arXiv:2302.07531v1 [math.CV] 15 Feb 2023

论　　齐性西格尔域上的贝格曼空间理论

MATTIA CALZI、MARCO M. PELOSO

摘要。我们研究齐性西格尔域上的混合范数贝格曼空间。文献中已有两种不同的研究方法，且若干结果似乎难以比较。本文比较文献中已有的结果，并在其中一种框架下补充完善现有结果。我们给出的结果包括：自然嵌入、稠密性、完备性、再生性质、采样、原子分解、对偶性、Bergman投影算子的连续性、边界值和传递。

1. 引言

本文讨论齐性西格尔域上的若干全纯函数空间。为了说明我们将要考察的空间类型和问题，我们从最简单的情形开始。

令 $\mathbf{C}_+ := \{ z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$ 为上半平面。我们可以将 $\mathbf{C}_+$ 视为 $\mathbf{R} + i(0,\infty)$，其中 $(0,\infty)$ 是 $\mathbf{R}$ 中唯一的开（凸）锥。在多变量情形下，上半平面可以推广为凸锥上的管状域。设 Ω 是 $\mathbf{R}^m$中的一个开凸锥。那么，$\mathbf{C}^m$ 中的区域 $D = \mathbf{R}^m + i\Omega$ 称为锥 Ω上的管状域。如果保持 Ω 的 $\mathbf{R}^m$ 线性变换群在 Ω 自身上传递作用，那么 Ω 就是一个齐性锥，该区域本身也具有齐性；也就是说， D 的双全纯自映射群（即 D的自同构群）在 D上传递作用。

多变量中的另一个经典区域是所谓的西格尔上半空间，它拓展了 $\mathbf{C}_+$ 的定义及其若干主要特征。再次考虑锥 $(0,\infty) \subseteq \mathbf{R}$ 以及定义在 $\mathbf{C}^n$ $\zeta \mapsto \zeta \cdot \overline{\zeta} = |\zeta|^2$上的厄米二次映射。那么，西格尔上半空间是 $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ 中的区域 $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} := \{ (z,\zeta) : \operatorname{Im} z - |\zeta|^2 \in (0,\infty) \}.$$

齐性西格尔域的定义如下——完整定义请参见第2节。设有一个齐性锥 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ 和一个适当的厄米二次映射 $\Phi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ 。那么，齐性西格尔域 $D \subseteq \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ 为

$$D = \{ (\zeta, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \operatorname{Im} z - \Phi(\zeta) \in \Omega \}.$$

（再次参见第 2 for definitions). Notice that if $n =$ ’0 then D is the tube domain 除以 the gi齐性锥 Ω

在上述齐性西格尔域 D 上，文献中研究了各种（混合范数）加权 Bergman 空间。一方面，在 [30]（针对上半平面）和 [15]（针对一般情形）中，研究了以下混合范数加权 Bergman 空间：

$$A^{p,q}_{\mathbf{s}} := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(D) : \| h \mapsto \Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega}(h) \| f_h \|_{L^p(\mathcal{N})} \|_{L^q(\nu_\Omega)} < \infty \right\},$$

其中 $\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega}$ 是定义在 Ω ($\mathbf{s} \in \mathbf{R}^r$) 上的“广义幂函数”， ν_Ω 是 Ω 上的“标准”不变测度， $\mathcal{N} = \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$，且 $f_h : (\zeta, x) \mapsto f(\zeta, x + i\Phi(\zeta) + ih)$。另一方面，例如在 [1, 11, 3, 2, 21, 26, 6, 4, 7], 中，考虑了以下混合范数加权 Bergman 空间：

$$\mathfrak{A}^{p,q}_{\mathbf{s}} := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(D) : \| h \mapsto \| f_h \|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)} \|_{L^q(\Delta^{\mathbf{s}+\mathbf{b}/2}_{\Omega} \cdot \nu_\Omega)} < \infty \right\},$$

关键词和短语。伯格曼空间、Bergman 投影、齐性西格尔域、原子分解、边界值。数学主题分类（*2020*）：*32A15*、*32A37*、*32A50*、*46E22*。作者均为 Gruppo Nazionale per l’Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) 和 Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM) 的成员。作者获得了 INdAM-GNAMPA 项目 CUP_E55F22000270001 的部分资助。

$\mathbf{b}$是$\mathbb{R}^r$且 $L^{p,q}(\mathbb{R}^m,\ \mathbb{C}^n)\ = \{\, f\colon\ \ \|\zeta \mapsto \|f\ (\zeta,\ \ \cdot\ )\ \|_{L^p(\mathbb{R}^m)}\|_{L^q(\mathbb{C}^n)} < \infty \,\}$
其中 .

由此产生了两套平行的理论，并采用了不同的约定。例如，空间 $\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$的定义，表明对于固定的s，空间 $\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$之间存在一种自然的比较方式；这也凸显了“那个” Bergman 投影算子 $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}}$所起的作用，即相应空间 $\mathfrak{A}^{2}{}_{,\mathbf{s}}{}^{2}$的 Bergman 投影算子。另一方面，对于固定的s，空间 $A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$之间的比较似乎不那么自然，因此人们自然会研究更一般的 Bergman 投影算子。此外，在研究空间 $\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$的各种性质时（例如， $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}}$在空间 $\mathfrak{L}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$上的连续性，其中该空间定义为 $\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$，即以可测函数的等价类取代全纯函数），人们更加关注 p 和 q，而非s；而在研究空间 $A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$时，人们则更加关注s，而非 p 或 q。因此，即使描述的是相同的现象，这两套平行的理论也可能显得截然不同，难以相互比较。

这正是促使我们撰写本文的主要原因：在本文中，我们描述了空间 $A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$和 $\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$的各种类似结果，以便进行直接比较。此外，我们还进一步深入研究了空间$\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$，证明了据我们所知、以目前这种一般性尚未见于文献中的那些结果。为处理这些问题，我们自然地引入了一族新的空间 $\mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$。这族空间的定义遵循空间 $A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$的思路（因此具有一些技术上的优势），但也能够通过直接替换来处理空间 $\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$。

齐性西格尔域上的函数论与函数空间分析是一个经典的研究领域，其中复分析、调和分析、凸锥几何和表示论都发挥着基础性作用，参见例如 [24, 25, 28, 29, 32] 以及 [22]。近年来， [5]中证明并在 [4], 中推广了这样一个结果：为了证明某个管型齐性Siegel域上的Bergman投影算子的 L^p-有界性（见第2节第6小节），有必要利用核的消去；这一现象此前从未被观察到，事实上，这些例子至今仍是此类行为的唯一实例。顺便提及，为了利用Bergman核的消去，人们考虑了混合范数空间，这也表明了它们在这一背景下的自然性。还值得指出的是，齐性西格尔域上Bergman投影算子的 L^p-有界性问题，与Bourgain和Demeter的尖锐 ℓ^2-解耦不等式 [12], 密切相关，参见 [6]。关于这一问题及相关问题的详尽讨论，另请参见 [18] 中的引言；关于当前论文主题的一些最新研究，参见 [26,8, 6, 7, 15, 16, 17, 18] 。

本文组织如下。在第2节中，我们回顾一些基本事实，并引入处理齐性西格尔域所需的记号。为了方便习惯于不同约定的读者，我们以公理化的方式介绍记号，使读者能够确定所需的（希望是最小限度的）修改。在第3节中，我们简要列出空间 $A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$和 $\mathfrak{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$的若干结果，并将证明留到第4节；在第4节中，我们将更详细地处理空间 $\mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}$。不过，我们只给出那些需要对 [15, 18]中相应证明所采用的论证作出实质性修改的证明。我们将讨论的主题包括：自然嵌入、稠密性、完备性、再生性质、采样、原子分解、对偶性、Bergman投影算子的连续性、边界值和传递。

2. 齐性西格尔域

我们将 E 记作维数为 n的复希尔伯特空间，将 F 记作维数为 m的实希尔伯特空间，将Ω记作 F中的一个不包含仿射直线的开凸锥，并将 Φ记作： $E\times E\to F_{\mathbb{C}}$是一个非退化厄米映射，使得对于每个 $\zeta\in E$， $\Phi(\zeta):=\Phi(\zeta,\zeta)\ \in\overline{\Omega}$。我们定义

$$\rho\colon E\times F_{\mathbb{C}}\ni(\zeta,z)\mapsto \operatorname{Im} z-\Phi(\zeta)\in F,$$

并记为

$$D=\{\,(\zeta,z)\in E\times F_{\mathbb{C}}\colon \operatorname{Im} z-\Phi(\zeta)\in\Omega\,\}=\rho^{-1}(\Omega)$$

与 Ω 和 Φ 相关联的西格尔域。我们将假设 D 是齐性的，即其双全纯映射群在其上具有传递作用。众所周知（参见例如 [13, 命题 1]） ， D 是

齐性的，当且仅当存在 $GL(F)$ 的一个三角子群[1] T_+，在 Ω 上具有单传递作用，并且对每个 $t \in T_+$，都存在 $g \in GL(E)$，使得 $t \circ \Phi = \Phi \circ (g \times g)$。在这种情况下，$GL(F)$ 的任何其他具有相同性质的三角子群，都可由保持 Ω 的 $GL(F)$ 中的某个元素将其共轭到 T_+。此外，T_+ 通过转置在 Ω' 上具有右单传递作用（参见 [35, 定理 1]）。对于 $\lambda \in \Omega'$ 和 $t \in T_+$，我们将此后一个作用记为 $\lambda \cdot t$；因此，对于 $t \in T_+$ 和 $h \in \Omega$，我们将用 $t \cdot h$ 代替 th。对于每个 $t \in T_+$，我们仍将 t 在 $F_{\mathbb{C}}$ 和 $F'_{\mathbb{C}}$ 上的作用分别记为 $t \cdot$ 和 $\cdot t$。

2.1. 关于 Ω的分析。</style}可以利用 T-代数理论（参见 [35], ）或（正规） j-代数理论（参见 [29, 32]），来描述 T_+ 的结构及其在 Ω 上的作用。为使论述尽可能简洁，我们将避免全面介绍 T_+ 的结构，转而采用公理化的方法。关于以下讨论的更详尽处理，请参阅 [15]。首先注意到，存在 $r \in$个N（称为 Ω的秩）以及一个李群满同态

$$\Delta \colon T_+ \to (\mathbb{R}_+^*)^r,$$

其核为 $[T_+, T_+]$；固定基点 $e_\Omega \in \Omega$ 和 $e_{\Omega'} \in \Omega'$，并定义

$$\Delta_\Omega^{\mathbf{s}}(t \cdot e_\Omega) = \Delta_{\Omega'}^{\mathbf{s}}(e_{\Omega'} \cdot t) = \Delta^{\mathbf{s}}(t) = \prod_{j=1}^{r} \Delta_j(t)^{s_j} \tag{1}$$

对于每个 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$ 及每个 $t \in T_+$，当且仅当 $\operatorname{Re} \mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^r$ 时，$\Delta_\Omega^{\mathbf{s}}$（以及$\Delta_{\Omega'}^{\mathbf{s}}$）在有界子集上有界（参见 [15, 引理 2.34]）。此外，我们还要求，对于每个 $a > 0$，$\Delta(a \cdot) = (a, \dots, a)$，其中$a \cdot$ 表示比率为 a 的位似变换（该比率必然属于 T_+）。我们明确指出，这些条件将 Δ 确定到坐标置换为止（在 $(\mathbb{R}_+^*)^r$ 中）。[2] 因此，即使选择了不同的 T_+ 和 Δ，我们仍可直接应用 [15, 第 2] 章的结果，而无需作（实质性）修改。注意，对于每个 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$，$\Delta_\Omega^{\mathbf{s}}$ 和$\Delta_{\Omega'}^{\mathbf{s}}$ 分别可延拓为 $\Omega + iF$和 $\Omega' + iF'$上的全纯函数（参见 [15, 推论 2.25]）。

当 Ω 是对称的，也就是说，相对于 F的标量积而言是自对偶的，那么在 [22] 中考虑的函数 $\Delta_{\mathbf{s}}$与在适当选择 Δ 的情况下由 (1) 定义的函数 $\Delta_\Omega^{\mathbf{s}}$ 一致（参见 [22,第 VI 章，§ 3]）；特别是，“行列式”多项式与 $\Delta_\Omega^{\mathbf{1}_r}$一致。一般而言，讨论 Ω 为对称情形的著作通常遵循 [22], 的约定，尽管记号可能略有不同；而讨论一般齐性锥的著作通常遵循上文所述的约定，尽管记号可能有所不同（例如，[26, 27, 8, 6]记号中的 $\Delta_\Omega^{\mathbf{s}} = Q^{\mathbf{s}}$ 和$\Delta_{\Omega'}^{\mathbf{s}} = (Q^*)^{\mathbf{s}}$）

为简化记号，我们给出以下定义。

定义 2.1. 我们在 $\mathbb{R}^r$上定义两个序关系。一方面，我们写作 $\mathbf{s} \leqslant \mathbf{s}'$，表示对每个 $j = 1, \dots, r$，都有 $s_j \leqslant s'_j$（等价地，$\mathbf{s}' - \mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^r$）。另一方面，我们写作 $\mathbf{s} \preceq \mathbf{s}'$，表示 $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$，或者对每个 $j = 1, \dots, r$，都有 $s_j < s'_j$。

因此，$\mathbf{s} \prec \mathbf{s}'$（即，$\mathbf{s} \preceq \mathbf{s}'$ 且 $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$）当且仅当 $\mathbf{s}' - \mathbf{s} \in (\mathbb{R}_+^*)^r$，也就是说，对每个 $j = 1, \dots, r$，都有 $s_j < s'_j$。

定义 2.2. 我们用 $\mathcal{H}^k$ 表示 k维豪斯多夫测度。存在 $\mathbf{d} \prec \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{0}$，使得

$$\nu_\Omega := \Delta_\Omega^{\mathbf{d}} \cdot \mathcal{H}^m, \qquad \nu_{\Omega'} := \Delta_{\Omega'}^{\mathbf{d}} \cdot \mathcal{H}^m, \qquad \text{and} \qquad \nu_D := (\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+2\mathbf{d}} \circ \rho) \cdot \mathcal{H}^{2n+2m} \tag{2}$$

[1]这意味着 T_+ 中每个元素的所有特征值都是实数。等价地，存在 F 的一组基，使得相对于这组基，T_+ 中的每个元素都可表示为一个上三角矩阵，参见 [34]。[2]为证明这一事实，注意，若 $\Delta' \colon T_+ \to (\mathbb{R}_+^*)^r$ 是另一个具有相同性质的同态，则存在 $A \in GL(\mathbb{R}^n)$，使得 $\log \Delta' = A \log \Delta$。此外，给定 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$，函数 $\sum_j s_j \log \Delta'_j = \sum_j ({}^t A\mathbf{s})_j \log \Delta_j$ 和 $\sum_j s_j \log \Delta_j$ 在 Ω 的有界子集上有上界，当且仅当 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^*$；因此 ${}^t A\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*$，故$A$必定是坐标置换与对角伸缩 $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_r x_r), \lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$的复合。由于对每个 $a > 0$，都有 $\Delta(a \cdot) = \Delta'(a \cdot) = (a, \dots, a)$，因此我们看到 A 在直线 $\mathbb{R}\mathbf{1}_r$上诱导恒等映射，所以它必定是坐标置换。

它们分别是 Ω、 Ω' 和 D 上的唯一测度（相差一个乘法常数），在 Ω 和 Ω'的所有线性自同构以及 D 的所有双全纯映射下保持不变（参见 [15, 命题 2.19 和 2.44],以及 [22, 命题 I.3.1]）。

注 2.3. 注意，对于每个 $t \in T_+$ 以及每个满足 $t \cdot \Phi = \Phi \circ (g \times g)$ 的 $g \in GL(E)$， $\Delta^{-\mathbf{b}}(t) = |\det_{\mathbb{C}} g|^2$。此外，$\Delta^{-\mathbf{d}}(a\,\cdot) = a^m$，且对于每个 $a > 0$， $\Delta^{-\mathbf{b}}(a\,\cdot) = a^n$。

我们明确指出，按照 [24, 1, 9]，中的记号，$\mathbf{d} = d$，$\mathbf{b} = -q$；而按照 [27, 26, 8, 6] 中的记号，$\mathbf{d} = -\tau$，$\mathbf{b} = -b$。特别地，对于 $\mathbf{d}$ 的符号，通常并无统一约定。

定义 2.4. 存在 $\mathbf{m}$、$\mathbf{m}' \geqslant \mathbf{0}$，使得 $\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega} \cdot \nu_{\Omega}$ 和 $\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega'} \cdot \nu_{\Omega'}$ 分别在 F 和F' 上诱导拉东测度，当且仅当 $\operatorname{Re} \mathbf{s} \succ \frac{1}{2}\mathbf{m}$ 且 $\operatorname{Re} \mathbf{s} \succ \frac{1}{2}\mathbf{m}'$，分别成立（参见 [15, 命题 2.19]）。

注 2.5. 请注意 $\mathbf{d} = -(\mathbf{1}_r + \frac{1}{2}\mathbf{m} + \frac{1}{2}\mathbf{m}')$（参见 [15, 定义 2.8] 及前面的注）。我们明确观察到，按 [9, 27, 26, 8, 6, 7] 中的记号，$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ 和 $\mathbf{m}' = (n_1, \dots, n_r)$。

定义 2.6 .对于每个满足 $\operatorname{Re} \mathbf{s} \succ \frac{1}{2}\mathbf{m}$ 且 $\operatorname{Re} \mathbf{s}' \succ \frac{1}{2}\mathbf{m}'$ 的 $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbb{C}^r$，我们定义 $\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s})$ 和 $\Gamma_{\Omega'}(\mathbf{s}')$，使得 that

$$\mathcal{L}(\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega} \cdot \nu_{\Omega}) = \Gamma_{\Omega}(\mathbf{s}) \Delta^{-\mathbf{s}}_{\Omega'} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{L}(\Delta^{\mathbf{s}'}_{\Omega'} \cdot \nu_{\Omega'}) = \Gamma_{\Omega'}(\mathbf{s}') \Delta^{-\mathbf{s}'}_{\Omega},$$

分别为，其中 $\mathcal{L}$ 表示拉普拉斯变换。

注 2.7. 请注意，对于某些常数 $c, c' > 0$，有 $\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}(\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega} \cdot \nu_{\Omega})(e_{\Omega'}) = c \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(s_j - \frac{1}{2} m_j\right)$ 和 $\Gamma_{\Omega'}(\mathbf{s}') = \mathcal{L}(\Delta^{\mathbf{s}'}_{\Omega'} \cdot \nu_{\Omega'})(e_{\Omega}) = c' \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(s'_j - \frac{1}{2} m'_j\right)$；这些常数取决于 e_{Ω} 和 $e_{\Omega'}$ 的选择。

定义 2.8。存在唯一确定的全纯族 $(I^{\mathbf{s}}_{\Omega})_{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r}$ 和 $(I^{\mathbf{s}}_{\Omega'})_{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r}$，分别是定义在 F 和 F'上的温和分布族，使得 $\mathcal{L} I^{\mathbf{s}}_{\Omega} = \Delta^{-\mathbf{s}}_{\Omega'}$ 和 $\mathcal{L} I^{\mathbf{s}}_{\Omega'} = \Delta^{-\mathbf{s}}_{\Omega}$（参见 [15, 引理 2.26 和命题 2.28]）。

注 2.9。注意，当 $\operatorname{Re} \mathbf{s} \succ \frac{1}{2}\mathbf{m}$ 和~~$\operatorname{Re} \mathbf{s} \succ \frac{1}{2}\mathbf{m}'$~~时，分别有 $I^{\mathbf{s}}_{\Omega} = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s})} \Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega} \cdot \nu_{\Omega}$和 $I^{\mathbf{s}}_{\Omega'} = \frac{1}{\Gamma_{\Omega'}(\mathbf{s})} \Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega'} \cdot \nu_{\Omega'}$。此外，对于每个 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$， $I^{\mathbf{s}}_{\Omega}$ 和 $I^{\mathbf{s}}_{\Omega'}$ 分别支撑于 $\overline{\Omega}$ 和 $\overline{\Omega'}$（参见 [15,命题 2.28]）。

定义 2.10。我们用 $\mathbb{N}_{\Omega}$ 和 $\mathbb{N}_{\Omega'}$ 表示满足以下条件的 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ 的集合： $\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega}$ 和 $\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega}$ 分别延拓为 F 和 F'上的多项式。

注 2.11. 注意到，当且仅当 $\mathbf{s} \in -\mathbb{N}_{\Omega'}$ 和 $\mathbf{s} \in -\mathbb{N}_{\Omega}$ 时， $I^{\mathbf{s}}_{\Omega}$ 和 $I^{\mathbf{s}}_{\Omega'}$ 分别支撑于 $\{0\}$。于是，对于某个取决于 $e_{\Omega'}$ 选择的适当常数 $c > 0$，有 $\Phi_*(\mathcal{H}^{2n}) = c I^{-\mathbf{b}}_{\Omega}$ （参见命题 2.30]）。我们明确指出，当 Ω 对称时， $\mathbf{1}_r \in \mathbb{N}_{\Omega}$，而微分算子 $f \mapsto f * I^{-\mathbf{1}_r}$ 就是通过标量积与行列式多项式$\Delta^{\mathbf{1}_r}_{\Omega}$ 相联系的微分算子。这个算子通常记作 $\Box$。此外，如果 Ω 对称且不可约，那么对于 Δ 的某个适当选择，有 $\mathbb{N}_{\Omega} = \{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^r : s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_r\}$。在这种情况下，这个条件完全确定了 Δ。

2.2. **Šilov 边界上的傅里叶分析**。现在我们转而分析 D 的 Šilov 边界（关于这一主题更一般的论述，参见 [28] ）。我们赋予 $E \times F_{\mathbb{C}}$ 二步幂零李群结构，其乘法定义如下：

$$(\zeta, z) \cdot (\zeta', z') := (\zeta + \zeta', z + z' + 2i\Phi(\zeta', \zeta)),$$

对每个 (ζ, z)、$(\zeta', z') \in E \times F_{\mathbb{C}}$。若通过映射 $(\zeta, x) \mapsto (\zeta, x + i\Phi(\zeta))$ 将 $\mathcal{N} := E \times F$ 与 D 的 Šilov 边界 $\rho^{-1}(0)$ 识别起来，那么 $\mathcal{N}$ 就成为一个二步幂零李群，其乘法为

$$(\zeta, x)(\zeta', x') = (\zeta + \zeta', x + x' + 2\operatorname{Im} \Phi(\zeta, \zeta'))$$

