arXiv:2302.07481v4 [cond-mat.quant-gas] 4 Jun 2024

快速旋转玻色-爱因斯坦量子液滴的动力学

Szu-Cheng Cheng[1], **Yu-Wen Wang**[2], **和 Wen-Hsuan Kuan**[2]

[1]中国文化大学物理系，台湾台北阳明山 11114。[2]台北市立大学应用物理与化学系，台湾台北 10048。

电子邮件：wenhsuan.kuan@gmail.com

摘要。 本文详细分析了非谐势阱束缚的快速旋转玻色–爱因斯坦液滴的定态性质和动力学。我们研究了粒子数、束缚势和旋转速度对能量有利的珠状结构、多量子化涡旋、偏心涡旋以及质心态形成的影响。多周期轨迹和呼吸振荡为涡旋态中表面模的集体激发提供了证据。在快速旋转区域观察到的自陷现象以及向最低朗道能级的趋向，与量子霍尔极限相吻合。如果对量子液滴施加外部扰动，则可能改变拓扑荷并破坏涡旋态的势流。

1. 引言

利用激光冷却和囚禁技术，可以在极低温下制备稀薄原子气体。根据巨正则系综理论，用于确定量子相变的临界温度可由零化学势下的相空间填充来定义，而具有非零非对角长程有序的冷原子宏观集合会形成玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs） [1, 2, 3]。在平均场（MF）近似下，通过应用Gross-Pitaevskii方程（GPE），可以充分描述具有弱原子间相互作用的玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs）的动力学。在Feshbach共振附近，弹性散射可被外场显著改变 [4, 5, 6], ，准束缚分子能够穿过势垒，并与碰撞原子的自由态发生共振耦合。因此，利用外部磁场调节散射长度的大小和符号，为操控玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs）提供了新的视角 [1, 7, 8]。

对于单原子系综中的两体相互作用，在冷却过程中，原子间的吸引力与范德瓦耳斯力导致的短程排斥作用达到平衡，从而形成液体而非气体。由于密度高且不可压缩，普通液体难以进入量子态。然而，将 Lee-Huang-Yang（LHY）修正纳入均匀弱排斥玻色气体的基态能量后 [9], ，近期在双组分玻色混合物 [10, 11, 12] 和单组分偶极凝聚体[13, 14, 15, 16]中观测到一种新型量子液体。它存在于超冷、极稀薄的原子系统中，且不符合范德瓦耳斯模型。当粒子数超过阈值时，吸引性平均场相互作用 $\propto n^2$ 引发的不稳定性若得到高阶量子多体效应 $\propto n^{5/2}$ [17]的补偿，便会发生气液相变。通过调节原子间相互作用，实现稀薄且相互作用微弱的自束缚液滴，为超越平均场效应 [18]提供了直接证据。

作为量子液体的模型，玻色超流体具有卓越的相干性，这可通过计算单体密度矩阵以及任意两个粒子之间的关联函数得到证明。对于无自旋原子气体，凝聚体序参量的相位梯度定义了超流速度；除非存在满足Onsager-Feynman量子化条件的相位奇点，否则该速度无旋。通过激光搅拌相位印刻，已在快速旋转的稀薄气体玻色–爱因斯坦凝聚体中实验实现涡旋核 [19, 20],涡旋环 [21, 22], 乃至涡旋晶格 [23, 24] 的生成。与此同时，Kasamatsu等人首次预言，通过将所有相位奇点吸收到低密度空穴区域中，可以形成巨型涡旋 [25]。在紧束缚玻色–爱因斯坦凝聚体中，也观察到了多个量子化涡旋的形成以及长寿命涡旋聚集体 [26, 27], ，这表明科里奥利力对旋转系统具有至关重要的影响。

与气态玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs）不同，理论分析表明，单组分偶极

凝聚体中，带单量子化涡旋态的量子液滴（QDs）是不稳定的 [28, 29]。然而，有报道称，通过分析线性化的 Bogoliubov–de Gennes方程，理论上可以找到具有隐式和显式涡量的二维量子液滴稳定解 [30] ，以及具有接触相互作用和 LHY修正相互作用的三维二元凝聚体稳定解 [31]。研究还发现了谐振阱和非谐振阱中受限的旋转液滴所呈现的各种具有奇异奇点的相 [32, 33]。实验也表明，当涡旋晶格量子液滴违反 Vakhitov-Kolokolov判据时，应用光学晶格有助于稳定零涡量孤子和涡旋孤子 [34] [35]。此外，研究还报道了类高斯量子液滴中涡旋晶格的形成 [36] 以及量子霍尔极限 [37] 。对于这些量子液体，具有相关有限尺寸效应的系统，其粒子数对低能模的形成至关重要。

有趣的是，一个受限于二维空间并置于垂直磁场中的电子系统呈现出谐振荡问题。在该系统中，电子动能是量子化的，这些离散的能级被称为朗道能级。在强磁场条件下，可能会出现最低朗道能级（LLL）占据。相比之下，相互作用和无序的存在可能激发电子跃迁至高朗道能级态，从而导致朗道能级混合（LLM）。对于严格的二维系统而言，这种效应尤为显著，因为随着厚度减小，短程相互作用所产生的主要贡献会更加有效。从这一角度来看，表现出量子化霍尔电阻平台以及纵向电阻中的阿伦尼乌斯行为 [38, 39] 的整数量子霍尔效应，是朗道能级形成的直接结果。对于分数量子霍尔系统，Laughlin理论和复合费米子原理的引入，为探索斯格明子和分数统计等新颖现象提供了重要线索 [40, 41, 42]。

由于具有诸多相似之处，将同一数学形式体系应用于强磁场中的带电粒子系统和旋转的中性原子，已成功预言了玻色Laughlin态 [43, 44]。过去十年间，人们广泛探索了一些新颖现象，例如不可压缩态的出现、Jain序列的玻色子类比[45], ，以及阿贝尔态和非阿贝尔态 [46, 47], 。此外，旋转自旋玻色子中奇异态的形成也已得到研究 [48]。近年来，在玻色–爱因斯坦凝聚体的最低朗道能级中实现几何挤压，以及相互作用驱动的自发结晶，为实现强关联流体和玻色量子霍尔态 [49, 50]提供了新途径。量子霍尔效应的发现揭示了与涡旋拓扑研究相关的显著宏观量子现象；而具有多个可调参数自由度的旋转玻色–爱因斯坦凝聚体系统用途广泛，有望应用于拓扑量子计算 [51]。

本研究旨在从理论上考察对称非谐势阱中受限的二维快速旋转量子液滴的基态性质和动力学。在旋转场作用下，离心势会减弱径向约束，而液滴在旋转参考系中受到的科里奥利力等效于带电粒子所受的洛伦兹力。随着量子霍尔效应与

