \overline{\mathbb{F}}_p^{q^w-1}$，使得

$$\sum_{i=0}^{q^w-1} c_i \mu_0^i = \varphi(\mu_0).$$

假设对于 $n-1, n \geq 2$，该断言成立，并设 $\mu \in I_{n-1}$。则存在唯一的 $(c_0(\mu)\ c_1(\mu) \cdots, c_{q^w-1}(\mu)) \in \overline{\mathbb{F}}_p^{q^w-1}$，使得

$$\sum_{i=1}^{q^w-1} c_i(\mu) \lambda^i = \varphi(\mu + [\lambda] \varpi_D^{n-1}),$$

其中，对于所有 i，$c_i(\mu)$ 是关于 $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{n-2}$ 的唯一多项式。证明完毕。□

引理2.6。我们有，

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^w}} \lambda^j = 0 \ if\ j \neq q^w - 1,$$

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^w}} \lambda^j = -1 \ if\ j = q^w - 1$$

其中 $j \in \{0, 1, 2, \cdots, q^w - 1\}$。

证明。通过直接计算即可得到。 □

3. Properties of I(1)-invariants

本节将介绍确定 $(\mathrm{ind}_{KZZ'}^{G}\sigma/T)^{I(1)}$ 的技巧和证明。对于 $0 \le j \le wf-1$，我们记 $r=\sum_{j=0}^{wf-1} p^j r_j$，其中 $0 \le r_j \le p-1$，而 $\vec{r}$ 是向量 $(r_0,\cdots,r_{wf-1})$。

首先，来看 $I(1)$ 中任意元素的如下分解，其中 $a,b,c,d \in \mathcal{O}_D$，

$$\begin{pmatrix} 1+\varpi_D a & b \\ \varpi_D c & 1+\varpi_D d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b(1+\varpi_D d)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_D c z^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1+\varpi_D d \end{pmatrix}$$

其中 $z=1+\varpi_D a-b(1+\varpi_D d)^{-1}\varpi_D c$。因此，若一个向量在以下三类矩阵作用下均不变，则它是 $I(1)$ 不变向量，其中 $a,b,c,d \in \mathcal{O}_D$，

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_D c & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1+\varpi_D a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

引理 3.1. 设 $c_{\vec{i}} \in \overline{\mathbb{F}}_p$ 和 $v=\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j-i_j} y_j^{i_j}$。回想一下，$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_D \end{pmatrix}$、$w=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 在 (4) 中定义，并令 $w_\lambda=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ 对于 $\lambda \in I_1$。那么我们有，

$$\sigma(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda)(v)=\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^i \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}, \tag{8}$$

$$\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda w)(v)=\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^{r-i} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}, \tag{9}$$

其中 φ 是 (2) 中定义的函数，并注意，在 V_σ的基 $\bigotimes_{j=0}^{wf-1}(x_j^{r_j-i_j}y_j^{i_j})_{0\le i_j\le r_j}$中，我们得到 $\varphi(\alpha^{-1})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$（参见 [2]中的第 3 节）。

证明。我们有

$$\begin{aligned}\sigma(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda)(v) &= w\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot w_\lambda(v) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(v).\end{aligned}$$

那么，（1）中给出的作用满足（8），因此我们得到

$$\sigma(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda)(v)=\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^i \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}.$$

类似地，对于（9），我们有

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda w)(v) &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot ww_\lambda(v)\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}(v)\\ &= \sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^{r-i}\bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}.\end{aligned}$$

□

3.1. 黑克算子的作用。

命题 3.2. 设 T 是 $\mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{KZZ'}^G\sigma)$ 中的一个函数，如 (3) 和 $v=\sum\limits_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}\bigotimes\limits_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j-i_j}y_j^{i_j}\in V_\sigma$ 中定义，其中 $c_{\vec{i}}\in\overline{\mathbb{F}}_p$。那么对于 $n\geq 1$ 和 $\mu\in I_n$，我们有

$$\begin{aligned}T([g_{n,\mu}^0,v]) &= \sum_{\lambda\in I_1}[g_{n+1,\mu+\varpi_D^n\lambda}^0,\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^i\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}] \\ &\quad+[g_{n-1,[\mu]_{n-1}}^0,c_{\vec{r}}\bigotimes_{j=0}^{wf-1}(\mu_{n-1}^{p^j}x_j+y_j)^{r_j}],\\ T([g_{n,\mu}^1,v]) &= \sum_{\lambda\in I_1}[g_{n+1,\mu+\varpi_D^n\lambda}^1,\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^{r-i}\bigotimes_{j=0}^{wf-1}y_j^{r_j}]\\ &\quad+[g_{n-1,[\mu]_{n-1}}^1,c_{\vec{0}}\bigotimes_{j=0}^{wf-1}(x_j+\mu_{n-1}^{p^j}y_j)^{r_j}],\end{aligned}\tag{10}$$

对于 $n=0$,

$$\begin{aligned}T([\mathrm{Id},v]) &= \sum_{\lambda\in I_1}[g_{1,\lambda}^0,\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^i\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}]+[\alpha,c_{\vec{r}}\bigotimes_{j=0}^{wf-1}y_j^{r_j}],\\ T([\alpha,v]) &= \sum_{\lambda\in I_1}[g_{1,\lambda}^1,\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}}(-\lambda)^{r-i}\bigotimes_{j=0}^{wf-1}y_j^{r_j}]+[\mathrm{Id},c_{\vec{0}}\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}].\end{aligned}\tag{11}$$

证明。该结果由 [2] 中的公式 (4) 至 (9) 以及引理 3.1 得出。 □

3.2. $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G\sigma$ 的 Pro-p Iwahori 不变元。现在我们可以如下定义权 σ 对应的 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G\sigma$ 中的元素:

$$\begin{aligned}s_n^k &= \sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,\mu_{n-1}^k\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}],\ \ where\ \ 0\leq k\leq q^w-1,\\ t_n^s &= \sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,\bigotimes_{s\neq j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}\otimes x_s^{r_s-1}y_s]\ \ where\ \ 0\leq s\leq wf-1.\end{aligned}$$

命题 3.3. 权 σ 的 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G\sigma$ 的 $I(1)$-不变子空间构成的 $\overline{\mathbb{F}}_p$-向量空间的一组基为集合 $\{s_n^0,\beta s_n^0:\ n\in\mathbb{N}\}$。此外，我们有

(1) 若 $0 < r \leq q^w - 1$，则由 s_n^0 生成的 KZZ'-模同构于 σ，因此是不可约的。此外，由 βs_n^0 生成的 KZZ'-模对所有 $n \geq 1$. 都同构于一个可约的（$q^w + 1$）维主系列