对每个 (ζ, x)、$(\zeta', x') \in \mathcal{N}$。

定义 $W := \{\lambda \in F' : \exists v \in F \setminus \{0\}\ \langle \lambda, \operatorname{Im} \Phi(\,\cdot\,, v)\rangle = 0\}$，使得 W是 F'中的一个真代数簇，因为 Φ是非退化且$\overline{\Omega}$-正的。于是，对于每个 $\lambda \in F' \setminus W$， $\mathcal{N}$模去

中心子群 $\ker\lambda$ 同构于一个海森堡群（若 $E=\{0\}$，则同构于 R），因此 Stone–Von Neuman定理（参见例如 [23, 定理 1.50]）保证存在一个唯一的（在酉等价意义下）不可约连续酉表示 π_λ，它将 $\mathcal{N}$ 表示在某个希尔伯特空间 H_λ 中，使得 $\pi_\lambda(0,x)=\mathrm{e}^{-i\langle\lambda,\,x\rangle}$对每个 $x\in F$均成立。于是有 Plancherel恒等式（参见 [15, 推论 1.17 和命题 2.30]）：

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{N})}=c\int_{F'\setminus W}\|\pi_\lambda(f)\|^2_{\mathscr{L}^2(H_\lambda)}|\Delta_{\Omega'}^{-\mathbf{b}}(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda$$

对每个 $f\in L^1(\mathcal{N})\cap L^2(\mathcal{N})$，其中 $c>0$ 是一个适当的常数（取决于 $e_{\Omega'}$ 的选择），而 $\mathscr{L}^2(H_\lambda)$ 表示 H_λ 上的希尔伯特–施密特自同态空间。注意，$\Delta_{\Omega'}^{-\mathbf{b}}$ 在 Ω' 上为正，并可扩展为 F' 上的多项式，因此上述公式有意义（参见 [15, 命题 2.30]）。

2.3. 的 CR 结构 $\mathcal{N}$。对每个 $v\in E$，记 Z_v 为 $\mathcal{N}$ 上的左不变向量场，它在 $(0,0)$ 处诱导 Wirtinger 导数 $\frac{1}{2}(\partial_v-i\partial_{iv})$。于是，对于 $v\in E$，Z_v 诱导出 $\mathcal{N}$ 的复化切丛的一个子丛，从而赋予 $\mathcal{N}$ CR流形结构（参见 [10, 第 7.4] 节）。特别地，若 $\mathcal{N}$ 上的分布 u 满足：对每个 $v\in E$，$\overline{Z_v}u=0$，则称其为 CR 分布（参见 [10, 第 9.1 节和第 17.2] 节）。注意，$L^2(\mathcal{N})$ 的元素 f 是 CR 的充要条件是

$$\pi_\lambda(f)=\chi_{\Lambda_+}(\lambda)\pi_\lambda(f)P_{\lambda,0}$$

对几乎所有的 $\lambda\in F'\setminus W$，其中 Λ_+ 是 $\Phi(E)$ 的极锥的内部（也就是说，

$$\{\,\lambda\in F'\colon\forall\zeta\in E\setminus\{0\}\ \langle\lambda,\Phi(\zeta)\rangle>0\,\}),$$

并且对于每个 $\lambda\in F'\setminus W$，$P_{\lambda,0}$ 都是 H_λ 中秩为一的正交投影算子（参见例如 [28] 或 [15, 命题1.19] 和 [14, 命题2.6]）。

2.4. 度量。我们赋予 D 一个完备黎曼度量，使其在仿射双全纯映射的作用下保持不变（例如，Bergman度量是完备的，并且在 D 的所有双全纯映射下保持不变，参见 [15, 命题2.44]），并记其诱导的距离为 d。由于这里只会用到关于 d 的有界半径的球，因此只要满足上述条件，选择哪种距离都无关紧要。

我们赋予 Ω 由 D 上的度量通过浸没 ρ 诱导的黎曼度量（将其理解为把 D 投影到其关于 $\mathcal{N}$ 的作用的商空间），并赋予 Ω' 由微分同胚 $\Omega\ni t\cdot e_\Omega\mapsto e_{\Omega'}\cdot t^{-1}\in\Omega'$ 诱导的度量。我们将相应的距离记为 d_Ω 和 $d_{\Omega'}$，将以 $h\in\Omega$ 和 $\lambda\in\Omega'$ 为中心、半径为 $R>0$ 的相应球分别记为 $B_\Omega(h,R)$ 和 $B_{\Omega'}(\lambda,R)$。请注意，在这种情况下，也可以选择一般的完备 T_+-不变黎曼距离，而不会（实质上）影响以下结果。尽管如此，d 与 d_Ω 之间的关系在某些地方（例如下文给出的格的定义中）会很有用。

类似地，我们通过浸没，用 D 上的黎曼度量在 $E\times\Omega$ 上诱导出黎曼度量

$$\rho'\colon D\ni(\zeta,z)\mapsto(\zeta,\rho(\zeta,z))\in E\times\Omega,$$

将其理解为 D 投影到其关于 $\mathcal{N}$的中心 F 的作用的商空间。我们用 $d_{E\times\Omega}$ 表示相应的距离，用 $B_{E\times\Omega}((\zeta,h),R)$表示以 $(\zeta,h)\in E\times\Omega$为中心、半径为 $R>0$的相应球。

我们明确指出，$\mathcal{N}$ 及其中心 F 都是 D的仿射自同构群 G_{Aff} 的正规子群（参见 [25, 命题 2.1]）。因此，d_Ω和 $d_{E\times\Omega}$分别是 $(G_{\mathrm{Aff}}/\mathcal{N})$-不变的和 (G_{Aff}/F)-不变的。特别地，d_Ω 和 $d_{\Omega'}$ 是 T_+-不变的，而 $d_{E\times\Omega}$ 在形如以下形式的仿射自同构下不变

$$(\zeta,h)\mapsto(g\zeta+\zeta',t\cdot h),$$

其中 $\zeta'\in E$、$t\in T_+$ 和 $g\in GL(E)$ 满足 $t\cdot\Phi=\Phi\circ(g\times g)$。我们定义 $\nu_{E\times\Omega}\coloneqq(\Delta_\Omega^{-\mathbf{b}-\mathbf{d}}\circ\mathrm{pr}_\Omega)\cdot\mathcal{H}^{2n+m}$，使得 $\nu_{E\times\Omega}$ 是 (G_{Aff}/F)-不变的。

2.5. **格**。在 Ω 上的 (δ, R)-格，是指满足 $\delta > 0$ 和 $R > 1$ 的一族 $(h_k)_{k\in K}$ 个 Ω 的元素，使得球 $B_\Omega(h_k, \delta)$ 两两不相交，而球 $B_\Omega(h_k, R\delta)$ 覆盖 Ω。我们类似地定义 Ω' 和 $E \times \Omega$ 上的格。注意， Ω 中任意两个元素之间的距离均为 $\geqslant 2\delta$ 的极大族，必定是 $(\delta, 2)$-格（反之亦然），因此 $(\delta, 2)$-格在 Ω、 Ω' 和 $E \times \Omega$ 上总是存在。

在 D 上的一个 $\mathcal{N}$-(δ, R)-格，具有 $\delta > 0$ 和 $R > 1$，是指由 D 中的元素构成的族 $(\zeta_{j,k}, z_{j,k})_{j\in J, k\in K}$，使得球 $B((\zeta_{j,k}, z_{j,k})$ $\delta)$ 两两不相交，球 $B((\zeta_{j,k}, z_{j,k})$ $R\delta)$ 覆盖 D，并且存在一个在 Ω 上的 (δ, R)-格 $(h_k)_{k\in K}$，使得对于每个 $j \in J$ 和每个 $k \in K$，都有 $\rho(\zeta_{j,k}, z_{j,k}) = h_k$。

在 D 上的一个 F-(δ, R)-格，具有 $\delta > 0$ 和 $R > 1$，是指由D中的元素构成的族 $(\zeta_k, z_{j,k})_{j\in J, k\in K}$，使得球 $B((\zeta_k, z_{j,k})$ $\delta)$ 两两不相交，球 $B((\zeta_k, z_{j,k})$ $R\delta)$ 覆盖 D，并且存在一个在 $E \times \Omega$ 上的 (δ, R)- 格 $(\zeta_k, h_k)_{k\in K}$，使得对于每个 $j \in J$ 和每个 $k \in K$，都有 $\rho(\zeta_k, z_{j,k}) = h_k$。

通过对前述论证稍作修改，可以证明在D 上总存在 $\mathcal{N}$和 F-$(\delta, 4)$-格（参见 [15, 引理 2.55]）。

2.6. **相应管状域**。我们记

$$T_\Omega = F + i\Omega$$

与 Ω相应的管状区域。给定 D上的函数 f，定义

$$f_h \colon \mathcal{N} \ni (\zeta, x) \mapsto f(\zeta, x + i\Phi(\zeta) + ih)$$

对每个 $h \in \Omega$，并且

$$f^{(\zeta)} \colon T_\Omega \ni z \mapsto f(\zeta, z + i\Phi(\zeta))$$

对每个 $\zeta \in E$。因此，

$$f_h^{(\zeta)} \colon F \ni x \mapsto f(\zeta, x + i\Phi(\zeta) + ih)$$

对每个 $\zeta \in E$ 以及每个 $h \in \Omega$。

3. Statement of the Main Comparison Results

现在我们介绍混合范数 Bergman 空间的不同定义。

在 [30, 15], 中，混合范数加权 Bergman 空间定义为

$$A^{p,q}_{\mathbf{s}}(D) = \left\{ f \in \operatorname{Hol}(D) \colon \|h \mapsto \Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h)\|f_h\|_{L^p(\mathcal{N})}\|_{L^q(\nu_\Omega)} < \infty \right\}.$$

一方面，这一定义突出了 D 的 Šilov 边界所起的作用，并且当 $q = \infty$ 且 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ （即 $\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega = 1$）时，可得到通常的 Hardy 空间。特别是， $\mathcal{N}$ 上的非交换傅里叶分析在此发挥作用。另一方面，权 $\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega \circ \rho$ 被视为函数的乘子，而非测度的乘子；同时，所选取的“基准测度”能够在 $\mathcal{N}$ 和 Ω上诱导出不变测度。当 $q = \infty$ 时，这使得我们能够处理一整类原本不会出现的空间；这些空间在空间 $A^{p,\ \mathbf{s}\ q}(D)$ 的对偶理论中发挥着重要作用，其中 $q \leqslant 1$。

在 [26, 6] 中（仅举几例），混合范数加权 Bergman 空间定义为

$$\mathfrak{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D) := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(D) \colon \|\zeta \mapsto \|f^{(\zeta)}\|_{A^{p,q}_{(\mathbf{s}+\mathbf{b}/2)/q}(T_\Omega)}\|_{L^q(E)} < \infty \right\}.$$

一方面，这一定义突出了 D 的 Šilov 边界的 contre F 所起的作用，因此通常的（交换）傅里叶分析便可应用于 F。此外，这一定义还使我们能够将 D 视为管状区域 T_Ω（与 $\{0\} \times T_\Omega \subseteq D$ 等同）的平移 $(\zeta, i\Phi(\zeta)) + T_\Omega$ 之并，从而可将 $\mathfrak{A}^{p,\ q}_{\mathbf{s}}(D)$ 上的部分分析简化为 $\mathfrak{A}^{p,\ q}_{\mathbf{s}}(T_\Omega)$ 上较简单的分析。另一方面，权 $\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega \circ \rho$ 被视为 “ 基准测度 ” $(\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/2+\mathbf{d}} \circ \rho) \cdot \mathcal{H}^{2n+2m} = (\Delta_\Omega^{-\mathbf{b}/2-\mathbf{d}} \circ \rho) \cdot \nu_D$ 的乘子，而非函数的乘子。这样一来， $\mathfrak{L}^{2,\ 2}_{\mathbf{s}}(D)$ 到 $\mathfrak{A}^{2,\ 2}_{\mathbf{s}}(D)$ 的自伴投影算子（定义为 $\mathfrak{A}^{2,\ 2}_{\mathbf{s}}(D)$，但允许 f 为模可忽略函数意义下的可测函数）便被视为在不同的 $p, q \in [1, \infty]$ 下，将 $\mathfrak{L}^{p,\ q}_{\mathbf{s}}(D)$ 投影到 $\mathfrak{A}^{p,\ q}_{\mathbf{s}}(D)$ 时的“典范选择”。

我们指出，对于每个 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$，都有 $\mathfrak{A}^{p,\,\mathbf{s}\,\infty}(D) = \mathfrak{A}^{p,\,\mathbf{0}\,\infty}(D)$。正因如此，$q = \infty$ 这一情形多少有些病态，很少被考虑。出于类似原因，当 $q \leqslant 1$ 时，空间 $\mathfrak{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$ 的对偶理论会单独处理（例如参见 [1]）。

我们还注意到

$$\mathfrak{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D) = \Big\{ f \in \operatorname{Hol}(D) \colon \|h \mapsto \|f_h\|_{L^{p,q}(F,E)}\|_{L^q(\Delta_\Omega^{\mathbf{s}+\mathbf{b}/2}\cdot\nu_\Omega)} < \infty \Big\},$$

其中

$$\|g\|_{L^{p,q}(F,E)} \coloneqq \|\zeta \mapsto \|g(\zeta,\,\cdot\,)\|_{L^p(F)}\|_{L^q(E)}$$

对于每个可测函数 $g\colon\ \mathcal{N} \to \mathbb{C}$。

现在我们比较关于空间 $A^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$ 和 $\mathfrak{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}$ 的若干结果。证明可在 [15, 18], 或第4节中找到。

3.1. 比较与包含关系。 以下结果是 [15, 命题 3.5], 注 4.1 和引理 4.2 的推论。

注 3.1。 取 $p, q \in (0, \infty]$ 以及 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$。则有：

- $A^{p,\,q}_{\mathbf{s}}(D) \neq \{\,0\,\}$ 当且仅当 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2q}\mathbf{m}$ 或 $q = \infty$ 以及 $\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}$;
- $\mathfrak{A}^{p,\,q}_{\mathbf{s}}(D) \neq \{\,0\,\}$ 当且仅当 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{b})$ 或 $q = \infty$;
- 若 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{b})$ 或 $q = \infty$，则

$$A^{p,q}_{(\mathbf{s}+\mathbf{b}/2)/q}(D) = \mathfrak{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)$$

当且仅当 $p = q$ 或 $E = \{\,0\,\}$。[3]

以下结果是 [15, 命题 3.2] 和命题 4.3 的推论。第一条断言在 $D = \mathbb{C}_+$ 时包含于 [30, 命题 2.2] 中；第二条断言在 $p_1 = q_1$ 和 $p_2 = q_2$ 时包含于 [31, 引理 2.1] 中，而在 $n = 0$ 时实质上包含于 [3, 命题 3.22] 中。

命题 3.2。 取 $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2 \in (0,\ \infty]$ 满足 $p_1 \leqslant p_2,\ q_1 \leqslant q_2$ 且 $\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2} \in \mathbb{R}^r$。则有以下结论：

- $A^{p_1,q_1}_{\mathbf{s_1}}(D) \subseteq A^{p_2,q_2}_{\mathbf{s_2}}(D)$ *continuously, provided that* $\mathbf{s_2} = \mathbf{s_1} + \Big(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\Big)(\mathbf{b} + \mathbf{d})$;
- $\mathfrak{A}^{p_1,q_1}_{\mathbf{s_1}}(D) \subseteq \mathfrak{A}^{p_2,q_2}_{\mathbf{s_2}}(D)$ *continuously, provided that* $q_2 < \infty$ *and* $\mathbf{s_2} = \frac{q_2}{q_1}\mathbf{s_1} + \Big(\frac{q_2}{p_2} - \frac{q_2}{p_1}\Big)\mathbf{d} + \Big(\frac{1}{2} - \frac{q_2}{2q_1}\Big)\mathbf{b}$.

3.2. 再生核。 定义辅助函数

$$B^{\mathbf{s}}_{(\zeta',z')}(\zeta, z) \coloneqq \Delta^{\mathbf{s}}_\Omega\left(\frac{z - \overline{z'}}{2i} - \Phi(\zeta, \zeta')\right)$$

对于每个 (ζ, z)、$(\zeta', z') \in (D \times \overline{D}) \cup (\overline{D} \times D)$，其中 $\overline{D}$ 表示 D 在 $E \times F_{\mathbb{C}}$ 中的闭包（注意，在 E 上未定义共轭）。

那么，根据 [24, 定理 5.4] 和 [9, 定理 II.6] （另见 [15, 命题 3.11]）及注 3.1，得到以下结果。

命题 3.3。 若 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{4}\,\mathbf{m}$，则 $A^{2,\,\mathbf{s}\,2}(D)$ 是一个再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$K^{\mathbf{s}} \colon ((\zeta, z), (\zeta', z')) \mapsto c_{\mathbf{s}} B^{\mathbf{b}+\mathbf{d}-2\mathbf{s}}_{(\zeta',z')}(\zeta, z)$$

对于适当的 $c_{\mathbf{s}} \neq 0$。类似地，若 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2}\,\mathbf{m}$，则 $\mathfrak{A}^{2,\,\mathbf{s}\,2}(D)$ 是一个再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$\mathfrak{K}^{\mathbf{s}} \colon ((\zeta, z), (\zeta', z')) \mapsto c_{\mathbf{s}/2+\mathbf{b}/4} B^{\mathbf{b}/2+\mathbf{d}-\mathbf{s}}_{(\zeta',z')}(\zeta, z).$$

[3] 更确切地说，如果 $p \neq q$ 且 $E \neq \{\,0\,\}$，那么 $A^{p,\,q\,(\mathbf{s}+\mathbf{b}/2)/q}(D) \not\subseteq \mathfrak{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$ 且 $A^{p,\,q\,(\mathbf{s}+\mathbf{b}/2)/q}(D) \not\supseteq \mathfrak{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$。

在 [15], 中，为了记号上的方便，相应的积分算子基于 $B^{\mathbf{s}}$ 而非 $K^{\mathbf{s}}$，因此这些算子

$$P_{\mathbf{s}}\colon f \mapsto c_{(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s})/2}\int_D f(\zeta,z)B^{\mathbf{s}}_{(\zeta,z)}\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}}(\rho(\zeta,z))\,\mathrm{d}\nu_D(\zeta,z)$$

进行了讨论。

那么，

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{s}} = P_{\mathbf{b}/2+\mathbf{d}-\mathbf{s}}\colon f \mapsto c_{\mathbf{s}/2+\mathbf{b}/4}\int_D f(\zeta,z)\mathfrak{K}^{\mathbf{s}}_{(\zeta,z)}\Delta_\Omega^{\mathbf{s}+\mathbf{b}/2+\mathbf{d}}(\rho(\zeta,z))\,\mathrm{d}(\zeta,z)$$

是从 $\mathfrak{L}^{2,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{2}(D)$ 到 $\mathfrak{A}^{2,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{2}(D)$ 的正交投影算子。

The followin该结果是 [15, 命题 3.13] 和命题 4.7 的推论。第一个断言包含在 [3 中 0，定理 3.1] 当 $D = \mathbb{C}$+时。

命题 3.4。取 p，$q \in (0,\ \infty]$ 以及 $\mathbf{s}$，$\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^r$。若：

- $\mathbf{s} \succ \frac{1}{p}(\mathbf{b}+\mathbf{d}) + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$;
- $\mathbf{s}' \prec \frac{1}{p'}(\mathbf{b}+\mathbf{d}) - \frac{1}{2p'}\mathbf{m}', \mathbf{b}+\mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$;
- $\mathbf{s}+\mathbf{s}' \prec \frac{1}{\min(1,p)}(\mathbf{b}+\mathbf{d}) - \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$ *or* $q' = \infty$ *and* $\mathbf{s}+\mathbf{s}' \leqslant \frac{1}{\min(1,p)}(\mathbf{b}+\mathbf{d})$;

则对于每个 $f \in A^{p,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$，都有 $P_{\mathbf{s}'}f = f$。

若 $q < \infty$ 并且：

- $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{q}{p}\mathbf{d} + \frac{q}{2q'}\mathbf{m}'$;
- $\mathbf{s}' \succ \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{\max(1,p)}\mathbf{d} + \frac{1}{2p'}\mathbf{m}', \frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})$;
- $\mathbf{s}' - \frac{1}{q}\mathbf{s} \succ -\frac{1}{2q'}\mathbf{b} - \left(\frac{1}{p}-1\right)_+\mathbf{d} + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}$ *or* $q' = \infty$ *and* $\mathbf{s}' - \frac{1}{q}\mathbf{s} \geqslant -\left(\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}\right)\mathbf{b} - \left(\frac{1}{p}-1\right)_+\mathbf{d}$;

则对于每个 $f \in \mathfrak{A}^{p,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$，都有 $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}'}f = f$。

3.3。**采样**。以下采样定理是 [15, 定理 3.22]和定理 4.9 的推论，这些结果的更精确版本将在后文证明。当 $n = 0$、$p = q$且 Ω 为对称时，第二个断言包含在 [3, 定理 5.6]中；当 $p = q$时，包含在 [8, 定理 5.2] 中；当 $n = 0$且 Ω 为对称时，包含在 [7, 定理 3.3] 中。我们用 $\ell^{p,\ q}(J,K)$ 表示满足 $\|\|\lambda_{j,\ k}\|_{\ell^p(J)}\|_{\ell^q(K)} < \infty$的 $\lambda \in \mathbb{C}^{J\times K}$ 的空间，此处记号略有滥用。

定理 3.5。取 p，$q \in (0,\ \infty]$，$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ 及 $R_0 > 1$。则存在 $\delta_0 > 0$，使得对于每个$\mathcal{N}$-$(\delta,\ R)$-格 $(\zeta_{j,\ k}, z_{j,\ k})_{j\in J,\ k\in K}$ 在 D 上，且 $\delta \in (0,\ \delta_0]$ 及 $R \in (1,\ R_0]$，该映射

$$f \mapsto \Delta_\Omega^{\mathbf{s}-(\mathbf{b}+\mathbf{d})/p}(\rho(\zeta_{j,k}, z_{j,k}))f(\zeta_{j,k}, z_{j,k})$$

