arXiv:2302.07485v1 [math.FA] 15 Feb 2023

取值于 ℓ_∞ 的向量测度

S. OKADA、J. RODR´IGUEZ 和 E.A. S´ANCHEZ-P´EREZ

Abstract. 我们研究了取值于 ℓ_∞ 的可数可加向量测度，以及相对于此类向量测度可积的实值函数所构成的巴拿赫格的若干性质。一方面，我们证明，若 $W \subseteq \ell_\infty^*$ 是一个全集，且不包含与 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 的典范基等价的集合，则存在一个定义在 σ-代数上的非可数可加 ℓ_∞ 值映射 ν，使得对每个 $x^* \in W$，复合映射 $x^* \circ \nu$ 都是可数可加的。另一方面，我们证明，若巴拿赫格 E 有可数正范数化集，且 E 和 E^* 均序连续，则 E 可分。因此，若 ν 是定义在 σ-代数上且取值于可分巴拿赫空间的可数可加向量测度，则只要 $L_1(\nu)^*$ 序连续，空间 $L_1(\nu)$ 就是可分的。

1. Introduction

给定一个 σ-代数 Σ 和一个巴拿赫空间 X，我们用 $\mathrm{ca}(\Sigma, X)$ 表示定义在 Σ 上的所有取值于 X 的可列可加测度构成的集合；当 X 是实数域时，这个集合简记为 $\mathrm{ca}(\Sigma)$。X 的拓扑对偶记为 X^*。Orlicz-Pettis 定理指出，映射 $\nu\colon \Sigma \to X$ 属于 $\mathrm{ca}(\Sigma, X)$，当且仅当对每个 $x^* \in X^*$，复合映射 $x^* \circ \nu$ 都属于 $\mathrm{ca}(\Sigma)$（参见例如 [10, 第 22 页，推论 4]）。自然会想到，若在一个“大”子集上进行检验，而不是在所有 X^*上检验，是否也足以保证可数可加性。例如，可以考虑 X^*的一个全子集，即满足 $\bigcap_{x^* \in W} \ker x^* = \{0\}$的集合 $W \subseteq X^*$。一般而言，这种做法行不通。一个典型例子是映射 $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell_\infty$，它定义在 $\mathbb{N}$ 的幂集上，并对所有 $A \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $\nu(A) := \chi_A$（A的特征函数）。事实上，ν 不是可列可加的，而对每个 $n \in \mathbb{N}$，复合映射 $\pi_n \circ \nu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ 都是可列可加的；其中 $\pi_n \in \ell_\infty^*$ 是由 $\pi_n(x) := x(n)$ 对所有 $x \in \ell_\infty$给出的第 n 个坐标泛函。

得益于 ℓ_∞ 的内射性，这样的例子很容易推广到任何包含与 ℓ_∞ 同构的子空间的巴拿赫空间。实际上，这类子空间的存在是唯一的障碍，正如下述 Diestel 和 Faires 的结果所示 [9]（参见 [10, 第 23 页，推论 7]）：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46E30, 46G10。*Key words and phrases.* 向量测度；可积函数空间；巴拿赫格；正赋范集。J. Rodr´ıguez 的研究部分得到 PID2021-122126NB-C32（由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和“ERDF“建设欧洲之路””资助）以及 21955/PI/22（由 *Fundación Séneca - ACyT Región de Murcia* 资助）项目的支持。E.A. S´anchez-P´erez 的研究部分得到由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2020-112759GB-I00 项目的支持。

定理 1.1（Diestel-Faires）。设 X 是一个巴拿赫空间。

(i) 假设 X 包含一个与 ℓ_∞同构的子空间。那么存在一个全集 $W \subseteq X^*$ 和一个映射 $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X$，使得对于每个 $x^* \in W$，都有 $x^* \circ \nu \in \mathrm{ca}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，并且 $\nu \notin \mathrm{ca}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), X)$。(ii) 假设 X 不包含与 ℓ_∞同构的子空间。令 $W \subseteq X^*$ 为一个全集。若 $\nu\colon \Sigma \to X$ 是定义在一个 σ-代数 Σ 上的映射，且对于每个 $x^* \in W$都有 $x^* \circ \nu \in \mathrm{ca}(\Sigma)$，那么 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$。

以下概念（源自 [32, 附录 II]）自然地出现：

定义 1.2. 设 X 为一个巴拿赫空间。若集合 $W \subseteq X^*$ 满足以下条件，则称其具有 Orlicz-Thomas（OT）性质：对于定义在一个 σ-代数 Σ上的任意映射 $\nu\colon \Sigma \to X$，只要对所有 $x^* \in W$都有 $x^* \circ \nu \in \mathrm{ca}(\Sigma)$，便有 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$。

任何具有 OT 性质的集合都是全集（命题 3.1）。用这种语言表述，Diestel-Faires 定理 1.1 说明，巴拿赫空间 X 的对偶空间的每个全子集都具有 OT 性质，当且仅当 X 不包含同构于 ℓ_∞的子空间。在没有关于 X的其他假设时，很容易验证，X^* 的任何范数稠密子集都具有 OT 性质，正如 [22, 引理 3.1]中明确给出的那样；或者，我们可以将 Vitali-Hahn-Saks-Nikod´ym 定理（参见例如 [10,第 24 页，推论 10]）与 Orlicz-Pettis 定理结合使用。给定任意全集 $W \subseteq X^*$，Dieudonn´e 和 Grothendieck 的一个经典结果（参见例如 [10,第 16 页，推论 3]）指出，定义在一个 σ-代数上的取值于 X的映射是有界且有限可加的，当且仅当对于每个 $x^* \in W$，$x^* \circ \nu$ 都是有界且有限可加的。该结果与 Rainwater-Simons 定理（参见例如 [12,定理 3.134]）保证，X 的任何詹姆斯边界都具有 OT 性质，见[13, 命题 2.9]（参见 [22, 备注 3.2(i)]）。

前面的讨论清楚表明，就 OT 性质而言，ℓ_∞ 的特殊情形最为有趣。在本文中，我们研究 ℓ_∞ 中的 OT 性质，以及关于相对于取值于 ℓ_∞的可列可加向量测度可积的实值函数所构成的巴拿赫格的一些性质。本文组织如下。

在第 2 节中，我们介绍一些术语和预备知识。

在第 3 节中，我们重点讨论 OT 性质。我们从任意巴拿赫空间中的一些基本结果开始，其中包括向量测度及其积分算子的因子分解应用（命题 3.7）。本节的核心内容是研究 ℓ_∞中的 OT 性质。这里的主要结果（定理 3.15）表明，ℓ_∞^* 中任何具有 OT 性质的子集都包含 $\ell_1(\mathfrak{c})$的通常基的一个副本，其中 $\mathfrak{c}$ 表示连续统的基数（即 $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$）。我们还给出该结果的一些推论。值得一提的是，在詹姆斯边界（其始终具有 OT 性质）中包含 $\ell_1(\mathfrak{c})$的通常基副本这一问题，已经得到了深入研究（参见 [16, 17] 及其中的参考文献）。

在第 4 节中，我们研究巴拿赫格 $L_1(\nu)$ 的一些结构性质。该空间由关于给定的 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$ 可积的实值函数构成，其中 Σ 是一个 σ-代数，而 X 是一个巴拿赫空间。这些空间发挥着重要的

作用，在巴拿赫格理论和算子理论中都占有重要地位。众所周知，任何具有弱序单位的序连续巴拿赫格，都与形如 $L_1(\nu)$ 的空间格等距。假设 ν 的值域可分，或者等价地，ν 的取值属于 ℓ_∞。那么 $L_1(\nu)$ 是否可分？一般而言，答案是否定的，即使 ν 是有限测度也如此（见第 2.4 小节）。不过，若附加假设 $L_1(\nu)^*$ 序连续，则答案是肯定的，正如定理 4.3 所述。我们将证明一个更一般的结论：定理 4.6 断言，若 E 是一个具有可数正范数化集的巴拿赫格，且 E 和 E^* 都是序连续的，则 E 可分。特别地，若 μ 是有限测度，且 $L_1(\mu)$ 不可分，并且 $1 < p < \infty$，那么对于任何值域可分的 ν，$L_p(\mu)$ 都不同构于 $L_1(\nu)$（例 4.16）。

2. Terminology and preliminaries

给定集合 S，我们用 $\mathcal{P}(S)$ 表示它的幂集，即由 S 的所有子集组成的集合。S 的基数记为 $|S|$。拓扑空间 $(T,\mathfrak{T})$ 的稠密特征记为 $\mathrm{dens}(T,\mathfrak{T})$，或简记为 $\mathrm{dens}(T)$，它是 T 的稠密子集的最小基数，其中该子集在 $\mathfrak{T}$ 意义下稠密。

2.1. 巴拿赫空间。本文中考虑的所有巴拿赫空间均为实空间。算子是巴拿赫空间之间的连续线性映射。设 X 是一个巴拿赫空间。X 的范数记为 $\|\cdot\|_X$，或简记为 $\|\cdot\|$。X 的闭单位球为 $B_X := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$。$X$ 上的弱（分别为弱*）拓扑（分别为 X^* 上的）记为 w（分别为 w^*）。我们所说的 X 的子空间，是指范数闭线性子空间。我们几乎在所有情况下都讨论范数闭线性子空间，因此倾向于使用这一简略术语；若未假定范数闭性，除非另有说明，我们会使用“线性子空间”这一术语。我们所说的从 X 到子空间 $Y \subseteq X$ 的投影，是指算子 $P : X \to X$，满足 $P(X) = Y$，且 P 限制在 Y 上时为恒等映射。集合 $D \subseteq X$ 的凸包和线性张成分别记为 $\mathrm{co}(D)$ 和 $\mathrm{span}(D)$，它们的闭包分别记为 $\overline{\mathrm{co}}(D)$ 和 $\overline{\mathrm{span}}(D)$。若存在常数 $c > 0$，使得对每个 $x \in X$ 都有 $\|x\| \le c\sup_{x^* \in B} |x^*(x)|$，则称集合 $B \subseteq B_{X^*}$ 为赋范集。若对每个 $x \in X$，都存在$x^* \in B$ 使得 $\|x\| = x^*(x)$，则称集合 $B \subseteq B_{X^*}$ 为 X 的詹姆斯边界。若 X 是巴拿赫格，则其正锥为 $X^+ = \{x \in X : x \ge 0\}$。给定紧豪斯多夫拓扑空间 K，我们用 $C(K)$ 表示由 K 上所有实值连续函数构成的巴拿赫空间，其赋范采用上确界范数。

2.2. 巴拿赫函数空间。设 (Ω, Σ, μ) 是一个有限测度空间。为定义巴拿赫函数空间，我们考虑 $L_1(\mu)$ 中的线性子空间，这些子空间不一定是范数闭的。若巴拿赫空间 E 满足以下条件，则称其为 (Ω, Σ, μ) 上的巴拿赫函数空间（或 K¨othe 函数空间）：

(i) E 是 $L_1(\mu)$的线性子空间；(ii) 若 $f \in L_0(\mu)$且对某个 $g \in E$而言 $|f| \le |g|$ μ-几乎处处成立，则 $f \in E$ 且$\|f\|_E \le \|g\|_E$；(iii) 每个 $A \in \Sigma$ 的特征函数 χ_A 都属于 E。

