双重索博列夫同胚弱极限的几乎处处可微性

ˇ´ANNA DOLEZALOVA 和 ANASTASIA MOLCHANOVA

/Reshetnyak 将经典函数理论与 Sobolev 函数类相结合，成果丰硕，因此这一研究领域有了一个专门名称：拟共形分析。

A. D. Aleksandrov，1999年，《俄罗斯数学调查》54，1069

arXiv:2302.07578v1 [math.FA] 15 Feb 2023

Abstract. 本文研究双重索博列夫同胚弱极限的可微性。给定 $p > n-1$，考虑一列同胚 f_k，其雅可比行列式几乎处处为正，且 $\sup_k(\|f_k\|_{W^{1,\,n-1}} + \|f_k^{-1}\|_{W^{1,\,p}}) < \infty$。我们证明，若 f 和 h 分别是 f_k 和 f_k^{-1} 的弱极限，且其雅可比行列式 $J_f > 0$ 和 $J_h > 0$ 几乎处处为正，则 $h(f(x)) = x$ 和 $f(h(y)) = y$ 均几乎处处成立，并且 f 和 h 几乎处处可微。

1. Introduction

设 Ω 和 Ω′ 是区域，即分别位于 $\mathbb{R}^n$ 和 $f \in W^{1,\,p}$中的非空连通开集，$(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 表示从 Ω 到 Ω′的映射。根据几何分析中的经典结果，若 $p > n$，则映射 f 几乎处处可微。Cesari [4] 于1941年在 $n = 2$ 的情形下证明了这一结果，随后 Calder´on [2]将其推广到任意 n。V¨ais¨al¨a [29] 和 Reshetnyak [24, 25, 26]从几何角度研究了连续单调映射几乎处处可微的问题。这包括有界畸变映射（亦称拟正则映射）以及有限畸变映射（甚至对于 $p = n$也是如此）。关于这些结果的更多细节，参见 [25, 29]。这些结果还推广到了维数为$n = 2$时的 $W^{1,\,1}$-同胚，见 Gehring 和 Lehto [10], 以及 $W^{1,\,p}$-同胚在 $p > n-1$且 $n \geq 3$ 时的情形，参见 V¨ais¨al¨a [29] （另见 Onninen [22, 定理 1.2 和例 1.3]）。

对于满足 $n \geq 3$ 的 $W^{1,\,n-1}$-Sobolev 同胚，通过考察内畸变 $K_I \in L^1(\Omega)$ 的可积性，证明了其几乎处处可微，其中$J_f(x) := \det Df(x)$ 是雅可比行列式，adj Df是 Df的伴随矩阵，并且

$$K_I := \frac{|\operatorname{adj} Df|^n}{J_f(x)^{n-1}},$$

见 [28]。这一畸变的可积性条件是尖锐的，这意味着对于任意 $\delta \in (0, 1)$ 和 $n \geq 3$，都存在一个同胚 $f \in W^{1,\,n-1}((-1, 1)^n, \mathbb{R}^n)$，使得 $K_I \in L^\delta((-1, 1)^n)$，并且 f 在一个正测度集合 [14]上不是经典可微的。$W^{1,\,n-1}$-索伯列夫映射的几乎处处可微性，对于雅可比行列式非负且畸变函数满足某种可积性条件的连续、开且离散的有限畸变映射同样成立 [30]。条件 $K_I \in L^1(\Omega)$ 本质上意味着

2010年数学主题分类：46E35。关键词和短语：Sobolev 同胚的极限、可微性。第一作者获查理大学研究计划 UNCE/SCI/023、GAˇCR P201/21-01976S 项目以及查理大学资助计划项目（注册号 CZ.02.2.69/0.0/0.0/19 073/0016935）的资助。第二作者获欧盟“地平线 2020”研究与创新计划 Marie Skłodowska-Curie 资助协议（编号 847693）的资助。