诱导出 $A^{p,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 到 $\ell^{p,\ q}(J,\ K)$的一个闭子空间上的同构，并且对于每个 F-$(\delta',\ R')$-格 $(\zeta'_{k'},\ z'_{j',\ k'})_{j'\in J',\ k'\in K'}$ 在 D 上，且 $\delta' \in (0,\ \delta_0]$ 及 $R' \in (1,\ R_0]$，该映射

$$f \mapsto \Delta_\Omega^{\mathbf{s}/q-\mathbf{b}/(2q)-\mathbf{d}/p}(\rho(\zeta'_{k'}, z'_{j',k'}))f(\zeta'_{k'}, z'_{j',k'})$$

诱导出 $\mathfrak{A}^{p,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 到 $\ell^{p,\ q}(J,\ K)$ 的一个闭子空间上的同构。

这里提到，上述采样映射的转置通常被视为原子分解映射，尤其是在 $A^{p,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 和 $\mathfrak{A}^{p,\ }{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 的对偶空间可分别与 $A^{p',q'\ \mathbf{s}'}(D)$ 和$\mathfrak{A}^{p',q'\ \mathbf{s}'}(D)$ 等同的情况下，其中 $\mathbf{s}'$。更多信息参见 [15, 18] 、第 4.3 小节和定理 4.28。尤其是，由于确定上述原子分解和对偶性是否成立的问题（当 $p,q \in [1,\infty]$ 时）等价于确定 Bergman 投影算子的有界性范围的问题，本节将只讨论后者。

3.4. **边界值**。 现在我们来考虑确定各种加权 Bergman 空间边界值的问题。我们回顾 [15], 中的一些定义和结果，并根据 [13, 14] 做了少许调整。

定义 3.6. 我们将 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 定义为满足以下条件的 CR $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ 空间：对于每个 $\zeta \in E$， $\mathcal{F}_F(\varphi(\zeta,\cdot))$ 支撑于 $\overline{\Omega'}$，并赋予由 $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ 诱导的拓扑。我们将 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 定义为 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 的共轭$\widetilde{}$的对偶。此外，我们将 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 定义为满足以下条件的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ 空间：对于每个 $\lambda \in F' \setminus W$， $\pi_\lambda(\varphi) = \chi_{\Omega'}(\lambda) P_{\lambda,0} \pi_\lambda(\varphi) P_{\lambda,0}$。我们定义

$$\mathcal{F}_{\mathcal{N}} \colon \widetilde{\mathcal{S}}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N}) \ni \varphi \mapsto [\lambda \mapsto \operatorname{Tr}(\pi_\lambda(\varphi))].$$

注意，借助 [14, 命题 2.7]， $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 也可等价地定义为满足以下条件的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ 集合： $\pi_\lambda(\varphi) = \chi_{\Omega'}(\lambda)\pi_\lambda(\varphi) P_{\lambda,0}\widetilde{}$ 对每个 $\lambda \in F' \setminus W$ 均成立。此外， $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ 诱导了从 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 到支撑于 $\overline{\Omega'}$ 上的 Schwartz 函数空间的一个同构（参见 [14, 命题 5.2]）。

定义 3.7。 取 $p, q \in (0, \infty]$ and $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$. 我们将 $B^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 定义为满足以下条件的 $u \in \mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 空间：

$$(\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega'}(\lambda_k) u * \psi_k) \in \ell^q(K; L^p(\mathcal{N})),$$

其中 $(\lambda_k)_{k\in K}$ 是 Ω' 上的一个 (δ, R)-格，而 (ψ_k) 是 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 中的一族元素，使得 $((\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\psi_k)(\,\cdot\, t_k))$ 是 $C^\infty_c(\Omega')$ 中正元素的有界族，[4] 且 $\lambda_k = e_{\Omega'} \cdot t_k$，并且

$$\sum_k \mathcal{F}_{\mathcal{N}} \psi_k \geqslant 1$$

在 Ω' 上。

我们将 $\mathfrak{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 定义为满足以下条件的 $u \in \mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 空间：

$$(\Delta^{(\mathbf{s}-\mathbf{b}/2)/q}_{\Omega'}(\lambda_k) u * \psi_k) \in \ell^q(K; L^{p,q}(F, E)),$$

并赋予其相应拓扑。

$B^{p,q}_{\mathbf{s}}(\mathcal{N}, \Omega)$ 的定义不依赖于 δ, R、(λ_k) 和 (ψ_k) 的选取（参见 [15, 引理 4.14]）。此外， $B^{p,q}_{\mathbf{s}}(\mathcal{N}, \Omega)$ 是一个拟 Banach 空间（参见 [15, 命题 4.16] 和 [13, 命题 7.12]）。对于 $\mathfrak{B}^{p,q}_{\mathbf{s}}(\mathcal{N}, \Omega)$ 也有类似结论（参见命题 4.20）。

注意，根据 [15, 引理 5 陈述后面的注释1], , 存在常数 $c > 0$, 使得

$$f(\zeta, z) = c \int_{\mathcal{N}} f_0(\zeta, x) B^{\mathbf{b}+\mathbf{d}}_{(\zeta, x+i\Phi(\zeta))}(\zeta, z)\, \mathrm{d}(\zeta, x)$$

对于每个 $f \in H^2(D) = A^{2,\infty}_{\mathbf{0}}(D)$，并且对于每个 $(\zeta, z) \in D$，其中 f_0 是 (f_h) 在 $L^2(\mathcal{N})$ 中当 $h \to 0$ 时的极限 , $h \in \Omega$。换句 话说，

$$S_{(\zeta,z)} \coloneqq c\Big(B^{\mathbf{b}+\mathbf{d}}_{(\zeta,z)}\Big)_0$$

是柯西–塞格ő核（的边界值）。

The 以下结果是由 [15, 命题 4.20、定理 4.23 和引理 5.1] 推出的。

命题 3.8。 取 (λ_k) 和 (ψ_k) 如定义 *3.7* 所述，使得 $\sum_k (\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\psi_k)^2 = 1$ 在 Ω' 上成立。于是存在一个连续半双线性型

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \colon B^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega) \times B^{-\mathbf{s}-(1/p-1)_+(\mathbf{b}+\mathbf{d})}_{p',q'}(\mathcal{N}, \Omega) \ni (u, u') \mapsto \sum_k \langle u * \psi_k | u' * \psi_k \rangle \in \mathbb{C}$$

它诱导出一个反线性同构，将 $B^{-\mathbf{s}-(1/p-1)_+(\mathbf{b}+\mathbf{d})}_{p',q'}(\mathcal{N}, \Omega)$ 映到 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 在 $B^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 中的闭包的对偶空间。

此外，对每个 $(\zeta, z) \in D$，若 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{p}(\mathbf{b}+\mathbf{d}) + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$，则 $S_{(\zeta,z)} \in B^{-\mathbf{s}-(1/p-1)_+(\mathbf{b}+\mathbf{d})}_{p'\,q'}(\mathcal{N}, \Omega)$。

[4] 注意，这意味着 $(\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\psi_k)(\,\cdot\, t_k)$ 支撑于 Ω' 的某个固定紧子集上，并且其所有阶导数都一致有界。

类似的结果也适用于空间 $\mathfrak{B}^{\mathbf{s}}_{p,\ q}(\mathcal{N},\Omega)$（参见引理 4.22 以及命题4.25 陈述之后的注）。尽管如此，由于空间 $\mathfrak{B}^{\mathbf{s}}_{p,\ q}(\mathcal{N},\Omega)$ 在 $q=\infty$ 下的病态行为，若不定义附加空间，就无法在此陈述类似的结果。因此，我们请读者参阅上述结果，以了解更精确的信息。

定义3.9。给定 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{p}(\mathbf{b}+\mathbf{d})+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$，我们定义一个连续线性算子

$$\mathcal{E}\colon B^{-\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)\ni u\mapsto[(\zeta,z)\mapsto\langle u|S_{(\zeta,z)}\rangle]\in A^{\infty,\infty}_{\mathbf{s}-(\mathbf{b}+\mathbf{d})/p}(D),$$

$\widetilde{\ }$并将其像记为 $A^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$，赋予相应拓扑。

若 $q<\infty$，给定 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{q}{p}\mathbf{d}+\frac{q}{2q'}\mathbf{m}'$，我们定义一个连续线性映射

$$\mathcal{E}\colon\mathfrak{B}^{-\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)\ni u\mapsto[(\zeta,z)\mapsto\langle u|S_{(\zeta,z)}\rangle]\to A^{\infty,\infty}_{(\mathbf{s}-\mathbf{b}/2)/q-\mathbf{d}/p}.$$

$\widetilde{\ }$我们将 $\mathfrak{B}^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$ 在 $\mathcal{E}$ 下的像记为 $\mathfrak{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$，并赋予相应拓扑。

注意，对于每个 $u\in B^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$ 和每个 $u\in\mathfrak{B}^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$，当 $h\to 0$, $h\in\Omega'$ 时，$(\mathcal{E}u)_h\to u$ 属于 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$（参见 [15, 定理 5.2], [13, 命题 7.12], 和命题 4.23），因此 $\mathcal{E}$ 是单射，而 $\sim\qquad\sim B^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$ 和 $\mathfrak{B}^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$ 分别是 $A^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$ 和 $\mathfrak{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$ 的边界值空间（若有定义）。

以下结果由 [15, 命题 5.4和推论5.11],以及命题4.24推出。第二个断言实质上包含在 [2, 定理 1.7] 中，其中 p、$q\geqslant 1$、$n=0$、Ω 是对称的，且$\mathbf{s}\in\mathrm{Rd}$；而当 p、$q>1$、$n=0$且 Ω 是对称的时，该断言包含在 [21, 推论 4.7] 中。注意，包含关系$\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N}))\subseteq A^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$不能由 [15, 命题 5.4], 推出，但可由 [14, 定理 4.2]轻易得到。

定理 3.10。取 $p,q\in(0,\infty]$ 以及$\mathbf{s}\in\mathbb{R}^r$。那么，以下结论成立：

(1) 若$\mathbf{s}\succ\frac{1}{p}(\mathbf{b}+\mathbf{d})+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$，且$\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}$或 $q=\infty$且$\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$，则

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N}))\subseteq A^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)\subseteq\widetilde{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)$$

连续地，若……，则第二个包含关系取等号

$$\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}+\left(\frac{1}{2\min(p,p')}-\frac{1}{2q}\right)_+\mathbf{m}';$$

(2) 若 $q<\infty$且 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{q}{p}\mathbf{d}+\frac{q}{2q'}\mathbf{m}'$，$\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})$，则

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N}))\subseteq\mathfrak{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)\subseteq\widetilde{\mathfrak{A}}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)$$

连续地，若……，则第二个包含关系取等号

$$\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})+\left(\frac{q}{2\min(p,p')}-\frac{1}{2}\right)_+\mathbf{m}'.$$

注 3.11。我们明确地注意到，$\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})+\left(\frac{q}{2\min(p,p')}-\frac{1}{2}\right)_+\mathbf{m}'$当且仅当 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})$ 且

$$q<q_{\mathbf{s}}(p):=\min(p,p')\min_{j=1,\dots,r}\frac{2s_j+b_j+m'_j-m_j}{m'_j}.$$

我们还有传递结果（参见 [18, 定理 6.3]和命题4.24）。

命题 3.12。取 $p,q\in(0,\infty]$ 和 $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^r$。则有如下结论：

(1) 若 $\frac{1}{q}\mathbf{s}\succ-\frac{1}{2q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$ 且 $\mathfrak{A}^{p}_{,q\,\mathbf{s}+\mathbf{b}/2}(T_\Omega)=\widetilde{\mathfrak{A}}^{p}_{,q\,\mathbf{s}+\mathbf{b}/2}(T_\Omega)$，则 $\mathfrak{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)=\widetilde{\mathfrak{A}}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$；

(2) 若 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{p}(\mathbf{b}+\mathbf{d})+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$ 且 $A^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)=\widetilde{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$，则 $A^{p}_{,q\,\mathbf{s}-\mathbf{b}/p}(T_\Omega)=\widetilde{A}^{p}_{,q\,\mathbf{s}-\mathbf{b}/p}(T_\Omega)$。

3.5. **Bergman投影算子**。 关于 Bergman 投影算子的有界性，我们有以下结果。

命题 3.13。 设 p， $q\in[1,\infty]$ 和 $\mathbf{s}$， $\mathbf{s}'\in\mathbb{R}^r$。则有如下结论：

(1) 若 $\mathbf{s}'\prec\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2}\mathbf{m}$ 且 $P_{\mathbf{s}'}$ 诱导出一个从 $L^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 到 $A^{p,\mathbf{s}q}(D)$的连续线性投影算子，则：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{p}(\mathbf{b}+\mathbf{d})+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$，且 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}$ 或 $q=\infty$ 且 $\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$；
- $\mathbf{s}'\prec\frac{1}{\min(p,p')}(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2}\mathbf{m}')$；
- $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\frac{1}{p}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\frac{1}{2q}\mathbf{m}'$，且$\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2q'}\mathbf{m}$ 或 $q=1$ 且$\mathbf{s}+\mathbf{s}'\leqslant\mathbf{b}+\mathbf{d}$。

(2) 若 $q<\infty$，$\mathbf{s}'\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})$，且 $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}'}$ 在 $\mathfrak{L}^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 上诱导出一个连续线性投影算子，映到 $\mathfrak{A}^{p,\mathbf{s}q}(D)$，则：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b}),\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{q}{p}\mathbf{d}+\frac{q-1}{2}\mathbf{m}'$；
- $\mathbf{s}'\succ\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{\max(p,p')}\mathbf{d}+\frac{1}{2\min(p,p')}\mathbf{m}'$；
- $\mathbf{s}'-\frac{1}{q}\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q'}\mathbf{b}+\frac{1}{p'}\mathbf{d}+\frac{1}{2q}\mathbf{m}'$ *and* $\mathbf{s}'-\frac{1}{q}\mathbf{s}\succ-\frac{1}{2q'}\mathbf{b}+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}$ *or* $q=1$ *and* $\mathbf{s}'-\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$.

特别地，若 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})$， $p,q\in(1,\infty)$，且 $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}}$ 在 $\mathfrak{L}^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 上诱导出一个连续线性投影算子，映到 $\mathfrak{A}^{p,\mathbf{s}q}(D)$，则：

$$p'_{\mathbf{s}}<p<p_{\mathbf{s}}\qquad\text{and}\qquad Q'_{\mathbf{s}}(p')<q<Q_{\mathbf{s}}(p),$$

其中

$$p_{\mathbf{s}}:=\min_{j=1,\dots,r}\frac{m'_j-2d_j}{(b_j+m'_j-2s_j)_+}\qquad\text{and}\qquad Q_{\mathbf{s}}(p):=\min_{j=1,\dots,r}\frac{s_j-\frac{1}{2}b_j+\frac{1}{2}m'_j}{\left(\frac{1}{p}d_j+\frac{1}{2}m'_j\right)_+}.$$

此外还有传递结果（参见 [18, 6] 和推论 4.29）。

命题 3.14. 取 p， $q\in[1,\infty]$ 和 $\mathbf{s}$， $\mathbf{s}'\in\mathbb{R}^r$。则有以下结论：

- 若 $\mathbf{s}'\prec\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2}\mathbf{m}$，且 $P_{\mathbf{s}'}$ 在 $L^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 上诱导出一个到 $A^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 的连续线性投影算子，则 $P_{\mathbf{s}'}$在 $L^{p,\mathbf{s}q}(T_\Omega)$ 上诱导出一个到 $A^{p,\mathbf{s}q}(T_\Omega)$ 的连续线性投影算子；
- 若 $\mathbf{s}'\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})$，且 $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}'+\mathbf{b}/2}$ 在 $\mathfrak{L}^{p,\mathbf{s}q+\mathbf{b}/2}(T_\Omega)$ 上诱导出一个到 $\mathcal{A}^{p,\mathbf{s}q+\mathbf{b}/2}(T_\Omega)$ 的连续线性投影算子，则 $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}'}$ 在 $\mathfrak{L}^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 上诱导出一个到 $\mathfrak{A}^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 的连续线性投影算子。

以下结果是 [15, 推论 5.27]（另见 [18, 推论4.7]）、命题4.24 和定理 4.28 的推论。第二个断言包含在 [2, 定理 1.9] 中，其中 $p,q\geqslant1,\mathbf{s}=\mathbf{s}'$，$\Omega$ 是对称的，且 $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^r$；而当 $p,q\geqslant1,\mathbf{s}=\mathbf{s}'$，且 Ω 是对称的时，该断言包含在 [21, 推论 1.4] 中。

定理 3.15。 取 p， $q\in[1,\infty]$ 以及 $\mathbf{s}$， $\mathbf{s}'\in\mathbb{R}^r$。则有以下结论：

(1) *if:*

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}+\left(\frac{1}{2\min(p,p')}-\frac{1}{2q}\right)_+\mathbf{m}'$；
- $\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'\succ\frac{1}{2q'}\mathbf{m}+\left(\frac{1}{2\min(p,p')}-\frac{1}{2q'}\right)_+\mathbf{m}'$；

则 $P_{\mathbf{s}'}$ 诱导出一个从 $L^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 到 $A^{p,\mathbf{s}q}(D)$的连续线性投影算子；

(2) 若 $q<\infty$ 且：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})+\left(\frac{q}{2\min(p,p')}-\frac{1}{2}\right)_+\mathbf{m}'$；
- $\mathbf{s}'-\frac{1}{q}\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q'}(\mathbf{m}-\mathbf{b})+\left(\frac{1}{2\min(p,p')}-\frac{1}{2q'}\right)_+\mathbf{m}'$；

则 $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}'}$ 诱导出一个从 $\mathfrak{L}^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 到 $\mathfrak{A}^{p,\mathbf{s}q}(D)$的连续线性投影算子。

特别地，若 $\mathbf{s}=\mathbf{s}'\succ\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{b})$ 且

$$q'_{\mathbf{s}}(p)<q<q_{\mathbf{s}}(p),$$

那么， $\mathfrak{P}_{\mathbf{s}'}$ 诱导出一个连续线性投影算子，将 $\mathfrak{L}^{p,\mathbf{s}q}(D)$ 投影到 $\mathfrak{A}^{p,\mathbf{s}q}(D)$（参见定理 3.10 陈述后的注释）。

4. An Auxiliary Space

出于技术上的原因，我们将考虑以下空间

$$\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D) \coloneqq \left\{ f \in \mathrm{Hol}(D) \colon \|h \mapsto \|f^{(\zeta)}\|_{A^{p,q}_{\mathbf{s}}(T_\Omega)}\|_{L^q(E)} < \infty \right\}$$

and

$$\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s},0}(D) \coloneqq \mathrm{Hol}(D) \cap \mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s},0}(D),$$

其中，$\mathcal{L}^{p,\,q\,\mathbf{s},\,0}(D)$ 表示 $C_c(D)$ 在 $\mathcal{L}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$ 中的闭包（定义为 $\mathcal{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$，将其中的全纯函数空间替换为可测函数模可忽略函数所成的空间）。

注 4.1。取 $p,q \in (0,\infty]$ 且 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$。那么，当且仅当 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2q}\mathbf{m}$（分别地，$\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}$ if $q=\infty$）时，$\mathcal{A}^{p,\,q\,\mathbf{s},\,0}(D) \neq \{0\}$（分别地，$\mathcal{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D) \neq \{0\}$）。

证明。按照 [15, 命题 3.5]中的方法论证。 □

引理 4.2。取 p，$q \in (0,\infty]$ 且 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$。那么，

$$\mathfrak{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D) = \mathcal{A}^{p,q}_{(\mathbf{s}+\mathbf{b}/2)/q}(D).$$

此外，如果 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2q}\mathbf{m}$，或者 $q=\infty$ 且 $\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}$，则

$$A^{p,q}_{\mathbf{s}}(D) = \mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)$$

当且仅当 $p=q$ 或 $E=\{0\}$。

注意，正如证明所示，若 $p \neq q$ 且 $E \neq \{0\}$，则 $\mathcal{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D) \not\subseteq A^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$，且 $\mathcal{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D) \not\supseteq A^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$。

证明。第一个断言显然。至于第二个断言，显然，若 $p=q$（根据 Fubini 定理）且 $E=\{0\}$，则 $A^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D) = \mathcal{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$。反过来，假设 $p \neq q$ 且 $E \neq \{0\}$，于是 $\mathbf{b} \neq 0$。注意，给定 $t \in T_+$ 和满足 $t \cdot \Phi = \Phi \circ (g \times g)$ 且 $f \in$ 全纯函数空间(D) 的 $g \in GL(E)$，有

$$\|f \circ (g \times t)\|_{A^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} = \Delta^{(\mathbf{b}+\mathbf{d})/p-\mathbf{s}}(t)\|f\|_{A^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}$$

and

$$\|f \circ (g \times t)\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} = \Delta^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}}(t)\|f\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}$$

于是，令 $t \to \infty$，我们看到拟 Banach 空间 $\mathcal{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$ 和 $A^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$ 上的范数不可比较。该断言由开映射定理和闭图定理得出。□

命题 4.3。取 p_1，p_2，q_1，$q_2 \in (0,\infty]$ 以及 $\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2} \in \mathbb{R}^r$。若

$$p_1 \leqslant p_2, \qquad q_1 \leqslant q_2, \qquad \textit{and} \qquad \mathbf{s_2} = \mathbf{s_1} + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\mathbf{d} + \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)\mathbf{b},$$

则 $\mathcal{A}^{p_1,\,q_1\mathbf{s_1}}(D) \subseteq \mathcal{A}^{p_2,\,q_2\mathbf{s_2}}(D)$ 以及 $\mathcal{A}^{p_1,\,q_1\mathbf{s_1},0}(D) \subseteq \mathcal{A}^{p_2,\,q_2\mathbf{s_2},0}(D)$。

此外，当 ζ 遍历 E 时，映射 $\mathcal{A}^{p_1,\,q_1\mathbf{s_1}}(D) \ni f \mapsto f^{(\zeta)} \in A^{p_1,\,q_1\,\mathbf{s_1}-\mathbf{b}/q_1}(T_\Omega)$ 是等度连续的，并将 $\mathcal{A}^{p_1,\,q_1\mathbf{s_1},0}(D)$ 映射到 $A^{p_1,\,q_1\,\mathbf{s_1}-\mathbf{b}/q_1,\,0}(T_\Omega)$。

证明。论证同 [15, 命题 3.2 和 3.7] 以及 [18, 命题 6.5]。 □

推论 4.4。取 p，$q \in (0,\infty]$，$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$，以及 $f \in \mathcal{A}^{p,\,\mathbf{s}\,q}(D)$。于是，对于每个 $\zeta \in E$，函数 $h \mapsto \|f^{(\zeta)}_h\|_{L^p(F)}$ 都是递减的（按照由 $\overline{\Omega}$ 诱导的序）。