稀薄气体中快速旋转的玻色–爱因斯坦凝聚体之间的类比已得到明确认识，探索能否为一种新型量子液体设计人工洛伦兹力，从而观察到携带非零拓扑荷的奇异相的生成、描绘量子相变的路径，并调控该系统中量子态的奇点和稳定性，将颇有意义。这些探索有望以可控方式利用低维非均匀量子液体模拟量子霍尔型效应。由于相互作用与量子统计的综合影响最终决定了多体基态的特征，这类旋转系统使人们能够研究量子液体中的人工轨道磁性。

本文其余部分安排如下。第二节首先介绍形成二维量子液滴的判据，随后采用变分法并考虑 LLM 效应，给出非谐势阱中的旋转量子液滴所满足的含李–黄–杨修正的广义 Gross–Pitaevskii 方程的解析解。第二节 A 部分分析定态性质，包括密度分布和相位分布。第二节 B 部分简要比较旋转量子液滴与光学涡旋，以便更好地阐释相位分布背后的物理机制。第二节 C 部分借助相图展示非线性相互作用和旋转速度对基态构型的影响。基于最低朗道能级近似，本文提出了最大环流限制的表述，以避免三体碰撞导致的塌缩和数值发散。第三节进一步探讨旋转量子液滴的动力学。通过求解欧拉-拉格朗日方程，我们在第三节 A 部分分析了线性微扰下量子液滴的周期性和稳定性，并在第三节 B 部分研究了具有长期演化涡旋态概率流密度分布的超流体。最后，第四节总结全文。

2. 旋转量子液滴的理论模型

在极低温下，超稀薄气态原子之间的相互作用可用硬核模型和 s 波散射长度很好地描述。然而，对于低维液体系统，情况会变得更加复杂，尽管文献 [12]和[52] 中采用的三维 s 波散射长度 a^{3D} 和 $a_{\uparrow\downarrow}^{3D}$ 可用于恰当地描述类液体液滴区间。要在密度为 $n_{\uparrow}$ 和 $n_{\downarrow}$的稀薄玻色–玻色混合物系统中形成二维量子液滴，组分间需要弱吸引相互作用，而组分内则需要弱排斥相互作用。利用散射t 矩阵 [53], ，可以从理论上研究超越平均场近似的弱相互作用区间 [54, 55]。对于对称情形 $a_{\uparrow\uparrow} = a_{\downarrow\downarrow} = a$ 和 $n_{\uparrow} = n_{\downarrow} = n$, 在假设具有宏观凝聚体占据数的条件下，可以解析地推导出均匀液体的能量密度。

参见文献 [54], ，二维散射长度 a 和 $a_{\uparrow\downarrow}$ 分别可表示为 $a = l_z \exp[-\sqrt{\pi/2}\, l_z/a^{3D}]$ 和 $\overline{a_{\uparrow\downarrow}} = l_z \exp[-\sqrt{\pi/2}\, l_z/a_{\uparrow\downarrow}^{3D}]$，其中

$l_z = \sqrt{\hbar/2M\omega_z}$ 是强约束方向上的振子长度。在本研究中，对由$a_{\uparrow\downarrow}^{3D} = -53\,a_0$和 $a^{3D} = 50\,a_0$ [10] 组成的准二维 ^{39}K扁平液滴对称混合物进行了模拟。对于典型的实验参数$\omega_z = 2\pi \times 400$ Hz，研究发现，通过引入束缚，混合物可以从稳定气体转变为液体。由于不等式 $1/\ln(a_{\uparrow\downarrow}/a) = 1.8 \times 10^{-3} \ll 1$ 得到满足，因此考虑稀薄液体系统。对于受限量子液滴，波函数发生变化的典型长度尺度约为愈合长度$\xi \sim \hbar/\sqrt{M|\mu|}$，该长度代表涡旋核心尺寸，其中 $\mu \sim -n^2\hbar^2/M\ln^2(a_{\uparrow\downarrow}/a)$为化学势。对于液滴而言，表面张力对有限尺寸对能量和表面模谱的影响至关重要。

基于$\vec{\quad}$ $\vec{\quad}$幺正变换 $H_r = H_l - \Omega \cdot L$，在非惯性参考系中分析旋转量子液滴，其中 H_r 和 H_l 分别为旋转系和实验室系的哈密顿量；Ω为角速度； L 为物体的轨道角动量（OAM）。由此，考虑凝聚冷原子上的高阶量子涨落后，对称非谐俘获旋转量子液滴的含时GPE可写为

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \frac{1}{2M}(-i\hbar\vec{\nabla} - M\Omega\hat{z}\times\vec{r})^2\Psi + \left[\frac{1}{2}M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2 + \frac{1}{4}\lambda' r^4\right]\Psi + \sigma'|\Psi|^2\ln(|\Psi|^2/n_0)\,\Psi, \quad (1)$$

其中， ω_0 为谐势的俘获频率， λ' 为四次俘获势的强度参数。在局域密度近似下，最后一项表示LHY修正非线性相互作用，其中 $\sigma' = 8\pi\hbar^2/M\ln^2(a_{\uparrow\downarrow}/a)$，且$n_0$ 为该组分的平衡密度。方程（1）右侧的第一项明确表明，旋转液滴在 xy 平面内如同电荷 q 运动，并受到合成磁场 $B\hat{}z$的作用，其矢势为（q/c）$\vec{A} = M\Omega\hat{}z\times\vec{r}$；该磁场对应回旋频率 $\omega_c = Bq/Mc$，并定义磁长$l_c = \sqrt{\hbar c/qB}$。非相互作用谐俘获系统的解给出本征能量

$$E_{n_l,m} = (2n_l + |m| + 1)\hbar\omega_0 - m\hbar\Omega \quad (2)$$

以及相应的本征函数

$$\chi_{n_l,m}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi l_c^2}}\sqrt{\frac{n_l!}{2^{|m|}(|m|+n_l)!}}\left(\frac{\sqrt{b}r}{l_c}\right)^{|m|} e^{-br^2/4l_c^2}\, e^{-im\phi} L_{n_l}^{|m|}\left(\frac{br^2}{2\,l_c^2}\right), \quad (3)$$

其中 $b = (1 + 4(\omega_0^2 - \Omega^2)/\omega_c^2)^{1/2}$, $L_\nu^k(t)$ 是缔合拉盖尔多项式，整数$n_l = 0$，1，2，.....表示朗道能级指标；而 $m = 0$， ±1， ±2，.....对应于一个朗道能级内的简并态。