$f^{-1} \in W^{1,n}(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$ [20, 定理 1.1]。结合[23, 引理 2.1] 中的振荡估计，我们随后得到，对于几乎所有 $x \in \Omega$

$$\limsup_{r \to 0+} \frac{\operatorname{osc}_{B(x,r)} f}{r} < \infty,$$

因此，根据斯捷潘诺夫定理， f 在 x 中可微。因此，我们可以直接考虑双重索博列夫同胚，而不必对畸变作出假设。逆映射定理（例如参见 [12, 定理 A.29]）指出，若 $f \in W^{1,n-1}$,$J_f > 0$几乎处处，且 $f^{-1} \in W^{1,p}$满足 $p > n-1$，则 f和 f^{-1}都几乎处处可微（关于更一般的方法，读者可参见 [31]）。然而，Cs¨ornyei、Hencl 和 Mal´y 在 [5] 的例5.2中构造了一个同胚$f \in W^{1,n-1}((-1,1)^n, \mathbb{R}^n)$， $n \geq 3$，满足 $J_f > 0$几乎处处，但处处不可微；其逆映射 $f^{-1} \in W^{1,n-1}((-1,1)^n, \mathbb{R}^n)$也处处不可微。

在本文中，我们考察一类同胚弱极限几乎处处的可微性。这类映射非常适合采用变分法方法，也可作为连续介质力学模型中的变形。更多信息请参见 [15, 17, 19]。近年来，Sobolev 同胚的弱极限受到广泛关注，已有多项研究对此进行了探讨，包括[1, 3, 6, 7, 8, 9, 13, 16]。

这里我们考虑能量泛函

$$\mathcal{E}(f) := \int_\Omega |Df(x)|^{n-1}\,dx + \int_{\Omega'} |Df^{-1}(y)|^p\,dy$$

对于双索伯列夫映射 $f\colon \Omega \to \Omega'$，满足 f 几乎处处可逆， $f \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$，且 $f^{-1} \in W^{1,p}(\Omega', \mathbb{R}^n)$，其中某个 $p > n-1$。

主要结果将在第 1.2 节证明，内容如下。

定理 1.1. 设 $n \geq 2$、 $p > n-1$、Ω、$\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域，且 $f_k \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$、$k = 0$、1、2 . . . 是从 Ω 到 Ω'的同胚，满足 $J_{f_k} > 0$几乎处处并且

$$\sup_k \mathcal{E}(f_k) < \infty.$$

假设 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$是 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$在 $W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 中的弱极限，且满足 $J_f > 0$几乎处处； $h\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$是 $\{f_k^{-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$在 $W^{1,p}(\Omega', \mathbb{R}^n)$ 中的弱极限，且满足 $J_h > 0$几乎处处。那么，对于几乎处处的 $x \in \Omega$，我们有 $h(f(x)) = x$；对于几乎处处的 $y \in \Omega'$，我们有 $f(h(y)) = y$，并且 f 和 h 都几乎处处可微。

请注意以下结果。由于它仅对 f_k提出假设，因此更适用于变分法的处理方法。

推论 1.2. 设 $n \geq 2$、 $p > n-1$、Ω、$\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域，且 φ 是 $(0,\infty)$ 上的正凸函数，并满足

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty. \tag{1.1}$$

设 $f_k \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$、 $k = 0$、1、2 . . . , 是从 Ω 到 Ω'的同胚, 且 $J_{f_k} > 0$几乎处处成立，使得 $\sup_k \mathcal{F}(f_k) < \infty$，其中

$$\mathcal{F}(f) := \int_\Omega |Df(x)|^{n-1} + \frac{|\operatorname{adj} Df(x)|^p}{J_f^{p-1}(x)} + \varphi(J_f(x))\,dx.$$

假设 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$是 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$在 $W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 中的弱极限，且 $h\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$是 $\{f_k^{-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$在 $W^{1,p}(\Omega', \mathbb{R}^n)$ 中的弱极限。那么，对于几乎处处的 $x \in \Omega$，有 $h(f(x)) = x$；对于几乎处处的 $y \in \Omega'$，有 $f(h(y)) = y$；并且 f 和 h 都几乎处处可微。