证明。这由命题 4.3 和 [15, 推论 3.3] 得出。 □

命题 *4.5.* 取 $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (0,\infty]$，且 $\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2} \in R^r$. 若 $\mathcal{A}^{p_2,q_2\mathbf{s_2}}(D) \neq \{0\}$，则 $\mathcal{A}^{p_1,q_1\mathbf{s_1},0}(D) \cap \mathcal{A}^{p_2,q_2\mathbf{s_2}}(D)$ 在 $\mathcal{A}^{p_1,q_1\mathbf{s_1},0}(D)$ 中稠密（相应地，对于弱拓扑 $\sigma(\mathcal{A}^{p_1,q_1\mathbf{s_1}}(D)\ \mathcal{L}^{p_1'},\ q_1'\mathbf{s_1}+(1/q_1-1)+\mathbf{b}+(1/p_1-1)+\mathbf{d}(D))$，$\mathcal{A}^{p_1,q_1\mathbf{s}_1}(D) \cap \mathcal{A}^{p_2,q_2\mathbf{s_2}}(D)$ 在 $\mathcal{A}^{p_1,q_1\mathbf{s_1}}(D)$ 中稠密）。将 $\mathcal{A}^{p_2,q_2\mathbf{s_2},0}(D)$ 替换为 $\mathcal{A}^{p_2,q_2\mathbf{s_2}}(D)$，也有类似结论。

证明。 按照 [15, 命题 3.9], 的方法，利用推论 4.4 即可。 □

4.1. **再生核**。 注意到 $\mathcal{A}^{2}_{,\mathbf{s}}{}^{2}(D)=A^{2}_{,\mathbf{s}}{}^{2}(D)$，因此 $P_{\mathbf{b}+\mathbf{d}-2\mathbf{s}}$ 是从 $\mathcal{L}^{2}_{,\mathbf{s}}{}^{2}(D)$ 到 $\mathcal{A}^{2}_{,\mathbf{s}}{}^{2}(D)$ 的正交投影算子。

命题 *4.6.* 取 $p,q\in(0,\infty]$ 和 $\mathbf{s},\mathbf{s}'\in R^{r}$。那么，对于某个/每个 $(\zeta,z)\in D$， $B^{\mathbf{s}'}{}_{(\zeta,z)}\in\mathcal{A}^{p}_{,q}{}_{\mathbf{s},0}(D)$（分别为 $B^{\mathbf{s}'}{}_{(\zeta,z)}\in\mathcal{A}^{p}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D)$）当且仅当以下条件成立：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}$ （分别为 $\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$，若 $q=\infty$）；
- $\mathbf{s}'\prec\frac{1}{p}\mathbf{d}-\frac{1}{2p}\mathbf{m}'$（分别为 $\mathbf{s}'\leqslant\mathbf{0}$，若 $p=\infty$）；
- $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}-\frac{1}{2q}\mathbf{m}'$（分别为 $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\leqslant\frac{1}{p}\mathbf{d}$ 若 $q=\infty$）。

在这种情况下，

$$\|B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta,z)}\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}=\|B^{\mathbf{s}'}_{(0,ie_{\Omega})}\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\Delta_{\Omega}^{\mathbf{s}+\mathbf{s}'-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p}(\rho(\zeta,z))$$

对于每个（ζ， z）$\in D$。

证明。 由 [15, 引理 2.32、2.35 和 2.39，以及推论 2.22 和 2.36]可得。 □

命题 4.7。 取 p， $q\in$（0， ∞] 以及 $\mathbf{s}$， $\mathbf{s}'\in\mathbb{R}^{r}$，使得以下条件成立：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$;
- $\mathbf{s}'\prec\frac{1}{p'}\mathbf{d}-\frac{1}{2p'}\mathbf{m}',\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2}\mathbf{m}$;
- $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\frac{1}{\min(1,q)}\mathbf{b}+\frac{1}{\min(1,p)}\mathbf{d}-\frac{1}{2q'}\mathbf{m}$ *or* $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\leqslant\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{\min(1,p)}\mathbf{d}$ *if* $q'=\infty$.

那么， $P_{\mathbf{s}'}f=f$ 对于每个 $f\in\mathcal{A}^{p}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D)$。

证明。 仿照证明 [15, 命题 3.13],, 使用命题 4.3 和 4.6 即可。 □

4.2. **采样**。

定义 4.8。 对于每个 $\mathbf{s}\in\mathrm{R}^{r}$，我们将 $\mathscr{M}_{\mathbf{s}}$ 定义为满足以下条件的 $f\in\mathrm{Hol}(D)$ 空间：函数 $(\zeta,z)\mapsto\Delta_{\Omega}^{\mathbf{s}}(\rho(\zeta,z))\mathrm{e}^{-|\zeta|^{2\alpha}-\text{实部 }z|^{\alpha}-|\rho(\zeta,\ z)|^{\alpha}}f(\zeta,z)$ 对某个 $\alpha\in[0,1/2)$ 在 D 上有界。

注意，对于 $\mathbf{s}\,6\,\mathbf{s}'$，有 $\mathscr{M}_{\mathbf{s}}\subseteq\mathscr{M}_{\mathbf{s}'}$，并且

$$\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)\subseteq\mathcal{A}^{\infty,\infty}_{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p}(D)\subseteq\mathscr{M}_{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p}$$

根据命题 4.3，对于每个 $\mathbf{s}\in\mathrm{R}^{r}$，

定理 *4.9*。取 $p,q\in(0,\infty]$, $\mathbf{s}\in R^{r}$, $R_{0}>1$ 和 $\delta_{+}>0$，且 $\mathbf{s}'\geqslant\mathbf{s}-\frac{1}{q}\mathbf{b}-\frac{1}{p}\mathbf{d}$。则存在 $\delta_{-},C>0$，使得对于每个 F-(δ,R)-格 $(\zeta_{k},z_{j,k})_{j\in J,k\in K}$ 在 D 上，若 $R\in(1,R_{0}]$，定义

$$S_{+}\colon\mathrm{Hol}(D)\ni f\mapsto\left(\Delta_{\Omega}^{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p}(h_{k})\max_{\overline{B}((\zeta_{k},z_{j,k}),R\delta)}|f|\right)\in\mathbb{C}^{J\times K}$$

and

$$S_{-}\colon\mathrm{Hol}(D)\ni f\mapsto\left(\Delta_{\Omega}^{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p}(h_{k})\min_{\overline{B}((\zeta_{k},z_{j,k}),R\delta)}|f|\right)\in\mathbb{C}^{J\times K},$$

其中 $h_{k}:=\rho(\zeta_{k},\ z_{j,\ k})$ 对每个 $j\in J$ 以及每个 $k\in K$，则

$$\frac{1}{C}\|f\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\leqslant\delta^{m/p+(2n+m)/q}\|S_{\varepsilon}f\|_{\ell^{p,q}(J,K)}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}$$

对每个 $f\in$ 全纯函数空间(D) 以及每个 $\delta\in(0,\ \delta_{+}]$ 若 $\varepsilon=+$，并且对每个 $f\in\mathscr{M}_{\mathbf{s}'}$ 以及每个 $\delta\in(0,\ \delta_{-}]$ 若 $\varepsilon=-$。此外，

$$\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s},0}(D)=\mathrm{Hol}(D)\cap S_{+}^{-1}(\ell^{p,q}_{0}(J,K))\qquad and\qquad\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s},0}(D)=\mathscr{M}_{\mathbf{s}'}(D)\cap S_{-}^{-1}(\ell^{p,q}_{0}(J,K)),$$

其中第二个等式成立的条件是 $\delta\leqslant\delta_{-}$。

在开始证明之前，我们需要一个类似于 [15, 引理 3.26] 的结果。

引理 4.10。存在 $R_0' > 0$ 和一个常数 $C > 0$，使得，对于每个 $p,\ q \in (0,\ \infty]$，对于每个$R' \in (0,\ R_0']$，对于每个 $f \in$ 全纯函数空间(D) 以及每个 $(\zeta,\ h) \in E \times \Omega$，

$$\|f_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)} \leqslant C^{1/\min(1,p,q)} \left(\fint_{B_{E\times\Omega}((\zeta,h),R')} \|f_{h'}^{(\zeta')}\|_{L^p(F)}^q \,\mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta,h) \right)^{1/q}.$$

（如果 $q=\infty$，则进行修改）。

证明。记 $\ell \coloneqq \min(1,p,q)$，以简化记号。根据 [15, 引理 3.24], ，存在 $R_0 > 0$ 和 $C' > 0$，使得

$$|f(\zeta,z)|^\ell \leqslant C' \fint_{B((\zeta,z),R)} |f|^\ell \,\mathrm{d}\nu_D$$

对于每个 $f \in$ 全纯函数空间(D)、每个 $(\zeta,z) \in D$以及每个 $R \in (0,R_0]$，均有。然后，应用闵可夫斯基积分不等式（指数为 $\frac{p}{\ell}$）和杨氏不等式，

$$\begin{aligned}\|f_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}^\ell &\leqslant C'C_R' \fint_{B_{E\times\Omega}((\zeta,h),R)} \left\| |f_{h'}^{(\zeta')}|^\ell * [(\chi_{B((\zeta,i\Phi(\zeta)+ih),R)})_{h'}^{(\zeta')}]^\sim \right\|_{L^{p/\ell}(F)} \Delta_\Omega^{\mathbf{d}}(h') \,\mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta',h') \\ &\leqslant C'' \fint_{B_{E\times\Omega}((\zeta,h),R)} \left\| f_{h'}^{(\zeta')} \right\|_{L^p(F)}^\ell \frac{\Delta_\Omega^{\mathbf{d}}(h')}{\Delta_\Omega^{\mathbf{d}}(h)} \,\mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta',h')\end{aligned}$$

对于每个 $f \in$ 全纯函数空间(D)以及每个 $h \in \Omega$，其中

$$C_R' \coloneqq \frac{\nu_{E\times\Omega}(B_{E\times\Omega}((0,e_\Omega),R))}{\nu_D(B((0,ie_\Omega),R))}$$

and

$$C'' \coloneqq C' \sup_{0<R\leqslant R_0} \sup_{(\zeta',h')\in E\times\Omega} C_R' \left\| (\chi_{B((0,ie_\Omega),R)})_{h'}^{(\zeta')} \right\|_{L^1(F)}.$$

根据 [15, 推论 2.49], ，存在常数 $C > 0$，使得对于每个 $f \in$ 全纯函数空间(D)以及每个 $h \in \Omega$，

$$\|f_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}^\ell \leqslant C \fint_{B_{E\times\Omega}((\zeta,h),R)} \left\| f_{h'}^{(\zeta')} \right\|_{L^p(F)}^\ell \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta',h'),$$

若 $R \in (0,R_0]$。那么，詹森不等式（指数为 $\frac{q}{\ell}$）得出结论。 □

定理 *4.9* 的证明。为简便起见，我们通常将计算表述为仿佛 $p,q < \infty$。当 $\max(p,q) = \infty$ 时所需的（纯形式上的）修改留给读者完成。在整个证明中，对于每个 $t \in T_+$，我们用 g_t 表示 $GL(E)$ 中满足 $t\cdot\Phi = \Phi\circ(g_t \times g_t)$ 的一个元素。步骤 I。定义如下：对于每个 $R' > 0$、每个 $\zeta \in E$以及每个 $h \in \Omega$，

$$M_{R'}(\zeta,h) \coloneqq \left\| \left(\chi_{B((0,ie_\Omega),R')}\right)_h^{(\zeta)} \right\|_{L^1(F)} \leqslant \mathcal{H}^m(\mathrm{pr}_F(B((0,ie_\Omega),R'))) < \infty$$

那么，对于每个 $\ell \in (0,\infty]$、每个 $t' \in T_+$以及每个 $(\zeta',x') \in \mathcal{N}$，

$$\left\| \left(\chi_{B((\zeta',x'+i\Phi(\zeta)+it'\cdot e_\Omega),R')}\right)_h^{(\zeta)} \right\|_{L^\ell(F)} = \Delta^{-\mathbf{d}/\ell}(t') M_{R'}(g_{t'}^{-1}(\zeta-\zeta'), t'^{-1}\cdot h)^{1/\ell},$$

约定 $0^0 = 0$。特别地，

$$\left\| \left(\chi_{B((\zeta_k,z_{j,k}),R')}\right)_h^{(\zeta)} \right\|_{L^\ell(F)} = \chi_{B_{E\times\Omega}((\zeta_k,h_k),R')}(\zeta,h) \Delta_\Omega^{-\mathbf{d}/\ell}(h_k) M_{R'}(g_{t_k}^{-1}(\zeta-\zeta_k), t_k^{-1}\cdot h)^{1/\ell}$$

对于每个 $(\zeta,h) \in E\times\Omega$ 以及每个 $k \in K$，其中 $t_k \in T_+$ 满足 $h_k = t_k \cdot e_\Omega$。此外，

$$\|M_{R'}\|_{L^\infty(\nu_{E\times\Omega})} \asymp R'^m \text{ for } R' \to 0^+.$$

对于每个 $(\zeta,h) \in E\times\Omega$，定义

$$K_{\zeta,h} \coloneqq \{\, k \in K \colon (\zeta,h) \in B_{E\times\Omega}((\zeta_k,h_k), R\delta) \,\},$$

并注意到，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $(\zeta, h) \in E \times \Omega$，$\operatorname{Card}(K_{\zeta,h}) \leqslant N$，条件是 $R \leqslant R_0$ 且 $\delta \leqslant \delta_+$。我们还可以假设，每个 $(\zeta, h) \in E \times \Omega$ 至多包含在 N 个球 $B_{E\times\Omega}((\zeta_k, h_k), 2R\delta)$ 中，$k \in K$；并且每个 $(\zeta, z) \in D$ 至多包含在 N 个球 $B((\zeta_k, z_j), 2R\delta)$、$(j,k) \in J \times K$ 中，条件是 $R \leqslant R_0$ 且 $\delta \leqslant \delta_+$。最后，令 $\ell := \min(1, p, q)$。

第二步。我们来证明，S_+ 将 $\mathcal{A}^{p,\infty}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 映射到 $\ell^{p,\infty}{}_{0}{}^{q}(J,K)$。取 $f \in \mathcal{A}^{p,\infty}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$，并定义 $C_{D,R'} := \nu_D(B((0, ie_\Omega), R'))$ $C_{E\times\Omega,R'} := \nu_{E\times\Omega}(B_{E\times\Omega}((0, e_\Omega), R'))$，以及 $C_{\Omega,R'} := \nu_\Omega(B_\Omega(e_\Omega, R'))$，对每个 $R' > 0$ 都如此定义，以简化记号。于是，[15, 引理 3.24] 表明，存在 $R'_0 \in (0, 1/2]$ 和 $C_1 > 0$，使得

$$\max_{\overline{B}((\zeta_k, z_{j,k}), R\delta)} |f|^p \leqslant \frac{C_1}{C_{D,R'_0\delta}} \int_{B((\zeta_k, z_{j,k}), (R+R'_0)\delta)} |f|^p \, \mathrm{d}\nu_D$$

对每个 $(j,\ k) \in J \times K$。因此，[15, 推论 2.49] 表明，存在一个常数 $C_2 > 0$，使得 t

$$(S_+ f)^p_{j,k} \leqslant \frac{C_2}{C_{D,R'_0\delta}} \Delta_\Omega^{p\mathbf{s}-(p/q)\mathbf{b}}(h_k) \int_{E\times\Omega} \int_F |(\chi_{B((\zeta_k, z_{j,k}), (R+R'_0)\delta)} f)^{(\zeta)}_h(x)|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta, h)$$

对每个 $(j,k) \in J \times K$。因此，

$$\sum_{j\in J} (S_+ f)^p_{j,k} \leqslant \frac{C_2}{C_{D,R'_0\delta}} N \Delta_\Omega^{p\mathbf{s}-(p/q)\mathbf{b}}(h_k) \int_{B_{E\times\Omega}((\zeta_k, h_k), (R+R'_0)\delta)} \|f^{(\zeta)}_h\|^p_{L^p(F)} \, \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta, h)$$

对每个 $k \in K$ 均成立。现在，引理 4.10 表明存在常数 $C_3 > 0$，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{E\times\Omega}((\zeta_k, h_k), (R+R'_0)\delta)} \|f^{(\zeta)}_h\|^p_{L^p(F)} \, \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta, h) \\
&\quad \leqslant C_3 \int_{B_{E\times\Omega}((\zeta_k, h_k), (R+R'_0)\delta)} \left(\fint_{B_{E\times\Omega}((\zeta', h'), R'_0\delta)} \|f^{(\zeta)}_h\|^q_{L^p(F)} \, \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta, h) \right)^{p/q} \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta', h') \\
&\quad \leqslant C_3 \frac{C_{E\times\Omega,(R+R'_0)\delta}}{C^{p/q}_{E\times\Omega,R'_0\delta}} \left(\int_{B_{E\times\Omega}((\zeta_k, h_k), (R+2R'_0)\delta)} \|f^{(\zeta)}_h\|^q_{L^p(F)} \, \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta, h) \right)^{p/q}
\end{aligned}$$

对每个 $k \in K$ 均成立。因此，再应用一次 [15, 推论 2.49]，可知存在常数 $C'_2 > 0$，使得

$$\|S_+ f\|_{\ell^{p,q}(J,K)} \leqslant \frac{C'_2 C^{1/p}_{E\times\Omega,(R+R'_0)\delta}}{C^{1/p}_{D,R'_0\delta} C^{1/q}_{E\times\Omega,R'_0\delta}} N^{1/p+1/q} \|f\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}.$$

接下来，我们证明 $S_+(\mathcal{A}^{p,q}{}_{\mathbf{s},0}(D)) \subseteq \ell^{p,\infty}{}_{0}{}^{q}(J,K)$。注意，我们可以假设 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2q}\mathbf{m}$。于是，取 $\tilde{p} \in (0,p)$ 和 $\tilde{q} \in (0,q)$，使得 $\mathbf{s}'' := \mathbf{s} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\tilde{q}}\right)\mathbf{b} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}}\right)\mathbf{d} \succ \frac{1}{2\tilde{q}}\mathbf{m}$，并注意到，前面的 $\tilde{\ }\ \tilde{\ }$ 计算表明 $S_+(\mathcal{A}^{p,q}{}_{\mathbf{s},0}(D) \cap \mathcal{A}^{p,q}{}_{\mathbf{s}''}(D)) \subseteq \ell^{\tilde{p},\tilde{q}}(J,K) \subseteq \ell^{p,\infty}{}_{0}{}^{q}(J,K)$，因此由命题 4.5 可得所述结论。

步骤 III。现在，取 $f \in$ 全纯函数空间(D)，并假设 $S_+ f \in \ell^{p,\infty}{}_{0}{}^{q}(J,K)$（分别地，$S_+ f \in \ell^{p,q}(J,K)$），下面证明 $f \in \mathcal{A}^{p,q}{}_{\mathbf{s},0}(D)$（分别地，$f \in \mathcal{A}^{p,\infty}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$）。首先注意到

$$|f^{(\zeta)}_h| \leqslant \sum_{(j,k)\in J\times K_{\zeta,h}} \Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}}(h_k) \big(\chi_{B((\zeta_k, z_{j,k}), R\delta)}\big)^{(\zeta)}_h (S_+ f)_{j,k}$$

在 F 上，对于每个 $(\zeta, h) \in E \times \Omega$，使得对于每个 $(\zeta, h) \in E \times \Omega$，$f^{(\zeta)}_h \in L^p_0(F)$（分别为 $f^{(\zeta)}_h \in L^p(F)$）。此外，

$$\begin{aligned}
\|f^{(\zeta)}_h\|_{L^p(F)} &\leqslant N^{1/p'} \left\| \left(\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q-\mathbf{s}}(h_k) M_{R\delta}(g^{-1}_{t_k}(\zeta - \zeta_k), t_k^{-1} \cdot h)^{1/p} (S_+ f)_{j,k} \right)_{j,k} \right\|_{\ell^p(J\times K_{\zeta,h})} \\
&\leqslant N^{1/p'+(1/p-1/q)_+} \|M_{R\delta}\|^{1/p}_\infty \left\| \left(\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q-\mathbf{s}}(h_k) \|((S_+ f)_{j,k})_j\|_{\ell^p(J)} \right)_k \right\|_{\ell^q(K_{\zeta,h})}
\end{aligned}$$

对于每个 $(\zeta,h)\in E\times\Omega$，使得 $(\zeta,h)\mapsto\|f_{(\zeta)h}\ \|_{L^p(F)}$ 属于 $L_0^q(E\times\Omega)$，并且存在常数 $C_2''>0$（参见 [15, 推论 2.49]），使得

$$\|f\|_{\mathcal{A}_{\mathbf{s}}^{p,q}(D)}\leqslant N^{1/p'+\max(1/p,1/q)}\|M_{R\delta}\|_\infty^{1/p}C_{E\times\Omega,R\delta}^{1/q}C_2''\|S_+f\|_{\ell^{p,q}(J,K)}.$$

步骤 IV. 注意，若 $(\zeta'_{k'},z'_{j',\ k'})_{j'\in J',\ k'\in K'}$ 是 D 上的一个 F-(δ,R')-格，则存在两个映射 $\iota_1\colon\ K'\to K$ 和 $\iota_2\colon\ J'\times K'\to J$，使得对每个 $j'\in J'$ 和每个 $k'\in K'$，令 $h'_{k'}:=\rho(\zeta'_{k'},z'_{j',\ k'})$，

$$(\zeta'_{k'},h'_{k'})\in B_{E\times\Omega}((\zeta_{\iota_1(k')},h_{\iota_1(k')}),R\delta)$$

and

$$(\zeta'_{k'},z'_{j',k'})\in B((\zeta_{\iota_1(k')},z_{\iota_2(j',k'),\iota_1(k')}),R\delta)$$

对每个 $j'\in J'$ 和每个 $k'\in K'$。定义

$$S'_-\colon\ \mathrm{Hol}(D)\ni f\mapsto\left(\Delta_\Omega^{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p}(h'_{k'})\min_{\overline{B}((\zeta'_{k'},z'_{j',k'}),(R+R')\delta)}|f|\right)\in\mathbb{C}^{J'\times K'},$$