在这种情况下，赋予 E μ-几乎处处序后， E 是一个巴拿赫格，而包含映射 $E \to L_1(\mu)$是一个算子。 E 的 K¨othe 对偶空间为

$$E' := \{g \in L_1(\mu) : fg \in L_1(\mu) \text{ for all } f \in E\}.$$

任意的 $g \in E'$都会导出一个泛函 $\varphi_g \in E^*$，定义为 $\varphi_g(f) := \int_\Omega fg\, d\mu$对所有 $f \in E$均成立。已知 E 是序连续的，当且仅当 $E^* = \{\varphi_g : \ g \in E'\}$（例如参见 [21,第 29]页）。

2.3. 向量测度的 L_1 。设 (Ω, Σ) 是一个可测空间，设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$。若对每个满足 $B \subseteq A$的 $B \in \Sigma$ ，都有 $\nu(B) = 0$，则称集合 $A \in \Sigma$ 为 ν-零集。所有 ν-零集构成的族记作 $\mathcal{N}(\nu)$。称向量测度 ν 的 Rybakov控制测度为形如 $\mu = |x^* \circ \nu|$（ $x^* \circ \nu$的变差）的有限测度，其中 $x^* \in X^*$ 满足 $\mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(\nu)$ （例如参见 [10, 第 268 页，定理 2] ，其中证明了 Rybakov 控制测度的存在性）。若 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个Σ-可测函数，则称其为 ν-可积，若对所有 $x^* \in X^*$ 都有 $f \in L_1(|x^* \circ \nu|)$，并且对每个 $A \in \Sigma$，存在 $\int_A f\, d\nu \in X$ 使得

$$x^*\left(\int_A f\, d\nu\right) = \int_A f\, d(x^* \circ \nu) \quad \text{for all } x^* \in X^*.$$

将几乎处处相等的函数视为相同后，所有 ν可积函数（等价类）构成的集合 $L_1(\nu)$ 是一个巴拿赫空间，其范数为

$$\|f\|_{L_1(\nu)} := \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_\Omega |f|\, d|x^* \circ \nu|.$$

积分算子是由下式定义的（范数为 1 的）算子 $I_\nu : L_1(\nu) \to X$

$$I_\nu(f) := \int_\Omega f\, d\nu \quad \text{for all } f \in L_1(\nu).$$

如果 μ 是 ν的任意一个 Rybakov控制测度，那么 $L_1(\nu)$ 是定义在 (Ω, Σ, μ) 上的巴拿赫函数空间。作为巴拿赫格， $L_1(\nu)$ 是序连续的，并且具有弱序单位（函数 χ_Ω）。反过来，任何具有弱序单位的序连续巴拿赫格，都与定义在某个 σ-代数上的可数可加向量测度的 L_1 空间格等距。事实上，一方面，这样的巴拿赫格与某个有限测度空间 (Ω, Σ, μ) 上的巴拿赫函数空间 E 格等距（例如，参见 [21, 定理 1.b.14]）。另一方面，由于 E的序连续性，映射 $\nu : \Sigma \to E$ ，由 $\nu(A) := \chi_A$ 对所有 $A \in \Sigma$ 定义，是可列可加的，并且有 $E = L_1(\nu)$ （参见 [5, 定理 8], [11, 命题 2.4(vi)]）。关于向量测度的 L_1 空间，更多信息请参阅 [25, 第 3] 章。

2.4. $\{0,1\}^I$上的通常测度。设 I 为一个非空集合。对每个 $i \in I$，我们用 π_i 表示 i 坐标投影： $\{0,1\}^I \to \{0,1\}$ 。令 Σ_I 为 $\{0,1\}^I$ 上由所有形如 $\bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(w(i))$的集合生成的$\sigma$代数，其中$F \subseteq I$是有限的且 $w \in \{0,1\}^F$。 $\{0,1\}^I$上的通常乘积概率测度记为 λ_I，定义在 Σ_I上，并满足对所有 $i \in I$， $\lambda_I(\pi_i^{-1}(\{0\})) = \lambda_I(\pi_i^{-1}(\{1\})) = \frac{1}{2}$。为简单起见，我们称 λ_I 为 $\{0,1\}^I$上的通常测度。当 I为无限集时，我们有 $\mathrm{dens}(L_1(\lambda_I)) = |I|$。特别地，只要

I 是不可数的。关于无限乘积测度和 $\{0,1\}^I$上的通常测度的更多信息，请参阅 [15, §254]。

2.5. 测度代数。设 (Ω, Σ, μ) 为概率空间。我们考虑在 Σ 上定义的等价关系：当且仅当 $\mu(A \triangle B) = 0$ 时，$A \sim B$。等价类的集合记为 $\Sigma/\mathcal{N}(\mu)$，赋予通常的布尔代数运算和如下定义的泛函后，便成为一个测度代数：对所有 $A \in \Sigma$，$\mu^\bullet(A^\bullet) := \mu(A)$，其中 $A^\bullet \in \Sigma/\mathcal{N}(\mu)$ 表示 A 的等价类。给定另一个概率空间 $(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$，若存在一个布尔代数同构，则称 μ 和 μ_0 的测度代数同构

$$\theta : \Sigma/\mathcal{N}(\mu) \to \Sigma_0/\mathcal{N}(\mu_0)$$

使得 $\mu_0^\bullet \circ \theta = \mu^\bullet$。在这种情况下，存在一个格等距同构 $\Phi : L_1(\mu) \to L_1(\mu_0)$，使得 $\int_\Omega f\, d\mu = \int_{\Omega_0} \Phi(f)\, d\mu_0$ 且 $\Phi(f\chi_B) = \Phi(f)\chi_C$，只要 $f \in L_1(\mu)$ 且 $\theta(B^\bullet) = C^\bullet$。关于测度代数的更多信息，参见 [14]。

3. The Orlicz-Thomas property

3.1. 任意巴拿赫空间中的 OT 性质。在本小节中，X 是一个巴拿赫空间。我们先给出一个观察：

命题 3.1. 若 $W \subseteq X^*$ 具有 OT 性质，则 W 是全的。

证明。若 W 不是全的，则存在 $x \in X \setminus \{0\}$，使得对所有$x^* \in W$都有 $x^*(x) = 0$。令 $\xi\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ 为一个非可列可加的有限可加测度。于是存在一个不交序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$，使得序列 $(\xi(\bigcup_{m>n} A_m))_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛到 0。定义 $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X$，令 $\nu(A) := \xi(A)x$，对所有 $A \subseteq \mathbb{N}$均成立。对每个 $x^* \in W$，都有 $(x^* \circ \nu)(A) = 0$，对所有 $A \subseteq \mathbb{N}$均成立，因此$x^* \circ \nu \in \mathrm{ca}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $\|\nu(\bigcup_{m>n} A_m)\| = \xi(\bigcup_{m>n} A_m)\|x\|$，故 $\nu \notin \mathrm{ca}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), X)$。□

下面的命题显然成立。

命题 3.2. 设 $W \subseteq X^*$。以下陈述等价：

(i) W 具有 OT 性质。(ii) $\mathrm{co}(W)$ 具有 OT 性质。(iii) $\mathrm{span}(W)$具有 OT 性质。

按照惯例，ω_1 表示第一个不可数序数。给定任意集合 $D \subseteq X^*$，我们用 $S_1(D) \subseteq X^*$ 表示包含于 D 中的所有 w^*-收敛序列的极限所构成的集合。对于任意序数 $\alpha \leq \omega_1$，我们通过超限归纳定义 $S_\alpha(D)$ 如下：

- $S_0(D) := D$,
- $S_\alpha(D) := S_1(S_\beta(D))$，若对于某个序数 $\beta < \omega_1$，$\alpha = \beta + 1$
- $S_\alpha(D) := \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta(D)$，若 α 是极限序数。

那么，$S_{\omega_1}(D)$ 是包含 D 的 X^* 最小的 w^*-序列闭子集。一般而言，我们有

$$D \subseteq \overline{D}^{\|\cdot\|} \subseteq S_1(D) \subseteq S_{\omega_1}(D) \subseteq \overline{D}^{w^*}.$$

命题 3.3. 设 $W \subseteq X^*$。以下陈述等价：

(i) W 具有 OT 性质。(ii) $\overline{W}^{\|\cdot\|}$ 具有 OT 性质。(iii) $S_1(W)$ 具有 OT 性质。(iv) $S_{\omega_1}(W)$ 具有 OT 性质。(v) $\overline{W}^{w}$ 具有 OT 性质。

证明。(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv) 以及 (i)⇒(v) 的蕴含关系显而易见。

(iv)⇒(i)：假设 $S_{\omega_1}(W)$ 具有 OT 性质。设 $\nu\colon \Sigma \to X$ 是定义在 σ-代数 Σ 上的映射，且对所有 $x^* \in W$，均有 $x^* \circ \nu \in$ 可列可加测度(Σ)。注意到 Vitali-Hahn-Saks-Nikod´ym 定理（例如参见 [10, 第 24 页，推论 10]），通过标准的超限归纳论证可知，对每个序数 $\alpha \leq \omega_1$，对所有 $x^* \in S_\alpha(W)$，均有 $x^* \circ \nu \in$ 可列可加测度(Σ)。特别地，这对 $\alpha = \omega_1$ 也成立，因此$\nu \in$ 可列可加测度(Σ, X)。

(v)⇒(i)：由于 $\overline{W}^{w} \subseteq \overline{\mathrm{co}(W)}^{w} = \overline{\mathrm{co}(W)}^{\|\cdot\|}$，集合 $\overline{\mathrm{co}(W)}^{\|\cdot\|}$ 具有 OT 性质。将等价关系 (i)⇔(ii) 应用于 co(W)，可知该集合具有 OT 性质，因此 W 也具有 OT 性质（根据命题 3.2）。□

下面的命题给出了 OT 性质的一种算子理论重述。给定一个 σ-代数 Σ，赋予 ca(Σ) 全变差范数后，它是一个巴拿赫空间。众所周知，集合 $H \subseteq$ ca(Σ) 相对弱紧，当且仅当它有界，且存在一个非负的 $\mu_0 \in$ ca(Σ)，使得 H 一致 μ_0-连续；也就是说，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $\mu_0(A) \leq \delta$ 的 $A \in \Sigma$，都有 $\sup_{\mu\in H} |\mu(A)| \leq \varepsilon$ （参见例如 [7, 第 92 页，定理 13]）。

命题 3.4. 设 $W \subseteq X^*$ 是一个子空间，且 $\nu\colon \Sigma \to X$ 是定义在 σ-代数 Σ 上的映射，使得对所有 $x^* \in W$，都有 $x^* \circ \nu \in$ 可列可加(Σ)。那么该映射

$$T : W \to \mathrm{ca}(\Sigma), \quad T(x^*) := x^* \circ \nu,$$

是一个算子，并且以下陈述成立：

(ii) 若 $\nu \in$ 可列可加(Σ, X)，则 T 弱紧。(iii) 若 T 弱紧且 $B_W \subseteq B_{X^*}$ 赋范，则 $\nu \in$ 可列可加(Σ, X)。

证明. 闭图定理的常规应用可保证 T 是一个算子。

(i) ν 可列可加这一事实保证存在一个非负的$\mu_0 \in$可列可加(Σ)，使得 $\{x^* \circ \nu\colon x^* \in B_{X^*}\} \supseteq T(B_W)$ 一致地 μ_0- 连续（例如参见 [10, 第 14 页，推论 6]）。

(ii) 由于 B_W 是绝对凸且赋范的，我们有

$$\overline{B_W}^{w^*} \supseteq cB_{X^*} \tag{3.1}$$

对某个 $c > 0$，由 Hahn-Banach 分离定理可知。取一个非负的$\mu_0 \in$可列可加测度Σ，使得 $T(B_W)$一致 μ_0-连续。注意，ν是有限可加的，因为 W 是全的（请记住，B_W 是赋范的，因此是全的），并且