(2) 若 $r = 0$，则元素 $s_n^0 + \beta s_{n-1}^0$ 生成一个不可约的一维KZZ'-模，该模对所有 $n \geq 0$ 都同构于 σ。 (3) 若 $r = q^w - 1$，则 $s_n^0 + \beta s_{n-1}^0$ 对所有 $n \geq 1$. 都生成一个不可约的一维KZZ'-模

证明。 (1) 我们采用[10]中命题 2.5 的证明所介绍的方法。对于 $F = D$ 的情形，按照 [1] 中的命题 14，我们令

$$S(G, Sym^r\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{I(1)} = \{\varphi |\ \varphi(kgi) = \sigma(k)\varphi(g)\ \ \forall k \in KZZ', g \in G, i \in I(1)\}$$

其中 $S(G, Sym^r\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ 是 G 上取值于 $Sym^r\overline{\mathbb{F}}_p^2$ 的局部常值函数空间，这些函数在左侧模 KZZ' 意义下紧支撑。稍作调整 [1], 中命题 14(2) 和命题 15 的论证，我们得到元素 s_n^0 和 βs_n^0 是标准 I-作用的特征向量。注意，元素 $s_0^0 = [\mathrm{Id} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]$ 生成一个不可约的 KZZ'-子模（参见 [6] 中的注 6），并且由引理2.1可知，它同构于 σ。接下来，我们利用 KZZ'/I 的以下陪集代表元，计算由$\beta s_0^0 = [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]$ 生成的 KZZ'-子模，

$$\left\{ZZ' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} I\right\} \cup \left\{ZZ' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & 1 \end{pmatrix} I\right\}_{\lambda_0 \in I_1}$$

（参见 [5]中的引理 2.3）。因此，我们得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] = [g_{1,0}^0, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \text{ and}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & 1 \end{pmatrix} [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] = [g_{1,\lambda_0^{-1}}^0, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_0^{-1} \\ \lambda_0 & \varpi_D \end{pmatrix} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]$$

$$= [g_{1,\lambda_0^{-1}}^0, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} ((-\lambda_0^{-1})^{p^j} x_j + \varpi_D^{p^j} y_j)^{r_j}]$$

$$= [g_{1,\lambda_0^{-1}}^0, (-\lambda_0^{-1})^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]$$

其中 $\lambda_0 \in \mathbb{F}_{q^w}^\times$ 和 $\alpha = g_{0,\ 0}^1$。我们注意到，存在 q^w+1 个元素，它们张成由 βs_0^0 生成的 KZZ'-子模，并且所有这些元素线性无关。

我们利用 [6]中的定理 5 所述的弗罗贝尼乌斯互反律，证明由 βs_n^0 生成的 KZZ'-模同构于一个可约的（$q^w + 1$）维主系列表示。由于 βs_0^0 是一个 I-特征向量，我们得到一个映射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_I(\chi_{\beta s_0^0}, \mathrm{ind}_{KZZ'\sigma_I}^G)$，使得 $\varphi(1) = [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]$，其中 $\chi_{\beta s_0^0}$ 是与 βs_0^0对应的 I 的特征标。利用弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到一个 K-模的映射，
$\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Ind}_I^K \chi_{\beta s_0^0}, \mathrm{ind}_{KZZ'\sigma}^G)$ 使得 $\widetilde{\varphi}([\mathrm{Id}, 1]) = [\alpha, \bigotimes^{w}{}_{j=0}^{f-1} y_j^{r_j}]$。

通过稍微修改 [10]，中引理 2.3 的论证，我们发现 $\mathrm{Ind}_I^K \chi_{\beta s_0^0}$ 是 K 的一个 q^w+1 维表示。因此，根据维数考量，由 βs_0^0 生成的模同构于一个 q^w+1 维主系列表示。

我们的结论由命题 3.2 得出，因为 T 是 G-模的单射，且 $T^n(s_0^0) = s_n^0$，以及 $T^n(\beta s_0^0) = \beta s_n^0$。

（2）对于 $r=0$ 的情形，利用方程（11），我们有

$$T(s_0^0) = \sum_{\lambda \in I_1} [g_{1,\lambda}^0, 1] + [\alpha, 1] = s_1^0 + \beta s_0^0.$$

注意，$s_0^0 = [\mathrm{Id} \bigotimes_{j=1}^{wf-1} x_j^{r_j}]$ 生成一个与 σ 同构的一维 KZZ'-子模，其在 T 下的像也同样如此。此外，我们有 $T^m(s_0^0) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{\mu \in I_s} [g_{s,\mu}^{1-\delta_{s,m}}, 1]$，其中当 $s=m$ 时，$\delta_{s,\ m}=1$；当 $s \neq m$ 时，$\delta_{s,\ m}=0$（参见 [10] 中的方程 7）。因此，对于 $n \geq 2$，$s_n^0 + \beta s_{n-1}^0 = T^n(s_0^0) - T^{n-2}(s_0^0)$。

(3) 对于 $r = q^w - 1$，我们首先证明 $s_1^0 + \beta s_0^0$ 是 KZZ'/I 的陪集作用下的特征向量。根据 [10] 中引理 2.7 给出的恒等式，我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & 1 \end{pmatrix} (s_1^0 + \beta s_0^0) = \sum_{\mu_0 \in I_1} [g_{1,\mu_0}^0, (1-\lambda_0\mu_0)^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] + [\alpha, (\lambda_0)^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] + [g_{1,\lambda_0^{-1}}^0, (-\lambda_0^{-1})^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}].$$

此外，我们有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (s_1^0 + \beta s_0^0) = \sum_{\mu_0 \in I_1} [g_{1,\mu_0}^0, (-\mu_0)^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] + [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] + [g_{1,0}^0, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}].$$

现在利用 T 的单射性，并且由于我们有 $T^n(s_1^0+\beta s_0^0) = s_n^0 + \beta s_{n-1}^0$，证明即告完成。

□

3.3. $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G \sigma/(T)$ 的 Pro-p Iwahori 不变向量。

命题 3.4. 设 s_n^k 和 t_n^s 是 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G \sigma/(T)$ 的元素。则有如下结论。

(1) 若 $n \geq 1$ 且 $k \neq r$，则对 $0 \leq k_j \leq r_j$ 和 $0 \leq j \leq wf-1$，有 $s_n^k \in \mathrm{Im}(T)$。
(2) 若 $n=1$，则元素 s_1^r 是一个非平凡的 $I(1)$- 不变元。若 $n \geq 2$，则 $s_n^r \in \mathrm{Im}(T)$。(3) 若 $wf > 1$、$n \geq 1$ 和 $0 \leq l \leq wf-1$，则元素 $s^{p^t(r_l+t)n}$ 是模 $< \{s^{p^t(r_l+s)n}\}_{0 \leq s \leq t-1} >_G$ 的一个非平凡 $I(1)$-不变元，其中 $0 \leq t \leq p - r_l - 1$。