并注意　　根据 [15, 推论 2.49] 及前述注记，存在一个常数 $C'>0$，使得　　t

$$(S'_-f)_{j',k'}\leqslant C'(S_-f)_{\iota_2(j',k'),\iota_1(k')}$$

对每个 $f\in\mathrm{Hol}(D)$、每个 $j'\in J'$ 以及每个 $k'\in K'$ 均成立。此外，存在一个 $N'\in\mathbf{N}$，使得 ι_1 的纤维以及 $(j',k')\mapsto(\iota_2(j',k')\ \iota_1(k'))$ 的纤维至多含有 N' 个元素。因此，

$$\|S'_-f\|_{\ell^{p,q}(J',K')}\leqslant C'N'^{1/p+1/q}\|S_-f\|_{\ell^{p,q}(J,K)}$$

对每个 $f\in\mathrm{Hol}(D)$。此外，如果 $S_-f\in\ell^p{}_0{}^q(J,K)$，那么 $S'_-f\in\ell^p{}_0{}^q(J',K')$。

此外请注意，如果 $R'\geqslant 8$，那么我们可以选择 $(\zeta'_{k'},z'_{j',k'})_{j'\in J',k'\in K'}$，使得 $K'=K'_1\times K'_2$，使得 $h'_{(k'_1,k'_2)}=h'_{(k''_1,k'_2)}$ 对每个 $k'_1,k''_1\in K'_1$ 以及每个 $k'_2\in K'_2$ 都成立，并且使得 $(h'_{(k'_1,k'_2)})_{k'_2\in K'_2}$ 是 Ω 上的一个 (δ,R')- 格，其中某个 / 每个 $k'_1\in K'_1$ 均可（论证方式同 [15, 引理 2.55] 的证明）。

步骤 V。取 $f\in\mathscr{M}_{\mathbf{s}'}(D)$，使得 $S_-f\in\ell^{p,q}(J,K)$，并证明

$$\|f\|_{\mathcal{A}_{\mathbf{s}}^{p,q}(D)}\leqslant C\delta^{m/p+(2n+m)/q}\|S_-f\|_{\ell^{p,q}(J,K)}$$

对于适当的常数 $C>0$（仅取决于 δ_- 和 R_0），只要 δ_- 足够小即可。首先注意，根据步骤 IV，将 R 替换为 $R+8$后，我们不妨假设 $(\zeta_k,z_{j,k})$ 是一个 F-(δ,R)-格，且$K=K'\times K''$，且 $h_{(k',k'')}$ 仅取决于 k''（因此我们也用 $h_{k''}$ 代替 $h_{(k',k'')}$），并且 $(h_{k''})$ 是 Ω 中的一个 (δ,R)-格。注意，对于每个 $(j,k)\in J\times K$，我们都可以找到 $(\zeta'_{j,k},z'_{j,k})\in\overline{B}((\zeta_k,z_{j,k})\ R\delta)$，使得

$$|f(\zeta'_{j,k},z'_{j,k})|=\min_{\overline{B}((\zeta_k,z_{j,k}),R\delta)}|f|.$$

现在，[15, 引理 3.24 和 3.25] 推出，存在 $R'_1\in(0,R'_0]$ 和 $C_3>0$，使得对于每个 $j\in J$、每个 $k\in K$、每个 $(\zeta,x)\in\mathcal{N}$，以及每个满足 $d((\zeta_k,z_{j,\ k}),(\zeta,x+i\Phi(\zeta)\ +ih))<R\delta$ 的 $h\in\Omega$，

$$|f_h^{(\zeta)}(x)|\leqslant|f(\zeta'_{j,k},z'_{j,k})|+C_3R\delta\|\chi_{B((\zeta,x+i\Phi(\zeta)+ih),2R\delta+R'_1)}f\|_{L^p(\nu_D)},$$

假设 $R\delta\leqslant R'_1$ 成立。那么，

$$\begin{aligned}\|f_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}^p\leqslant{}&2^{(p-1)_+}\|M_{R\delta}\|_{L^\infty(E\times\Omega)}\sum_{(j,k)\in J\times K_{\zeta,h}}\Delta_\Omega^{-\mathbf{d}}(h_k)|f(\zeta'_{j,k},z'_{j,k})|^p\\&+2^{(p-1)_+}(C_3R\delta)^p\Theta_1(\zeta,h),\end{aligned}$$

其中

$$\Theta_1(\zeta,h):=\sum_{(j,k)\in J\times K_{\zeta,h}}\int_F(\chi_{B((\zeta_k,z_{j,k}),R\delta)})_h^{(\zeta)}(x)\int_D\chi_{B((\zeta,x+i\Phi(\zeta)+ih),2R\delta+R'_1)}|f|^p\,\mathrm{d}\nu_D\,\mathrm{d}x.$$

现在，设

$$K_h'' \coloneqq \{\, k'' \in K'' \colon h \in B_\Omega(h_{k''}, R\delta) \,\}$$

对每个 $h \in \Omega$，并注意到我们可以假设，对每个 $h \in \Omega$，

$$\operatorname{Card} K_h'' \leqslant N,$$

假设 $\delta \leqslant \delta_+$，如步骤 I 中所示。于是， [15, 推论 2.49] 表明存在常数 $C_4 > 0$ ，使得若 $R\delta \leqslant R_1'$，

$$\begin{aligned}
&\int_E \left(\sum_{(j,k)\in J\times K_{\zeta,h}} \Delta_\Omega^{-\mathbf{d}}(h_k) |f(\zeta_{j,k}', z_{j,k}')|^p \right)^{q/p} \mathrm{d}\zeta \\
&\quad \leqslant N^{(q/p-1)_+} \sum_{k''\in K_h''} \Delta_\Omega^{-(q/p)\mathbf{d}}(h_k) \int_E \sum_{k' \colon (k',k'')\in K_{\zeta,h}} \left(\sum_{j\in J} |f(\zeta_{j,(k',k'')}', z_{j,(k',k'')}')|^p \right)^{q/p} \mathrm{d}\zeta \\
&\quad \leqslant C_{E,R\delta} N^{\max(1,q/p)} \sum_{k''\in K_h''} \Delta_\Omega^{-q(\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p)}(h_{k''}) \sum_{k'\in K'} \left(\sum_{j\in J} |f(\zeta_{j,(k',k'')}', z_{j,(k',k'')}')|^p \right)^{q/p} \\
&\quad \leqslant C_4 \delta^{2n} N^{\max(1,q/p)} \Delta_\Omega^{-q\mathbf{s}}(h) \sum_{k''\in K_h''} \sum_{k'\in K'} \left(\sum_{j\in J} |(S_- f)_{j,(k',k'')}|^p \right)^{q/p}
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由映射 $x \mapsto x^{q/p}$ 在 R+ 上的凸性或次可加性得出，第二个不等式则由 Tonelli定理得出，令 $C_{E,R\delta} \coloneqq \mathcal{H}^{2n}(\mathrm{pr}_E(B_{E\times\Omega}((0, e_\Omega)\ R\delta)))$。

现在，注意到

$$\Theta_1(\zeta, h) = \int_D |f(\zeta', z')|^p \Theta_2(\zeta', z', \zeta, h)\, \mathrm{d}\nu_D(\zeta', z'),$$

其中

$$\Theta_2(\zeta', z', \zeta, h) \coloneqq \int_F \sum_{(j,k)\in J\times K_{\zeta,h}} (\chi_{B((\zeta_k, z_{j,k}), R\delta)\cap B((\zeta', z'), 2R\delta+R_1')})_h^{(\zeta)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

此外，对于每个 $(\zeta', z') \in D$ 以及每个 $(\zeta, h) \in E \times \Omega$，令 $h' \coloneqq \rho(\zeta', z')$，则有

$$\Theta_2(\zeta', z', \zeta, h) \leqslant N \|(\chi_{B((\zeta', z'), 2R\delta+R_1')})_h^{(\zeta)}\|_{L^1(F)} = N M_{2R\delta+R_1'}(g_{t'}^{-1}(\zeta - \zeta'), t'^{-1} \cdot h) \Delta_\Omega^{-\mathbf{d}}(h'),$$

条件是 R $\leqslant R_0$ 和 $\delta \leqslant \delta_+$，其中 $t' \in T_+$ 满足 $h' = t' \cdot e_\Omega$。因此，根据步骤 I，我们可知 at

$$\Theta_1(\zeta, h) \leqslant N \|M_{2R\delta+R_1'}\|_{L^\infty(E\times\Omega)} \int_{B_{E\times\Omega}((\zeta,h), 2R\delta+R_1')} \|f_{h'}^{(\zeta')}\|_{L^p(F)}^p \, \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta', h'),$$

条件是 $R \leqslant R_0$ 和 $\delta \leqslant \delta_+$。然后，如第二步中那样应用引理 4.10，可知存在一个常数$C_5 > 0$ 使得

$$\int_E \Theta_1(\zeta, h)^{q/p}\, \mathrm{d}\zeta \leqslant C_5 \int_{B_\Omega(h, 2R\delta+2R_1')} \|f_{h'}\|_{L^{p,q}(F,E)}^q \, \mathrm{d}\nu_\Omega(h')$$

条件是 $R \leqslant R_0$ 和 $\delta \leqslant \delta_+$。

因此，存在一个常数 $C_6 > 0$ 使得 t

$$\|f_h\|_{L^{p,q}(F,E)} \leqslant C_6 \Delta_\Omega^{-\mathbf{s}}(h) \delta^{m/p+2n/q} \|S_- f\|_{\ell^{p,q}(J,K'\times K_h'')} + \delta C_6 \left(\int_{B_\Omega(h, 2R\delta+2R_1')} \|f_{h'}\|_{L^{p,q}(F,E)}^q \, \mathrm{d}\nu_\Omega(h') \right)^{1/q},$$

前提是 $R \leqslant R_0$ 且 $\delta \leqslant \min(R_1'/R_0, \delta_+)$。

现在，根据假设，存在 $\alpha' \in (0, 1/2)$，使得

$$\sup_{(\zeta,z)\in D} \Delta_\Omega^{\mathbf{s}'}(\rho(\zeta,z))\mathrm{e}^{-|\zeta|^{2\alpha'}-|\operatorname{Re} z|^{\alpha'}-|\rho(\zeta,z)|^{\alpha'}}|f(\zeta,z)| < \infty.$$

然后，取 $(g^{(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ 如 [15, 引理 122] 中所述的某个 $\alpha \in (\alpha', 1/2)$，使得 $G(\varepsilon) := fg^{(\varepsilon)} \in \mathcal{A}^{p,\ \infty\,\mathbf{s}'}(D)$ 且 $S_-G(\varepsilon) \leqslant S_-f$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 均成立。特别地，根据推论 4.4，映射 $h \mapsto \|G(\varepsilon)_h\|_{L^{p,\ q}(F,\ E)}$</style}在$\Omega$上是（有限且）递减的，对每个 $\varepsilon > 0$ 均如此。此外，注意到我们可以取 $\delta_1 \in (0, \min(R_1'/R_0, \delta_+)]$，并使 R_1' 足够小，从而 $B_\Omega(e_\Omega, 2R_0\delta_1 + 2R_1') \subseteq e_\Omega/2 + \Omega$。然后，由齐次性，

$$B_\Omega(h, 2R_0\delta_1 + 2R_1') \subseteq h/2 + \Omega$$

对每个 $h \in \Omega$。于是，将前述估计应用于 $G(\varepsilon)$ 可知，存在常数 $C_6' > 0$ 使得

$$\|G(\varepsilon)_h\|_{L^{p,q}(F,E)} \leqslant C_6'\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}}(h)\delta^{m/p+2n/q}\|S_-f\|_{\ell^{p,q}(J,K'\times K_h'')} + \delta C_6'\big\|G(\varepsilon)_{h/2}\big\|_{L^{p,q}(F,E)},$$

对每个 $\varepsilon > 0$，只要 $\delta \leqslant \delta_1$ 且 $R \leqslant R_0$。若定义

$$\chi_\ell \colon D \ni (\zeta, z) \mapsto \chi_{e_\Omega/2^\ell+\Omega}(\rho(\zeta,z)) \in \mathbb{R}_+$$

对每个 $\ell \in \mathbf{N}$，则存在常数 $C_6'' > 0$ 使得

$$\|\chi_\ell G(\varepsilon)\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} \leqslant C_6''\delta^{m/p+(2n+m)/q}\|S_-f\|_{\ell^{p,q}(J,K)} + \delta C_6''\|\chi_{\ell+1}G(\varepsilon)\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}$$

对每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $\ell \in \mathbf{N}$，只要 $\delta \leqslant \delta_1$ 且 $R \leqslant R_0$。现在，定义

$$e_{\alpha'} \colon D \ni (\zeta, z) \mapsto \mathrm{e}^{|\zeta|^{2\alpha'}+|\operatorname{Re} z|^{\alpha'}+|\operatorname{Im} z-\Phi(\zeta)|^{\alpha'}} \in \mathbb{R}_+,$$

并注意到

$$\begin{aligned}
\|G(\varepsilon)\chi_\ell\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} &\leqslant \|e_{\alpha'}^{-1}f\|_{\mathcal{L}^{\infty,\infty}_{\mathbf{s}'}(D)}\Big\|e_{\alpha'}g^{(\varepsilon)}\chi_\ell\Big\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)} \\
&\leqslant C_{7,\varepsilon}\|e_{\alpha'}^{-1}f\|_{\mathcal{L}^{\infty,\infty}_{\mathbf{s}'}(D)}\Big\|\chi_{e_\Omega/2^\ell+\Omega}\Delta_\Omega^{\mathbf{s}-\mathbf{s}'}\mathrm{e}^{-C_{7,\varepsilon}|\cdot|^\alpha}\Big\|_{L^q(\nu_\Omega)} \\
&\leqslant C'_{7,\varepsilon}\|e_{\alpha'}^{-1}f\|_{\mathcal{L}^{\infty,\infty}_{\mathbf{s}'}(D)}\|\chi_{e_\Omega/2^\ell+\Omega}\Delta_\Omega^{\mathbf{s}-\mathbf{s}'+\mathbf{d}/q}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathrm{e}^{-C_{7,\varepsilon}|\cdot|^\alpha}\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leqslant C''_{7,\varepsilon}2^{(\mathbf{s}'-\mathbf{s}-\mathbf{d}/q)\ell}\|e_{\alpha'}^{-1}f\|_{\mathcal{L}^{\infty,\infty}_{\mathbf{s}'}(D)}
\end{aligned}$$

对于适当的常数 $C_{7,\ \varepsilon}$、$C'_{7,\ \varepsilon}$、$C''_{7,\ \varepsilon} > 0$，因为 $\mathbf{s} - \mathbf{s}' + \mathbf{d}/q \leqslant \mathbf{0}$（参见 [15, 推论 2.36]）。然后，固定 $N' > \sum_{j=1}^r(s_j' - s_j) + m/q$，并选择 $\delta_- \in (0, \delta_1]$ 使得 $C_6''\delta_- \leqslant 2^{-N'}$。注意到前面的计算表明，若 $\delta \in (0, \delta_-]$，则

$$\begin{aligned}
\|G(\varepsilon)\chi_\ell\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} &= \sum_{\ell'\in\mathbb{N}} 2^{-\ell' N'}\left(\|G(\varepsilon)\chi_{\ell+\ell'}\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} - \frac{1}{2^{N'}}\|G(\varepsilon)\chi_{\ell+\ell'+1}\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\right) \\
&\leqslant \frac{C_6''}{1-2^{-N'}}\delta^{m/p+(2n+m)/q}\|S_-f\|_{\ell^{p,q}(J,K)}
\end{aligned}$$

对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $\ell \in \mathbf{N}$。当 $\ell \to \infty$ 时取极限，继而可推得 $G(\varepsilon) \in \mathcal{A}^{p,\ \mathbf{s}\ q}(D)$，并且

$$\|G(\varepsilon)\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} \leqslant \frac{C_6''}{1-2^{-N'}}\delta^{m/p+(2n+m)/q}\|S_-f\|_{\ell^{p,q}(J,K)}$$

对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立。然后，对 $\varepsilon \to 0^+$ 取极限可得 $f \in \mathcal{A}^{p,\ \mathbf{s}\ q}(D)$，并且

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} \leqslant \frac{C_6''}{1-2^{-N'}}\delta^{m/p+(2n+m)/q}\|S_-f\|_{\ell^{p,q}(J,K)}.$$

第六步。只剩下证明，对于每个满足 $S_-f \in \ell^{p,\,0}{}^{q}(J,K)$ 的 $f \in \mathcal{A}^{p,\,}{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$，只要 δ_- 足够小，就有 $f \in \mathcal{A}^{p,\,q\,\mathbf{s},\,0}(D)$。首先注意，前面的计算表明

$$\|\chi_\ell(f-G(\varepsilon))\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)} \leqslant \frac{C_6''}{1-2^{-N'}}\delta^{m/p+(2n+m)/p}\|S_-(f-G(\varepsilon))\|_{\ell^{p,q}(J,K)}$$

对每个 $\ell\in\mathbf{N}$ 以及每个 $\varepsilon>0$。由于 $S_-(f-G(\varepsilon))\,6\,(S_-f)\,\widetilde{S}_+(1-g^{(\varepsilon)})$，其中

$$\big[\widetilde{S}_+(1-g^{(\varepsilon)})\big]_{j,k} \coloneqq \max_{B((\zeta_k,z_{j,k}),R\delta)}\left|1-g^{(\varepsilon)}\right|$$

对每个 $(j,k)\in J\times K$，并且由于 $1-g^{(\varepsilon)}\to 0$ 在局部一致收敛，很容易看出，对于每个 $\ell\in\mathbf{N}$，$\chi_\ell(f-G(\varepsilon))\to 0$属于 $\mathcal{L}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D)$。特别地，对每个 $h\in\Omega$，都有 $f_h\in L^{p,\,0}{}^{q}(F,E)$，并且映射$h\mapsto\chi_{e_\Omega/2^\ell+\Omega}(h)\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h)\|f_h\|_{L^{p,\,q}(F,E)}$ 对每个 $\ell\in\mathbf{N}$ 都属于 $L^q_0(\nu_\Omega)$。总之，基本上只需证明：若 $q=\infty$，则当 h 趋近于 Ω 的边界时，$\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h)\|f_h\|_{L^{p,\infty}(F,E)}\to 0$。注意，根据前面的计算，存在一个常数 $C_8>0$（即 $C_6'\max(1,\delta_-^{m/p})$），使得

$$\|f_h\|_{L^{p,\infty}(F,E)}\leqslant C_8\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}}(h)\|S_-f\|_{\ell^{p,\infty}(J,K'\times K_h'')}+\delta C_8\|f_{h/2}\|_{L^{p,\infty}(F,E)}$$

对每个 $h\in\Omega$。注意到

$$\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h)\|f_{h/2}\|_{L^{p,\infty}(F,E)}=2^{\mathbf{s}}\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h/2)\|f_{h/2}\|_{L^{p,\infty}(F,E)}\leqslant 2^{\mathbf{s}}\|f\|_{\mathcal{A}^{p,\infty}_{\mathbf{s}}(D)}$$

对每个 $h\in\Omega$。因此，假设 δ_- 足够小，使得 $\delta_-C_8 2^{\mathbf{s}}\leqslant 1/2$,

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h)\|f_h\|_{L^{p,\infty}(F,E)}&=\sum_{\ell\in\mathbb{N}}2^{-\ell}\left(\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h/2^\ell)\|f_{h/2^\ell}\|_{L^{p,\infty}(F,E)}-\frac{1}{2\cdot 2^{\mathbf{s}}}\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h/2^\ell)\|f_{h/2^{\ell+1}}\|_{L^{p,\infty}(F,E)}\right)\\&\leqslant C_8\sum_{\ell\in\mathbb{N}}2^{-\ell}\|S_-f\|_{\ell^{p,\infty}(J,K'\times K''_{h/2^\ell})}\end{aligned}$$

对每个 $h\in\Omega$。现在注意到 $\eta\coloneqq\min_{\ell\in\mathbb{N}}d_\Omega(e_\Omega,e_\Omega/2^{\ell+1})>0$，并且根据齐次性，对每个 $h\in\Omega$，都有 $\eta=\min_{\ell\in\mathbb{N}}d_\Omega(h,h/2^{\ell+1})$。因此，若 δ_- 足够小，使得 $2R_0\delta_-<\eta$，则当 ℓ 遍历 $\mathbf{N}$ 时，集合 $K''_{h/2^\ell}$ 对每个 $h\in\Omega$ 都两两不交。因此,

$$\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h)\|f_h\|_{L^{p,\infty}(F,E)}\leqslant 2C_8\|S_-f\|_{\ell^{p,\infty}(J,K'\times K'''_h)}$$

对每个 $h\in\Omega$，其中 $K'''_h\coloneqq\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}}K''_{h/2^\ell}$。由于当 $h\in\Omega\setminus(e_\Omega/2^\ell+\Omega)$ 且 ℓ 足够大时，K'''_h 包含于 K 中任意固定有限子集的补集中，因此这一点以及前面的注证明了：只要 δ_- 足够小（且与 f 无关），当 $h\to\infty$ 属于 Ω 时，$\Delta^{\mathbf{s}}_\Omega(h)\|f_h\|_{L^p(\mathcal{N})}\to 0$。证明完毕。□

4.3. **原子分解与对偶性** **y.**

定义 4.11. 取 $p,q\in(0,\infty]$ and s, s′ $\in\mathbf{R}^r$. 那么，如果对每个 $\delta_0>0$，都存在一个 F-$(\delta,4)$-格 $(\zeta_k,z_{j,k})_{j\in J,\,k\in K}$，其中 $\delta\in(0,\delta_0]$，使得对于每个 $j\in J$ 和每个 $k\in K$，定义$h_k\coloneqq\rho(\zeta_{j,k},z_{j,k})$ 后，映射

$$\Psi\colon\lambda\mapsto\sum_{j,k}\lambda_{j,k}B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_k,z_{j,k})}\Delta^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}_\Omega(h_k)$$

良定义（级数局部一致收敛），并且将 $\ell^{p,\,0}{}^{q}(J,K)$ 连续地映入 $\mathcal{A}^{p,\,q\,\mathbf{s},\,0}(D)$（分别地，将 $\ell^{p,\,q}(J,K)$ 连续地映入 $\mathcal{A}^{p,\,}{}_{\mathbf{s}}{}^{q}(D)$），则称性质 (K) $\mathcal{A}^{p}$,s,s,0（分别地，(q),s,s）成立。

如果我们可以对上述每个 $\delta_0>0$ 取 $(\zeta_k,z_{j,k})_{j\in J,k\in K}$，使得相应的映射$\Psi$ 是满射，那么我们就称性质 $(\mathcal{L}')^{p}{}_{,q\,\mathbf{s},\mathbf{s}',',0}$（分别为 $(\mathcal{L}')^{p}{}_{,q\,\mathbf{s},\mathbf{s}'}$）成立。

按照命题 4.4 和推论 4.7], 中的论证，可以进一步证明，当 $p,q\in[1,\infty]$ 时，性质 $(\mathcal{L})^{p,q}$ s,s′,0（分别为 $(\mathcal{L})^{p,q}$ s,s′）与 $(\mathcal{L}')^{p,q}$ s,s′,0 （分别为 $(\mathcal{L}')^{p,q}$ s,s′）实际上等价；而当 $\mathbf{s}\succ\mathbf{0}$ 时，性质 $(\mathcal{L})^{p,q}$ s,s′,0 与 $(\mathcal{L})^{p,q}$ s,s′ 等价（这是性质 $(\mathcal{L})^{p,q}$ s,s′,0 成立的必要条件）。另见下文定理 4.28。

引理 4.12。 取 $p,\ q\in(0,\ \infty]$ 以及 $\mathbf{s},\ \mathbf{s}'\in\mathbb{R}^r$，使得性质 $(\mathcal{L})^{p,\ q\,\mathbf{s},\ \mathbf{s}',\ 0}$（分别地，$(\mathcal{L})^{p,\ q\,\mathbf{s},\ \mathbf{s}'}$）成立。则以下结论成立：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}$ *(resp.* $\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$ *if* $q=\infty$*) and* $\mathbf{s}\succ\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$*;*
- $\mathbf{s}'\in\frac{1}{\min(p,p')}\mathbf{d}-\frac{1}{2\min(p,p')}\mathbf{m}'$*;*
- $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\frac{1}{\min(1,q)}\mathbf{b}+\frac{1}{\min(1,p)}\mathbf{d}-\frac{1}{2q'}\mathbf{m}$ *or* $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\leqslant\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{\min(1,p)}\mathbf{d}$ *if* $q'=\infty$*, and* $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}-\frac{1}{2q}\mathbf{m}'$.