$x^* \circ \nu$ 对每个 $x^* \in W$都是有限可加的。要证明 ν 是可列可加的，只需验证它是 μ_0-连续的。取 $\varepsilon > 0$。选取 $\delta > 0$ 使得

$$|x^*(\nu(A))| \le c\varepsilon \quad \text{for every } A \in \Sigma \text{ with } \mu_0(A) \le \delta \text{ and for every } x^* \in B_W. \tag{3.1}$$

显然，前面的不等式对所有 $x^* \in \overline{B_W}^{w^*}$ 也成立，从而推出

$$\|\nu(A)\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(\nu(A))| \le \varepsilon \quad \text{for every } A \in \Sigma \text{ with } \mu_0(A) \le \delta.$$

因此， ν 是 μ_0-连续的，因而是可列可加的。 □

命题 3.5. 设 $T\colon X \to Y$ 是巴拿赫空间之间的一个算子，且设 $\nu\colon \Sigma \to X$ 是定义在 σ-代数 σ 上的一个映射。以下陈述成立:

(i) $T^*(B_{Y^*})$ 是 w^* 的紧子集。 (ii) $T^*(B_{Y^*})$ 是全的，当且仅当 T 是单射。 (iii) 对所有 $x^* \in T^*(B_{Y^*})$， $T \circ \nu \in \mathsf{ca}(\Sigma, Y)$ 当且仅当 $x^* \circ \nu \in \mathsf{ca}(\Sigma)$。 (iv) 假设 $T^*(B_{Y^*})$ 具有 OT 性质。那么， $\nu \in \mathsf{ca}(\Sigma, X)$ 当且仅当 $T \circ \nu \in \mathsf{ca}(\Sigma, Y)$。 (v) 如果 T^{**} 是单射，则 $T^*(B_{Y^*})$ 具有 OT 性质。

证明。(i) 由 w^* 的紧性以及 B_{Y^*} 到 w^* 的 w^* 连续性可得。(ii) 显然成立。 (iii) 直接由 Orlicz-Pettis 定理推出。(iv) 是 (iii) 的推论。

为证明 (v)，注意到 T^{**} 的单射性（通过 Hahn-Banach 分离定理）等价于 $T^*(Y^*)$ 在 X^* 中范数稠密。由 Orlicz-Pettis 定理和命题 3.3 可知， $T^*(Y^*)$ 具有 OT 性质。由于 $\operatorname{span}(T^*(B_{Y^*})) = T^* Y^*$，我们可以应用命题 3.2，得出 $T^*(B_{Y^*})$ 具有 OT 性质。□

具有单射双伴随的非同构嵌入的典型例子，是与 Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński 分解相关的算子（例如，参见 [2, 定理 5.37]）。下面这个简单例子表明，对于任意单射算子，命题 3.5(iv) 的结论可能不成立。

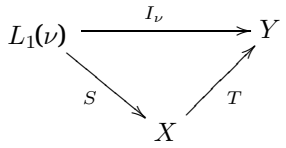
例 3.6. 设 $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell_\infty$ 是由 $\nu(A) := \chi_A$ 定义的有限可加测度，其中对所有 $A \subseteq \mathbb{N}$ 均成立；并设 $T\colon \ell_\infty \to \ell_1$ 是由 $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (2^{-n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 定义的单射算子，其中对所有 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ 均成立。注意， $T \circ \nu$ 是有限可加的，且

$$\|(T \circ \nu)(A)\| = \sum_{n\in A} 2^{-n} \quad \text{for all } A \subseteq \mathbb{N},$$

因此 $T \circ \nu \in \mathsf{ca}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \ell_1)$。然而， $\nu \notin \mathsf{ca}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \ell_\infty)$。

设 $T\colon X \to Y$ 是巴拿赫空间之间的单射算子，令 $(\Omega\ \Sigma)$ 为可测空间，并假设 $\nu \in \mathsf{ca}(\Sigma, Y)$ 的积分算子 I_ν

可分解为



对于某个算子 S。对所有 $A \in \Sigma$，定义 $\tilde{\nu}(A) := S(\chi_A)$。在 [22, 定理 3.7] 中证明了 $\tilde{\nu} \in \mathsf{ca}(\Sigma, X)$ 满足：

(a) $\nu = T \circ \tilde{\nu}$ 且 $\mathcal{N}(\nu) = \mathcal{N}(\tilde{\nu})$；(b) $L_1(\nu) = L_1(\tilde{\nu})$（范数等价）；以及 (c) $S = I_{\tilde{\nu}}$。

这一结果改进了 [26, 引理 3.1]，其中 (b) 是在附加假设 X 不含与 ℓ_∞ 同构的子空间的条件下，通过 Diestel-Faires 定理 1.1 得到的。沿着类似的思路，我们有：

命题 3.7. 设 $T\colon X \to Y$ 是巴拿赫空间之间的一个算子，且 $T^*(B_{Y^*})$ 具有 OT 性质。设 $(\Omega\ \Sigma)$ 为可测空间，并设 $\nu \in$ 可列可加测度 (Σ, Y) 满足 $I_\nu(L_1(\nu)) \subseteq T(X)$。那么存在 $\tilde{\nu} \in$ 可列可加测度(Σ, X)，使得：

(a) $\nu = T \circ \tilde{\nu}$ 且 $\mathcal{N}(\nu) = \mathcal{N}(\tilde{\nu})$; (b) $L_1(\nu) = L_1(\tilde{\nu})$（范数等价）；以及 (c) $I_\nu = T \circ I_{\tilde{\nu}}$。

证明. 注意到 T 是单射（由命题 3.1 和 3.5(ii) 得出）。对于每个 $A \in \Sigma$，我们有 $\nu(A) = I_\nu(\chi_A) \in T(X)$，因此存在唯一的 $\tilde{\nu}(A) \in X$，使得

$$T(\tilde{\nu}(A)) = \nu(A).$$

如此定义的映射 $\tilde{\nu}\colon\ \Sigma \to X$ 满足 $\nu = T \circ \tilde{\nu}$，并属于 $\mathsf{ca}(\Sigma, X)$，因为$T^*(B_{Y^*})$具有 OT 性质，且对所有$y^* \in B_{Y^*}$，$T^*(y^*) \circ \tilde{\nu} = y^* \circ T \circ \tilde{\nu} = y^* \circ \nu \in \mathsf{ca}(\Sigma)$。

根据 [25, 引理 3.27]，我们有 $\mathcal{N}(\nu) = \mathcal{N}(\tilde{\nu})$、包含关系 $L_1(\tilde{\nu}) \subseteq L_1(\nu)$，以及在 $L_1(\tilde{\nu})$ 上的等式 $I_\nu = T \circ I_{\tilde{\nu}}$。

为证明反向包含关系 $L_1(\nu) \subseteq L_1(\tilde{\nu})$，设 $f \in L_1(\nu)$。由于$I_\nu(L_1(\nu)) \subseteq T(X)$，我们可以定义一个有限可加集函数 $\eta\colon \Sigma \to X$，使得 $T(\eta(A)) = I_\nu(f\chi_A) = \int_A f\, d\nu$对每个 $A \in \Sigma$都成立。然后，命题 3.5(iv) 保证 η是可列可加的，因为 $T^*(B_{Y^*})$ 具有 OT 性质，且 $A \mapsto \int_A f\, d\nu$ 在 Σ 上的不定积分是可列可加的。给定 $n \in \mathbb{N}$，令 $A_n := |f|^{-1}([0, n]) \in \Sigma$且 $f_n := f\chi_{A_n}$。固定 $A \in \Sigma$。每个 f_n 都有界且Σ-可测，因此它是 $\tilde{\nu}$-可积的，而且还满足

$$\int_A f_n\, d\tilde{\nu} = \eta(A \cap A_n). \tag{3.2}$$

事实上，令 $(s_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ 为一个 Σ-简单函数序列，它们一致收敛于 f_n （当 $k\to\infty$ 时）。由于 $\nu = T\circ\tilde{\nu}$，可得

$$\begin{aligned} T\left(\int_A f_n\, d\tilde{\nu}\right) &= T\left(\lim_{k\to\infty}\int_A s_k^{(n)}\, d\tilde{\nu}\right) = \lim_{k\to\infty} T\left(\int_A s_k^{(n)}\, d\tilde{\nu}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_A s_k^{(n)}\, d\nu = \int_A f_n\, d\nu = \int_{A\cap A_n} f\, d\nu = T\left(\eta(A\cap A_n)\right). \end{aligned}$$

由于 T 是单射，这就验证了 (3.2)。现在，由 (3.2) 以及 η 的可数可加性可得 $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\, d\tilde{\nu} = \lim_{n\to\infty}\eta(A\cap A_n) = \eta(A)$（因为 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 递增且其并为 Ω）。由于这对任意固定的 $A\in\Sigma$ 都成立，且 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ 在 Ω 上逐点成立，因此根据 Lewis 的一个结果（例如参见 [25,定理 3.5]），可得 $f\in L^1(\tilde{\nu})$。因此，我们已证明 $L_1(\nu)\subseteq L_1(\tilde{\nu})$，从而 (c) 成立。利用闭图定理可以证明，包含关系 $L_1(\nu)\subseteq L_1(\tilde{\nu})$ 和 $L_1(\tilde{\nu})\subseteq L_1(\nu)$ 均为连续的，因此 $L_1(\nu)$ 和 $L_1(\tilde{\nu})$ 的范数等价。□

我们以两个结果结束本小节。这两个结果表明，对任意巴拿赫空间中向量测度的可数可加性的研究，在某种程度上可以归约为取值于 ℓ_∞ 的情形。

命题 3.8。设 $W\subseteq B_{X^*}$，并设 $i_W\colon X\to\ell_\infty(W)$ 为如下定义的算子

$$i_W(x) := \big(x^*(x)\big)_{x^*\in W} \quad \textit{for all } x\in X.$$

设 $\nu\colon\Sigma\to X$ 是定义在 σ-代数 Σ 上的映射，并定义 $\widehat{\nu}_W := i_W\circ\nu$。考虑以下命题：

(i) $\nu\in ca(\Sigma,X)$。（ii） $\widehat{\nu}_W\in ca(\Sigma,\ell_\infty(W))$。

（iii）对每个 $\varphi\in\ell_1(W)\subseteq\ell_\infty(W)^*$， $\varphi\circ\widehat{\nu}_W\in ca(\Sigma)$。（iv）对每个 $x^*\in W$， $x^*\circ\nu\in ca(\Sigma)$。

于是 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇔(iv)。此外：

(a) 如果 W 是 w^*-紧的，则 (ii)⇔(iii)⇔(iv)。

(b) 如果 i_W^{**} 是单射的，则 (i)⇔(ii)。

证明。(i)⇒(ii)⇒(iii) 之间的蕴含关系是显然的。

为证明 (iii)⇔(iv)，首先注意到，对于每个 $x^*\in W$，都有 $x^*\circ\nu = e_{x^*}\circ\widehat{\nu}_W$，其中 $e_{x^*}\in\ell_1(W)$ 是由 $e_{x^*}(z^*) = 0$ 对所有 $z^*\in W\setminus\{x^*\}$ 以及 $e_{x^*}(x^*) = 1$ 所定义的向量。由于 $\ell_1(W) = $张成空间$(\{e_{x^*}\colon \overline{x^*\in W}\})^{\|\cdot\|}\subseteq\ell_\infty(W)^*$，等价关系 (iii)⇔(iv) 是 Vitali-Hahn-Saks-Nikod´ym 定理的推论（例如参见 [10, 第 24 页，推论 10]）。