我们采用半经典变分法研究旋转量子液滴的基态性质。为简单起见，令 $\Psi = \sqrt{n_0}\Psi$，并分别以 $\hbar\omega = \sigma' n_0$、 $l = \hbar/\sqrt{2M\sigma' n_0}$、 $\tau = t/\omega$ 和 $\lambda = \hbar/M^2\omega^3\lambda'$ 对能量、长度、时间和四次参数进行重新缩放，将方程 (1) 改写为无量纲形式，并记作

$\omega_0/\omega = \omega_0$ 以及 $\Omega/\omega = \Omega$。因此，能量泛函 $E[\Psi, \Psi^*]$ 可写为：

$$E[\Psi,\Psi^*] = \int d\vec{r}\left[\Psi^*\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{1}{2}\hat{z}\times\vec{r}\right)^2\Psi + \left[\frac{1}{4}(\omega_0^2-1)r^2 + \frac{1}{16}\lambda r^4\right]|\Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4\ln(|\Psi|^2/\sqrt{e}) - \Psi^*(\Omega-1)L_z\Psi\right]. \quad (4)$$

虽然粒子间吸引相互作用可能会混合不同的（n_l, m）态，但对应于 $n_l = 0$ 的最低朗道能级方法不足以描述旋转液滴，尤其是对于强束缚原子而言，因为密度不会在 xy 平面内变稀；这与具有粒子间排斥相互作用的涡旋晶格中观察到的情况不同。受强磁场中二维维格纳晶体研究的启发 56，我们设定试探波函数

$$\Psi = C_m(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^m \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{R})^2}{4\rho^2} - \frac{i}{2}\hat{z}\cdot(\vec{r}\times\vec{R})\right]\exp\left[i\frac{\alpha}{4}(\vec{r}-\vec{R})^2\right]\exp\left[i\frac{\vec{p}}{2}\cdot(\vec{r}-\vec{R})\right], \quad (5)$$

其中，$\mathfrak{z}$ 和 $\mathfrak{z}_0$ 是二维位置矢量的复数表示，ρ 表示波包的宽度，并体现了 LLM 效应的影响；除非达到极高磁场或快速旋转、使得采用 $\rho = 1$ 的最低朗道能级假设成立，否则必须考虑这一影响。由于具有类高斯包络函数，式 5 适用于描述粒子数有限的系统。相较之下，在托马斯–费米极限下，平顶函数或超高斯函数更为合适。采用极坐标表示时，嵌入幂函数（$\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0$）^{m}中的整数 m 所对应的方位相位 $\exp(im\phi)$ 引入了量子化轨道角动量，以及旋转量子液滴所携带的合成磁通量子。在这一试探形式中，$\vec{r} = x\hat{}x + y\hat{}y$ 是液滴中粒子的位置 $\vec{}$，而 $R = x_0\hat{}x + y_0\hat{}y$ 表示其质心位置。与 $\vec{r}\times R$ 相关的相位允许刚体旋转，并确保在合成磁场中的规范不变性。最后两个括号中的参数 α 和 $\vec{p}$ 分别表示共轭曲率系数和动量，它们分别体现了波包固有的平均场膨胀和相对排斥作用。由此可以进一步研究量子液滴在时间演化过程中的密度分布和相干性质的变化。在不存在由三体碰撞导致的耗散时，粒子数守恒，且$C_m = \sqrt{N2^{m+1}/\pi m!/\rho^{m+1}}$。

为方便起见，我们将系统映射到二维复平面，并设复坐标为 $\mathfrak{z}_0 = \frac{1}{2}(x_0 + iy_0)$、$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}(x+iy)$，动量为 $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(p_x + ip_y)$，使得 $|\mathfrak{z}_0|^2 = R^2/4$、$|\mathfrak{z}|^2 = r^2/4$ 和 $|\mathfrak{p}|^2 = p^2/4$ 建立复数与实数之间的联系。通过使用重构波函数

$$\Psi = C_m(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^m\exp\left[-\frac{1}{\rho^2}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0|^2\right]\exp\left[\mathfrak{z}^*\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}\mathfrak{z}_0^*\right]\exp\left[i\alpha|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0|^2\right] \times\exp\left[i\mathfrak{p}^*(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0) + i\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^*-\mathfrak{z}_0^*)\right], \quad (6)$$

每个粒子的能量泛函为

$\mathscr{E}[\Psi,\Psi^*] = \mathscr{E}_{kin} + \mathscr{E}_{trap} + \mathscr{E}_{non} + \mathscr{E}_{rot}$

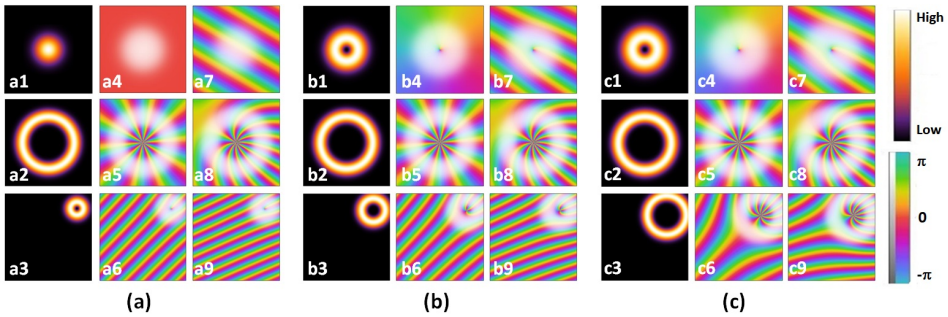


图 1. （在线彩色）对于 (a) $N = 20$、(b) $N = 60$ 和 (c) $N = 100$，左侧各列从上到下分别展示了 $\Omega = 0.6$,1.4,1.8 时基态量子液滴的密度分布。中间列和右侧各列分别展示了具有不同线性相位参数 $\vec{p}(0) = 0$ 和 $\vec{p} = (\sqrt{2}, \sqrt{6})$ 的量子液滴对应的相图。

$$= \left\{\frac{(m+1)}{2}\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + \alpha^2\rho^2\right) - m + |\mathfrak{p}|^2\right\} + \left\{(\omega_0^2 - 1)\left(\frac{m+1}{2}\rho^2 + |\mathfrak{z}_0|^2\right)\right.$$
$$\left.+\lambda\left[\frac{1}{4}(m+2)(m+1)\rho^4 + |\mathfrak{z}_0|^4 + 2(m+1)\rho^2|\mathfrak{z}_0|^2\right]\right\}$$
$$+\left\{\frac{N}{\pi(m!)^2 2^{2m+2}}\frac{1}{\rho^2}\left[(2m)!\ln\left(\frac{|C_m|^2}{4^m\sqrt{e}}\right) - \frac{(m+1)!}{2} + m\Gamma'(2m+1) + (2m)(2m)!\ln\rho\right]\right\}$$
$$-\left\{(\Omega - 1)\left[i(\mathfrak{p}^*\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_0^*\mathfrak{p}) + m + 2|\mathfrak{z}_0|^2\right]\right\}, \tag{7}$$