证明。 根据命题 4.6，只需注意到 $B^{\mathbf{s}'}{}_{(0,\ ie_\Omega)}\in\mathcal{A}^{p}{}_{,\ q\,\mathbf{s},\ 0}(D)$（分别地，$B^{\mathbf{s}'}{}_{(0,\ ie_\Omega)}\in\mathcal{A}^{p}{}_{,\ \mathbf{s}}{}^{q}(D)$), 并证明

$$B^{\mathbf{s}'}_{(0,ie_\Omega)}\in\mathcal{A}^{p',q'}_{\mathbf{b}/\min(1,q)+\mathbf{d}/\min(1,p)-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D).$$

取 $\delta_0\ >0$。则存在一个 F-$(\delta,4)$-格 $(\zeta_k,z_{j,\ k})_{j\in J,\ k\in K}$，满足 $\delta\leqslant\delta_0$，使得该映射 ng

$$\ell^{p,q}_0(J,K)\ni\lambda\mapsto\sum_{j,k}\lambda_{j,k}B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_k,z_{j,k})}\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\in\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)$$

定义良好且连续，其中对每个 $j\in J$ 以及每个 $k\in K,\ h_k\coloneqq\rho(\zeta_k,z_{j,\ k})$。注意到映射 $f\mapsto f(0,ie_\Omega)$ 在 $\mathcal{A}^{p,\ \mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 上的连续性意味着存在常数 $C_1>0$，使得

$$\left|\sum_{j,k}\lambda_{j,k}B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_k,z_{j,k})}(0,ie_\Omega)\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\right|\leqslant C_1\|\lambda\|_{\ell^{p,q}_0(J,K)}$$

对每个 $\lambda\in\ell^{p}{}_{,0}{}^{q}(J,K)$。因此，

$$\left(B^{\mathbf{s}'}_{(0,ie_\Omega)}(\zeta_{j,k},z_{j,k})\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\right)=\overline{\left(B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_{j,k},z_{j,k})}(0,ie_\Omega)\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\right)}\in\ell^{p',q'}(J,K),$$

因此，结论可由定理 4.9 和 [15, 定理 2.47] 得出。 □

定理 4.13。 取 $p,q\in(0,\infty]$ 以及 $\mathbf{s},\mathbf{s}'\in\mathbb{R}^r$，使得以下条件成立：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}+\left(\frac{1}{2\min(1,p)}-\frac{1}{2q}\right)_+\mathbf{m}'$*;*
- $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\frac{1}{\min(1,p,q)}\mathbf{b}+\frac{1}{\min(1,p)}\mathbf{d}-\frac{1}{2q}\mathbf{m}'-\left(\frac{1}{2\min(1,p)}-\frac{1}{2q}\right)_+\mathbf{m}$.

于是，性质 $(\mathcal{L}')^{p,q}{}_{\mathbf{s},\mathbf{s}',0}$ 以及 $(\mathcal{L}')^{p,q}{}_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}$ 均成立。

更确切地说，证明表明，定义 4.11 中的映射 Ψ 存在一个连续线性截面，其中δ 充分小且 R 有界。

证明。 取一个 F-(δ,R)-格 $(\zeta_k,z_{j,k})_{j\in J,k\in K}$，定义在 D 上，其中 $\delta>0$ 和 $R>1$。进一步假设，如定理 4.9 的证明中那样，$K=K'\times K''$，并且存在一个定义在Ω 上的 (δ,R)-格 $(h_{k''})_{k''\in K''}$，使得对于每个 $j\in J$ 以及每个 $(k',k'')\in K'\times K''$，都有 $h_{k''}=\rho(\zeta_{(k',k'')}\ z_{j,(k',k'')})$。为简化记号，我们也将$h_{(k',k'')}$ 写作 $h_{k''}$。

此外，定义

$$B^{\mathbf{s}''}_{j,k}\coloneqq B^{\mathbf{s}''}_{(\zeta_k,z_{j,k})}$$

对每个 $\mathbf{s}''\in\mathbf{R}^r$ 以及每个 $(j,k)\in J\times K$，为简化记号。此外，对每个 $\lambda\in\mathbf{C}^{J\times K}$，定义

$$\Psi_+(\lambda)\coloneqq\sum_{j,k}|\lambda_{j,k}B^{\mathbf{s}'}_{j,k}|\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\in[0,\infty]^D,$$

并且，对每个 $\lambda \in \mathbf{C}^{(J\times K)}$,

$$\Psi(\lambda) \coloneqq \sum_{j,k} \lambda_{j,k} B_{j,k}^{\mathbf{s}'} \Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k) \in \mathrm{Hol}(D).$$

我们首先证明， $\lambda \mapsto \|\Psi_+(\lambda)\|_{\mathcal{L}^{p,\ \mathbf{s}\ q}(D)}$ 是 $\ell^{p,\ q}(J,K)$上的连续拟范数。按照 [15,命题 3.32] 中的论证，并利用命题 4.6，即可证明 Ψ 诱导出连续线性映射$\ell^{p,\ {}_0\ q}(J,K) \to \mathcal{A}^{p,\ q\,\mathbf{s},\ 0}(D)$以及 $\ell^{p,\ q}(J,K) \to \mathcal{A}^{p,\ {}_\mathbf{s}\ q}(D)$。随后我们将证明这些映射是满射，并且存在连续线性截面。

步骤 I。首先假设 $q \leqslant p \leqslant 1$。那么，对于每个 $\zeta \in E$ 和每个 $h \in \Omega$,

$$\|\Psi_+(\lambda)_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}^p \leqslant \sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p \Delta_\Omega^{(p/q)\mathbf{b}+\mathbf{d}-p(\mathbf{s}+\mathbf{s}')}(h_k) \|(B_{j,k}^{\mathbf{s}'})_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}^p.$$

此外， [15, 引理 2.39] 表明存在一个常数 $C_1 > 0$ ，使得

$$\|(B_{j,k}^{\mathbf{s}'})_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}^p = C_1 \Delta_\Omega^{p\mathbf{s}'-\mathbf{d}}(h + h_k + \Phi(\zeta - \zeta_k))$$

对于每个$(j,k) \in J \times K$、每个 $\zeta \in E$以及每个 $h \in \Omega$。因此，利用映射 $x \mapsto x^{q/p}$ 在 $\mathbf{R}_+$上的次可加性,

$$\begin{aligned}\|\Psi_+(\lambda)\|_{\mathcal{L}_\mathbf{s}^{p,q}(D)}^q \leqslant C_1^{q/p} \sum_k \left(\sum_j |\lambda_{j,k}|^p \right)^{q/p} & \Delta_\Omega^{\mathbf{b}+(q/p)\mathbf{d}-q(\mathbf{s}+\mathbf{s}')}(h_k) \times \\ & \times \int_\Omega \int_E \Delta_\Omega^{q\mathbf{s}'-(q/p)\mathbf{d}}(h + h_k + \Phi(\zeta - \zeta_k))\, \mathrm{d}\zeta\, \Delta_\Omega^{q\mathbf{s}}(h)\, \mathrm{d}\nu_\Omega(h).\end{aligned}$$

现在，由 [15, 推论 2.22 和引理 2.32] 可知，存在常数 $C_2 > 0$ 使得

$$\int_\Omega \int_E \Delta_\Omega^{q\mathbf{s}'-(q/p)\mathbf{d}}(h + h_k + \Phi(\zeta - \zeta_k))\, \mathrm{d}\zeta\, \Delta_\Omega^{q\mathbf{s}}(h)\, \mathrm{d}\nu_\Omega(h) = C_2 \Delta_\Omega^{q(\mathbf{s}+\mathbf{s}'-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p)}(h_k)$$

对每个 $k \in K$均成立。因此,

$$\|\Psi_+(\lambda)\|_{\mathcal{L}_\mathbf{s}^{p,q}(D)} \leqslant C_1^{1/p} C_2^{1/q} \|\lambda\|_{\ell^{p,q}(J,K)},$$

由此得证此情形下的结论。

第二步。现在假设 $q \geqslant p \leqslant 1$。对每个 $k \in K$，选取 $\tau_k \in C_c(E \times \Omega)$使得

$$\chi_{B_{E\times\Omega}((\zeta_k,h_k),\delta/2)} \leqslant \tau_k \leqslant \chi_{B_{E\times\Omega}((\zeta_k,h_k),\delta)}.$$

注意到，根据步骤 I 的计算以及 [15, 推论 2.49], ，存在一个常数 $C_1' > 0$ 使得

$$\|\Psi_+(\lambda)_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}^p \leqslant C_1' \int_{E\times\Omega} \sum_k \lambda_k' \tau_k(\zeta', h') \Delta_\Omega^{(p/q)\mathbf{b}+\mathbf{d}-p(\mathbf{s}+\mathbf{s}')}(h') \Delta_\Omega^{p\mathbf{s}'-\mathbf{d}}(h + h' + \Phi(\zeta - \zeta'))\, \mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta', h'),$$

其中 $\lambda' = \left(\sum_j |\lambda_{j,k}|^p\right)_k$。因此，根据闵可夫斯基积分不等式和杨氏不等式，以及根据 [15,引理 2.32],

$$
\begin{aligned}
&\|\Psi_+(\lambda)_h\|^p_{L^{p,\,q}(F,E)}\\
&\leqslant C_1'\left\|\int_{E\times\Omega}\sum_k \lambda_k'\tau_k(\zeta',h')\Delta_\Omega^{(p/q)\mathbf{b}+\mathbf{d}-p(\mathbf{s}+\mathbf{s}')}(h')\Delta_\Omega^{p\mathbf{s}'-\mathbf{d}}(h+h'+\Phi(\,\cdot\,-\zeta'))\,\mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta',h')\right\|_{L^{q/p}(E)}\\
&\leqslant C_1'\int_\Omega\left\|\left(\sum_k \lambda_k'\tau_k(\,\cdot\,,h')\right)*\Delta_\Omega^{p\mathbf{s}'-\mathbf{d}}(h+h'+\Phi(\,\cdot\,))\right\|_{L^{q/p}(E)}\Delta_\Omega^{[(p/q)+1]\mathbf{b}+\mathbf{d}-p(\mathbf{s}+\mathbf{s}')}(h')\,\mathrm{d}\nu_\Omega(h')\\
&\leqslant C_1'\int_\Omega\sum_{k''}\left\|\sum_{k'}\lambda'_{(k',k'')}\tau_{(k',k'')}(\,\cdot\,,h')\right\|_{L^{q/p}(E)}\|\Delta_\Omega^{p\mathbf{s}'-\mathbf{d}}(h+h'+\Phi(\,\cdot\,))\|_{L^1(E)}\Delta_\Omega^{[(p/q)+1]\mathbf{b}+\mathbf{d}-p(\mathbf{s}+\mathbf{s}')}(h')\,\mathrm{d}\nu_\Omega(h')\\
&\leqslant C_1''\int_\Omega\sum_{k''}\chi_{B_\Omega(h_{k''},\delta)}(h')\left\|\left(\lambda'_{(k',k'')}\right)_{k'}\right\|_{L^{q/p}(K')}\Delta_\Omega^{p\mathbf{s}'-\mathbf{b}-\mathbf{d}}(h+h')\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+\mathbf{d}-p(\mathbf{s}+\mathbf{s}')}(h')\,\mathrm{d}\nu_\Omega(h').
\end{aligned}
$$

若定义 $f\coloneqq\sum_{k''}\chi_{B_\Omega(h_{k''},\delta)}(h')\left\|\left(\lambda'_{(k',k'')}\right)_{k'}\right\|_{L^{q/p}(K')}$，则显然有

$$\|f\|_{L^{q/p}(\nu_\Omega)}\leqslant\nu_\Omega(B_\Omega(e_\Omega,\delta))^{p/q}\|\lambda'\|_{L^{q/p}(K)}=\nu_\Omega(B_\Omega(e_\Omega,\delta))^{p/q}\|\lambda\|^p_{L^{p,q}(J,K)}.$$

于是， [15, 引理 3.35] 表明存在常数 $C_3>0$ ，使得

$$\|\Psi_+(\lambda)\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\leqslant C_3\|\lambda\|_{L^{p,q}(J,K)},$$

这就完成了此情形下我们论断的证明。

步骤 III. 现在假设 $p,q\geqslant 1$。对于每个 $(j,k)\in J\times K$，选取 $\tau_{j,k}\in C_c(\Omega)$，使得

$$\chi_{B((\zeta_k,z_{j,k}),\delta/2)}\leqslant\tau_{j,k}\leqslant\chi_{B((\zeta_k,z_{j,k}),\delta)},$$

并定义

$$C_4\coloneqq\sup_{(\zeta,h)\in E\times\Omega}\int_F\left(\chi_{B((0,ie_\Omega),\delta)}\right)_h^{(\zeta)}\mathrm{d}\mathcal{H}^m.$$

定义

$$\Psi'\colon\ell^{p,q}(J,K)\ni\lambda\mapsto\sum_{j,k}\lambda_{j,k}\tau_{j,k}\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}}\circ\rho\in C(D),$$

并证明 Ψ' 将 $\ell^{p,q}(J,K)$ 连续映射到 $\mathcal{L}^{p,\,q}_{\mathbf{s}}(D)$。事实上，取 $\lambda\in\ell^{p,q}(J,K)$，并注意到

$$
\begin{aligned}
\|(\Psi'(\lambda))_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}&\leqslant\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}}(h)\sum_{k\in K}\left\|\sum_{j\in J}|\lambda_{j,k}|\left(\chi_{B((\zeta_k,z_{j,k}),\delta)}\right)_h^{(\zeta)}\right\|_{L^p(F)}\\
&\leqslant C_4^{1/p}\sum_{k\in K}\frac{\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p-\mathbf{s}}(h)}{\Delta_\Omega^{\mathbf{d}/p}(h_k)}\chi_{B((\zeta_k,h_k),\delta)}(\zeta,h)\|(\lambda_{j,k})_j\|_{\ell^p(J)}
\end{aligned}
$$

对每个 $h\in\Omega$ 都成立，因此由 [15, 推论 2.49] 可知，存在常数 $C_4'>0$ 使得

$$
\begin{aligned}
\|\Psi'(\lambda)\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}&\leqslant C_4'\left\|\sum_{k\in K}\chi_{B((\zeta_k,h_k),\delta)}\|(\lambda_{j,k})_j\|_{\ell^p(J)}\right\|_{L^q(\nu_{E\times\Omega})}\\
&=C_4'\nu_{E\times\Omega}(B_{E\times\Omega}((0,e_\Omega),\delta))^{1/q}\|\lambda\|_{\ell^{p,q}(J,K)}.
\end{aligned}
$$

因此， Ψ' 诱导出一个连续线性映射 $\ell^{p,\,q}(J,K)\to\mathcal{L}^{p,\,q}_{\mathbf{s}}(D)$。

现在，观察 e 表明， [15, 定理 2.47 和推论 2.49] 意味着存在一个常数 $C_4''>0$ 使得 t

$$\begin{aligned}|\Psi_+(\lambda)_h(\zeta,x)| &\leqslant C_4''\int_\Omega\int_{\mathcal{N}}\Psi'(|\lambda|)_{h'}(\zeta',x')\left|\left(B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta',x'+i\Phi(\zeta')+ih')}\right)_h(\zeta,x)\right|\mathrm{d}(\zeta',x')\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}'}(h')\,\mathrm{d}\nu_\Omega(h')\\ &= C_4''\int_\Omega\left(\Psi'(|\lambda|)_{h'}*\left|\left(B^{\mathbf{s}'}_{(0,ih')}\right)_h\right|\right)(\zeta,x)\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}'}(h')\,\mathrm{d}\nu_\Omega(h')\end{aligned}$$

对每个 $\lambda\in\ell^{p,\,q}(J,K)$，对每个 $h\in\Omega$，以及对每个 $(\zeta,x)\in\mathcal{N}$。因此，闵可夫斯基积分不等式、杨氏不等式（应用两次）以及 [15, 引理 2.39] 表明，存在一个常数 $C_5>0$，使得

$$\|\Psi_+(\lambda)_h\|_{L^{p,q}(F,E)}\leqslant C_5\int_\Omega\|\Psi'(|\lambda|)_{h'}\|_{L^{p,q}(F,E)}\Delta_\Omega^{\mathbf{s}'-(\mathbf{b}+\mathbf{d})}(h+h')\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}'}(h')\,\mathrm{d}\nu_\Omega(h')$$

对每个 $\lambda\in\ell^{p,\,q}(J,K)$，以及对每个 $h\in\Omega$。

定义

$$T'\colon f\mapsto\Delta_\Omega^{\mathbf{s}}\int_\Omega f(h')\Delta_\Omega^{\mathbf{s}'-(\mathbf{b}+\mathbf{d})}(\,\cdot\,+h')\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h')\,\mathrm{d}\nu_\Omega(h').$$

使得 T' 通过 [15, 引理 3.35]在 $L^q(\nu_\Omega)$ 上诱导一个自同态。于是，

$$\begin{aligned}\|\Psi_+(\lambda)\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}&\leqslant C_5\|T'\|_{\mathscr{L}(L^q(\nu_\Omega))}\|\Psi'(|\lambda|)\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\\ &\leqslant C_5\|T'\|_{\mathscr{L}(L^q(\nu_\Omega))}C_4'\nu_{E\times\Omega}(B_{E\times\Omega}((0,e_\Omega),\delta))^{1/q}\|\lambda\|_{\ell^{p,q}(J,K)}.\end{aligned}$$

因此，在这种情况下，我们的断言也成立。

ST步骤 IV. 最后，假设 $p\geqslant1\geqslant q$。对于每个 $(j,k)\in J\times K$，选取 $\tau'_{j,k}\in C_c(F)$，使得 t

$$(\chi_{B((\zeta_k,z_{j,k}),\delta/2)})_{h_k}^{(\zeta_k)}\leqslant\tau'_{j,k}\leqslant(\chi_{B((\zeta_k,z_{j,k}),\delta)})_{h_k}^{(\zeta_k)},$$

并定义

$$\Psi''\colon\ell^{p,q}(J,K)\ni\lambda\mapsto\left(\sum_j\lambda_{j,k}\tau'_{j,k}\Delta_\Omega^{\mathbf{d}/p}(h_k)\right)_k\in C_c(F)^K.$$

与步骤 III 中一样，可以证明 Ψ'' 诱导出一个从 $\ell^{p,q}(J,K)$ 到 $\ell^q(K;\,L^p(F))$ 的连续线性映射。此外，借助 [15, 定理 2.47] ，我们可以看到存在一个常数 $C_6>0$ ，使得

$$\begin{aligned}|\Psi_+(\lambda)_h^{(\zeta)}(x)|&\leqslant C_6\sum_{k\in K}\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\int_F\Psi''(|\lambda|)_k(x')\left|\left(B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_k,x'+i\Phi(\zeta_k)+ih_k)}\right)_h^{(\zeta)}(x)\right|\mathrm{d}x'\\ &= C_6\sum_{k\in K}\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\left(\Psi''(|\lambda|)_k*\left|\left(B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_k,i\Phi(\zeta_k)+ih_k)}\right)_h^{(\zeta)}\right|\right)(x)\end{aligned}$$

对于每个 $\lambda\in\ell^{p,q}(J,K)$、每个 $(\zeta,h)\in E\times\Omega$ 以及每个 $x\in F$，均有此结论。于是，根据闵可夫斯基不等式、杨氏不等式和 [15, 引理 2.39], , 存在一个常数 $C_6'>0$ ，使得

$$\|\Psi_+(\lambda)_h^{(\zeta)}\|_{L^p(F)}\leqslant C_6'\sum_{k\in K}\|\Psi''(|\lambda|)_k\|_{L^p(F)}\Delta_\Omega^{\mathbf{b}/q+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(h_k)\Delta_\Omega^{\mathbf{s}'-\mathbf{d}}(h+h_k+\Phi(\zeta-\zeta_k))$$

对每个 $\lambda\in\ell^{p,q}(J,K)$ 以及每个 $(\zeta,h)\in E\times\Omega$。因此，根据映射 $x\mapsto x^q$ 在 R_+ 上的次可加性，

$$\begin{aligned}\|\Psi_+(\lambda)\|^q_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}&\leqslant C_6'^q\sum_k\|\Psi''(|\lambda|)_k\|^q_{L^p(F)}\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+q(\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}')}(h_k)\\ &\qquad\times\int_{E\times\Omega}\Delta_\Omega^{q\mathbf{s}-\mathbf{b}}(h)\Delta_\Omega^{q(\mathbf{s}'-\mathbf{d})}(h+h_k+\Phi(\zeta-\zeta_k))\,\mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta,h).\end{aligned}$$