（a）如果 W 是 w^*-紧的，那么 i_W 的取值位于 W 上所有 w^*-连续实值函数的子空间 $C(W)\subseteq\ell_\infty(W)$ 中。集合

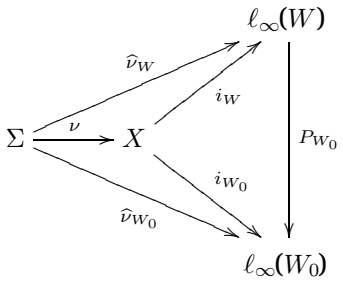
$$\Gamma := \{\pm e_{x^*}|_{C(W)}\colon x^*\in W\}\subseteq B_{C(W)^*}$$

是 $C(W)$ 的詹姆斯边界，因此具有 OT 性质，正如我们在引言中已经提到的。最后，注意到 (iv) 等价于对每个 $\gamma\in\Gamma$ 都有 $\gamma\circ\widehat{\nu}_W\in$ 可列可加测度(Σ)。

(b) 这可直接由命题 3.5(iv-v) 得出。 □

注意，若 $W \subseteq B_{X^*}$ 是赋范集，则命题 3.8 中的算子 i_W 是一个同构嵌入。

命题 3.9。设 $W \subseteq B_{X^*}$ 是一个赋范集，并设 $\nu\colon \Sigma \to X$ 是定义在一个 σ-代数 Σ 上的映射，使得对每个 $x^* \in W$，都有 $x^* \circ \nu \in$ 可列可加测度(Σ)。若 $\nu \notin$ 可列可加测度(Σ, X)，则存在一个可数集 $W_0 \subseteq W$，使得 $\widehat{\nu}_{W_0} \notin$ 可列可加测度$(\Sigma, \ell_\infty(W_0))$，并且有如下交换图



其中 P_{W_0} 是由下式定义的算子：对所有 $u \in \ell_\infty(W)$，$P_{W_0}(u) := u|_{W_0}$。

证明。注意到 ν 是有限可加的。由于 ν 不是可列可加的，我们可以取 Σ 中的一个两两不交元素序列 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得序列 $(\nu(\bigcup_{i>n} A_i))_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛到 0。对所有 $n \in \mathbb{N}$，记 $B_n := \bigcup_{i>n} A_i$。由于W 是赋范的，存在常数 $k > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $x_n^* \in W$，满足 $|x_n^*(\nu(B_n))| \geq k\|\nu(B_n)\|_X$。令 $W_0 := \{x_n^*\colon n \in \mathbb{N}\}$。于是

$$\|\widehat{\nu}_{W_0}(B_n)\|_{\ell_\infty(W_0)} \geq |x_n^*(\nu(B_n))| \geq k\|\nu(B_n)\|_X \quad \text{for all } n \in \mathbb{N},$$

因此，序列 $(\widehat{\nu}_{W_0}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\ell_\infty(W_0)$中不收敛到 0。由此可得 $\widehat{\nu}_{W_0} \notin$ 可列可加测度$(\Sigma, \ell_\infty(W_0))$。最后一个结论显然。□

3.2. ℓ_∞中的 OT 性质。如引言中所述，由 $\nu(A) := \chi_A$ for $A \subseteq \mathbb{N}$ 定义的有限可加映射 $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell_\infty$ 并非可列可加，而对于每个坐标泛函 $\pi_n \in \ell_\infty^*$，$\pi_n \circ \nu \in$ ca$(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$。这一例子已被用于说明集合 $\{\pi_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell_\infty^*$ 不具有 OT 性质。为了提供更多同类例子，我们将在下文的命题 3.12 中首先确定一般的 ℓ_∞-值可列可加测度的形式。证明使用了几个稍后也会用到的结果。第一个结果可追溯至 Bartle、Dunford 和 Schwartz [4]（参见 [10, 第 14 页，推论 7]），而第二个结果归功于 Rosenthal [28]（参见 [10, 第 252 页，定理 13]）。

定理 3.10（Bartle-Dunford-Schwartz）。设 Σ 是一个 σ-代数，X 是一个 Banach 空间，且 $\nu \in$ 是 Σ 上取值于 X 的可列可加测度。则 ν 的值域，即集合

$$\mathcal{R}(\nu) := \{\nu(A)\colon A \in \Sigma\}$$

在 X 中是相对弱紧的。

定理 3.11（Rosenthal）。 ℓ_∞ 的任意弱紧子集都是范数可分的。

命题 3.12。设 $\nu\colon\ \Sigma\to\ell_\infty$ 是定义在 σ-代数 Σ 上的映射，使得$\{\pi_n\circ\nu\colon\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq$ 可列可加测度（Σ）。以下条件等价:

(i) $\nu\in$ ca(Σ,ℓ_∞)。(ii) $\{\nu(A)\colon\ A\in\Sigma\}$ 在 ℓ_∞ 中相对弱紧。(iii) $\{\nu(A)\colon\ A\in\Sigma\}$ 在 ℓ_∞ 中范数可分。(iv) $\{\pi_n\circ\nu\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ 是 ca(Σ) 的一致可列可加子集。(v) $\{\pi_n\circ\nu\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ 在 ca(Σ) 中相对弱紧。(vi) 存在一个非负的 $\mu\in$ ca(Σ)，使得 $\{\pi_n\circ\nu\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ 是一致 μ-连续的。

证明。(i)⇒(ii) 和 (ii)⇒(iii) 的推论分别由定理 3.10 和 3.11 得出。

为证明 (iii)⇒(i)，注意到 (iii) 蕴含 ν 取值于 ℓ_∞ 的一个可分子空间 X。由于 X 不含与 ℓ_∞ 同构的子空间，并且限制集 $\{\pi_n|_X\colon\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq X^*$ 是全的（对 X 而言），Diestel-Faires 定理 1.1(ii) 蕴含 ν 是可列可加的。

(i)⇔(iv) 的等价性显然。

对每个 $A\in\Sigma$，我们有 $\sup_{n\in\mathbb{N}}|(\pi_n\circ\nu)(A)|=\|\nu(A)\|_{\ell_\infty}<\infty$。因此，Nikod´ym 有界性定理（例如参见 [10, 第 14 页，定理 1]）可用于得出结论: $\{\pi_n\circ\nu\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ 在 ca(Σ) 中有界。因此，等价关系 (iv)⇔(v)⇔(vi) 可由 ca(Σ) 的相对弱紧子集的一个众所周知的刻画推出（例如参见 [7, 第 92 页，定理 13]）。□

受上文命题 3.12 中条件 (vi) 的启发，我们给出如下例子:

例 3.13. 设 λ 为 $[0,1]$的勒贝格 σ-代数 Σ上的勒贝格测度。取 $L_1[0,1]$中的一个范数有界序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$。设 $\nu\colon\ \Sigma\to\ell_\infty$ 为如下定义的映射

$$\nu(A):=\left(\int_A f_n\,d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}\qquad\text{for all } A\in\Sigma.$$

根据命题 3.12 的证明和 Dunford-Pettis 定理（例如参见 [7, 第 93] 页），映射 ν 是可列可加的，当且仅当 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一致λ-可积的，即

$$\lim_{\lambda(A)\to0}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_A|f_n|\,d\lambda=0.$$

当存在 $g\in L_1[0,1]$ 使得对所有 $n\in\mathbb{N}$都有 $|f_n|\le g$ 时，这一条件成立。关于一致可积性的进一步判据，例如参见 [8], 。

容易验证，$L_1[0,1]$中的范数有界序列 $(n\chi_{[0,1/n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 不是一致 λ-可积的。对于由 $f_n(t):=\int_0^t n\chi_{[1-1/n,1)}(s)/(1-s)ds$ 定义的序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，当 $t\in[0,1]$ 且 $n\in\mathbb{N}$, [23, 第 295] 页时，结论同样成立。更一般地，[3, 例 1] 给出了 $L_1[0,1]$ 中的一个范数有界序列，其在任意 $A\in\Sigma\setminus\mathcal{N}(\lambda)$ 上的限制都不是一致 λ-可积的。

利用巴拿赫空间 ℓ_∞ 和 $L_\infty[0,1]$ 同构这一事实（例如参见 [1, 定理 4.3.10]），我们来看看将 $L_1[0,1]$ 视为$L_\infty[0,1]^*$ 的全子空间时，它为何不具有 OT 性质。

例3.14. 设 λ 和 Σ 如例 3.13 所述。定义 $\nu\colon \Sigma \to L_\infty[0,1]$ by$\nu(A) = \chi_A$ 对所有 $A \in \Sigma$均成立。于是 $\nu \notin \mathsf{ca}(\Sigma, L_\infty[0,1])$，并且对每个 $\varphi \in L_1[0,1]$，都有$\varphi \circ \nu \in \mathsf{ca}(\Sigma)$，因为 $(\varphi \circ \nu)(A) = \int_A \varphi\, d\lambda$ 对所有 $A \in \Sigma$均成立。因此，$L_1[0,1] \subseteq L_\infty[0,1]^*$不具有 OT 性质。

事实证明，存在具有 OT 性质的范数可分子集 X^*，可阻止巴拿赫空间 X 包含与 ℓ_∞ 同构的子空间。下文的推论 3.22 断言了这一点，其证明需要我们的主要结果：

定理 3.15. 设 $W \subseteq \ell_\infty^*$ 是一个不包含与 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 的典范基等价的集合的集合。那么 W 不具有 OT 性质。

给定一个巴拿赫空间 X 和一个非空集合 I，回顾一下，集合 $\{x_i : i \in I\} \subseteq X$ 若有界，且存在常数 $c > 0$ 使得

$$\left\| \sum_{i \in I} a_i x_i \right\| \geq c \sum_{i \in I} |a_i|$$

对每个 $(a_i)_{i\in I} \in \ell_1(I)$ 都成立。在这种情况下，$\mathsf{span}(\{x_i : i \in I\})$ 与 $\ell_1(I)$ 同构。

定理 3.15 的证明需要一些已知事实，并用到了 Talagrand 的以下结果（见 [31, 定理 4]）。回顾一下，基数 κ 的上确界性（记作 $cf(\kappa)$）是指满足以下条件的最小基数 κ'：κ 是 κ' 个基数为 $< \kappa$ 的集合之并。$cf(\omega_1)$ 和 $cf(\mathfrak{c})$ 都是不可数的（例如，见 [18,推论 5.12]）。

定理 3.16（Talagrand）。设 I 是一个集合，且 $|I|$ 具有不可数上确界性。设 X 是一个巴拿赫空间，并设 $D \subseteq X$ 是一个满足 $X =$ 张成空间(D) 的集合。若 X 包含一个与 $\ell_1(I)$ 同构的子空间，则 D 包含一个等价于 $\ell_1(I)$ 的典范基的集合。

以下结果是 [28, 引理 1.1] 的一个应用：

引理 3.17. 设 X 是一个巴拿赫空间族 $\{X_i$ 的 ℓ_1-和：$i \in I\}$，并且对每个 $i \in I$，令 $\pi_i : X \to X_i$ 为典范投影。设 $W \subseteq X$ 为一个子空间。若集合 $\{i \in I : \pi_i(W) \neq \{0\}\}$ 包含一个集合 J，使得 $|J|$ 具有不可数上确界性，则 W 包含一个同构于 $\ell_1(J)$的子空间。