(4) 设 $n \geq 1$。若 $e > 1$、$0 \leq l \leq wf-1$和 $r > p^s$，则元素 t_n^s 是一个非平凡的 $I(1)$-不变元。若 $e = 1$，则元素 t_n^s 是模 $< \{s_n^{p^{wf+s-1}m}\}_{1 \leq m \leq p-1} >_G$的非平凡$I(1)$-不变元。

证明。（1）对于 $n = 1$ 和 $k \neq r$，我们设 $v = \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j-k_j} y_j^{k_j}$，由等式（11）可得

$$T[\mathrm{Id}, v] = \sum_{\lambda_0 \in I_1} [g_{1,\lambda_0}^0, (-\lambda_0)^k \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] = (-1)^k s_1^k.$$

现在，由于 T 是 G-等变的，对于 $n > 1$，我们有

$$T((-1)^k \sum_{\mu \in I_{n-1}} [g_{n-1,\mu}^0, v]) = (-1)^k g_{n-1,\lambda_0}^0 T[\mathrm{Id}, v] = g_{n-1,\mu}^0 s_1^k = s_n^k,$$

这推出 $s_n^k \in \mathrm{Im}(T)$。

（2）结合 [2] 中的公式（4）和引理 3.1，对于 $n = 1$，我们有如下结果，

$$T[\mathrm{Id}, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] = \sum_{\lambda_0 \in I_1} [g_{1,\lambda_0}^0, (-\lambda)^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] + [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}].$$

由于 β 将 $I(1)$ 规范化，我们有

$$T[\mathrm{Id}, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] = s_1^r + \beta[\mathrm{Id}, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]$$

作为一个 $I(1)$-不变对象。现在对于 $n \geq 1$，由等式 (10) 可得

$$T(\sum_{\mu \in I_{n-1}} [g_{n-1,\mu}^0, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]) = \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, (-\lambda)^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]$$
$$+ \sum_{\mu \in I_{n-2}} [g_{n-2,[\mu]_{n-1}}^0, \sum_{\mu_{n-2} \in I_1} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} (\mu_{n-2}^{p_j} x_j + y_j)^{r_j}].$$

由引理2.6可得

$$\sum_{\mu \in I_{n-2}} [g_{n-2,[\mu]_{n-1}}^0, \sum_{\mu_{n-2} \in I_1} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} (\mu_{n-2}^{p_j} x_j + y_j)^{r_j}] = 0.$$

因此，我们有 $\sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, (-\lambda)^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] = s_n^r \in \mathrm{Im}(T)$。

(3) 我们先考虑 $n = 1$ 和 $0 \leq t \leq p - r_l - 1$ 的情形。我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_1^{p^l(r^l+t)} - s_1^{p^l(r_l+t)} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, (\mu_0)^{p^l(r_l+t)} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] - s_1^{p^l(r_l+t)}.$$

由引理 2.3，我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_D & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi_D & [\mu_0 + b_0] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & B(\mu_0, b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中

$$B(\mu_0, b) = \varpi_D^{e-1}[P_0(\mu_0, b_0)] + [b_1] + [b_2]\varpi_D] + \cdots.$$

代入 $\mu_0 \to \mu_0 - b_0$，得到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} s_1^{p^l(r^l+t)} - s_1^{p^l(r_l+t)} &= \sum_{\mu\in I_1}[g_{1,\mu}^0, ((\mu_0-b_0)^{p^l(r_l+t)} - (\mu_0)^{p^l(r_l+t)}) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]\\ &= \sum_{\mu\in I_1}[g_{1,\mu}^0, \sum_{s_l=0}^{r_l+t}(-b_0)^{p_l(r_l+t-s_l)}(\mu_0)^{p^l s_l}\begin{pmatrix}r_l+t\\ s_l\end{pmatrix}\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]\\ &= \sum_{s_l=0}^{r_l+t}(-b_0)^{p_l(r_l+t-s_l)}\begin{pmatrix}r_l+t\\ s_l\end{pmatrix} s_1^{p_l s_l}.\end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} s_1^{p^l(r^l+t)} = s_1^{p^l(r_l+t)} \mod < \{s_n^{p^l(r_l+s)}\}_{0\le s\le t-1} >_G .$$

注意，在 $s^{p^l}{}_{(r_l+t)\ 1}$ 下的不变

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_D c & 1\end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix}1+\varpi_D a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

是平凡的。通过令 $X = s^{p^l}{}_{(r_l+t)\ 1}$， $n > 1$ 的结论可由 [10] 中的推论 2.6 得出。

（4）当 $n = 1$ 时，由等式 (12) 并作代换 $\mu_0 \to \mu_0 - b_0$，可得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} t_1^s - t_1^s &= \sum_{\mu\in I_1}[g_{1,\mu}^0, \begin{pmatrix}1 & B(\mu_0-b_0,b)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bigotimes_{s\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}\otimes x_s^{r_s-1}y_s] - t_1^s\\ &= \sum_{\mu\in I_1}[g_{1,\mu}^0, \bigotimes_{s\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}\otimes x_s^{r_s-1}(B(\mu_0-b_0,b)^{p^s}x_s + y_s)] - t_1^s. \quad (13)\end{aligned}$$

现在，回忆一下 $B(\mu_0, b_0) = \varpi_D^{e-1}[P_0(\mu_0, b_0)] + [b_1] + [b_2]\varpi_D + \cdots$。因此，利用克罗内克δ函数 $\delta_{e,\ 1}$，可将 (13) 写为

$$\begin{aligned}R.H.S &= \sum_{\mu\in I_1}[g_{1,\mu}^0, \bigotimes_{s\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}\otimes x_s^{r_s-1}(\delta_{e,1}P_0(\mu_0-b_0,b_0)+b_1)^{p^s}x_s + y_s)]\\ &= \sum_{\mu\in I_1}[g_{1,\mu}^0, (\delta_{e,1}P_0(\mu_0-b_0,b_0))^{p^s}\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] + [g_{1,\mu}^0, (b_1)^{p^s}\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}].\end{aligned}$$

当 $e = 1$ 时，由方程 (6) 可知， $P_0(\mu_0 - b_0, b)$ 中出现的 μ_0 的次数为 $\{p^{wf+s-1}\}_{0\le m\le p-1}$。类似地，我们有

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_D c & 1\end{pmatrix} t_1^s - t_1^s = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_D c & 1\end{pmatrix}\sum_{\mu\in I_1}[g_{1,\mu}^0, \bigotimes_{s\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}\otimes x_s^{r_s-1}y_s] - t_1^s.$$