现在，根据齐次性，

$$\begin{aligned}&\Delta_\Omega^{\mathbf{b}+q(\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}')}(h_k)\int_{E\times\Omega}\Delta_\Omega^{q\mathbf{s}-\mathbf{b}}(h)\Delta_\Omega^{q(\mathbf{s}'-\mathbf{d})}(h+h_k+\Phi(\zeta-\zeta_k))\,\mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta,h)\\&=\int_{E\times\Omega}\Delta_\Omega^{q\mathbf{s}-\mathbf{b}}(h)\Delta_\Omega^{q(\mathbf{s}'-\mathbf{d})}(h+e_\Omega+\Phi(\zeta))\,\mathrm{d}\nu_{E\times\Omega}(\zeta,h)\end{aligned}$$

对于每个 $k\in K$，最后一个积分由 [15, 推论 2.22 和引理 2.32] 可知是有限的。因此，存在一个常数 $C_7>0$，使得

$$\|\Psi_+(\lambda)\|_{\mathcal{L}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\leqslant C_7\|\Psi''(|\lambda|)\|_{\ell^q(K;L^p(F))},$$

由此，在这种情况下我们的断言也成立。

步骤 V. 在 $J\times K$ 上定义一个良序，并定义

$$U_{j,k}\coloneqq B((\zeta_k,z_{j,k}),R\delta)\setminus\left(\bigcup_{(j',k')<(j,k)}B((\zeta_{k'},z_{j',k'}),R\delta)\right)$$

对于每个 $(j,k)\in J\times K$，从而 $(U_{j,\,k})_{(j,k)\in J\times K}$ 是 D 的博雷尔可测划分（因为 J 和 K 是可数的）。此外，对于每个 $(j,k)\in J\times K$，定义 $c_{j,\,k}\coloneqq c\nu_D(U_{j,\,k})$，其中 $c>0$ 的定义使得对每个 $f\in C_c(D)$，$P_{\mathbf{s}'}f=c\int_D f(\zeta,z)B^{\mathbf{s}}_{(\zeta,z)}\Delta^{-\mathbf{s}'}(\rho(\zeta,z))\,\mathrm{d}\nu_D(\zeta,z)$。于是，

$$c\,\nu_D(B((0,ie_\Omega),\delta))\leqslant c_{j,k}\leqslant c\,\nu_D(B((0,ie_\Omega),R\delta))$$

对每个 $(j,k)\in J\times K$。然后，定义

$$S\colon\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)\ni f\mapsto\left(c_{j,k}\Delta_\Omega^{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p}(h_k)f(\zeta_k,z_{j,k})\right)\in\ell^{p,q}(J,K),$$

因此，定理 4.9 表明 S 定义良好且连续，并将 $\mathcal{A}^{p,\,q\,\mathbf{s},\,0}(D)$ 映射到 $\ell^{p,\,q}_{0}(J,K)$。定义$S'\coloneqq\Psi S$。于是，命题 4.7 推出，对于每个 $f\in\mathcal{A}^{p,\,q}_{\mathbf{s}}(D)$，

$$f-S'f=c\sum_{j,k}\int_{U_{j,k}}\left(f(\zeta',z')B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta',z')}\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}'}(\rho(\zeta',z'))-f(\zeta_k,z_{j,k})B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_k,z_{j,k})}\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}'}(h_k)\right)\mathrm{d}\nu_D(\zeta',z').$$

因此，[15, 定理 2.47、推论 2.49 和引理 3.25] 推出，存在 $R_0'>0$ 和 $C_8>0$，使得

$$|(f-S'f)(\zeta,z)|\leqslant C_8R\delta\sum_{j,k}c_{j,k}\sup_{(\zeta',z')\in B((\zeta_k,z_{j,k}),R\delta+R_0')}|f(\zeta',z')||B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta_k,z_{j,k})}(\zeta,z)|\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}'}(h_k)$$

对每个 $(\zeta,z)\in D$。取一个 F-$(1,4)$-格 $(\zeta'_{k'},z'_{j',\,k'})_{j'\in J',\,k'\in K'}$ 于 D 上，并注意到命题 2.56], 的证明连同定理 2.47 和推论 2.49] 再次推出，存在一个常数$C_9>0$，使得

$$|(f-S'f)(\zeta,z)|\leqslant C_9R\delta\sum_{j',k'}\sup_{(\zeta',z')\in B\left((\zeta'_{k'},z'_{j',k'}),R\delta+R_0'+4\right)}|f(\zeta',z')||B^{\mathbf{s}'}_{(\zeta'_{k'},z'_{j',k'})}(\zeta,z)|\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}'}(h'_{k'})$$

对每个 $(\zeta,z)\in D$，其中 $h'_{k'}=\rho(\zeta'_{k'},z'_{j',k'})$ 对每个 $j'\in J'$ 以及每个 $k'\in K'$ 都成立。因此，定理 4.9 和前面的步骤表明，存在一个常数 $C_{10}>0$，使得若 $R\leqslant R_0$ 且 $\delta\leqslant1$，则

$$\|f-S'f\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\leqslant C_{10}\delta\|f\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}.$$

取 $\delta_0>0$ 使得 $C_{10}\delta_0\leqslant\frac{1}{2}$，并假设 $\delta\leqslant\delta_0$。于是，

$$\left\|\sum_{j\geqslant k}(I-S')^jf\right\|^{\min(1,p,q)}_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}\leqslant\sum_{j\geqslant k}2^{-\min(1,p,q)j}\|f\|^{\min(1,p,q)}_{\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)}$$

对于每个 $k\in\mathbf{N}$，使得 $\sum_{j\in\mathbb{N}}(I-S')^j$ 诱导出 $\mathcal{A}^{p,\ q\,\mathbf{s},\ 0}(D)$ 和 $\mathcal{A}^{p,\ _{\mathbf{s}}\ q}(D)$ 上定义良好的自同态，它们互为 S' 的逆。因此，

$$\Psi'''\coloneqq S\sum_{j\in\mathbb{N}}(I-S')^j$$

诱导出从 $\mathcal{A}^{p,q\ \mathbf{s},0}(D)$ 到 $\ell^{p,_0\ q}(J,K)$ 以及从 $\mathcal{A}^{p,_{\mathbf{s}}\ q}(D)$ 到$\ell^{p,q}(J,K)$ 的良定义连续线性映射，并且 $\Psi\Psi'''=S'\sum_{j\in\mathbb{N}}(I-S')^j=I_{\circ}$ 证明完毕。□

如同在 [15, 命题3.37], 中的论证一样，可以证明以下结果。

命题4.14. 取 $p,q\in(0,\infty]$ 以及 $\mathbf{s},\mathbf{s}'\in\mathbb{R}^r$，使得性质 $(\mathcal{L}')^{p,q\,\mathbf{s},\mathbf{s}',0}$ 成立。那么，半双线性映射

$$(f,g)\mapsto\int_D f\overline{g}(\Delta^{-\mathbf{s}'}\circ\rho)\,\mathrm{d}\nu_D$$

诱导出 $\mathcal{A}^{p',q'\,\mathbf{b}/\min(1,q)+\mathbf{d}/\,\min(1,p)-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$ 到 $\mathcal{A}^{p,q\,\mathbf{s},0}(D)'$ 的反线性同构。

4.4. **边界值**。

引理 4.15. 连续线性映射 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})\ni u\mapsto u(\zeta,\cdot)\in\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(F)$，$\zeta\in E$ 唯一确定连续线性映射 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})\ni u\mapsto u(\zeta,\cdot)\in\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(F)$，使得以下结论成立：

(1) 对于每个 $u\in\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$、每个 $\zeta\in E$ 以及每个支撑于 $\overline{\Omega'}$ 的 $\varphi\in\mathcal{S}(F')$，

$$(u*\mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(\varphi))(\zeta,\cdot)=u(\zeta,\cdot)*\mathcal{F}_F^{-1}(\varphi);$$

(2) 对于每个 $u\in\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$，映射 $E\ni\zeta\mapsto u(\zeta,\cdot)\in\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(F)$ 属于 C^∞ 类。

因此，我们将每个 $u\in\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 视为一个属于 C^∞ 类的映射 $E\ni\zeta\mapsto u(\zeta,\cdot)\in\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(F)$。

证明。取支撑于 $\overline{\Omega'}$ 的 $\varphi\in\mathcal{S}(F')$，并定义 $\psi\coloneqq\mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(\varphi)$ 和 $\psi'\coloneqq\mathcal{F}_F^{-1}(\varphi)$。于是，$\pi_\lambda(\psi)=\varphi(\lambda)P_{\lambda,\ 0}$ 且对每个 $\lambda\in\Lambda_+$，$\pi_\lambda(\delta_0\otimes\psi')=\varphi(\lambda)I$，因此

$$u*\psi=u*(\delta_0\otimes\psi')$$

对每个 $u\in\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$，也就是说，

$$(u*\psi)(\zeta,\cdot)=u(\zeta,\cdot)*\psi'$$

对每个 $\zeta\in E$。特别地，

$$\langle u(\zeta,\cdot)|\psi'\rangle=(u(\zeta,\cdot)*\psi'^*)(0)=(u*\psi^*)(\zeta,0)=\langle u|\psi((\zeta,0)^{-1}\cdot)\rangle,$$

因此，由于 φ 的任意性，映射 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})\ni u\mapsto u(\zeta,\cdot)\in\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(F)$ 关于分别由 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 和 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(F)$ 在 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 和 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(F)$ 上诱导的拓扑是连续的。由于 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 在$\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 中稠密（因为 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 的共轭空间是自反的，且 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 在 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 的共轭空间中的极锥为$\{0\}$），又由于 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(F)$ 是完备的，第一个断言以及 (1) 均得证。断言 (2) 源于这样一个事实：对每个 φ，映射 $\zeta\mapsto\langle u(\zeta,\cdot)|\psi'\rangle=(u*\psi^*)(\zeta,0)$ 在 E 上属于 C^∞ 类（参见 [33, 第 59 页，引理 II]）。□

引理 4.16。取 p，q，p_2，$q_2\in(0,\ \infty]$ 满足 $p\leqslant p_2$ 和 $q\leqslant q_2$，并令 B 为 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 的有界子集，使得 $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}B$ 在 $C_c^\infty(\Omega')$中有界。对于每个 $\psi\in B$ 以及每个 $t\in T_+$，定义 $\psi_t:=\mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}((\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\psi)(\cdot\,t^{-1}))$。则存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\|u*\psi_t\|_{L^{p_2,q_2}(F,E)}\leqslant C\Delta^{(1/q_2-1/q)\mathbf{b}+(1/p_2-1/p)\mathbf{d}}(t)\|u*\psi_t\|_{L^{p,q}(F,E)}$$

and

$$\|u*\psi_t*\psi'_{t'}\|_{L^{p,q}(F,E)}\leqslant C\|u*\psi_t\|_{L^{p,q}(F,E)}$$

对每个 $u\in\mathcal{S}'(\mathcal{N})$、每个 φ，$\varphi'\in B$，以及每个 t，$t'\in T_+$。

证明。步骤 I. 由 Hölder插值和齐次性，只需在 $p_2 = q_2 = \infty$ 且 t 是 T_+的恒等映射时证明第一个断言。按照 [15, 推论 4.7], 的证明，通过逼近论证，我们还可以进一步假设 $u \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$。然后，令 $\ell := \min(1, p, q)$，并取 $\tau \in \mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$，使得对每个 $\psi \in B$，都有 $\psi * \tau = \psi$，并注意到

$$\begin{aligned}|(u*\psi)(\zeta,x)| &\leqslant \|u*\psi\|_{L^\infty(\mathcal{N})}^{1-\ell} \int_{\mathcal{N}} |(u*\psi)(\zeta',x')|^\ell |\tau((\zeta',x')^{-1}(\zeta,x))| \,\mathrm{d}(\zeta',x') \\ &\leqslant \|u*\psi\|_{L^\infty(\mathcal{N})}^{1-\ell} \|u*\psi\|_{L^{p,q}(F,E)}^{\ell} \|\tau\|_{L^{(p/\ell)',(q/\ell)'}(F,E)}\end{aligned}$$

对每个 $(\zeta, x) \in \mathcal{N}$，由此得到第一个断言。

步骤 I. 第二个断言由 [15, 推论 4.10] 和引理 4.15 得出。 □

定义 4.17。取 $p, q \in (0, \infty]$ 且 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$。取一个 (δ, R)-格 $(\lambda_k)_{k\in K}$，其位于 Ω' 中，其中 $\delta > 0$ 和 $R > 1$ 任取，并固定一个由 $C_c^\infty(\Omega')$ 的正元素构成的有界族 $(\varphi_k)_{k\in K}$，使得在 Ω' 上有 $\sum_k \varphi_k(\cdot\, t_k^{-1}) \geqslant 1$，其中对每个 $k \in K$，$t_k \in T_+$ 且 $\lambda_k = e_{\Omega'} \cdot t_k$。定义 $\psi_k := \mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(\varphi_k(\cdot\, t_k^{-1}))$。然后，我们将$\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}}_{p,\,q}(\mathcal{N}, \Omega)$（分别将 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,\,q}(\mathcal{N}, \Omega)$）定义为满足以下条件的 $u \in \mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 所构成的空间：

$$(\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega'}(\lambda_k)\, u * \psi_k) \in \ell^q_0(K; L^{p,q}_0(F,E)) \qquad (\text{resp. } (\Delta^{\mathbf{s}}_{\Omega'}(\lambda_k)\, u * \psi_k) \in \ell^q(K; L^{p,q}(F,E))),$$

赋予相应拓扑。[5]

特别地，$\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,\,p}(\mathcal{N}, \Omega) = B^{\mathbf{s}}_{p,\,p}(\mathcal{N}, \Omega)$ 以及 $\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}}_{p,\,p}(\mathcal{N}, \Omega) = \mathring{B}^{\mathbf{s}}_{p,\,p}(\mathcal{N}, \Omega)$ 对每个 $p \in (0, \infty]$ 以及每个 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}$ 都成立。现在我们提出对 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,\,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 的另一种解释，这种解释在某些情形下特别有用。

注 4.18。由引理 4.15，$\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,\,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 也可等价地定义为满足下列条件的 $u \in \mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 空间：

$$\left\| \zeta \mapsto \|u(\zeta, \cdot)\|_{B^{\mathbf{s}}_{p,q}(F,\Omega)} \right\|_{L^q(E)} < \infty,$$

其中 $\|\cdot\|_{B^{\mathbf{s}}_{p,\,q}(F,\,\Omega)}$ 表示 $B^{\mathbf{s}}_{p,\,q}(F, \Omega)$ 上的一个固定拟范数。

命题 4.19。取 $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2 \in (0,\ \infty]$ 且 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^r$ 使得

$$p_1 \leqslant p_2, \qquad q_1 \leqslant q_2 \qquad \textit{and} \qquad \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 + \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)\mathbf{b} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)\mathbf{d}.$$

那么，存在连续嵌入 $\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}_1}_{p_1,\,q_1}(\mathcal{N},\ \Omega) \subseteq \mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}_2}_{p_2,\,q_2}(\mathcal{N},\ \Omega)$ 以及 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}_1}_{p_1,\,q_1}(\mathcal{N},\ \Omega) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbf{s}_2}_{p_2,\,q_2}(\mathcal{N},\ \Omega)$。

此外，对于每个 $p, q \in (0, \infty]$ 以及每个 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$，映射 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega) \ni u \mapsto u(\zeta, \cdot) \in B^{\mathbf{s}+\mathbf{b}/q}_{p\,q},(F, \Omega)$ 都是等度连续的。

证明。这由引理 4.15 和 4.16，以及连续嵌入 $\ell^{q_1}(K) \subseteq \ell^{q_2}(K)$ 得出；该嵌入对每个集合 K 都成立。□

命题 4.20。取 $p, q \in (0, \infty]$ 和 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$。那么，$\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 和 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 都是完备的，并连续嵌入到 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 中。

证明。由于 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbf{s}+\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p}_{\infty\,\infty},(\mathcal{N}, \Omega) = B^{\mathbf{s}+\mathbf{b}/q+\mathbf{d}/p}_{\infty\,\infty},(\mathcal{N}, \Omega)$ 由命题 4.19 可连续映射，根据 [13,命题 7.12] 可知，$\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N}, \Omega)$ 连续嵌入到 $\mathcal{S}'_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 中。然后按照 [15, 命题 4.16] 的方法证明完备性。□

[5]可以证明 引理 4.14] 以及 可以直接证明，该定义不依赖于 (λ_k) 和 (φ_k) 的选择，论证方式与 [15 的证明相同 利用引理 4.16。不过，这可由注 4.18 得出，至少对于 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,\,q}(\mathcal{N}, \Omega)$。 ,

定义 4.21。 取 (ψ_k) 如定义 4.17 所述，并进一步假设 $\sum_k(\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\psi_k)^2 = 1$ 在 Ω' 上成立。那么，映射

$$(u,u')\mapsto\sum_k\langle u*\psi_k|u*\psi_k\rangle=\int_E\langle u(\zeta,\cdot)|u'(\zeta,\cdot)\rangle\,\mathrm{d}\zeta$$

在 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)\times\mathcal{B}^{-\mathbf{s}}_{p',q'}(\mathcal{N},\Omega)$ 上诱导出一个定义良好的连续半双线性型，对任意 $p,q\in[1,\infty]$ 以及任意 $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^r$ 均成立，且该型不依赖于 (ψ_k) 的选取（参见 [15, 命题 4.20] 的证明）。

特别地，由命题 4.19 可知，在以下空间上存在一个典范的半双线性型

$$\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)\times\mathcal{B}^{-\mathbf{s}-(1/q-1)_+\mathbf{b}-(1/p-1)_+\mathbf{d}}_{p',q'}(\mathcal{N},\Omega)$$

对任意 $p,q\in(0,\infty]$ 以及任意 $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^r$ 均成立。我们将 $\sigma^{\mathbf{s}}_{p,q}$ 的弱拓扑记为

$$\sigma(\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega),\mathring{\mathcal{B}}^{-\mathbf{s}-(1/q-1)_+\mathbf{b}-(1/p-1)_+\mathbf{d}}_{p',q'}(\mathcal{N},\Omega)).$$

引理 4.22。 取 $p,q\in[1,\infty]$，并取 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{q'}\mathbf{b}+\frac{1}{p'}\mathbf{d}+\frac{1}{2q}\mathbf{m}'$。对每个 $(\zeta,z)\in D$，定义 $S_{(\zeta,z)}:=c\Big(B^{\mathbf{b}+\mathbf{d}}_{\zeta\ z}(\cdot,\cdot)\Big)_{\mathbf{0}}$，其中 $c\neq0$ 的选取满足：对任意 $f\in A^{2,\infty}_{\mathbf{0}}(D)$，均有 $f(\zeta,z)=\langle f_0|S_{(\zeta,z)}\rangle$。则以下结论成立：

(1) 当 (ζ,z) 遍历 D 时，$\Delta^{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q'-\mathbf{d}_\Omega/p'}(\rho(\zeta,z))S_{(\zeta,z)}$ 属于 $\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)$ 的一个有界子集；*(2)* 对每个 $u\in\mathcal{B}^{-\mathbf{s}}_{p',q'}(\mathcal{N},\Omega)$，映射 $(\zeta,z)\mapsto\langle u|S_{(\zeta,z)}\rangle$ 在 D 上是全纯的。

证明与引理 5.1] 的证明类似，故略去。

命题 4.23。 取 $p,q\in(0,\infty]$ 和 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$。定义一个连续线性映射（参见引理 *4.22*）

$$\mathcal{E}\colon\mathcal{B}^{-\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)\ni u\mapsto[(\zeta,z)\mapsto\langle u|S_{(\zeta,z)}\rangle]\in A^{\infty,\infty}_{\mathbf{s}-\mathbf{b}/q-\mathbf{d}/p}(D),$$

那么，下列结论成立：

(1) 对每个 $u\in\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)$ 以及每个满足 $u(\zeta,\cdot)\in B^{\mathbf{s}_2}_{p_2,q_2}(F,\Omega)$ 的 $(\zeta,z)\in D$，其中某个 $p_2,q_2\in(0,\infty]$，且对某个 $s_2\succ\frac{1}{p_2}d+\frac{1}{2q_2'}m'$，

$$(\mathcal{E}u)(\zeta,z)=[\mathcal{E}(u(\zeta,\cdot))](z-i\Phi(\zeta));$$

(2) 线性映射 $u\mapsto(\mathcal{E}u)_h$ 当 h 遍历 Ω时，在$\mathcal{B}^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$ 和 $\mathring{\mathcal{B}}^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$上诱导等度连续自同态；(3) 该映射

$$\Omega\cup\{0\}\ni h\mapsto(\mathcal{E}u)_h\in\mathcal{B}^{-\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)$$

若 $u\in\mathring{\mathcal{B}}^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$，则连续；若 $u\in\mathcal{B}^{-\mathbf{s}}_{p\ q,}(\mathcal{N},\Omega)$，则在弱拓扑 $\sigma^{-\mathbf{s}}_{p\ ,q}$下连续。

证明。 (1) 只需证明将 u 替换为某个满足$\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\psi\in C^\infty_c(\Omega')$的 $u*\psi$ ($\psi\in\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}$) 时，该断言仍成立。于是，

$$[\mathcal{E}(u*\psi)]_h=(u*\psi)*(S_{(0,ih)}*\psi'),$$

其中 $\psi'\in\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 且 $\psi=\psi*\psi'$。接着只需应用引理 4.15。( )

2 –(3). The 证明与 [15, 定理 5.2] 的证明类似（将 [15, 推论 4.10] 替换为引理 4.16 ）. □

命题4.24. 取 $p,\ q\in(0,\ \infty]$ 且 $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^r$。则以下结论成立：

(1) $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 连续嵌入为 $\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)$ 的稠密子空间；*(2)* 对每个 $s'\in C^r$，映射 $\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})\ni\varphi\mapsto\varphi*I^{s'}_{\Omega}\in\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$ 分别诱导 $\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)$ 和 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)$ 到 $\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}+\mathrm{Re}\,\mathbf{s}'}_{p\ q}$, $(\mathcal{N},\Omega)$ 和 $\mathcal{B}^{\mathbf{s}+\mathrm{Re}\,\mathbf{s}'}_{p\ q}$, $(\mathcal{N},\Omega)$ 的同构；*(3)* 若 $s\succ\frac{1}{q}b+\frac{1}{p}d+\frac{1}{2q'}m'$ 且 $s\succ\frac{1}{2q}m$（分别地，$s\geqslant\mathbf{0}$ *if* $q=\infty$），则存在连续嵌入