其中，$\Gamma'(x)$ 是正整数 x 对应的伽马函数的导数。原子间能量项通过平衡空间吸引作用与排斥作用，体现了自束缚特性。在最后一个括号中，旋转场中会诱发波包排斥动力学、量子相位印刻和刚体转动。

2.1. 密度分布和相图

通过缓慢搅动凝聚体，并经过再热化过程确保其在特定 Ω 下达到平衡，研究了旋转量子液滴的基态性质。通过最小化方程 (7) 中的能量函数，耦合方程 $\partial\mathscr{E}/\partial\rho = 0$ 和 $\partial\mathscr{E}/\partial R = 0$ 的解给出了最优拓扑量子数 m、波包宽度 ρ和质心位置 R，揭示了束缚、非线性相互作用和旋转速度对量子液滴基态构型的影响。

对于粒子数为 $N = 20$（a）、60（b）和 100（c）的量子液滴，图 1 左列从上到下展示了 $\Omega = 0.6$、1.4 和 1.8 时基态的密度分布。在缓慢旋转时，粒子数较少，带有 $m = 0$和 $R = 0$ 的珠状态是能量上有利的基态，如图 1(a1) 所示。随着粒子数增加，排斥性的 LHY相互作用对非零 m涡旋态的形成起决定性作用，例如图 1(b1) 中所示的环形态

和 (c1)，它们对应于 $m = 1$。这两种状态下，波包的宽度分别为 $\rho = 1.3$ 和 $\rho = 1.4$，清楚地体现了高阶朗道能级的混合。随着我们将旋转速度提高至 $\Omega = 1.4$，图 1(a2)、(b2) 和 (c2) 显示，受强离心力作用，系统倾向于形成具有 $m \geq 10$ 和大核心的巨涡旋。因此，在液体原子之间特殊的非线性相互作用产生较大表面张力的同时，波包收窄至 $\rho < 1$ 的现象也十分明显。另一方面，在 $\Omega = 1.8$ 的更快旋转下，系统转而倾向于形成具有非零R 的偏心涡旋态，如图 1(a3)、(b3) 和 (c3) 所示。对于这些偏转的量子液滴，随着粒子数增加，涡旋核心增大，但如前所述，仍小于涡旋态的核心。这一现象可归因于离心力与非谐势强烈压缩作用之间的平衡。

中列和右列中的彩色线条描绘了受到有限驱动的量子液滴的空间相位分布。为简便起见，驱动方向选取为非典型对称方向，例如 $\vec{p}(0) = (\sqrt{2}, \sqrt{6})$。当 $\vec{p}(0) = 0$ 时，珠状量子液滴被钉扎，呈现空间均匀的相位分布，如 (a4) 所示。相比之下，(a7) 中显示的平面波前揭示了瞬时线性驱动所引发的波传播趋势。对于涡旋态和偏心涡旋态，拓扑荷数 m 表示径向方向上 2π 相位变化的重复次数 [：中间行中的 (a5) 和 (a8)、(b5) 和 (b8)、(c5) 和 (c8)] 以及叉状图案 [(b7)，还有底行中的 (a6) 和 (a9)、(b6) 和 (b9)、(c6) 和 (c9)]。施加瞬时冲量会使量子液滴表面产生应变，并在其波函数上留下额外的相位印记，从而改变波前斜率。

2.2. 与光学涡旋的类比

对旋转量子液滴与光学涡旋作简要比较，有助于阐释相图所揭示的物理机制，因为这两种玻色系统具有若干重要的共同特征。除了自旋角动量外，具有方位角相位依赖 $\exp(i\ell\phi)$ 的光场表示每个光子携带量子化轨道角动量$\ell\hbar$ 的光束 [57]。这一概念已得到实现，并广泛应用于光学俘获与操控、超空间分辨率显微术以及材料加工[58, 59, 60]。在傍轴近似下，在束腰 w_s 处测得的柱对称光学涡旋的亥姆霍兹方程解为拉盖尔–高斯函数：

$$LG_{p\ell}(r,\phi) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!}}\frac{1}{w_s}\left[\frac{\sqrt{2}r}{w_s}\right]^{|\ell|}\exp[i\ell\phi]\exp\left[\frac{-r^2}{w_s^2}\right]L_p^{|\ell|}\left(\frac{2r^2}{w_s^2}\right), \tag{8}$$

其中，节点数的径向指标 p 和角指标 ℓ 分别对应于式（3）中朗道能级指标 n_l 以及朗道能级内简并态 m 的参数。类似地，参照式（6），角指标

ℓ 等同于量子液滴的量子数 m 。因此，光学涡旋可以被视为旋转量子液滴的经典对应物。

在光学系统中，叉形干涉条纹中的螺旋叶片数和暗带数代表光学涡旋的轨道角动量量子数。同样的规则也适用于量子液滴的原子系统。因此，图 1 所示相图中涡旋核奇点处分裂出的色带数，可作为直观识别量子液滴所携带轨道角动量的依据。据我们所知，目前尚无关于旋转量子液滴相位分布的研究。因此，本研究借鉴光学涡旋提出的类比规则，为进一步的实验验证提供了思路，也启发了一种颇具挑战性的干涉仪架构，可用于精确测量具有可调双组分非线性相互作用的旋转量子液滴的奇异性质与相干性质。

2.3. 相图

由于在快速旋转时，具有高度量子化环流的涡旋态在能量上更为有利，因此，总轨道角动量的期望值 $\langle L_z\rangle = m+2|\mathfrak{z}_0|^2$会随着 Ω 增大而急剧且持续地增加。为使量子液滴在极高旋转速度下仍保持有界，薄环内受挤压原子之间的强吸引力必然会随着涡旋核尺寸迅速增大而增强。这种大幅膨胀会导致量子液滴在三体碰撞作用下坍缩。我们建议为涡旋态设定最大拓扑荷数，以避免坍缩和数值发散。

采用最低朗道能级近似，量子数$m_{\max} = (\Omega_f - \epsilon/2 - 1)/\lambda - 1$的上限（其中 $\epsilon = \omega_0^2 - 1$）可在截断值 Ω*f*处估算。使用参数 $\Omega_f = 2$、 $\omega_0 = 0.5$和 $\lambda = 0.1$，我们得到 $m_{\max} = 12$。由于这一限制，量子部分与经典部分之间会分配总轨道角动量。与其形成具有巨大拓扑荷、容易受到扰动的巨型涡旋量子液滴，在超过特定旋转频率后，形成偏转为 $R = 2\sqrt{\Omega\ - \epsilon/2 - 1 - (m+1)\lambda\rho^2/\sqrt{\lambda}}$的离心涡旋量子液滴可能在能量上更有利。因此，在托马斯–费米区为稀薄原子气体估算出的涡旋核心所占横截面积的极限比例 [61]也可应用于量子液滴。