注意，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_D c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_D & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varpi_D & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\varpi_D^{-1}\mu\varpi_D c\varpi_D & -\varpi_D^{-1}\mu\varpi_D c\mu\\ \varpi_D c\varpi_D & \varpi_D c\mu+1\end{pmatrix}$$

最右边的矩阵在 $\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}$ 上平凡作用。因此可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_D c & 1 \end{pmatrix} t_1^s - t_1^s = 0.$$

最后，我们有

$$\begin{pmatrix} \varpi_D a+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_1^s - t_1^s = \begin{pmatrix} \varpi_D a+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, \bigotimes_{s \neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_s^{r_s-1} y_s] - t_1^s.$$

注意

$$\begin{pmatrix} \varpi_D a+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_D & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi_D & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\varpi_D+1 & a\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，我们有

$$\begin{pmatrix} \varpi_D a+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_1^s - t_1^s = \sum_{\mu \in I_1} [g_{1,\mu}^0, (a\mu)^{p^s} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] = a^{p^s} s_1^{p^s}.$$

结合以上所有情形，我们看到，若 $r > p^s$ 和 $e > 1$，则元素 t_1^s 是一个 I(1)-不变向量。若 $e = 1$，则元素 t_1^s 模 $< \{s_n^{p^{wf+s-1}m}\}_{1 \leq m \leq p-1} >_G$是一个非平凡的 I(1)-不变向量。证明完毕。 □

引理 3.5. 设给定 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I$ 。设元素 s_n^k 和 t_n^s 是命题 3.4 中的 I(1)-不变向量。那么它们是 I-特征向量，且相应的作用为:

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} s_n^k = a^{k+1} d^{-k} s_n^k$; and
(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} t_n^s = a^{1-p^s} d^{p^s} t_n^s.$

证明。我们有

$$I/I(1) = \Big\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{F}_{q^w}^{\times} \Big\}.$$

由此可得， I 和 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 中的任意元素在 I(1)-不变量上的作用相同。因此，我们有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} s_n^k &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1}d \end{pmatrix} \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \mu_{n-1}^k \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r^j}] \\ &= a \sum_{\mu \in I_n} [\begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu d a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ad^{-1} \end{pmatrix} \mu_{n-1}^k \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r^j}] \\ &= a^{k+1} d^{-k} s_n^k. \end{aligned}$$

类似地，我们得到 I在元素 t_n^s 上的作用如下，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} t_n^s &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1}d \end{pmatrix} \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \bigotimes_{s \neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_s^{r_s-1} y_s] \\ &= a^{1-p^s} d^{p^s} t_n^s.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

4. Main Theorem

在本节中，我们将完整描述定理 4.4 中所述的 $I(1)$-不变元 $(\mathrm{ind}_{KZZ'}^G \sigma/(T))^{I(1)}$ 的标准基。我们将通过若干引理来证明主定理。

4.1. 三个辅助引理。

引理 4.1. 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 已给定，且 $\widetilde{f}$ 是 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G \sigma$ 的一个元素，使得$g\widetilde{f} - \widetilde{f} \in T(\mathrm{ind}_{KZZ'}^G \sigma) + B_{n-1} \forall g \in I(1)$。对于 $f' \in B_{n-1}$，我们令 $\widetilde{f} = \widetilde{f}_n + f'$，其中$\widetilde{f}_n \in X_n$。进一步细分 $\widetilde{f}_n = \widetilde{f}_n^0 + \widetilde{f}_n^1$，其中 $\widetilde{f}_n^i \in X_n^i$。于是我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_n^0 &= \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, c(\mu) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} + \sum_{k=0}^{wf-1} d_k(\mu) \bigotimes_{k \neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_k^{r_k-1} y_k], \\ \widetilde{f}_n^1 &= \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^1, c'(\mu) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j} + \sum_{k=0}^{wf-1} d_k'(\mu) \bigotimes_{k \neq j=0}^{wf-1} y_j^{r_j} \otimes y_k^{r_k-1} x_k],\end{aligned}$$

其中， $c(\mu)$ $c'(\mu)$ $d(\mu)$ $d'(\mu)$是在 μ处由多项式 c、c'、d和 d'（属于 $\overline{\mathbb{F}}_p[z_0, \cdots, z_{n-1}]$，且每个变量的次数不超过 $q^w - 1$）识别得到的 z_j。

证明。我们主要采用了 [5]中的引理 3.11所介绍的方法。注意到 β^{-1} 正规化了 $I(1)$。只需证明$\widetilde{f}_n^0$ 和 $n \geq 0$ 的等式，因为对 f_n^1的$\widetilde{\ }$等式可通过应用 $\beta^{-1} f_n^1$推得。令 $f_n^0 = \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, v_\mu]$，其中 $v_\mu = \sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j - i_j} y_j^{i_j}$。我们考虑如下情形：

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi_D^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f}_n^0 - \widetilde{f}_n^0 = \sum_{\mu \in I_n} [\begin{pmatrix} 1 & \varpi_D^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{n,\mu}^0, v_\mu] - \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,0}^0, v_\mu].$$

注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi_D^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & \varpi_D^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f}_n^0 - \widetilde{f}_n^0 &= \sum_{\mu \in I_n} [\begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\mu] - \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,0}^0, v_\mu] \\ &= \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\mu - v_\mu].\end{aligned}$$

由（10）可得

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} v_\mu - v_\mu = \sum_{\vec{i}=0}^{\vec{r}} c_{\vec{i}} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j-i_j}(x_j+y_j)^{i_j} - v_\mu \in \overline{\mathbb{F}}_p \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}. \tag{14}$$

在证明的其余部分，我们采用 [5] 中引理 3.11 后的有向图模型。令 $\{e_k\}_{k=0}^{wf-1}$ 为 $\mathbb{R}^{wf}$ 的标准基， $X=(X_e, X_v)$ 为如下有向图：

$$X_e = \{\sum_{k=0}^{wf-1} a_k e_k : 0 \le a_k \le r_k\} \cap \mathbb{Z}^{wf},$$
$$X_v = \{(\vec{i},\vec{j}); \vec{i} = \vec{j} + e_k \text{ for some } k, 0 \le k \le wf-1\}.$$

借助上述模型，我们注意到，每个 $v \in Sym^r\overline{\mathbb{F}}_p^2$ 都是定义在 X_e 上、取值于 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 的函数，其中 $\vec{i}$ 对应于 $\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{i_j} y_j^{i_j-r_j}$。在这种解释下，对应于 $\overline{\mathbb{F}}_p \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}$ 的函数支撑在 $\{\vec{r}\}$ 上。