证明. 对每个 $i \in J$，我们固定 $x_i \in B_W$ 和 $x_i^* \in B_{X_i^*}$，使得 $x_i^*(\pi_i(x_i)) \neq 0$。定义算子 $T\colon X \to \ell_1(J)$ 如下：

$$T(x) := \big(x_i^*(\pi_i(x))\big)_{i\in J} \quad \text{for all } x \in X.$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们定义 $J_k := \{i \in J : |x_i^*(\pi_i(x_i))| > \frac{1}{k}\}$，使得 $J = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k$。由于 $|J|$ 具有不可数上确界性，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $|J_k| = |J|$。

对于每个 $i \in J$，令 $\phi_i \in \ell_1(J)^*$ 为第 i 个坐标泛函。由于 J_k 包含于集合

$$J' := \left\{ i \in J : \left|\phi_i(T(x))\right| > \frac{1}{k} \text{ for some } x \in B_W \right\},$$

我们有 $|J'| = |J|$。现在可以应用 [28, 引理 1.1]，得出 W 包含一个与 $\ell_1(J)$ 同构的子空间。□

证明定理 3.15 的另一个要点是下面的定理 3.18。记住，存在一个由 $\mathbb{N}$ 的无限子集构成的几乎不相交族 $\mathcal{A}$，即可证明它是 [19, 命题 4]（也可见 [1, 定理 2.5.4]）（例如参见 [1, 引理 2.5.3] 的证明）。

定理 3.18（Kalton）。设 $T\colon\ \ell_\infty \to \ell_\infty(I)$ 是一个算子，其中 I 是一个满足 $|I| < \mathfrak{c}$ 的非空集。若 T 在 c_0 上消失，则存在一个无限集 $A \subseteq \mathbb{N}$，使得 T 在子空间 Z_A 上消失：对所有 $n \in \mathbb{N} \setminus A\}$，均有 $= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty\colon\ \ x_n = 0$。

设 K 是一个紧豪斯多夫拓扑空间。根据里斯表示定理，对偶空间 $C(K)^*$ 是由 K 上所有实值正则博雷尔测度构成的巴拿赫空间，并赋予全变差范数。$C(K)^*$ 中由 K 上所有正则博雷尔概率测度组成的子集记为 $P(K)$。给定 $\mu \in P(K)$，任意 $\xi \in C(K)^*$ 都可以（以唯一方式）写成 $\xi = f\,d\mu + \xi'$，其中 $f \in L_1(\mu)$ 是某个元素，且 $\xi' \in C(K)^*$ 与 μ 奇异；这里，$f\,d\mu \in C(K)^*$ 对每个博雷尔集 $B \subseteq K$ 由 $(f\,d\mu)(B) = \int_B f\,d\mu$ 给出，并且按照惯例记作 $f = \frac{d\xi}{d\mu}$。

巴拿赫空间 ℓ_∞ 和 $C(\beta\mathbb{N})$ 等距同构，其中 $\beta\mathbb{N}$ 表示 $\mathbb{N}$ 配备离散拓扑后的斯通-切赫紧化。回忆一下，$\beta\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$上的所有超滤子的集合，它是一个紧豪斯多夫拓扑空间$\widehat{\ }$，且集合族 $A := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\colon\ A \in \mathcal{U}\}$（$A \subseteq \mathbb{N}$）构成一个既开又闭集基。每个 $n \in \mathbb{N}$ 都与超滤子 $\{A \subseteq \mathbb{N}\colon\ n \in A\} \in \beta\mathbb{N}$对应。

现在我们准备证明本节的主要结果：

定理 3.15 的证明。令 $R\colon\ C(\beta\mathbb{N}) \to \ell_\infty$ 为满足对所有 $A \subseteq \mathbb{N}$均有 $R(\chi_{\widehat{A}}) = \chi_A$ 的等距同构。令 $\mu_0 \in P(\beta\mathbb{N})$ 为 $\beta\mathbb{N}$ 上的正则博雷尔概率测度，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$均有 $\mu_0(\{n\}) = 2^{-n}$。注意，对于每个$f \in L_1(\mu_0)$，实数级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ 2^{-n} 绝对收敛，并且有

$$\int_{\widehat{B}} f\,d\mu_0 = \sum_{n\in B} f(n)2^{-n} \quad \text{for every } B \subseteq \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

佐恩引理保证存在一个集合 $\Delta \subseteq P(\beta\mathbb{N})$，它包含 μ_0，且由 $P(\beta\mathbb{N})$ 中两两互相奇异的元素构成，并且 Δ 在满足这些性质的 $P(\beta\mathbb{N})$ 的所有子集中按包含关系是极大的。于是，对任意 $\xi \in C(\beta\mathbb{N})^*$，我们有

$$\xi = \sum_{\mu\in\Delta} \frac{d\xi}{d\mu}\,d\mu, \tag{3.4}$$

该级数在 $C(\beta\mathbb{N})^*$ 中绝对收敛，并且空间 $C(\beta\mathbb{N})^*$ 与由算子 $S\colon\ C(\beta\mathbb{N})^* \to Z$ 定义的 ℓ_1-和 Z 中的巴拿赫空间族 $\{L_1(\mu)\colon \mu \in \Delta\}$ 等距同构，其中算子定义如下：

$$S(\xi) := \left(\frac{d\xi}{d\mu}\right)_{\mu\in\Delta} \quad \text{for all } \xi \in C(\beta\mathbb{N})^*$$

（例如，参见 [1, 命题 4.3.8(iii)] 的证明。）

由定理 3.16 可不失一般性地假设 W 是 ℓ_∞^*的子空间。若 $W = \{0\}$，结论显然成立，因此我们假设 $W \neq \{0\}$。对于每个

$\mu \in \Delta$，令 $\pi_\mu\colon\ Z \to L_1(\mu)$ 为典范投影。由于 W 不包含与 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 同构的子空间，对于子空间 $(S \circ R^*)(W) \subseteq Z$也同样成立，因此集合

$$\Delta_0 := \big\{\mu \in \Delta : \pi_\mu\big((S \circ R^*)(W)\big) \neq \{0\}\big\}$$

非空且基数为 $|\Delta_0| < \mathfrak{c}$ （由引理 3.17 可知）。

令 $T\colon \ell_\infty \to \ell_\infty(\Delta_0)$ 为如下定义的算子

$$T(x)(\mu) := \begin{cases} \int_{\beta\mathbb{N}} R^{-1}(x)\, d\mu & \text{if } \mu \neq \mu_0 \\ 0 & \text{if } \mu = \mu_0 \end{cases}$$

对每个 $\mu \in \Delta_0$ 以及每个 $x \in \ell_\infty$均成立。每个 $\mu \in \Delta \setminus \{\mu_0\}$ 相对于$\widehat{\ }\,\mu_0$ 都是奇异的，因此，对每个有限集 $A \subseteq \mathbb{N}$， $\mu(A) = 0$。注意到$c_0 =$ 张成空间$(\{\chi_A :$ $A \subseteq \overline{\mathbb{N} \text{ 有限}}\}) \subseteq \ell_\infty$，我们推得，对每个 $x \in c_0$， $T(x) = 0$。由于 $|\Delta_0| < \mathfrak{c}$，我们可以应用定理 3.18，得到一个无限集 $A \subseteq \mathbb{N}$，使得 T 在其上消失

$$Z_A := \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty : x_n = 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N} \setminus A\big\},$$

也就是说，

$$\int_{\beta\mathbb{N}} R^{-1}(x)\, d\mu = 0 \quad \text{for every } x \in Z_A \text{ and for every } \mu \in \Delta_0 \setminus \{\mu_0\}. \tag{3.5}$$

定义一个有限可加映射 $\nu\colon\ \mathcal{P}(A) \to \ell_\infty$，其定义为 $\nu(B) := \chi_B$ 对所有 $B \subseteq A$均成立。注意， ν 不是可列可加的，因为 A 是无限集，且对于每个 $n \in A$，都有 $\|\nu(\{n\})\| = 1$。为完成证明，我们将通过验证对于任意大的 $\varphi \in W$，都有 $\varphi \circ \nu \in \mathsf{ca}(\mathcal{P}(A))$，来证明 W 不满足 OT 性质。首先注意到

$$R^*(\varphi) \overset{(3.4)}{=} \sum_{\mu\in\Delta} \frac{dR^*(\varphi)}{d\mu}\, d\mu = \sum_{\mu\in\Delta_0} \frac{dR^*(\varphi)}{d\mu}\, d\mu,$$

该级数在 $C(\beta\mathbb{N})^*$ 中绝对收敛。此外，对于每个 $B \subseteq A$，我们有$\widehat{\ }\,\chi_B \in Z_A$，因此由 (3.5) 得到，对于所有 $\mu \in \Delta_0 \setminus \{\mu_0\}$，都有 $\mu(B) = 0$。于是，

$$(\varphi \circ \nu)(B) = R^*(\varphi)(\chi_{\widehat{B}}) = \sum_{\mu\in\Delta_0} \int_{\widehat{B}} \frac{dR^*(\varphi)}{d\mu}\, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu_0 \notin \Delta_0 \\ \int_{\widehat{B}} \frac{dR^*(\varphi)}{d\mu_0}\, d\mu_0 & \text{if } \mu_0 \in \Delta_0. \end{cases}$$

因此，若 $\mu_0 \notin \Delta_0$，则 $\varphi \circ \nu$ 恒等于零，因而可列可加。若$\mu_0 \in \Delta_0$，则

$$(\varphi \circ \nu)(B) = \int_{\widehat{B}} \frac{dR^*(\varphi)}{d\mu_0}\, d\mu_0 \overset{(3.3)}{=} \sum_{n\in B} \frac{dR^*(\varphi)}{d\mu_0}(n) 2^{-n}$$

对于每个 $B \subseteq A$，其中级数 $\sum_{n\in A} \frac{dR^*(\varphi)}{d\mu_0}(n)2^{-n}$ 绝对收敛，因此 $\varphi \circ \nu$ 可列可加。证明完成。□

一般而言，定理 3.15 的逆命题不成立。下面给出一个例子：

例 3.19. 令 $2\mathbb{N} - 1$ （分别为 $2\mathbb{N}$）表示所有奇数（分别为偶数）自然数组成的集合。采用定理 3.18 中的记号，令 $W \subseteq \ell_\infty^*$ 为 $(Z_{2\mathbb{N}-1})^\perp + \ell_1$ 的范数闭包。于是：

(i) W 是全的，并且包含一个与 $\ell_1(2^{\mathfrak{c}})$ 等距的子空间；以及

(ii) W 不具有 OT 性质。

事实上， W 是全的，因为它包含 ℓ_1。令 $P\colon\ \ell_\infty \to Z_{2\mathbb{N}}$ 为典范投影，并定义 $\Phi\colon\ Z_{2\mathbb{N}}^* \to (Z_{2\mathbb{N}-1})^\perp$，使得对所有 $\xi \in Z_{2\mathbb{N}}^*$， $\Phi(\xi)\colon = \xi \circ P$。则 Φ 是一个等距嵌入，因此 W 包含一个与 $Z_{2\mathbb{N}}^*$等距的子空间。由于 $Z_{2\mathbb{N}}$ 与 $C(\beta\mathbb{N})$等距，其对偶空间包含一个与 $\ell_1(|\beta\mathbb{N}|)$等距的子空间， W也同样如此。现在注意到 $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$ （例如，参见 [33, 19.13(d)]），即可得到 (i)。为了证明 W 不具有 OT 性质，定义 $\nu\colon\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell_\infty$，使得对所有 $A \subseteq \mathbb{N}$， $\nu(A)\colon = \chi_{A\cap(2\mathbb{N}-1)} = Q(\chi_A)$，其中$Q\colon\ \ell_\infty \to Z_{2\mathbb{N}-1}$ 为典范投影。显然， ν 不是可列可加的。不过，我们断言，对每个 $\varphi \in W$，都有 $\varphi\circ\nu \in$ 可列可加测度$(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$。事实上，根据 Vitali-Hahn-Saks-Nikod´ym 定理（例如，参见 [10, 第 24 页，推论 10]），只需在 $\varphi \in (Z_{2\mathbb{N}-1})^\perp \cup \{e_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 的情形下验证，其中 $\{e_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 是 ℓ_1的典范基。一方面，当 $\varphi \in (Z_{2\mathbb{N}-1})^\perp$时，我们有 $\varphi\circ\nu = 0$ （因此它是可列可加的）。另一方面，对每个 $n \in \mathbb{N}$，复合映射 $e_n\circ\nu$是可列可加的，因为对所有 $A \subseteq \mathbb{N}$，$(e_n \circ \nu)(A) = \chi_{A\cap(2\mathbb{N}-1)}(n)$。这就证明了该断言，因此 W 不具有 OT 性质。