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N}))\subseteq\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s},0}(D)\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}^{p,q}_{\mathbf{s},0}(D)\qquad(resp.\ \mathcal{E}(\mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N}))\subseteq\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}^{p,q}_{\mathbf{s}}(D)).$$

(4) 若 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{p}\mathbf{d} + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$ 且 $A^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(T_\Omega) = \widetilde{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(T_\Omega)$（分别地，$A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(T_\Omega) = \widetilde{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(T_\Omega)$），则 $\mathcal{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D) = \widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)$（分别地，$\mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D) = \mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D)$）；(5) 若 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{p}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) + \frac{1}{2p'}\mathbf{m}'$ 且 $\mathcal{A}^{p}{}_{,p}\,\mathbf{s},0(D) = \widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,p}\,\mathbf{s},0(D)$（分别地，$\mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{p}(D) = \widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{p}(D)$），则 $A^{p}{}_{,p}\,\mathbf{s}-\mathbf{b}_{/p},0(T_\Omega) = \widetilde{A}^{p}{}_{,p}\,\mathbf{s}-\mathbf{b}_{/p},0(T_\Omega)$（分别地，$A^{p}{}_{,p}\,\mathbf{s}-\mathbf{b}_{/p}(T_\Omega) = A^{p}{}_{,p}\,\mathbf{s}-\mathbf{b}_{/p}(T_\Omega)$）；(6) 若 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2q}\mathbf{m} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\min(p,p')} - \frac{1}{2q}\right)_+ \mathbf{m}'$，则 $\mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D) = \widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 且 $\mathcal{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D) = \widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)$。

我们明确指出，在 [15, 推论 5.11] 中，假设 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{p}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$ 是多余的（正如上述 (6) 中的假设 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{q}\mathbf{b} + \frac{1}{p}\mathbf{d} + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$ 是多余的一样），因为它可由条件 $\mathbf{s} \succ \frac{1}{2q}\mathbf{m} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\min(p,p')} - \frac{1}{2q}\right)_+ \mathbf{m}'$ 推出。事实上，$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\min(p,p')} - \frac{1}{q}\right)_+ \mathbf{m}' \geqslant \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{p}\right)\mathbf{m}' \geqslant \frac{2}{p}\mathbf{d} + \frac{1}{q'}\mathbf{m}'$，因为 $2\mathbf{d} \prec -\mathbf{m} - \mathbf{m}'$。

我们还提到，如果 $r = 2$（因此 Ω 同构于一个象限或 Lorentz 锥），那么结合 [6, 定理 6.6 和 6.8]（后者是 [12, 定理 1.2] 的推论）与 [15, 定理 5.10]（另见 [18, 注 2.6] 后的说明），可知 $A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(T_\Omega) = A^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(T_\Omega)$ 和 $A^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(T_\Omega) = A^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(T_\Omega)$ 当且仅当

$$\mathbf{s} \succ \frac{1}{2q}\mathbf{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\min(2,p)} - \frac{1}{q}\right)_+ \mathbf{m}', \frac{1}{p}\mathbf{d} + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'.$$

由传递可知，在相同条件下，我们还有 $\mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D) = \mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 和 $\mathcal{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D) = \mathcal{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)$。

证明。(1) 证明与 [15, 定理 4.23, (1)] 的证明类似。

(2) 这由 [15, 定理 4.26] 和注 4.18 得出。

(3) 根据 [15, 命题 5.4],，存在连续线性映射 $\mathcal{B}\colon \mathcal{A}^{q}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D) \to \mathring{\mathcal{B}}^{-\mathbf{s}}{}_{q,q}(\mathcal{N},\Omega)$ 和 $\mathcal{B}'\colon A^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(T_\Omega) \to \mathring{B}^{-\mathbf{s}}{}_{p,q}(F,\Omega)$，使得 $\mathcal{E}\mathcal{B} = I$ 和 $\mathcal{E}\mathcal{B}' = I$。若 $u \in \mathcal{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D) \cap \mathcal{A}^{q}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)$，则对几乎处处的 $\zeta \in E$，有 $u(\zeta,\cdot) \in A^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(T_\Omega)$。因此，由引理 4.15、注 4.18、命题 4.23 的 (1) 以及命题 4.5 可知，对几乎处处的 $\zeta \in E$，有 $(\mathcal{B}u)(\zeta,\cdot) = \mathcal{B}'(u(\zeta,\cdot))$；并且 $\mathcal{B}$ 诱导出一个从 $\mathcal{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)$ 到 $\mathring{\mathcal{B}}^{-\mathbf{s}}{}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)$ 的连续线性映射。因此，$\mathcal{A}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)$ 连续包含于 $\subseteq \widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)$。包含关系 $\mathcal{A}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D)$ 的证明类似（参见 [15, 命题 5.4] 的证明）。其余包含关系由引理 4.15 和 [15, 命题 5.4] 推出。

(4) 由注 4.18 和命题 4.23 的 (1) 得出。(5) 由 [18, 定理 6.3] 得出。(6) 由 (4) 和 [15, 推论5.11] 得出。

□

命题4.25。取 p，$q \in (0,\infty]$，以及 $\mathbf{s}$，$\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^r$，使得下列条件成立：

- $\mathbf{s} \succ \frac{1}{q}\mathbf{b} + \frac{1}{p}\mathbf{d} + \frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$;
- $\mathbf{s}' \prec \mathbf{b} + \mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$;
- 秒 $+$ 秒$' \prec \frac{1}{q}\mathbf{b} + \frac{1}{p}\mathbf{d} - 2 \frac{1}{\max(1,q)}\mathbf{m}'$。

那么，存在一个常数 $c \neq 0$ 使得

$$\langle u|u'\rangle = c\int_D (\mathcal{E}u)\overline{\mathcal{E}u' * I_\Omega^{\mathbf{s}'-\mathbf{b}-\mathbf{d}}}(\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}'} \circ \rho)\,\mathrm{d}\nu_D$$

对每个 u，$u' \in \mathcal{S}_{\overline{\Omega'}}(\mathcal{N})$。特别地，半双线性型

$$(f,g) \mapsto \int_D f\overline{g}(\Delta^{-\mathbf{s}'} \circ \rho)\,\mathrm{d}\nu_D$$

在 $\widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,\mathbf{s}}{}^{q}(D) \times \widetilde{\mathcal{A}}^{p'}{}_{,q'\mathbf{b}/\min(1,q)+\mathbf{d}/\min(1,p)-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$ 上诱导出一个连续半双线性型。

由推论 4.26 可知，上述半双线性型诱导出一个从 $\widetilde{\mathcal{A}}^{p',q'\mathbf{b}/\min(1,q)+\mathbf{d}/\min(1,p)-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$ 到 $\widetilde{\mathcal{A}}^{p}{}_{,q}\,\mathbf{s},0(D)'$ 的反线性同构。

证明。 证明过程与 [15, 命题 5.12].[6] 类似 □

推论 *4.26*。取 $p,q\in(0,\infty]$ *and* $s\in R^r$. 那么，连续半双线性型 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$: $\mathcal{B}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)\times_{\mathcal{B}^{-\mathbf{s}-(1/q-1)_+\mathbf{b}-(1/p-1)_+\mathbf{d}}_{p',q'}(\mathcal{N},\Omega)}\to C$ 诱导出一个反线性同构，将 $\mathcal{B}^{-\mathbf{s}-(1/q-1)_+\mathbf{b}-(1/p-1)_+\mathbf{d}}_{p',q'}(\mathcal{N},\Omega)$ 映到 $\mathring{\mathcal{B}}^{\mathbf{s}}_{p,q}(\mathcal{N},\Omega)'$。

证明。 根据命题4.24，我们可以假设 $-\mathbf{s}$ 尽可能大，因此该断言可由命题4.25、命题4.24 的 (6)、定理 4.13 和命题4.14 推出。 □

4.5. **Bergman投影算子**。

命题4.27。 设 $p,q\in[1,\infty]$，$\mathbf{s}\in\mathbb{R}^r$，且 $\mathbf{s}'\prec\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2}\mathbf{m}$。若 $P_{\mathbf{s}'}$ 在 $\mathcal{L}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}(D)$ 上诱导一个自同态（分别地，若其将 $\mathcal{L}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}(D)$ 连续线性映射到 $\mathcal{L}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$），则有以下结论：

(1) $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}$（分别地，若 $q=\infty$ 则 $\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$）且 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$；(2) $\mathbf{s}'\prec\ ^{1}\min(p,p')\mathbf{d}-\frac{1}{2}\ ^{1}\min(p,p')\mathbf{m}'$；(3) $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2q'}\mathbf{m}$，或者若 $q'=\infty$ 则 $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\leqslant\mathbf{b}+\mathbf{d}$，且 $\mathbf{s}+\mathbf{s}'\prec\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}-\frac{1}{2q}\mathbf{m}'$；

(4) $P_{\mathbf{s}'}$ 诱导出从 $\mathcal{L}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$ 和 $\mathcal{L}^{p}_{\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$ 到 $\mathcal{L}^{p}_{\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$ 上的连续线性投影算子，分别满足 $\mathcal{A}^{p,\ ^{\prime}\ q'}_{,\ \mathbf{s}\ q}(D)$ 和 $\mathcal{A}^{p\ ^{\prime}\ q'}$

$$\int_D f\overline{P_{\mathbf{s}'}g}(\Delta^{\mathbf{s}'}\circ\rho)\,\mathrm{d}\nu_D=\int_D(P_{\mathbf{s}'}f)\overline{g}(\Delta^{\mathbf{s}'}\circ\rho)\,\mathrm{d}\nu_D$$

对于任意 $f\in\mathcal{L}^{p,\ ^{\prime}\ q}_{,\ \mathbf{s}\ q}(D)$ 和任意 $g\in\mathcal{L}^{p^{\prime},\ ^{\prime}\ q'}_{\ \mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$。

注意到，(4) 唯一确定了 $P_{\mathbf{s}'}$ 在 $\mathcal{L}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$ 和 $\mathcal{L}^{p^{\prime}}_{,\mathbf{s}\ q'}(D)$ 上的取值，因为条件 (1)–(3) 保证对于每个 $(\zeta,z)\in D$（参见命题 4.7），$B^{-\mathbf{s}'}(\zeta,z)\in\mathcal{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)\cap\mathcal{A}^{p^{\prime}}_{,\mathbf{s}\ q'}(D)$。

证明。 </style}证明类似于 [15, 命题 5.20 和 5.21]的证明。 □

定理 4.28。 取 p，$q\in[1,\infty]$ 以及 $\mathbf{s}$，$\mathbf{s}'\in\mathbb{R}^r$。假设以下条件成立：

- $\mathbf{s}\succ\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}+\frac{1}{2q'}\mathbf{m}'$ 以及 $\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}$（如果 $q=\infty$，则分别为 $\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$）；
- $\mathbf{s}'\prec\mathbf{b}+\mathbf{d}-\frac{1}{2}\mathbf{m}$;
- 的 $+$的$'\prec\frac{1}{q}\mathbf{b}+\frac{1}{p}\mathbf{d}-\frac{1}{2q}\mathbf{m}'$.

那么，以下条件等价：

（*1*） $\mathcal{A}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}(D)=\widetilde{\mathcal{A}}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}(D)$（分别为 $\mathcal{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)=\widetilde{\mathcal{A}}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$），且 $\mathcal{A}^{p^{\prime}}_{,q'\ \mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)=\widetilde{\mathcal{A}}^{p^{\prime}}_{,q'\ \mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$；（*2*） $P_{\mathbf{s}'}$ 诱导出从 $\mathcal{L}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}$ 到 $\mathcal{L}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$ 和 $\mathbf{s}\succ\mathbf{0}$（分别为 $\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$）的连续线性映射；

（*3*） $P_{\mathbf{s}'}$ 诱导出从 $\mathcal{L}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}$ 到 $\mathcal{A}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}(D)$（分别为从 $\mathcal{L}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}$到 $\mathcal{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$）以及从$\mathcal{L}^{p^{\prime},q'}_{\ \mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$ 到 $\mathcal{A}^{p^{\prime}}_{,q'\ \mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$的连续线性投影算子；（*4*）$\mathbf{s}\succ\frac{1}{2q}\mathbf{m}$（如果 $q=\infty$，则为 $\mathbf{s}\geqslant\mathbf{0}$），且半双线性映射

$$(f,g)\mapsto\int_D f\overline{g}(\Delta_\Omega^{-\mathbf{s}'}\circ\rho)\,\mathrm{d}\nu_D$$

诱导出一个从 $\mathcal{A}^{p^{\prime}}_{,q'\ \mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}'}(D)$ 到 $\mathcal{A}^{p}_{,q\ \mathbf{s},0}(D)'$（分别到由 $B^{\mathbf{s}'}(\zeta,z)$ 生成的 $\mathcal{A}^{p}_{,\mathbf{s}\ q}(D)$ 的闭向量子空间的对偶空间，其中（$\zeta,${v19} $\in D$）的反线性同构；（*5*）性质 $(\mathcal{L}')^{p}_{,q\ \mathbf{s},\mathbf{s}',0}$（分别为 $(\mathcal{L}')^{p}_{,q\ \mathbf{s},\mathbf{s}'}$）以及 $(\mathcal{L}')^{p^{\prime}}_{,q'\ \mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{s}-\mathbf{s}',\mathbf{s}'}$ 成立；（*6*）性质 $(\mathcal{L})^{p}_{,q\ \mathbf{s},\mathbf{s}',0}$（分别为 $(\mathcal{L})^{p}_{,q\ \mathbf{s},\mathbf{s}'}$）成立。

[6]我们特别指出，所引结果的陈述中有一处笔误：第一个展示公式以及证明中的第一个独立公式行里，应为 $\Delta^{\mathbf{s}''-(\mathbf{b}+\mathbf{d})}\Omega$，而非 $\Delta^{\mathbf{s}''}_{\Omega}$。

证明与 [18, Corollary4.7] 的证明类似。特别地，我们得到如下传递结果。

推论 4.29。 取 p， $q \in [1,\infty]$ 以及 $\mathbf{s}$， $\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^r$。则以下结论成立：

- 如果 $s' \prec d - \frac{1}{2}m$ 且 Ps' 在 $\mathcal{L}^{p,q}s,0(T_\Omega)$ 上诱导出到 $\mathcal{A}^{p,q}s,0(T_\Omega)$ 的连续线性投影算子（分别地，将 $\mathcal{L}^{p,q}s(T_\Omega)$ 投影到 $\mathcal{A}^{p,q}s(T_\Omega)$），那么 $Ps'+b$ 在 $\mathcal{L}^{p,q}s,0(D)$ 上诱导出到 $\mathcal{A}^{p,q}s,0(D)$ 的连续线性投影算子（分别地，将 $\mathcal{L}^{p,q}s(D)$ 投影到 $\mathcal{A}^{p,q}s(D)$）；
- 如果 $s' \prec b + d - \frac{1}{2}m$ 且 Ps' 在 $\mathcal{L}^{p,p}s,0(D)$ 上诱导出到 $\mathcal{A}^{p,p}s,0(D)$ 的连续线性投影算子（分别地，将 $\mathcal{L}^{p,p}s(D)$ 投影到 $\mathcal{A}^{p,p}s(D)$），那么 Ps' 在 $\mathcal{L}^{p,p}s-b_{/p},0(T_\Omega)$ 上诱导出到 $\mathcal{A}^{p,p}s-b_{/p},0(T_\Omega)$ 的连续线性投影算子（分别地，将 $\mathcal{L}^{p,p}s-b_{/p}(T_\Omega)$ 投影到 $\mathcal{A}^{p,p}s-b_{/p}(T_\Omega)$）。

总结

一方面，我们比较了齐性西格尔域上混合范数 Bergman 空间的两种平行理论。另一方面，我们将部分关于空间 $A^{p,q}_{\mathbf{s}}$ 的理论推广到了空间 $\mathfrak{A}^{p,q}_{\mathbf{s}}$。通过这一工作，我们希望能让人们对这类区域上技术要求颇高的函数论有所了解。我们相信，这是一个充满活力的研究领域，近年来吸引了许多学者的关注。我们还指出， D 的 Šilov 边界自然出现在将 Paley–Wiener 空间和整函数的 Bernstein 空间推广到更高复维数的过程中，具体可参见 [14, 19, 20]。

参考文献

[1] Békollé, D.，《小指数 Bergman 空间》，Indiana U. Math. J. 49（2000），第 973–993 页。[2] Békollé, D.、Bonami, A.、Garrigós, G.、Ricci, F.，《与对称锥及管域中的 Bergman 投影相关的 Littlewood–Paley 分解》，P. Lond. Math. Soc. 89（2004），第 317–360 页。[3] Békollé, D.、Bonami, A.、Garrigós, G.、Nana, C.、Peloso, M. M.、Ricci, F.，《锥上管状域 Bergman 投影讲义：解析与几何视角》，IMHOTEP J. Afr. Math. Pures Appl. 5（2004），前置部分 + ii + 75 页。[4] Békollé, D.、Bonami, A.、Garrigós, G.、Ricci, F.、Sehba, B.，《对称锥上管域中的解析 Besov 空间与 Hardy 型不等式》，J. reine angew. Math. 647（2010），第 25–56 页。[5] Békollé, D.、Bonami, A.、Peloso, M. M.、Ricci, F.，《齐性锥上管域中 Bergman 投影的有界性》，Math. Zeit.，237（2001），第 31–59 页。[6] Békollé, D.、Gonessa, J.、Nana, C.，《Lebesgue 混合范数估计：从齐性锥上的管域到 II型Siegel域》，Math. Ann. 374（2019），第 395–427 页。[7] Békollé, D.、Gonessa, J.、Nana, C.，《对称锥上管域中混合范数 Bergman 空间的原子分解与复方法插值》，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 21 （ 2020 ），第 801–826 页。[8] Békollé, D. 、Ishi, H.、Nana, C.，《II型Siegel域的 Korányi 引理：应用与扩展结果》，Bull. Austral. Math. Soc. 90（2014），第 77–89 页。[9] Békollé, D.、Temgoua Kagou, A.，《II型Siegel域中 Bergman 投影的再生性质与 L^p-估计》，Studia Math. 115（1995），第 219–239 页。[10] Boggess, A.，《CR流形与切向 Cauchy–Riemann 复形》，CRC Press，1991。[11] Bonami, A.，《对称锥上管域 Bergman 空间的三个相关问题》，Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 13（2002），第 183–197 页。[12] Bourgain, J.、Demeter, C.，《 ℓ^2-解耦猜想的证明》，Ann. Math. 182（2015），第 351–389 页。[13] Calzi, M.，《解析型 Besov 空间：插值、卷积、Fourier 乘子、包含关系》，预印本 arXiv:2109.09402。

[14] 2112 07991 Calzi, M.，《二次

[15] CR 流形上的 Paley–Wiener–Schwartz 定理》，预印本 arXiv: 。Calzi, M.、Peloso, M. M.，《齐性西格尔域上的全纯函数空间》，Diss. Math. 563（2021），第 1–168 页。[16] Calzi, M.、Peloso, M. M.，《齐性西格尔域上的 Toeplitz 算子与 Cesàro 型算子》，Comp. Var. Ell. Eq.（2021），doi: 10 1080 17476933 2021 1985478 。/。。Calzi, M.、Peloso, M. M.，《齐性西格尔域上的 Carleson 测度与反 Carleson 测度》，[17] Comp. Anal. Op. Th., **16** 1 4 2022 10 1007 11785 021 01177 5 ( ), art. ( )，doi: 。/s - - - Calzi, M.、Peloso, M. M.，《齐性西格尔域上 [18] Bergman 投影的有界性》，Rend. Circ. Mat. Palermo，II. Ser（2022），doi:10.1007/s12215-022-00798-9。[19] Calzi, M.、Peloso, M. M.，《Siegel CR 流形上的 Bernstein 空间》，Anal. Math. Phys. 12(5)（2022）。

[20] Calzi, M.、Peloso, M. M.，《Siegel CR 流形上的 Bernstein 空间中的 Carleson 测度与采样测度》，Math. Nach. 待刊（2023）。[21] Debertol, D.，《对称管域上的 Besov 空间与加权Bergman投影的有界性》，Publ. Mat. 49（2005），第 21–72 页。[22] Faraut, J.、Korányi, A.，《对称锥上的分析》，Clarendon Press，1994。[23] Folland, G. B.，《相空间中的调和分析》，Princeton Univ. Press，1989。[24] Gindikin, S. G.，《齐性域中的分析》，Russ. Math. Surv. 19（1964），第 1–89 页。[25] Murakami, S.，《关于 Siegel域自同构》，Springer-Verlag，1972。[26] Nana, C.，L^p、q-Bergman 投影在 II型Siegel域中的有界性，J. Fourier Anal. Appl. 19（2013），第 997–1019 页。[27] Nana, C.、Trojan, B.，L^p-Bergman 投影在齐性锥上的管域中的有界性，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10（2011），第 477–511 页。[28] Ogden, R. D.、Vági, S.，《幂零群的调和分析与 II型 Siegel域上的函数论》，Adv. Math. 33（1979），第 31–92 页。[29] Pyatetskii-Shapiro, I. I.，《自守函数与经典域的几何》，Gordon and Breach，纽约，1969。[30] Ricci, F.、Taibleson, M.，《混合范数空间中调和函数的边界值及其原子结构》，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10（1983），第 1–54 页。[31] Rochberg, R.，《Bergman 空间中的函数插值》，Michigan Math. J. 29（1982），第 229–236 页。[32] Rossi, H.、Vergne, M.，《某些可解Lie群在全纯函数希尔伯特空间上的表示及其对半单 Lie群全纯离散级数的应用》，J. Funct. Anal. 13（1973），第 324–389 页。[33] Schwartz, L.，《向量值可微函数空间》，J. Analyse Math. 4（1955），第 88–148 页。[34] Vinberg, E. B.，《实Lie群的 Morozov–Borel定理》，Dokl. Akad. Nauk SSSR 141（1961），第 270–273 页。[35] Vinberg, E. B.，《凸齐性锥理论》，Trans. Moscow Math. Soc. 12（1965），第 340–403 页。

米兰大学数学系，C. 萨尔迪尼街50号，20133 米兰，意大利电子邮件地址: mattia.calzi@unimi.it电子邮件地址: marco.peloso@unimi.it