给定一个元素 $\mathcal{V} \in$ (14)， v_μ 在顶点 $\vec{i}$ 处的非零值，只有在存在一条从 $\vec{i}$ 到 $\vec{j}$ 的非平凡有向路径，且对所有 k 都满足 $j_k \le i_k$、对某个 k_0 满足 $j_{k_0} < i_{k_0}$ 时，才可能对另一个顶点 j 处的 $\mathcal{V}$ 值产生贡献。此外，对于 $\vec{i} + e_k = \vec{r}$， $\mathcal{V}$ 在 i 处的值只取决于 v_μ 在 $\vec{r}$ 处的值。因此， v_μ 只能在 $\{\vec{0}\} \cup \{e_k\}_{k=0}^{wf-1}$ 上取非零值，所以 $c_0(\mu)$ 和 $\{c_{e_k}(\mu)\}_{k=0}^{wf-1}$ 是从 I_n 到 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 的函数。根据引理2.5，对于所有 $\mu \in I_n$，这些函数都可以表示为次数至多为 q^w-1 的多项式。

□

引理4.2. 设 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和 $\widetilde{f}$ 是 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G\sigma$ 的元素，使得 $g\widetilde{f} - \widetilde{f} \in T(\mathrm{ind}_{KZZ'}^G\sigma)$ $+ B_{n-1} \forall g \in I(1)$。对于 $f' \in B_{n-1}$，我们设 $\widetilde{f} = \widetilde{f}_n^0 + \widetilde{f}_n^1 + f'$，其中 $\widetilde{f}_n^0$ 的支集是 X_n^0，而 $\widetilde{f}_n^1$ 的支集是 $X_{n^\circ}^1$ 那么，对于所有 $0 \le k \le wf-1.$， d_k 和 d_k' 都是常数。如果 $e=1$，那么 $d_k = d_k' = 0.$

证明。我们沿用 [5] 中引理3.13给出的方法。首先考虑 $e=1$ 且 $d_k \ne 0$ 的 ~ ~情形。应用 $\beta^{-1}f_n^1$，我们可以推导出 f_n^1 的等式。考虑 $b \in I_1$ 时的以下等式，

$$\begin{pmatrix}1 & [b]\varpi_D^{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{f}_n^0 - \widetilde{f}_n^0 = \sum_{\mu\in In}[\begin{pmatrix}1 & [b]\varpi_D^{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_{n,\mu}^0, c(\mu)\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]$$
$$+ [g_{n,\mu}^0, \sum_{k=0}^{wf-1} d_k \bigotimes_{k\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_k^{r_k-1}y_k] - \widetilde{f}_n^0$$

其中

$$\widetilde{f}_n^0 = \sum_{\mu\in In}[g_{n,\mu}^0, c(\mu)\bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} + \sum_{k=0}^{wf-1} d_k(\mu)\bigotimes_{k\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}\otimes x_k^{r_k-1}y_k].$$

注意到

$$\begin{pmatrix}1 & [b]\varpi_D^{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_D^n & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varpi_D^n & [\mu]_{n-1} + [\mu_{n-1}+b]\varpi_D^{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & P_0(\mu_{n-1},b)\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $P_0(\mu_{n-1}, b)$ 是引理 2.3 中给出的商空间。接下来，我们作代换 $\mu_{n-1} \to \mu_{n-1} - b$。于是得到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & [b]\varpi_D^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f}_n^0 - \widetilde{f}_n^0 &= \sum_{\mu \in In} [g_{n,\mu}^0, c([\mu]_{n-1}, [\mu_{n-1} - b]) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \\ &+ [g_{n,\mu}^0, \begin{pmatrix} 1 & P_0(\mu_{n-1} - b, b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{wf-1} d_k \bigotimes_{k \neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_k^{r_k - 1} y_k)] - \widetilde{f}_n^0 \\ &= \sum_{\mu \in In} [g_{n,\mu}^0, (c([\mu]_{n-1}, [\mu_{n-1} - b]) - c([\mu]_{n-1}, [\mu_{n-1}])) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \\ &+ [g_{n,\mu}^0, \sum_{k=0}^{wf-1} d_k (P_0(\mu_{n-1} - b, b)^{p^k}) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}].\end{aligned} \tag{15}$$

对于 $0 \leq k \leq wf - 1$，定理 2.4 意味着

$$\begin{aligned}P_0(\mu_{n-1} - b, b)^{p^k} &= (\frac{(\mu_{n-1} - b)^{q^w} + b^{q^w} - \mu_{n-1}^{q^w}}{p})^{p^k} \\ &= (\sum_{s=1}^{p-1} \mu_{n-1}^{sp^{wf-1}} (-b)^{p^{fw} - sp^{wf-1}} \frac{\binom{p^{fw}}{sp^{fw-1}}}{p})^{p^k}.\end{aligned}$$

注意，$P_0(b, \mu_{n-1} - b)^{p^k}$ 含有一个形如 $(-b)^{p^{k-1}} \mu_{n-1}^{(p-1)p^{k-1}}$ 的非零单项式（如果 $k = 0$，则它含有一个形如 $(-b)^{p^{wf-1}} \mu_{n-1}^{(p-1)p^{wf-1}}$ 的单项式）。我们假设 $q^w - 1 c_{[\mu]_n - 1}(x) = \sum a_j([\mu_{n-1}]) z^j$，其中 $a_j \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ 是由引理2.5保证存在的适当多项式。令多项式 $c([\mu]_{n-1}, [\mu_{n-1}]) = c_{[\mu]_n - 1}(\mu_{n-1})$ 和 $c([\mu]_{n-1}, [\mu_{n-1} - b]) = c_{[\mu]_{n-1}}(\mu_{n-1} - b)$。我们记作，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{q^w-1} \widetilde{a}_j([\mu_{n-1}]) \mu_{n-1}^j &= c_{[\mu]_{n-1}}(\mu_{n-1} - b) - c_{[\mu]_{n-1}}(\mu_{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{q^w-1} a_j([\mu_{n-1}]) (\sum_{s=0}^{j-1} (-b)^{j-s} \binom{j}{s} \mu_{n-1}^s).\end{aligned} \tag{16}$$

由于 (15) 属于 $\mathrm{Im}(T)$ 和 $r_k < p - 1$，我们有

$$\mu^{(p-1)p^k} (\sum_{j=0}^{q^w-1} \widetilde{a}_{(p-1)p^{k-1}}([\mu_{n-1}]) + (-b)^{p^{k-1}}) = 0.$$

这给出，对于所有 $b \in \mathbb{F}_{q^w}^\times$，$\widetilde{a}_{(p-1)p^{k-1}}([\mu_{n-1}]) + (-b)^{p^{k-1}} = 0$。展开 (16)，对每个 $b \in \mathbb{F}_{q^w}^\times$，我们得到一个方程，

$$\widetilde{a}_{(}p-1)p^{k-1}([\mu_{n-1}]) = \sum_{l=(p-1)p^{k-1}+1}^{q^w-1} a_l([\mu_{n-1}]) (-b)^{l-(p-1)p^{k-1}} \binom{l}{(p-1)p^{k-1}}.$$