2. Preliminaries

我们用 $B(c,r)$ 表示以 $c\in\mathbb{R}^n$ 为中心、半径为 $r>0$的欧几里得开球，而 $S(c,r)$ 表示相应的球面。

2.1. 拓扑像与 (INV) 条件。虽然同胚映射的弱极限未必是同胚，但它可能具有一种称为 (INV) 条件的可逆性。粗略地说，(INV) 条件表明，球 $B(x,r)$ 被映射到球面 $f(S(x,r))$ 的像之内，而补集 $\Omega\setminus B(x,r)$ 被映射到 $f(S(x,r))$ 之外。M¨uller 和 Spector [21], 为 $W^{1,p}$-映射（其中$p>n-1$）引入了这一概念，尽管球 $B(x,r)$ 被映射到球面 $f(S(a,r))$ 的像之内这一事实，早已在文献中作为单调性为人所知，参见 [25] 和 [32, §2]。设 $f\colon S(y,r)\to\mathbb{R}^n$ 连续，我们将 $B(x,r)$ 的拓扑像定义为

$$f^T(B(x,r)):=\{z\in\mathbb{R}^n\setminus f(S(x,r)) : \deg(f,S(x,r),z)\neq 0\} \tag{2.1}$$

以及 x 的拓扑像为

$$f^T(x):=\bigcap_{r>0,r\notin N_x} f^{*T}(B(x,r))\cup f^*(S(x,r)),$$

其中 N_x 是下文定义中的一个零测集。

定义2.1. 映射 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ 满足 (INV) 条件，若对于每个 $x\in\Omega$，都存在常数 $r_x>0$ 和一个 $\mathcal{L}^1$-零测集 N_x，使得对于所有$r\in(0,r_x)\setminus N_x$，限制映射 $f|_{S(x,r)}$ 连续，且

(i) $f(z)\in f^T(B(x,r))\cup f(S(x,r))$ for a.e. $z\in\overline{B(x,r)}$,
(ii) $f(z)\in\mathbb{R}^n\setminus f^T(B(x,r))$ for a.e. $z\in\Omega\setminus B(x,r)$.

需要指出的是，对于索伯列夫映射的某个特定代表，定义 2.1 允许某些点偏离其应有的归属，例如，球内的一个零测集可能被映射到该球像之外。因此，我们还考虑 (INV) 条件的一个更强版本。

定义 2.2. 映射 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ 满足强 (INV) 条件，若对于每个 $x\in\Omega$，都存在常数 $r_x>0$ 和一个 $\mathcal{L}^1$-零测集 N_x，使得对于所有 $r\in(0,r_x)\setminus N_x$，限制映射 $f|_{S(x,r)}$ 连续，且

(i) $f(z)\in f^T(B(x,r))\cup f(S(x,r))$ for every $z\in\overline{B(x,r)}$,
(ii) $f(z)\in\mathbb{R}^n\setminus f^T(B(x,r))$ for every $z\in\Omega\setminus B(x,r)$.

2.2. 索伯列夫映射的精确、超精确和超精确代表。设 $1\le p\le n$ 和 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，则 f 的精确代表由下式给出

$$f^*(a):=\begin{cases}\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{1}{|B(a,r)|}\displaystyle\int_{B(a,r)} f(x)\,dx & \text{if the limit exists,}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.2}$$

注意，代表 f^* 是 p-拟连续的（参见命题 2.8]之后的注释 [21, ）。

现在设 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是一个 $W^{1,\,p}$-同胚的弱极限 $f_k\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$，满足$p\in(n-1,n]$ 对于 $n>2$ 或 $p\in[1,2]$ 对于 $n=2$。于是根据 [1, 定理 5.2]，存在一个$\mathcal{H}^{n-p}$-零测集 $NC\subset\Omega$，以及 f^{**}的一个代表 f，使得 f^{**}在每个$x\in\Omega\setminus NC$处连续，集值像 $f^T(x)$ 对每个 $y\in\Omega\setminus NC$ 都是单点集，$f^{**}=f^*$ cap$_p$-几乎处处成立；并且可以选择 f^{**}，使得对于每个 $x\in\Omega$，都有 $f^{**}(x)\in f^T(x)$。我们将 f^{**}称为 f的超精确代表。

˜超精确代表 f 定义为

$$\tilde{f}(a) := \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

我们需要满足强 (INV) 条件的映射具有如下单调性。

引理 2.3. 设 $n \geq 2$ 和 $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域。若 $h\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$ 满足强 (INV) 条件，则 h 几乎对所有半径都是单调的，即对于 $y \in \Omega'$，存在一个 $\mathcal{L}^1$-零测集 N_y，使得对所有 $r \in (0, r_y)\setminus N_y$，均有 $\operatorname{osc}_{B(y,r)} h \leq \operatorname{osc}_{S(y,r)} h$。
此外，若 $h \in W^{1,\,p}(\Omega', \mathbb{R}^n)$ 且 $p > n-1$，则对任意 $r \in \left(0, \frac{r_y}{2}\right)$，以下估计成立

$$\operatorname{osc}_{B(y,r)} h \leq Cr\left(r^{-n}\int_{B(y,2r)} |Dh|^p\right)^{1/p}.$$