图 2 中的 N-Ω 相图展示了非线性相互作用和旋转速度对基态构型的影响。图中颜色表示基态能量的变化。区域 (i) 表示具有 $m = 0$ and $R = 0$ 的珠状态，区域 (ii) 表示具有 $m > 0$ and$R = 0$ 的涡旋态，区域 (iii) 表示具有 $m > 0$ and $R \neq 0$ 的偏心涡旋态，区域 (iv) 则表示在少粒子数和快速旋转区内嵌入 $m = 0$ and $R \neq 0$ 的质心态。颜色图例为具有 N 个粒子、以 Ω 旋转的量子液滴基态能量提供了一些参考。在旋转速度固定时，所有量子态的波包宽度以及携带非零拓扑荷的态的能量都会随粒子数增加而增大。这些增长可归因于净排斥性非线性相互作用。在粒子数固定时，

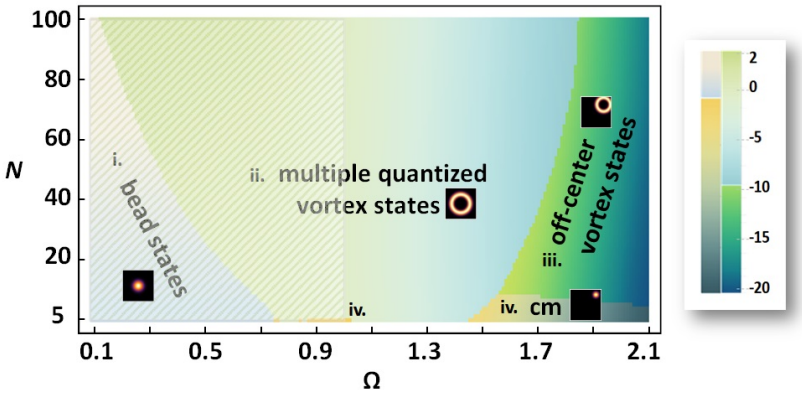


图 2. （网络版彩图） N-Ω 相图，其中 (i) 表示珠状态对应的区域，(ii) 表示涡旋态，(iii) 表示偏心涡旋态，(iv) 表示质心态。图中颜色表示基态能量的变化。

能量和波包宽度会随旋转速度增加而减小，但区域 (i) 中的珠状态除外；在该区域中，所有参数均不受环境影响。

粒子数较低时，如果超稀薄液滴的能量低于处于有效二维平均场相互作用作用下的原子云，则可以稳定存在；该相互作用由 $V^{2D}(\vec{r}) = \sqrt{8\pi}a_s\delta^{2D}(\vec{r})$ 给出。因此，我们发现，接近 $\Omega = 1$ 时出现质心态，是动力学不稳定性的标志；在这种情况下，粒子涨落可诱发气液相变。

在慢旋转区间 (i) 中，我们还发现，判断稳定量子液滴基态是否存在的充分必要条件 $(\partial^2\mathscr{E}/\partial\rho^2)(\partial^2\mathscr{E}\partial R^2) - (\partial^2\mathscr{E}/\partial\rho\partial R)^2 > 0$ 在珠状态下不成立。因此，系统通过从致密峰中移除原子来维持稳定，并在旋转过程中形成具有多重环流的嵌入式涡旋。尽管已有研究报道，在慢速旋转下可在量子液滴中形成单量子化涡旋簇 [62], ，但量子液滴会发生形变，而且可能容易受到扰动。

3. 旋转量子液滴的动力学

根据拉格朗日密度 $\mathcal{L} = i\left(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\psi^*\right)/2 - \Psi^* H\Psi$，哈密顿最小作用量原理

$$\delta S[\Psi^*, \Psi] = \int dt \int d\vec{r}\; \delta\mathcal{L}(\Psi, \Psi^*, \ldots) = 0, \tag{9}$$

用于研究量子液滴动力学和构型稳定性。结合方程（6）和（7），可以推导出每个粒子的欧拉-拉格朗日方程以及特征参数的运动方程，如下所示：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\mathfrak{p}}^*}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathfrak{p}^*} = 0 \quad \text{gives} \quad \dot{\mathfrak{z}}_0 = \mathfrak{p} - \mathrm{i}\,(\Omega - 1)\,. \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathfrak{z}}_0^*}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathfrak{z}_0^*}=0 \quad \text{gives} \quad \dot{\mathfrak{p}}=-2\mathrm{i}\dot{\mathfrak{z}}_0-\left(\omega_0^2-1\right)\mathfrak{z}_0-2\lambda|\mathfrak{z}_0|^2\mathfrak{z}_0$$
$$-(\Omega-1)\,\mathfrak{p}+2\mathfrak{z}_0\,(\Omega-1)-2(m+1)\lambda\rho^2. \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \alpha}=0 \quad \text{gives} \quad \dot{\rho}=\alpha\rho. \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \rho}=0 \quad \text{gives} \quad \dot{\alpha}=-\frac{1}{N(m+1)\rho}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \rho}. \tag{13}$$