现在由定理 2.4 可得

$$\mathrm{L.H.S} = \sum_{l=(p-1)p^{k-1}+1}^{q^w-1} a_l([\mu_{n-1}])(-b)^{l-(p-1)p^{k-1}} \binom{l_{k-1}}{p-1} = -(-b)^{p^{k-1}}.$$

将这些等式分别乘以 $(-b)^{-p^{k-1}}$，再将它们相加，

$$\sum_{l=(p-1)p^{k-1}+1}^{q^w-1} a_l([\mu_{n-1}])(-b)^{l-p^k} \binom{l_{k-1}}{p-1} = \sum_{b\in\mathbb{F}_{q^w}^\times} -1. \tag{17}$$

由引理2.6，(17) 左边的一个元素在$l - p^k \equiv 0$ 模 $q^w - 1$时不等于零。因此，若 $l \equiv p^k$ 模 $q^w - 1$，则必有 $l_{k-1} = 0$。应用定理 2.4，得到 $\binom{l_{k-1}}{p-1} = 0$。这导致矛盾，因此我们得出结论：对于 $0 \le k \le wf - 1$， $d_k = 0$ 。

对于 $e \neq 1$，考虑

$$\widetilde{f}_n^0 = \sum_{\mu\in In} [g_{n,\mu}^0, c(\mu) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} + \sum_{k=0}^{wf-1} d_k(\mu) \bigotimes_{k\neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_k^{r_k-1} y_k].$$

我们将用数学归纳法证明 d_k 和 d_k' 是常数。假设当 $i \le m$ 时， d_k 与 μ_{n-i} 无关。若 $\mu \in I_n$，则 $\mu_n \notin \mu$ ，因此当 $m = 0$ 时结论成立。假设当 μ_{n-m+1} 时，d_k 与 μ_{n-1} 无关，并考虑以下等式，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & \varpi_D^{n-m}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{f}_n^0 - \widetilde{f}_n^0 = &\sum_{\mu\in In} [\begin{pmatrix}1 & \varpi_D^{n-m}\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_{n,\mu}^0, c(\mu) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]\\ &+ [\begin{pmatrix}1 & \varpi_D^{n-m}\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_{n,\mu}^0, \sum_{k=0}^{wf-1} d_k(\mu) \bigotimes_{k\neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_k^{r_k-1} y_k] - \widetilde{f}_n^0.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{pmatrix}1 & \varpi_D^{n-m}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_D^n & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varpi_D^n & \mu'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中，对于 $0 \le t < n - m$， $\mu_{n-m} + 1 = \mu'_{n-m}$ 和 $z \in \mathcal{O}_D$， $\mu'_t = \mu_t$。此外，对于 $t > n - m$，我们有 $\mu'_t \neq \mu_t$ ；但由于 d_k 独立于 μ_{n-1}、 $\cdots$、 μ_{n-m+1}，变换 $\mu' \mapsto \mu$ 不影响 d_k（μ）。因此，我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & \varpi_D^{n-m}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{f}_n^0 - \widetilde{f}_n^0 = &\sum_{\mu\in I_n} [g_{n,\mu}, c'(\mu) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]\\ &+[g_{n,\mu}^0, \sum_{k=0}^{wf-1} d_k([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m} - 1) \bigotimes_{k\neq j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes z^{p^k} x_k^{r_k} + x_k^{r_k-1} y_k)] - \widetilde{f}_n^0,\end{aligned}$$

其中， $c'(\mu)$ 是关于 $\overline{\mathbb{F}}_p[\mu_0,\cdots,\mu_{n-1}]$ 的多项式。由此可得，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & \varpi_D^{n-m}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{f}_n^0-\widetilde{f}_n^0=&\sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,\widetilde{c}(\mu)\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}]\\&+[g_{n,\mu}^0,\sum_{k=0}^{wf-1}(\widetilde{d}_k(\mu))\bigotimes_{k\neq j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}\otimes x_k^{r_k-1}y_k)]\qquad(18)\\&\in \mathrm{Im}(T),\end{aligned}$$

~其中 $d_k(\mu)=d_k([\mu]_{n-m},\mu_{n-m}-1)-d_k([\mu]_{n-m},\mu_{n-m})$，且 $\widetilde{c}(\mu)$ 是关于 $\overline{\mathbb{F}}_p[\mu_0,\cdots,\mu_{n-1}]$ 的多项式。

因此，我们有

$$d_k([\mu]_{n-m},\mu_{n-m}-1)-d_k([\mu]_{n-m},\mu_{n-m})=0$$

对所有 k，由于 (18) $\in \mathrm{Im}(T)$，因此 d_k 与 μ_{n-m} 无关，并且根据归纳法，它是一个常数。□

引理 4.3。设 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\widetilde{f}$ 是 $\mathrm{ind}_{KZZ'}^G\sigma$ 的元素，使得 $g\widetilde{f}-\widetilde{f}\in T(\mathrm{ind}_{KG}^G\sigma)+B_{n-1}\forall g\in I(1)$。对于 $f'\in B_{n-1}$，我们令 $\widetilde{f}=\widetilde{f}_n^0+\widetilde{f}_n^1+f'$，其中 $\widetilde{f}_n^0$ 的支集为 S_n^0，而 $\widetilde{f}_n^1$ 的支集为 S_n^1。则 $c(\mu)=\sum_{k=0}^{wf-1}\widetilde{c}_k\mu^{p^k(r_k+1)n-1}$，且 $c'(\mu)=\sum_{k=0}^{wf-1}\widetilde{c}'_k\mu^{p^k(r_k+1)\,n-1}$。此外，$\widetilde{c}_k$ 和 $\widetilde{c}'_k$ 与 μ 无关，其中 $c(\mu)$ 和 $c'(\mu)$ 如引理 4.1 中所定义。

证明。假设 $wf>1$。根据引理4.2，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_n^0&=\sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,c(\mu)\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}]+\sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,\bigotimes_{s\neq j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}\otimes x_s^{r_s-1}y_k]\\&=\sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,c(\mu)\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}]+t_n^s.\end{aligned}$$