证明。设 N_y 是定义 2.2 中的一个集合。那么，对于 $y \in \Omega'$ 和 $r \in (0, r_y)\setminus N_y$，有 h 在球面 $S(y,r)$ 上连续，且 $h(z) \in h^T(B(y,r)) \cup h(S(y,r))$ 对每个 $z \in B(y,r)$ 都成立。在这种情况下，$h(S(y,r))$ 是一个紧集，并且 $h^T(B(y,r)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$，其中 A 是 $\mathbb{R}^n \setminus h(S(y,r))$ 的无界连通分支（因为根据拓扑度的基本性质 [12, p. 48(d)]，对所有 $\xi \in A$，我们有 $\deg(h, S(y,r), \xi) = 0$），因此 $\operatorname{osc}_{B(y,r)} h \leq \operatorname{osc}_{S(y,r)} h$。
此外，对于 $y \in \Omega'$ 和 $r > 0$，以及几乎处处的 $t \in [r, 2r)$，有

$$\operatorname{osc}_{B(y,r)} h \leq \operatorname{osc}_{B(y,t)} h \leq \operatorname{osc}_{S(y,t)} h.$$

于是，根据球面上的 Sobolev 嵌入定理 [12, 引理 2.19]，，按照 [12, 定理 2.24], 的证明，我们得到

$$\operatorname{osc}_{B(y,r)} h \leq \operatorname{osc}_{S(y,t)} h \leq Ct\left(t^{-n+1}\int_{S(y,t)} |Dh|^p\right)^{1/p} \leq Cr\left(r^{-n}\int_{B(y,2r)} |Dh|^p\right)^{1/p}.$$

□

˜注 2.4. 当 $p > n$时，$h^* = h^{**} = h$是 h的连续代表，且 h^* 几乎处处可微 [2], 并在 Ω [18]中满足 Lusin (N) 条件。此外，由于 $W^{1,p}$ 到 H¨older 空间 $C^{0,\alpha}$的紧嵌入，$W^{1,p}$ 中的弱收敛意味着在紧集上一致收敛。利用这些性质，后续分析得以简化，具体细节留给读者。

3. A.e.-invertibility of f

由于同胚的极限可能不是同胚，我们需要定义一种较弱的逆映射概念。首先回顾一下，如果存在一个零测集 $\Sigma \subset \Omega$，$|\Sigma| = 0$，使得限制映射 $f|_{\Omega\setminus\Sigma}\colon \Omega \setminus \Sigma \to f(\Omega \setminus \Sigma)$ 是单射，则称映射 $f\colon \Omega \to \Omega'$ 在定义域上几乎处处单射。若存在一个零测集 $\Sigma' \subset \Omega'$，$|\Sigma'| = 0$，使得对于任意$y \in f(\Omega) \setminus \Sigma'$，原像 $f^{-1}(y) := \{x \in \Omega : f(x) = y\}$ 仅由一个点组成，则称映射 $f\colon \Omega \to \Omega'$在值域上几乎处处单射。注意，如果 f 在值域上几乎处处单射并满足 $(N)^{-1}$ 条件，则 f 在定义域上几乎处处单射。反之，如果 f 在定义域上几乎处处单射，f 满足 (N) 条件，并且 $|\Omega'| = |f(\Omega)|$，则 f在值域上几乎处处单射。若对于几乎处处的 $x \in \Omega$，有 $h(f(x)) = x$，并且对于几乎处处的$y \in \Omega'$，有 $f(h(y)) = y$，则称 $h\colon \Omega' \to \Omega$ 是 $f\colon \Omega \to \Omega'$ 的几乎处处逆映射。注意，如果 f 满足 $(N)^{-1}$ 条件，则 f 在值域上几乎处处单射，当且仅当存在 f 的几乎处处逆映射。