3.1. 周期性与稳定性

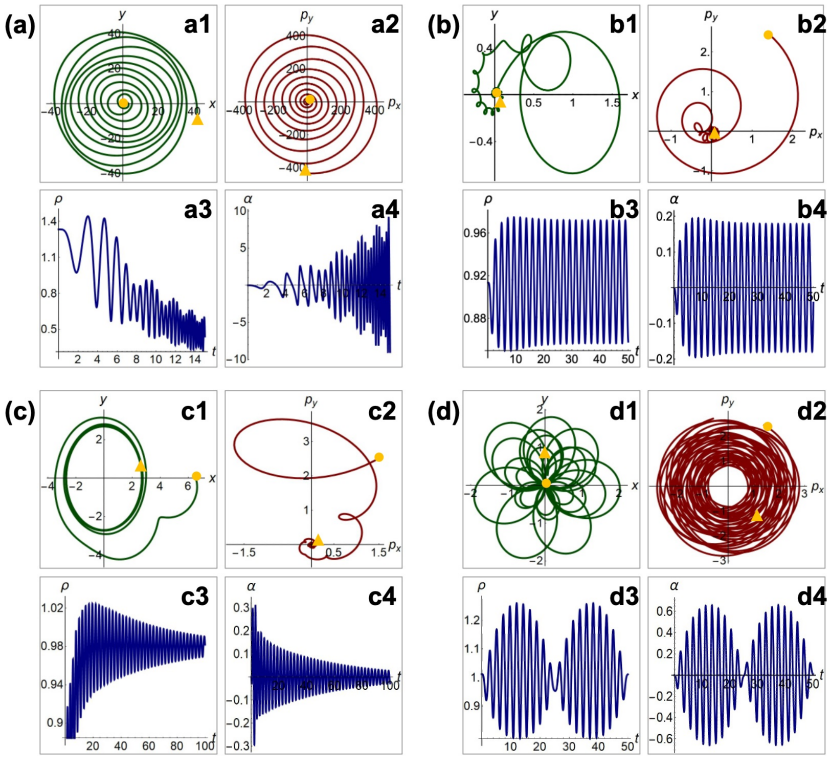


图 3.（在线彩图）质心$\vec{}$ $\vec{}$位置 R、共轭动量 P、宽度变化 ρ和共轭曲率系数 α的长期演化轨迹。在外部驱动 $\vec{p}(0)_=(\sqrt{2},\ \sqrt{6})$下，(a)-(c)展示了 $N=20$ 和 $\Omega=0.6$、1.4 和 1.8 时的动力学，(d)则追踪了$N=100$ 和 $\Omega=1.0$时的临界旋转。绿色和棕色曲线上的橙色圆圈表示未受扰动的量子液滴的初始R 和 P，橙色三角形则表示长期演化后某一时刻受扰动的量子液滴的相应参数。珠状态对外部扰动不稳定，而涡旋态和偏心涡旋态中可观察到呼吸振荡和自陷现象。

在初始驱动 $\vec{p}(0)=(\sqrt{2},\ \sqrt{6})$作用下，求解了 $N=20$和 $N=100$、$\Omega=0.6$, 1.0，1.4 和 1.8 对应的耦合方程。图 3 中，绿色和棕色曲线上的橙色圆点分别表示未受扰动的量子液滴的初始质心位置和共轭动量，橙色三角形则表示

长期演化后某一时刻受扰动的量子液滴的相应参数。

在没有旋转动能的情况下，在驱动场 $-(\Omega-1)\mathfrak{p}$ 作用下，珠状态会因强烈加速而变得不稳定（$\Omega<1$）。因此，由于质心位置骤增（图 3(a1)）、线动量骤增（图 3(a2)）、曲率骤增（图 3(a4)）以及波包宽度迅速减小（图 3(a3)），这些珠最终会崩溃。

当 $\Omega>1$ 时，涡旋态的初始驱动会打破轴对称性，从而使系统激发至高能态。与珠状态不同，负贡献 $-(\Omega-1)\mathfrak{p}$ 在量子液滴返回平衡点的过程中起着关键作用，如图 3(b1) 和 (b2) 所示。与此同时，长期演化过程中的振荡现象（b3）和（b4）表明，环尺寸通过 LLM效应定期调整，以维持足够的表面张力，从而稳定支撑涡旋态。

在极快速旋转下，图 3(c1) 和 (c2) 显示，离心涡旋量子液滴通过降低拓扑荷数并收缩自身 (c3) 至实体几何形状 (c4)，维持动态稳定性，并围绕陷阱中心稳定进动。在这种情况下，长期演化后达到稳态时，波包对 $\rho=1$ (c3)的自陷行为以及共轭曲率的零变化，都有力地支持了本研究提出的最低朗道能级近似的有效性。

在临界旋转速度 $\Omega=1.0$下，外部施加的、用于轨道运动的有效向心力消失，只剩下由纬向速度变化引起的非零科里奥利力，从而驱动量子液滴进行自我维持的旋转运动。如图 3 所示，准周期轨迹 [(d1) 和 (d2)] 以及呼吸振荡[(d3) 和 (d4)] ，为涡旋态中表面模集体激发的出现提供了证据。在非谐陷阱和非线性效应的作用下，量子液滴的轨道经过有限次振荡后既不会严格闭合，也不会向外发散。相反，如各叶瓣所示，量子液滴在转向点之间呈现多周期运动。与由中心力场驱动的周期运动类似，运动轨迹所围成的面积仍为一个有理分数 $2\pi(a_1/a_2)$——经过 a_2 个周期后，量子液滴的矢径将完成 a_1 周，并回到其初始位置。

尽管具有多个量子化环流的量子液滴在均匀超流体或谐势束缚系统中并非热力学稳定，也不具备能量优势，但周期性和稳定性分析表明，当动能与非线性相互作用聚集起来以满足表面张力的要求时，非谐势阱中的旋转量子液滴可以稳定地支持涡旋构型。

3.2. 概率流密度分布

$\vec{}$角速度 Ω 的旋转可视为对非旋转哈密顿量施加的一个推动，因为 $-\vec{}\Omega\cdot\vec{L}=-m\sum_{\mathfrak{q}}\vec{j}_{\mathfrak{q}}^{\dagger}\cdot\vec{A}_{\mathfrak{q}}$，其中 $\vec{j}_{\mathfrak{q}}^{\dagger}$是粒子流密度

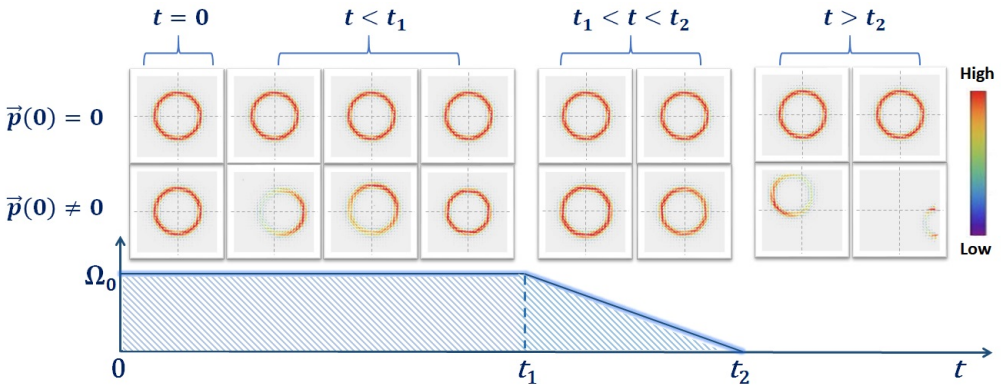


图 4.（网络版彩色）在 $\Omega_0 = 1.4$ 处获得的初始特征参数下，长期演化涡旋态的电流密度分布矢量图。原子占据数由高到低以从红到蓝的彩虹色标示。恒定旋转场在 $t_1 < t < t_2$ 逐渐减弱，并于 $t = t_2$ 停止。上图：超流体能够维持在具有相位奇点和量子化拓扑荷的未受扰动量子态中。下图：初始冲量以及随后的膨胀和收缩驱动涡旋运动，但在有效作用时间内破坏了势流。即使旋转场逐渐减弱并停止，这种破坏仍会持续。