推论 3.20. 设 X 是一个巴拿赫空间，且其中存在一个具有 OT 性质的子集，但不包含与 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 的典范基等价的集合。那么 X 不包含同构于 ℓ_∞ 的子空间。

证明. 设 $W \subseteq X^*$ 是一个具有 OT 性质的集合，且 W 不包含与 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 的典范基等价的集合。任取子空间 $Y \subseteq X$，集合 $W|_Y := \{x^*|_Y\colon\ x^* \in W\} \subseteq Y^*$ 具有 OT 性质，且不包含与 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 的典范基等价的集合。由定理 3.15， Y 不可能同构于 ℓ_∞。□

注 3.21. 前一个推论的逆命题通常不成立，空间 $X = c_0(\mathfrak{c})$ 就是一个例子。事实上，$c_0(\mathfrak{c})$ 不含同构于 ℓ_∞ 的子空间（因为 $c_0(\mathfrak{c})$ 的任意可分子空间都同构于 c_0 的一个子空间，而任意可分巴拿赫空间都同构于 ℓ_∞ 的一个子空间）。空间 $c_0(\mathfrak{c})$ 是弱紧生成的，因此其对偶空间 $c_0(\mathfrak{c})^* = \ell_1(\mathfrak{c})$ 满足 $\operatorname{dens}(\ell_1(\mathfrak{c}), w^*) = \operatorname{dens}(c_0(\mathfrak{c}), \|\cdot\|) = \mathfrak{c}$ （例如参见 [12, 定理 13.3]）。取一个全体集 $W \subseteq \ell_1(\mathfrak{c})$。由 Diestel-Faires 定理 1.1(ii)， W 具有 OT 性质。由于子空间 $W_0 := \operatorname{span}(W)^{\|\cdot\|}$ 在 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 中是 w^*-稠密的，我们有 $\operatorname{dens}(W_0, \|\cdot\|) = \mathfrak{c}$。现在，K¨othe 的一个经典结果（例如参见 [29, 第 29] 页）保证 W_0 包含一个同构于 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 的子空间。最后，应用定理 3.16 可得 W 包含一个与 $\ell_1(\mathfrak{c})$ 的典范基等价的集合。

推论 3.22. 设 X 是一个巴拿赫空间。以下陈述等价：

(i) X 不包含与 ℓ_∞ 同构的子空间，且 X^* 是 w^*-可分的。(ii) X^* 中存在一个具有 OT 性质的可数子集。(iii) X^* 中存在一个具有 OT 性质的范数可分子集。

证明。(i)⇒(ii) 由 Diestel-Faires 定理 1.1(ii) 得出；请注意， X^* 的 w^*-可分性等价于存在一个可数的全

X^* 的子集。(ii)⇒(i) 是推论 3.20 和命题 3.1 的推论。(ii)⇔(iii) 由命题 3.3 得出。□

4. L_1 SPACES OF VECTOR MEASURES WITH SEPARABLE RANGE

设 Σ 为一个 σ-代数，X 为一个巴拿赫空间，且 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$。由定理 3.10 和 3.11 可知，集合

$$\mathcal{R}(\nu) = \{\nu(A) : A \in \Sigma\} \subseteq X$$

（ν的值域）在 $X = \ell_\infty$ 时是可分的，因此在这种情况下，ν 可视为某个可分子空间 $Y \subseteq \ell_\infty$上的 $\mathrm{ca}(\Sigma, Y)$ 中的一个元素。反过来，如果 X是可分的，那么它与 ℓ_∞ 的一个子空间等距，因此 ν 可视为 $\mathrm{ca}(\Sigma, \ell_\infty)$ 中的一个元素。由此可得：

命题 4.1. 设 E 是有限测度空间 $(\Omega\ \Sigma, \mu)$ 上的巴拿赫函数空间。以下陈述等价：

(i) 存在 $\nu_0 \in \mathrm{ca}(\Sigma, \ell_\infty)$，使得 E 与 $L_1(\nu_0)$ 格同构。(ii) 存在一个可分巴拿赫空间 X 和 $\nu_1 \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$，使得 E 与 $L_1(\nu_1)$ 格同构。

此外，若 E 序连续且可分，则两个结论均成立。

一般而言，$\mathcal{R}(\nu)$ 的可分性并不意味着空间 $L_1(\nu)$ 可分；对于任意不可数集 I，$L_1(\lambda_I)$ 上的通常测度所对应的空间便是一个例子（见第 2.4 小节）。

下面的例子给出了一个向量测度 ν，使得 $\mathcal{R}(\nu)$ 可分，$\mathrm{span}(\mathcal{R}(\nu))$ 是无限维的，而 $L_1(\nu)$ 既不可分，也不同构于任何 AL-空间。

例 4.2. 设 G 是任意一个非度量化紧阿贝尔群（例如，对于任意不可数集 I，其乘积 $\{0,1\}^I$ 或 $\mathbb{T}^I$）。用 μ 表示 σ-代数 $\mathcal{B}(G)$ 上的哈尔概率测度。取定 $g \in L_1(\mu)$，并定义 $\nu\colon \mathcal{B}(G) \to L_\infty(\mu)$，使得对所有 $A \in \mathcal{B}(G)$，$\nu(A) := \chi_A * g$ (卷积)。那么：

(i) $\nu \in$ 可列可加测度$(\mathcal{B}(G)\ L_\infty(\mu))$; (ii) $\mathcal{R}(\nu)$ 是相对范数紧的（因此可分）；(iii) $L_1(\nu)$ 不可分；并且 (iv) 如果此外 $g \notin L_\infty(\mu)$，那么 $\mathcal{R}(\nu)$ 的张成空间是无限维的，且 $L_1(\nu)$ 不与任何 AL-空间格同构。

事实上，(i) 和 (iii) 分别由 [24, 定理 1] 的 (I) 和 (II)(iv) 推出（其中 ν 记作 $m_g^{(\infty)}$）。命题 (ii) 已在 [24, 备注 2] 中指出。对于命题 (iv)，设 $g \notin L_\infty(\mu)$。那么，根据 [24, 定理 2], ，ν 具有无限变差，因此，根据 [6, 命题 2], $L_1(\nu)$ 与任何 AL-空间都不同构。为证明 $\mathrm{span}(\mathcal{R}(\nu))$ 是无限维的，反设 $\mathrm{span}(\mathcal{R}(\nu))$ 是有限维的。于是，积分算子 $I_\nu\colon L_1(\nu) \to L_\infty(\mu)$ 是绝对 1-求和的，因为其值域包含于 $\mathrm{span}(\mathcal{R}(\nu))$ 中。因此，I_ν 对 $L_\infty(\mu)$ 的限制，即卷积算子

$C_g^{(\infty)}$: $L_\infty(\mu) \to L_\infty(\mu)$（见 [24, 定理 1(II)(ii)]），也是绝对 1-求和的。这与以下事实矛盾： $g \notin L_\infty(\mu)$, [24, 定理 2]。

本节旨在证明以下定理:

定理 4.3. 设 Σ 是一个 σ-代数， X 是一个可分巴拿赫空间，且 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$。若 $L_1(\nu)^*$ 是序连续的，则 $L_1(\nu)$ 是可分的。

我们将通过一种更一般的方法推导出定理 4.3，该方法涉及 [30] 中引入的正范数化集这一概念:

定义 4.4. 设 E 是一个巴拿赫格。若存在常数 $c > 0$ 使得.....，则称集合 $B \subseteq B_{E^*} \cap (E^*)^+$ 是正范数化的。

$$\|x\|_E \le c \sup_{\varphi \in B} \varphi(|x|) \quad \textit{for every } x \in E.$$

引理 4.5. 设 $(\Omega\ \Sigma)$ 是一个可测空间， X 是一个可分巴拿赫空间，且 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$。则 $L_1(\nu)$ 存在一个可数正范数化集。

证明。设 μ 为 ν 的 Rybakov控制测度，使得 $L_1(\nu)$ 是定义在 $(\{\Omega\}\ \Sigma, \mu)$ 上的巴拿赫函数空间。由于 X 可分， B_{X^*} 是 w^*-可分的，因此我们可以在 B_{X^*} 中取一个 w^*-稠密序列 $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，测度 $|x_n^* \circ \nu|$ 都是 μ-连续的，我们考虑其 Radon-Nikod´ym 导数 $g_n := \frac{d|x_n^* \circ \nu|}{d\mu} \in (L_1(\nu))'$ 以及相应的泛函 $\varphi_{g_n} \in B_{L_1(\nu)^*} \cap (L_1(\nu)^*)^+$ （见第 2.2 和 2.3 小节）。由于 $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 B_{X^*} 中是 w^*-稠密的，对于每个 $f \in L_1(\nu)$，我们可以应用[27, 引理 2.2] 得到

$$\|f\|_{L_1(\nu)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f|\, d|x_n^* \circ \nu| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{g_n}(|f|),$$

也就是说， $\{\varphi_{g_n} : n \in \mathbb{N}\}$ 是正范数化的。 □

现在显然，定理 4.3 可由以下结果直接推出:

定理 4.6。设 E 是一个巴拿赫格，且 E 和 E^* 都是序连续的。若 E 拥有一个可数正范数化集，则 E 是可分的。

定理 4.6 的证明需要一些准备工作。下面的命题 4.10 给出了 E 是巴拿赫函数空间时的一个特殊情形，并将用于证明定理 4.6。

引理 4.7。设 E 是定义在有限测度空间 $(\Omega\ \Sigma, \mu)$ 上的巴拿赫函数空间。

(i) 若 E 是可分的，则 $L_1(\mu)$是可分的。(ii) 若 $L_1(\mu)$是可分的且 E 是序连续的，则 E 是可分的。

证明。(i) 如果 E 可分，那么 $S := \mathrm{span}(\{\chi_A : A \in \Sigma\}) \subseteq E$也可分。由于恒等映射 ι: $E \to L_1(\mu)$ 是一个算子，集合 $\iota(S)$ 可分。由于 $\iota(S)$ 在 $L_1(\mu)$ 中稠密，我们得出 $L_1(\mu)$可分。

(ii) 由于 E 是序连续的， S 在 E 中稠密（例如参见备注 2.6]）。因此，只需验证 $\{\chi_A\colon A\in\Sigma\}$ 作为 E的子集是可分的。现在，由于$L_1(\mu)$可分，存在一个序列$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 Σ ，使得

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n\triangle A)=0\quad\text{for every } A\in\Sigma.$$