根据命题 3.4，元素 y_n^s 是一个 $I(1)$-不变元。因此，不失一般性，我们可以假设对于所有 n，$\widetilde{f}_n^0=\sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,c(\mu)\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}]$ 成立。对于 $n=0$ 的情形，该断言是显然的，因为 $\mu\in I_0$。现在对于 $n\geq 1$，考虑如下计算，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & -\varpi_D^{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{f}_n^0-\widetilde{f}_n^0&=\begin{pmatrix}1 & -\varpi_D^{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,c(\mu)\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}]-\widetilde{f}_n^0.\\&=\sum_{\mu\in I_n}[g_{n,\mu}^0,(c([\mu]_{n-1},[\mu_{n-1}+1])-c([\mu]_{n-1},[\mu_{n-1}]))\bigotimes_{j=0}^{wf-1}x_j^{r_j}].\end{aligned}$$

记

$$\triangle c=c([\mu]_{n-1},[\mu_{n-1}+1])-c([\mu]_{n-1},[\mu_{n-1}]),$$

并且它是一个关于 μ_{n-1} 的多项式，其系数属于 $\overline{\mathbb{F}}_p[\mu_0,\cdots,\mu_{n-2}]$。

我们断言，对于所有 $0\leq j\leq wf-1$，μ_{n-1} 的次数 k 必须介于 0 和 r_j 之间，或者对某个 $0\leq l\leq wf-1$ 等于 $p^l(r_l+1)$。若此结论不成立，则存在某个 j_0 和 $k\neq p^{j_0}(r_{j_0}+1)$，使得某个 $k_{j_0}>r_{j_0}$。不失一般性，我们

可以假设在 $c(\mu)$ 中不存在其他单项式 $\mu_{n-1}^{k'}$，使得对所有 j 都有 $k_j \leq k_{j'}$。根据定理 2.4，我们有

$$(\mu_{n-1}+1)^k - \mu_{n-1}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{wf-1} \begin{pmatrix} k_j \\ i_j \end{pmatrix} \mu_{n-1}^i,$$

而上述结果意味着，$\triangle c$ 包含所有形如 $\mu_{n-1}^{k-p^l}$ where$0 \leq l \leq wf-1$ 的单项式。特别地，对于满足 $j_1 \neq j_0$ and$k_{j_1} > 0$ 的 j_1，$\mu_{n-1}^{k-p^{j_1}}$ 出现在 $\triangle c$ 中；又由于 $k_{j_0} > r_{j_0}$ and $k \neq p^{j_0}(r_{j_0}+1)$，这与我们的假设矛盾。因此我们写作，

$$\widetilde{f}_n^0 = \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, (Q([\mu]_{n-1})\mu_{n-1}^r + \sum_{k=0}^{wf-1} \widetilde{c}_k([\mu]_{n-1})\mu_{n-1}^{p^k(r_k+1)}) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}],$$

其中 $\widetilde{c}_k$，且 Q 仅依赖于 $[\mu]_{n-1}$。
现在假设 $n \geq 2$。考虑以下计算

$$\sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, Q([\mu]_{n-1})\mu_{n-1}^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] = \sum_{\mu \in I_n} [\begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q([\mu]_{n-1})\mu_{n-1}^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \tag{19}$$

$$= \sum_{\mu \in I_{n-1}} \begin{pmatrix} \varpi_D^{n-1} & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q(\mu) \sum_{\mu' \in I_1} [\begin{pmatrix} \varpi_D & \mu' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mu_{n-1}^r \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]$$

$$= \sum_{\mu \in I_{n-1}} g_{n-1,\mu}^0 Q(\mu) s_1^r. \tag{20}$$

由命题 3.2 可得

$$(-1)^r s_1^r + [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] \in \mathrm{Im}(T)$$

对 Im(T) 取模后，我们得到

$$(-1)^r s_1^r + [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}] = 0$$

$$(-1)^{r+1} s_1^r = [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}].$$

因此，方程（20）给出

$$\sum_{\mu \in I_{n-1}} g_{n-1,\mu}^0 Q(\mu) s_1^r = \sum_{\mu \in I_{n-1}} g_{n-1,\mu}^0 [\alpha, (-1)^{r+1} Q(\mu) \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]$$

$$= \sum_{\mu \in I_{n-1}} [g_{n-2,[\mu]_{n-2}}^0, (-1)^{r+1} Q(\mu) \begin{pmatrix} 1 & [\mu_{n-2}] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]. \tag{21}$$

因此，我们可以将（19）左边的每一项替换为（21）中的一项，而不改变 $\widetilde{f}_{n^{\circ}}^{1}$ 若 $n=1$，我们只需将 s_1^r 替换为（-1） $^{r+1}[\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]$。因此

我们必须有 $Q(\mu)=0$。

在证明的其余部分，我们将使用数学归纳法。我们归纳地假设，对于 $1 \leq m \leq n-1$， $\widetilde{c}_k$ 与 $[\mu]_{n-m}$ 相互独立。注意，当 $n=1$ 时， $\mu \in I_0$，因此该命题显然成立。因此，设 $n \geq 2$，并且对于所有 $i<m$， $\widetilde{c}_k$ 与 μ_{n-i} 相互独立，注意到，

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi_D^{n-m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f}_n^0 - \widetilde{f}_n^0 = \begin{pmatrix} 1 & \varpi_D^{n-m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \widetilde{c}([\mu]_{n-1}) \mu_{n-1}^{p^k(r_k+1)} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] - \widetilde{f}_n^0. \tag{22}$$

注意

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi_D^{n-m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi_D^n & \mu' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中，对于 $0 \leq t < n-m$， $\mu_t' = \mu_t$、 $\mu_{n-m}+1 = \mu_{n-m}'$ 和 $z \in \mathcal{O}_{D^{\circ}}$ 此外，对于 $t > n-m$，我们有 $\mu_t' = \mu_t + z_t$。这里 $z_t \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mu_{n-m}, \cdots, \mu_{n-2}]$。因此，等式（22）的右侧等于，

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, (\widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m}-1) - \widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m})) \mu_{n-1}^{p^k(r_k+1)} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \\ &+ \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \sum_{k=0}^{wf-1} \sum_{j=0}^{r_k} \widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m}-1) (\mu_{n-1}+z_{n-1})^{p^k(r_k+1)} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, (\widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m}-1) - \widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m})) \mu_{n-1}^{p^k(r_k+1)} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}] \qquad (23) \\ &+ \sum_{\mu \in I_n} [g_{n,\mu}^0, \sum_{k=0}^{wf-1} \sum_{j=0}^{r_k} \widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m}-1) \mu_{n-1}^{jp^k} z_{n-1}^{p^k(r_k+1)-jp^k} \binom{r_k+1}{j} \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}]. \end{aligned}$$

注意到在 (23) 中， μ_{n-1} 的次数大于 $p^k r_k$，因此由命题 3.2 可得

$$\widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m}-1) - \widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m}) = 0.$$