涨落，而 $A_{\mathbf{q}}$ 是横向人工矢势的傅里叶变换。应用线性响应理论后，这一推动会在凝聚体参考系中产生质量流。对于低能散射，在旋转场存在时，量子液滴的流密度可表示为

$$\vec{j} = \frac{1}{2}\, g_m(\vec{r}, \vec{R}) \Big\{ 4m(\vec{r} - \vec{R})^{-2} \Big[-(y - y_0)\,\hat{x} + (x - x_0)\,\hat{y} \Big] + \alpha \Big[(x - x_0)\,\hat{x} - (y - y_0)\,\hat{y} \Big] + (p_x\,\hat{x} - p_y\,\hat{y}) + (2\Omega y - y_0)\,\hat{x} + (x_0 - 2\Omega x)\,\hat{y} \Big\}, \tag{14}$$

其中 $g_m(\vec{r},\ \vec{R}) = 4^{-m}\,|C_m|^2\,(\vec{r} - \vec{R})^{2m} \exp\left[-(\vec{r} - \vec{R})^2/2\rho^2\right]$。图 4 中的矢量图直观展示了在 $\Omega_0 = 1.4$ 处获得的初始特征参数下涡旋态的长期演化。原子占据数由高到低以从红到蓝的彩虹色标示。顺时针矢量表示拓扑荷为正。在旋转场作用下，有限的初始冲量 $\vec{p}(0)$ 以及随后的膨胀和收缩会在 $t < t_1$ 内驱动涡旋运动。环的变化反映了非线性回复力作用下的准谐振荡。在 $t = t_1$ 附近，当涡旋质心即将通过平衡点时，可以观察到电流密度呈空间均匀分布。

我们通过逐渐减弱旋转场，并在 $t = t_2$ 将其减至零，研究超流体行为。令人惊讶的是，当进入慢旋转区间且 $\Omega < 1$ 时，式（11）表明，初始冲量引起的任何微小涨落都可能导致显著的相位变化和能量积累，进而改变拓扑荷的符号、破坏势流，并很快促使量子液滴逃离

陷阱，逃逸发生在 $t > t_2$。因此，在临界旋转速度 $\Omega_c = 1$ 以下，图 2 阴影区域内的涡旋态容易受到外部环境影响，仅为亚稳态。因此，只有在未受扰动且含有多个量子化涡旋的液滴中，才能观察到热力学平衡超流体的特征，如图 4 上排所示。

在双组分稀薄玻色–爱因斯坦凝聚气体的涡旋产生实验中， [19], 当一个组分的自相互作用与另一个组分不同时，假设哈密顿量在所有超精细态同时旋转下保持不变。在该研究中，环形超流体的观测结果被归因于单组分系统（如氦-4）缺乏共同的拓扑稳定性。关于有效李–黄–杨相互作用中不同组分之间的散射强度不平衡，可通过求解耦合李–黄–杨修正广义帕德耶夫方程，在非对称量子液滴系统中进一步研究这一现象。

4. 结论

本研究考察了受限于二维对称非谐势阱中的旋转量子液滴的定态性质和动力学。基于变分法，我们采用受强磁场中二维维格纳晶体研究启发的试探波函数，对含李–黄–杨修正的广义 Gross–Pitaevskii 方程进行了解析求解，并探讨了LLM效应的作用。本研究展示了在一种新型量子液体中实现人工洛伦兹力的方法。

通过调节非线性相互作用和旋转速度，可在量子液滴中产生具有多个环量量子的嵌入式涡旋。在更高的旋转速度下，偏心涡旋态在能量上更为有利。一些类刚体质心态可存在于少粒子区。通过绘制 N-Ω 相图，揭示了相变路径，表明调控旋转量子液滴的强度和相位奇点，并探索这些系统中与奇点相关的新现象，是可行的。

我们简要比较了旋转量子液滴与光学涡旋，这有助于直观呈现并阐释相位奇点背后的物理机制。我们认为，叉形干涉条纹中螺旋叶片和暗带的数量，可作为识别量子液滴所携带轨道角动量的视觉依据。据我们所知，旋转量子液滴的相位分布仍是一个尚未探索的研究课题。因此，本研究提出的规律启发了一种具有挑战性的干涉仪架构，可在双组分非线性相互作用可调的情况下，精确测量旋转量子液滴的奇异性和相干性质。

通过应用哈密顿原理和拉格朗日动力学，进一步研究旋转量子液滴的长期演化，使我们得以确认量子态的稳定性。自俘获现象推动量子液滴趋近平衡点，并在快速旋转区域趋近最低朗道能级，这与量子霍尔极限相吻合。对于 $\Omega = 2\omega_0 = 1$ 的特殊情况，消除外部

施加的有效向心力和轨道运动会产生非零的科里奥利力，并引发量子液滴的自维持旋转运动。准周期轨迹和呼吸振荡的出现，证实了涡旋态中表面模的集体激发。

电流密度分布的矢量图为长期演化的涡旋态提供了图像化视图。初始冲量引起的外部扰动可能造成足够大的相位变化和能量积累，从而破坏势流。因此，只有具有相位奇点和量子化拓扑荷的未受扰动量子态，才能使超流体保持稳定。

量子霍尔系统与旋转的玻色-爱因斯坦凝聚体有许多相似之处。本研究采用相同的数学形式体系，证明了具有多个拓扑荷的量子液滴能够在非谐约束中稳定存在。我们的研究表明，可以利用低维非均匀量子液体，以可控方式模拟量子霍尔型效应。具有多个可调参数自由度的旋转玻色-爱因斯坦凝聚体系统用途广泛，有望用于拓扑量子计算。