因此， E 的序连续性意味着集合 $\{\chi_{A_n}\colon n\in\mathbb{N}\}$ 在 $\{\chi_A\colon A\in\Sigma\}$ 中作为 E 的子集稠密（例如，参见 [25, 引理 2.37(ii)]）。□

给定一个有限测度空间 (Ω,Σ,μ) 和 $A\in\Sigma\setminus\mathcal{N}(\mu)$，定义

$$\Sigma_A:=\{B\in\Sigma\colon B\subseteq A\}\quad\text{and}\quad\mu_A(B):=\mu(A)^{-1}\mu(B)\quad\text{for every } B\in\Sigma_A,$$

使得 μ_A 是可测空间 (A,Σ_A) 上的概率测度。

引理 4.8. 设 (Ω,Σ,μ) 是一个有限测度空间，且 $L_1(\mu)$ 不可分，并设 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $L_1(\mu)$ 中的一个序列。那么存在 $A\in\Sigma\setminus\mathcal{N}(\mu)$ 以及 $\Sigma_A\setminus\mathcal{N}(\mu)$ 的一个两两不交集序列 $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$，使得

$$\int_A f g_n\,d\mu_A=\left(\int_A f\,d\mu_A\right)\left(\int_A g_n\,d\mu_A\right)$$

对于每个 $f\in\operatorname{span}(\{\chi_{A_m}\colon m\in\mathbb{N}\})$ 以及每个 $n\in\mathbb{N}$。

证明。由于 $L_1(\mu)$ 不可分，Maharam 定理（参见例如 [14, Section 3]或 [20, § 14]）保证存在 $A\in\Sigma\setminus\mathcal{N}(\mu)$，使得 μ_A 的测度代数与某个不可数集 I 上通常测度 λ_I 的测度代数同构。因此，存在格等距同构 $\Phi\colon L_1(\mu_A)\to L_1(\lambda_I)$，满足

$$\int_A v\,d\mu_A=\int_{\{0,1\}^I}\Phi(v)\,d\lambda_I\quad\text{for every } v\in L_1(\mu_A)\tag{4.1}$$

and

$$\Phi(uv)=\Phi(u)\Phi(v)\quad\text{whenever } u\in\operatorname{span}(\{\chi_B:B\in\Sigma_A\})\text{ and } v\in L_1(\mu_A)\tag{4.2}$$

（参见第 2.5 小节）。

我们记

$$\rho_{J'J}:\{0,1\}^{J'}\to\{0,1\}^J$$

为任意 $J\subseteq J'\subseteq I$ 的典范投影。

对于每个 $n\in\mathbb{N}$ ，我们有 $\Phi(g_n|_A)\in L_1(\lambda_I)$，因此存在可数集$I_n\subseteq I$以及 $h_n\in L_1(\lambda_{I_n})$，使得 $\Phi(g_n|_A)=h_n\circ\rho_{II_n}$（参见例如 [15, 254Q]）。那么集合 $I':=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$ 是可数的，并且对于每个 $n\in\mathbb{N}$ ，我们有

$$\Phi(g_n|_A)=\widetilde{h}_n\circ\rho_{II'},\tag{4.3}$$

其中 $h_n:=h_n\circ\rho_{I'I_n}\in L_1(\lambda_{I'})$。注意，集合 $J:=I\setminus I'$ 不可数，尤其是无限的。因此，我们可以找到一个由 $\Sigma_J\setminus\mathcal{N}(\lambda_J)$ 中两两不交的元素组成的序列 $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$。定义

$$C_m:=B_m\times\{0,1\}^{I'}\in\Sigma_I\quad\text{for all } m\in\mathbb{N},$$

使得这些 C_m 两两不交，且 $\lambda_I(C_m)=\lambda_J(B_m)$。

断言。对于每个 $h \in$ 张成空间$(\{\chi_{C_m} : m \in \mathbb{N}\})$ 以及每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\int_{\{0,1\}^I} h\,\Phi(g_n|_A)\,d\lambda_I = \left(\int_{\{0,1\}^I} h\,d\lambda_I\right)\left(\int_{\{0,1\}^I} \Phi(g_n|_A)\,d\lambda_I\right). \tag{4.4}$$

~ ~事实上，注意到对于某个 $h \in$，$h = h \circ \rho_{IJ}$张成空间$(\{\chi_{B_m} : m \in \mathbb{N}\})$，于是由富比尼定理可得

$$\begin{aligned}\int_{\{0,1\}^I} h\,\Phi(g_n|_A)\,d\lambda_I &\overset{(4.3)}{=} \int_{\{0,1\}^I} (\widetilde{h} \circ \rho_{IJ})\,(\widetilde{h}_n \circ \rho_{II'})\,d\lambda_I \\ &= \left(\int_{\{0,1\}^J} \widetilde{h}\,d\lambda_J\right)\left(\int_{\{0,1\}^{I'}} \widetilde{h}_n\,d\lambda_{I'}\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

由于函数 $\rho_{II'}$ 是 Σ_I-到-$\Sigma_{I'}$可测的，并且对于每个 $A \in \Sigma_{I'}$，$\lambda_{I'}(A) = \lambda_I(\rho_{II'}^{-1}(A))$（例如参见 [15, 254O]），我们有

$$\int_{\{0,1\}^I} \Phi(g_n|_A)\,d\lambda_I \overset{(4.3)}{=} \int_{\{0,1\}^I} \widetilde{h}_n \circ \rho_{II'}\,d\lambda_I = \int_{\{0,1\}^{I'}} \widetilde{h}_n\,d\lambda_{I'}. \tag{4.6}$$

类似地，或通过直接计算，我们也有

$$\int_{\{0,1\}^I} h\,d\lambda_I = \int_{\{0,1\}^J} \widetilde{h}\,d\lambda_J. \tag{4.7}$$

将 (4.5)、(4.6) 和 (4.7) 结合起来，即得 (4.4)，如所声称。

最后，设 $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是 Σ_A 中两两不交的元素序列，使得对于所有 $m \in \mathbb{N}$，$\Phi(\chi_{A_m}|_A) = \chi_{C_m}$。那么对于所有 $m \in \mathbb{N}$，$\mu(A_m) = \mu(A)\lambda_I(C_m) > 0$。给定任意 $f \in$ 张成空间$(\{\chi_{A_m} : m \in \mathbb{N}\})$，我们有 $\Phi(f|_A) \in$ 张成空间$(\{\chi_{C_m} : m \in \mathbb{N}\})$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_A f g_n\,d\mu_A \overset{(4.1)}{=} \int_{\{0,1\}^I} \Phi(f|_A\, g_n|_A)\,d\lambda_I \overset{(4.2)}{=} \int_{\{0,1\}^I} \Phi(f|_A)\Phi(g_n|_A)\,d\lambda_I \\ &\overset{(4.4)}{=} \left(\int_{\{0,1\}^I} \Phi(f|_A)\,d\lambda_I\right)\left(\int_{\{0,1\}^I} \Phi(g_n|_A)\,d\lambda_I\right) \overset{(4.1)}{=} \left(\int_A f\,d\mu_A\right)\left(\int_A g_n\,d\mu_A\right).\end{aligned}$$

证明结束。 □

我们将使用关于具有序连续对偶的巴拿赫格的一个众所周知的刻画（例如，参见 [2, 定理 4.69]）：

定理 4.9. 设 E 为一个巴拿赫格。以下命题等价：

(i) E^* 是序连续的。(ii) E^+ 中不存在与 ℓ_1的典范基等价的不交序列。

(iii) E 不包含与 ℓ_1格同构的子格。(iv) E^* 不包含与 ℓ_∞同构的子空间。

命题 4.10. 设 E 是有限测度空间 $(\Omega\ \Sigma, \mu)$ 上的巴拿赫函数空间，且 E 和 E^* 都是序连续的。若 E 有一个可数正范数化集，则 E 是可分的。

证明. 固定 $B_{E^*} \cap (E^*)^+$ 中的一个序列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和一个常数 $c > 0$，使得

$$\|f\|_E \leq c \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(|f|) \quad \text{for every } f \in E. \tag{4.8}$$

由于 E 是序连续的，我们可以将 E^* 与 E' 等同，因此对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\phi_n = \varphi_{g_n}$，其中某个 $g_n \in E'$（见第 2.2 小节）。于是，(4.8) 可写为

$$\|f\|_E \leq c \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f| g_n \, d\mu \quad \text{for every } f \in E. \tag{4.9}$$

反设 E 不可分。由引理 4.7(ii)，空间 $L_1(\mu)$ 不可分。于是，我们可以对 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$（作为 $L_1(\mu)$ 中的一个序列）应用引理 4.8，从而找到 $A \in \Sigma \setminus \mathcal{N}(\mu)$ 以及由 $\Sigma_A \setminus \mathcal{N}(\mu)$ 中两两不交集构成的序列 $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$，使得

$$\int_A f g_n \, d\mu_A = \left(\int_A f \, d\mu_A\right)\left(\int_A g_n \, d\mu_A\right) \tag{4.10}$$

对每个 $f \in \operatorname{span}(\{\chi_{A_m} : m \in \mathbb{N}\})$ 以及每个 $n \in \mathbb{N}$,

由此可知，对于每个 $f \in \operatorname{span}(\{\chi_{A_m} : m \in \mathbb{N}\})$，我们有

$$\begin{aligned}
(c\mu(A))^{-1}\|f\|_E &\overset{(4.9)}{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f| g_n \, d\mu_A \\
&\overset{(4.10)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_A |f| \, d\mu_A\right)\left(\int_A g_n \, d\mu_A\right) \\
&\leq \mu(A)^{-2} \, \|\chi_A\|_E \, \|f\|_{L_1(\mu)} \\
&\leq \mu(A)^{-2} \|\chi_A\|_E \, \|\iota\| \, \|f\|_E,
\end{aligned}$$

其中 $\iota\colon E \to L_1(\mu)$ 是恒等算子。

因此，存在常数 $\alpha, \beta > 0$，使得

$$\alpha\|f\|_{L_1(\mu)} \leq \|f\|_E \leq \beta\|f\|_{L_1(\mu)} \quad \text{for every } f \in \operatorname{span}(\{\chi_{A_m} : m \in \mathbb{N}\}). \tag{4.11}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$，定义 $f_m := \mu(A_m)^{-1}\chi_{A_m} \in E$。利用 (4.11) 可以证明，$E^+$ 中的不交序列 $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 等价于 ℓ_1 的典范基。这与 E^* 的序列连续性矛盾（见定理 4.9）。
□

回忆一下，巴拿赫空间 X 的无条件 Schauder 分解是指一族子空间 $\{X_i : i \in I\}$，它们是 X 的子空间，并且每个 $x \in X$ 都可以唯一地写成 $x = \sum_{i\in I} x_i$，其中对所有 $i \in I$，$x_i \in X_i$，且该级数无条件收敛。在这种情况下，对每个 $i \in I$，存在一个从 X 到 X_i 的投影 P_i，使得对所有 $x \in X$，$x = \sum_{i\in I} P_i(x)$。

引理 4.11. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\{X_i : i \in I\}$ 是 X 的无条件 Schauder 分解。对于每个 $i \in I$，设 P_i 是从 X 到 X_i 的相应投影。如果 X^* 不包含与 ℓ_∞ 同构的子空间，那么对于每个 $x^* \in X^*$，集合 $\{i \in I : x^* \circ P_i \neq 0\}$ 是可数的。