因此，我们可以得出 $\widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m}-1) = \widetilde{c}([\mu]_{n-m}, \mu_{n-m})$。这意味着 $\widetilde{c}_k$ 与 $[\mu]_{n-m}$ 无关，正如所需。

~对 f_n^1应用相同的方法，将 $\beta^{-1} f_n^1$应用于其中即可得到结果。 □

4.2. 主定理的证明。现在我们证明本文的主定理，该定理完整描述了作为一个$\overline{\mathbb{F}}_p$-向量空间的 $(\mathrm{ind}_{KZZ'}^G/(T))$ 的 $I(1)$-不变元的一组标准基。

定理 4.4。设 D 是一个有限维中心 F-除代数，且 $dim_F(D) = w^2$，并分别设 e 和 f 为 F 的分歧次数和惯性次数

在 $\mathbb{Q}_p$ 上。我们假设 $2 < r_j < p-3$ 对于 $0 \le j \le wf-1$ 成立，并令

$$\begin{aligned} S_m^l &= \{s_n^{p^l(r_l+1)}\}_{n\ge m} \cup \{\beta s_n^{p^l(r_l+1)}\}_{n\ge m}, \\ T_m^l &= \{t_n^l\}_{n\ge m} \cup \{\beta t_n^l\}_{n\ge m}, \\ S_m &= \cup_{l=0}^{wf-1} S_m^l, \\ T_m &= \cup_{l=0}^{wf-1} T_m^l. \end{aligned}$$

那么，空间 $(\mathrm{ind}_{KZZ'}^G \sigma/(T))^{I(1)}$ 中 $I(1)$-不变子空间作为 $\overline{\mathbb{F}}_p$-向量空间的一组 I-特征基为

$$S_1 \cup \{[\mathrm{Id}, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}], [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]\} \quad when\ e=1, wf>1,$$

$$S_1 \cup \{[\mathrm{Id}, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}], [\alpha, \bigotimes_{j=0}^{wf-1} y_j^{r_j}]\} \cup T_1 \quad when\ e>1, wf>1.$$

证明。引理 4.1、4.2 和 4.3 表明， $\tilde{f}_n^0$ 和 $\tilde{f}_n^1$ 含有元素 $s^{p^k}{}_{(r_k+1)n}$ 与 t_n^s （分别为 $\beta s_n^{p^k}{}_{(r_k+1)}$ 和 βt_n^s ）的线性组合。命题 3.4 表明，这些元素在商空间中是 $I(1)$- 不变的。此外， $\tilde{f}-\tilde{f}_n^0-\tilde{f}_n^1$ 的像位于商空间中，且支撑在 B_{n-1} 上，这意味着它也是 $I(1)$-˜ ˜不变的。对于 $n=0$，我们得到 $f_0 = f - f' = [\mathrm{Id}\ v_0] + [\alpha, v_1]$，其中 f' 是商空间中一个 $I(1)$- 不变且支撑在 $B_n \backslash B_0$ 上的元素，这意味着 $\tilde{f}_0 \in (\mathrm{ind}_{KZZ'}^G \sigma/(T))^{I(1)}$。由命题 3.2，我们证明

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f}_0 - \widetilde{f}_0 = [\mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_0] - [\mathrm{Id}, v_0] \in \mathrm{Im}(T)$$

if

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_0 - v_0 = \sum_{k=0}^{wf-1} \widetilde{c}_k \bigotimes_{k\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_k^{r_k-1}(x_k+y_k) - \bigotimes_{k\ne j=0}^{wf-1} x_j^{r_j} \otimes x_k^{r_k-1} y_k = 0.$$

由此得到 $\widetilde{c}_k = 0$ 和 $v_0 = \bigotimes_{j=0}^{wf-1} x_j^{r_j}$。类似地，我们对 $[\alpha, v_1]$ 考虑以下论证，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_D & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f}_0 - \widetilde{f}_0 = [\alpha, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1] - [\alpha, v_1] \in \mathrm{Im}(T).$$

这意味着

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 - v_1 = \sum_{k=0}^{wf-1} \widetilde{c}'_k \bigotimes_{k\ne j=0}^{wf-1} y_j^{r_j} \otimes y_k^{r_k-1}(x_k+y_k) - \bigotimes_{k\ne j=0}^{wf-1} y_j^{r_j} \otimes y_k^{r_k-1} x_k = 0.$$

因此，我们得出 $\widetilde{c}'_k = 0$ 和 $v_1 = \bigotimes_{j=1}^{wf-1} y_j^{r_j}$。证明至此完成。 □

References

1. L. Barthel 和 R. Livn´e, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. 75 1290194 2 1994 2, 261 292 ( ), 第 – 期。MR 。Christophe Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *. I*, Com- positio Math. 138 2018825 3 2003 2, 165 188 ( ), 第 – 期。MR 。, *The emerging p-adic Langlands programme*, 国际数学家大会论文集。第二卷, Hindustan Book Agency, 新德里, 2010, 第 203–230 页。MR 2827792 4. Christophe Breuil 和 Vytautas Pa˘sk¯unas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, **216** 2012 1016, +114 GL Mem. Amer. Math. Soc. 2931521 ( ), 第 vi 期。MR 5 *On the universal* F 。Yotam I. Hendel, mod p *supersingular quotients for* GL_2 *over* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *for a general* $F/\mathbb{Q}_p$ GL ( ), J. Algebra ( ), –。 **519** 2019 1 38 MR 3873949 6. Florian Herzig, *p-modular representations of p-adic groups*, 《有限群和 p-进群的模表示论》, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., 第 30 卷, World Sci. Publ., 哈肯萨克, 新泽西州, 2015, 第 73–108 页。MR 3495745 7. Tony Ly, *Des représentations modulo p de* $\mathrm{GL}(2, D)$ *D algèbre à division sur un corps local*, J. Number Theory 151 3314202 8 2015 54 106 ( ), –。MR。Dipendra Prasad 和 A. Raghuram, *Kirillov theory for* GL_2 D *where D is a division algebra over a non-Archimedean local field* GL ( ), Duke Math. J. ( ), 第 **104** 2000 1, 19 44 1769724 – 期。MR 9 *An irreducibility criterion for supersingular p representations of*。Michael M. Schein, mod GL_2 F *for totally ramified extensions F of* $\mathbb{Q}_p$ **363** 2011 12, ( ), 6269 6289 2833554 Trans. Amer. Math. Soc. ( ), 第 – 期。MR 10. , *On the universal supersingular* mod p *representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Number Theory 141 3195399 11 2014 242 277 ( ), –。MR。Armin Straub, Victor H. Moll 和 Tewodros Amdeberhan, *The p-adic valuation of k-central binomial coefficients* **140** 2009 1, 31 42 2557851 , Acta Arith. ( ), 第 – 期。MR