5. 致谢

感谢台湾科技部通过 NSTC 110-2221-E-845-004、NSTC 112-2622-E-845-001 和 NSTC 112- 2112-M-034-001 项目提供部分经费支持。W. H. K. 谨此感谢 Wen-Feng Hsieh 教授的宝贵讨论。[1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, 《科学》**269**, 198 (1995).[2] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, 《物理评论快报》**75**, 1687 (1995).[3] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, 《物理评论快报》**75**, 3969 (1995).[4] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, 《物理评论快报》**92**, 040403 (2004).[5] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, 《物理评论快报》**92**, 120403 (2004).[6] G. B. Partridge, K. E. Strecker, R. I. Kamar, M. W. Jack, and R. G. Hulet, 《物理评论快报》**95**, 020404 (2005).[7] D. M. Eagles, Phys. Rev. **186**, 456 (1969).[8] T. Köhler, K. Góral, and P. S. Julienne 《现代物理评论》**78**, 1311 (2006).[9] T. D. Lee, K. Huang, and C. N. Yang, Phys. Rev. **116**, 1135 (1957).[10] C. R. Cabrera, L. Tanzi, J. Sanz, B. Naylor, P. Thomas, P. Cheiney, and L. Tarruell, 《科学》**359**, 301 (2018).[11] P. Cheiney, C. R. Cabrera, J. Sanz, B. Naylor, L. Tanzi, and L. Tarruell, 《物理评论快报》**120**, 135301 (2018).[12] G. Semeghini, G. Ferioli, L. Masi, C. Mazzinghi, L. Wolswijk, F. Minardi, M. Modugno, G. Modugno, M. Inguscio, and M. Fattori, 《物理评论快报》**120**, 235301 (2018).[13] I. Ferrier-Barbut, H. Kadau, M. Schmitt, M. Wenzel, and T. Pfau 《物理评论快报》**116**, 215301 (2016).[14] M. Schmitt, M. Wenzel, F. Böttcher, I. Ferrier-Barbut, and T. Pfau, 《自然》**539**, 259 (2016).

[15] I. Ferrier-Barbut, M. Wenzel, F. Böttcher, T. Langen, M. Isoard, S. Stringari, and T. Pfau, 《物理评论快报》120, 160402 (2018).[16] L. Chomaz, S. Baier, D. Petter, M. J. Mark, F. Wächtler, L. Santos, and F. Ferlaino, 《物理评论X》6, 041039 (2016).[17] D. S. Petrov, 《物理评论快报》115, 155302 (2015).[18] Z. H. Luo, W. Pang, Y. Y. Li, and B. A. Malomed, 《前沿物理》16, 32201 (2021).[19] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, 《物理评论快报》83, 2498 (1999).[20] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, 《物理评论快报》84, 806 (2000).[21] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark, and E. A. Cornell, 《物理评论快报》86, 2926 (2001).[22] Z. Dutton, M. Budde, C. Slowe, and L. V. Hau, 《科学》293, 663 (2001).[23] K. W. Madison, F. Chevy, V. Bretin, and J. Dalibard, 《物理评论快报》86, 4443 (2001).[24] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J.M. Vogels, and W. Ketterle, 《科学》292, 476 (2001).[25] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, 《物理评论A》66, 053606 (2002).[26] E. Lundh, 囚禁玻色–爱因斯坦凝聚体中的多重量子化涡旋, 《物理评论A》65, 043604 (2002).[27] P. Engels, I. Coddington, P. C. Haljan, V. Schweikhard, and E. A. Cornell, 《物理评论快报》90, 170405 (2003).[28] A. Cidrim, F. E. A. dos Santos, E. A. L. Henn, and T. Macrì, 《物理评论A》98, 023618 (2018).[29] B. A. Malomed, 《物理学D》399, 108 (2019).[30] Y. Y. Li, Z. P. Chen, Z. H. Luo, C. Q. Huang, H. S. Tan, W. Pang, and B. A. Malomed, 《物理评论A》98, 063602 (2018).[31] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, L. Tarruell, and L. Torner, 《物理评论A》98, 013612 (2018).[32] S. Nikolaou, G. M. Kavoulakis, and M. Ögren, 《物理评论A》108, 053309 (2023).[33] S. Nikolaou, G. M. Kavoulakis, and M. Ögren, 《物理评论A》109, 043304 (2024).[34] J. Yang and Z.H. Musslimani, 《光学快报》28, 2094 (2003).[35] Y. Y. Zheng, S. T. Chen, Z. P. Huang, S. X. Dai, B. Liu, Y. Y. Li, and S. R. Wang, 《前沿物理》16, 22501 (2021).[36] R. T. Thiruvalluvar, S. Sabari, K. Porsezian, and P. Muruganandam, 《物理学E》107, 54 (2019).[37] Q. Gu and X. L. Cui, ar Xiv 预印本 arXiv:2306.14958 (2023).[38] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, 《物理评论快报》45, 494(1980).[39] K.von Klitzing, 《现代物理评论》58, 519 (1986).[40] H. L. Stormer, 《现代物理评论》71, 875 (1999).[41] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, 《物理评论快报》48, 1559 (1982).[42] D. C. Tsui, 《现代物理评论》71, 891 (1999).[43] N. R. Cooper and N.K. Wilkin, Phys Rev. B 60, R16279 (1999).[44] R. B. Laughlin, 《物理评论快报》50, 1395 (1983).[45] J. K. Jain, 复合费米子, 剑桥大学出版社, 剑桥 (2007).[46] G. Moore and N. Read, 《核物理B》360, 362 (1991).[47] N. Read and E. Rezayi, 《物理评论B》59, 8084 (1999).[48] J. W. Reijnders, F. J. M. van Lankvelt, K. Schoutens, and N. Read, 《物理评论快报》89, 120401 (2002).[49] R. J. Fletcher, A. Shaffer, C. C. Wilson, P.B.Patel, Z.Yan, V.Crepel, B.Mukherjee, andM.W. Zwierlein, 《科学》372, 1318 (2022).[50] B. Mukherjee, A. Shaffer, P. B. Patel, Z.Yan, C.C.Wilson, V.Crepel, R.J.Fletcher, andM.W. Zwierlein, 《自然》601, 58 (2022).[51] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, 《现代物理评论》80, 1083 (2008).[52] T. G. Skov, M. G. Skou, N. B. Jørgensen, and J. J. Arlt, 《物理评论快报》126, 230404 (2021).[53] V. N. Popov, 《理论与数学物理》11, 565 (1972).

[54] D. S. Petrov 和 G. E. Astrakharchik, 《物理评论快报》**117**，100401（2016年）。[55] T. Ilg、J. Kumlin、L. Santos、D. S. Petrov 和 H. P. Büchler, 《物理评论A》**98**，051604(R)（2018年）。[56] K. Maki 和 X. Zotos, 《物理评论B》**28**，4349（1983年）。[57] L. Allen、M. W. Beijersbergen、R. J. C. Spreeuw 和 J. P. Woerdman, 《物理评论A》**45**，8185（1992年）。[58] V. Garcés-Chávez、D. McGloin、H. Melville、W.Sibbett 和K.Dholakia, 《自然》**419**，145（2002年）。[59] S. W. Hell, 《自然-方法》**6**，24（2009年）。[60] C. Hnatovsky、V. Shvedov、W. Krolikowski 和 A. Rode, 《物理评论快报》**106**，123901（2011年）。[61] U. R. Fischer 和 G. Baym, 《物理评论快报》**90**，140402（2003年）。[62] M. N. Tengstrand、P. Stürmer、E. Ö. Karabulet 和 S. M. Reimann, 《物理评论快报》**123**，160405（2019年）。