证明。对于每个 $J \subseteq I$，令 Q_J 为从 X 到 $\operatorname{span}(\bigcup_{i\in J} X_i)$ 的投影，其定义为：对于所有 $x \in X$，$Q_J(x) := \sum_{i\in J} P_i(x)$。

固定 $x^* \in X^*$，并定义 $\nu\colon \mathcal{P}(I) \to X^*$，如下：

$$\nu(J) := x^* \circ Q_J \quad \text{for all } J \subseteq I.$$

我们以典范方式将 X 视为 X^{**} 的一个子空间。注意，对每个 $x \in X$，$x \circ \nu \in \mathrm{ca}(\mathcal{P}(I))$，因为实数项级数 $\sum_{i\in I} x^*(P_i(x))$ 绝对收敛，并且

$$(x \circ \nu)(J) = x^*(Q_J(x)) = \sum_{i\in J} x^*(P_i(x)) \quad \text{for all } J \subseteq I.$$

由于 X^* 不包含任何与 ℓ_∞ 同构的子空间，且 X 是 X^{**} 的全子集，我们可以应用 Diestel-Faires 定理 1.1(ii)，得出 $\nu \in \mathrm{ca}(\mathcal{P}(I)\ X^*)$。

我们断言，对每个 $\varepsilon > 0$，集合 $I_\varepsilon := \{i \in I\colon \|x^* \circ P_i\| \geq \varepsilon\}$ 都是有限的。事实上，若非如此，则存在一个由 I_ε 中互不相同的元素组成的序列 $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$。然而，ν 的可数可加性意味着级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(\{i_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^* \circ P_{i_n}$ 在 X^* 中无条件收敛，这不可能，因为对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\|x^* \circ P_{i_n}\| \geq \varepsilon$。因此，集合 $\{i \in I\colon x^* \circ P_i \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{1/n}$ 是可数的。□

引理 4.12. 设 E 是一个巴拿赫格，且存在一个可数正范数化集。那么 E 存在严格正泛函，即存在 $\varphi \in (E^*)^+$，使得$\varphi(x) > 0$ 对任意 $x \in E^+ \setminus \{0\}$ 都成立。

证明. 取一个序列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它属于 $B_{E^*} \cap (E^*)^+$，并取常数 $c > 0$，使得 $\|x\|_E \leq c$ 对每个 $x \in E$，都有 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(|x|)$。现在，显然泛函$\varphi\colon = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\varphi_n$ 满足所需性质。□

我们已收集到证明本节主要结果所需的全部工具：

定理 4.6 的证明. 由于 E 是序连续的，它存在一个无条件 Schauder 分解 $\{E_i\colon i \in I\}$，该分解由两两不交的带组成，且每个带都有一个弱序单位（例如参见 [21, 命题 1.a.9]）。对每个 $i \in I$，令 P_i 为从 E 到 E_i 的关联投影。

固定 $i \in I$。由于 E_i 序连续且具有弱序单位，因此它与某个有限测度空间上的巴拿赫函数空间格等距同构（例如参见 [21,命题 1.b.14]）。由于 E^* 序连续，E_i^* 也具有同样的性质（请注意定理 4.9 中等价关系 (i)⇔(iii)）。此外，E_i 有一个可数正范数化集（考虑 E的可数正范数化集在 E_i 上的限制）。于是，由命题 4.10 可知 E_i 可分。

固定 $\varphi \in (E^*)^+$，使得当 $x \in E^+ \setminus \{0\}$ 时，$\varphi(x) > 0$（见引理 4.12）。对每个 $i \in I$，我们有 $E_i \neq \{0\}$，因此 $\varphi \circ P_i \neq 0$。由于 E^* 序连续，它不含与 ℓ_∞ 同构的子空间（见定理 4.9），于是引理 4.11 推出 I 是可数的。由每个 E_i 的可分性可知，E 可分。□

例 4.13. 若去掉 E的序连续性，定理 4.6 的结论可能不成立。例如，不可分巴拿赫格 ℓ_∞ 有一个可数正范数化集（坐标泛函构成一个赋范集），而且 ℓ_∞^* 是一个 AL-空间，因此它是序连续的（例如，参见 [2, 第 194 页和定理 4.23]）。

任何自反巴拿赫格都是序连续的（例如，参见 [2, 定理 4.9]），因此我们得到：

推论 4.14. 设 E 是一个自反巴拿赫格。若 E 具有一个可数正范数化集，则 E 可分。

由前一个推论和引理 4.5 可得：

推论 4.15. 设 Σ 是一个 σ-代数，X 是一个可分巴拿赫空间，且 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, X)$。若 $L_1(\nu)$ 是自反的，则 $L_1(\nu)$ 可分。

例 4.16. 设 $(\Omega\ \Sigma, \mu)$ 是一个有限测度空间，使得 $L_1(\mu)$ 不可分，并设 $1 < p < \infty$。那么

(i) $L_p(\mu)$ 是定义在 $(\Omega\ \Sigma, \mu)$ 上的不可分自反巴拿赫函数空间。(ii) $L_p(\mu) = L_1(\nu)$，其中 $\nu \in \mathrm{ca}(\Sigma, L_p(\mu))$ 定义为 $\nu(A) := \chi_A$ 对所有$A \in \Sigma$。(iii) 若 X 是可分巴拿赫空间，Σ_0 是一个 σ-代数，且 $\nu_0 \in \mathrm{ca}(\Sigma_0, X)$，那么即使作为巴拿赫空间，$L_p(\mu)$ 也不同构于 $L_1(\nu_0)$。要证明这一点，应用推论 4.15 和上面的 (i) 即可。

致谢。感谢 A. Avil´es 对定理 3.15 提出的宝贵意见。J. Rodr´íguez 的研究部分由以下资助支持：MTM2017-86182-P（由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和“欧洲区域发展基金：建设欧洲的一种方式”资助）以及 21955/PI/22（由 Fundaci´ón S´éneca - 穆尔西亚自治区 ACyT 资助）。E.A. S´ánchez-P´érez 的研究部分由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 PID2020-112759GB-I00 支持。

References

[1] F. Albiac 和 N. J. Kalton，《*Topics in Banach space theory*》，数学研究生教材，第 233 卷，施普林格，纽约，2006 年。[2] C. D. Aliprantis 和 O. Burkinshaw，《*Positive operators*》，1985 年原版的重印本，施普林格，多德雷赫特，2006 年。[3] J. M. Ball 和 F. Murat，《*Remarks on Chacon's biting lemma*》，美国数学会会刊 107 (1989)，第 3 期，655–663。[4] R. G. Bartle、N. Dunford 和 J. Schwartz，《*Weak compactness and vector measures*》，加拿大数学杂志 7 (1955)，289–305。[5] G. P. Curbera，《*Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices*》，数学年刊 293 (1992)，第 2 期，317–330。[6] G. P. Curbera，《*When L^1 of a vector measure is an AL-space*》，太平洋数学杂志 162 (1994)，第 2 期，287–303。[7] J. Diestel，《*Sequences and series in Banach spaces*》，数学研究生教材，第 92 卷，施普林格出版社，纽约，1984 年。[8] J. Diestel，《*Uniform integrability: an introduction*》，的里雅斯特大学数学研究所报告 23 (1991)，41–80。[9] J. Diestel 和 B. Faires，《*On vector measures*》，美国数学会汇刊 198 (1974)，253–271。[10] J. Diestel 和 J. J. Uhl, Jr.，《*Vector measures*》，数学调查丛书，第 15 号，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1977 年。[11] P. G. Dodds、B. de Pagter 和 W. Ricker，《*Reflexivity and order properties of scalar-type spectral operators in locally convex spaces*》，美国数学会汇刊 293 (1986)，第 1 期，355–380。

[12] M. Fabian、P. Habala、P. H´ajek、V. Montesinos 和 V. Zizler，《*Banach space theory. The basisfor linear and nonlinear analysis*》，CMS 数学丛书／SMC 数学著作，施普林格，纽约，2011 年。[13] A. Fern´andez、F. Mayoral、F. Naranjo 和 J. Rodr´ıguez，《*Norming sets and integration withrespect to vector measures*》，Indag. Math. (N.S.) 19 (2008)，第 2 期，203–215。[14] D. H. Fremlin，《*Measure algebras*》，《布尔代数手册》第 3 卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1989 年，第 877–980 页。[15] D. H. Fremlin，《*Measure theory. Vol. 2. Broad foundations*》，Torres Fremlin，科尔切斯特，2003 年。[16] G. Godefroy，《*James boundaries and Martin's axiom*》，Serdica Math. J. 42 (2016)，第 1 期，59–64。[17] A. S. Granero 和 J. M. Hern´andez，《*On James boundaries in dual Banach spaces*》，J. Funct. Anal. 263 (2012)，第 2 期，429–447。[18] T. Jech，《*Set theory*》，第三千年版，修订并扩充，施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林，2003 年。[19] N. J. Kalton，《*Spaces of compact operators*》，数学年刊 208 (1974)，267–278。[20] H. E. Lacey，《*The isometric theory of classical Banach spaces*》，数学科学基础及其边缘领域，第 208 卷，施普林格出版社，纽约，1974 年。[21] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，《*Classical Banach spaces II. Function spaces*》，数学及其边缘领域成果 [数学及相关领域成果]，第 97 卷，施普林格出版社，柏林，1979 年。[22] O. Nygaard 和 J. Rodr´ıguez，《*Isometric factorization of vector measures and applicationsto spaces of integrable functions*》，J. Math. Anal. Appl. 508 (2022)，第 1 期，论文编号 125857，共 16 页。[23] S. Okada 和 W. J. Ricker，《*Nonweak compactness of the integration map for vector measures*》，J. Austral. Math. Soc. Ser. A 54 (1993)，第 3 期，287–303。[24] S. Okada 和 W. J. Ricker，《*Ideal properties and integral extension of convolution operatorson $L^\infty(G)$*》，Note Mat. 31 (2011)，第 1 期，149–172。[25] S. Okada、W. J. Ricker 和 E. A. S´anchez P´erez，《*Optimal domain and integral extension ofoperators. Acting in function spaces*》，算子理论：进展与应用，第 180 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2008 年。[26] J. Rodr´ıguez，《*Factorization of vector measures and their integration operators*》，Colloq. Math. 144 (2016)，第 1 期，115–125。[27] J. Rodr´ıguez，《*On non-separable L^1-spaces of a vector measure*》，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 111 (2017)，第 4 期，1039–1050。[28] H. P. Rosenthal，《*On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measure μ*》，Acta Math. 124 (1970)，205–248。[29] H. P. Rosenthal，《*On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banachspace theory*》，Studia Math. 37 (1970)，13–36。[30] E. A. S´anchez-P´erez 和 P. Tradacete，《*Positively norming sets in Banach function spaces*》，Q. J. Math. 65 (2014)，第 3 期，1049–1068。[31] M. Talagrand，《*Sur les espaces de Banach contenant $l^1(\tau)$*》，Israel J. Math. 40 (1981)，第 3–4 期，324–330 (1982)。[32] G. E. F. Thomas，《*L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle*》，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20 (1970)，第 2 期，55–191。[33] S. Willard，《*General topology*》，Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1970 年。

112 Marcorni Crescent、 Kambah、 ACT 2902、
Australia*Email address*: susbobby@grapevine.com.au

Dpto. de Ingeniería y Tecnología de Computadores、 Facultad de Informática、 Uni-versidad de Murcia、 30100 Espinardo (Murcia)、 Spain*Email address*: joserr@um.es

Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada、 Universitat Politècnica de València、 Camino de Vera s/n、 46022 Valencia、 Spain*Email address*: easancpe@mat.upv.es