下面的引理给出了一些附加条件，以保证在我们的设定下 f 几乎处处可逆。

引理 3.1. 设 $n \geq 2$、Ω 和 Ω' 是 $\mathbb{R}^n$、$p > n-1$ 中的有界区域，并设 $f_k \in W^{1,n-1}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 是从 Ω 到 Ω' 的同胚，且满足 $J_{f_k} > 0$。另设 $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$ 是 $\{\overline{f_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,n-1}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 中的弱极限，且 $J_f > 0$ 几乎处处成立。还假设序列 $\{f_k^{-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $W^{1,p}$，并以弱星方式收敛到 $h\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$，且 $J_h > 0$ 几乎处处成立。那么，$h^{**}(f(x))$ 在 Ω 中几乎处处成立，且 $f(h^{**}(y))$ 在 Ω' 中几乎处处成立。

证明。令 $p > n-1$，并固定 f 的一个代表，仍用同一符号表示。如有需要，我们取一个子序列，使得 $f_k \to f$ 和 $f_k^{-1} \to h$ 几乎处处逐点收敛。由于 h 是一列满足 $p > n-1$ 的索伯列夫同胚的 $W^{1,\,p}$-弱极限，超精确代表 h^{**} 满足强 (INV) 条件 [1, 定理 5.2 和引理 5.3]。于是存在一个全测度集 $G_1' \subset \Omega'$，$|G_1'| = |\Omega'|$：对所有 $y \in G_1'$，$J_{h^{**}}(y) > 0$，h^{**} 在 G_1' 中是单射（见 [21, 引理 3.4] 和 [1, 定理 1.2]），并且对所有 $y \in G_1'$，$f_k^{-1}(y) \to h^{**}(y)$。

步骤 1. $h^{**}(f(x)) = x$ 几乎处处：由引理 2.3 可知，对于几乎处处的 $y \in \Omega'$，$\operatorname{osc}_{B(y,r)} h^{**} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$。由于 $J_f > 0$ 几乎处处成立（因此 f 满足 $(N)^{-1}$ 条件），对于几乎处处的 $x \in \Omega$，$\operatorname{osc}_{B(f(x),r)} h^{**} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$。

令 $G_1 \subset f^{-1}(G_1')$ 为满足以下条件的集合：$|G_1| = |\Omega|$，且对所有 $x \in G_1$，都有 $f_k(x) \to f(x)$，并且 $\operatorname{osc}_{B(f(x),r)} h^{**} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$。

对于 $x \in G_1$ 和 $r > 0$，由 f_k 在 $x \in G_1$ 中以及 f_k^{-1} 在 $f(x) \in G_1'$ 中的逐点收敛，我们可以找到足够大的 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$f_k(x) \in B(f(x), r) \quad \text{and} \quad f_k^{-1}(f(x)) \in B(h^{**}(f(x)), r)$$

对所有 $k \geq k_0$ 均成立。此外，根据 [21, 引理 2.9]（尽管该引理是针对精确代表 h^* 表述的，但通过类似的证明也适用于超精确代表 h^{**}），存在一个子序列 $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$（取决于 r）以及一个足够大的数 $j_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{osc}_{S(f(x),r)} f_{k_j}^{-1} \leq \operatorname{osc}_{S(f(x),r)} h^{**} + r$$

对所有 $j \geq j_0$ 均成立。

于是我们有

$$\begin{aligned} |f_{k_j}^{-1}(f_{k_j}(x)) - h^{**}(f(x))| &\leq |f_{k_j}^{-1}(f_{k_j}(x)) - f_{k_j}^{-1}(f(x))| + |f_{k_j}^{-1}(f(x)) - h^{**}(f(x))| \\ &\leq \operatorname{osc}_{B(f(x),r)} f_{k_j}^{-1} + r \leq \operatorname{osc}_{S(f(x),r)} f_{k_j}^{-1} + r \\ &\leq \operatorname{osc}_{S(f(x),r)} h^{**} + r + r \leq \operatorname{osc}_{B(f(x),2r)} h^{**} + 2r. \end{aligned}$$

因此，根据 G_1 的定义，

$$|x - h^{**}(f(x))| = |f_{k_j}^{-1}(f_{k_j}(x)) - h^{**}(f(x))| \leq \lim_{r\to 0} (\operatorname{osc}_{B(f(x),2r)} h^{**} + 2r) = 0$$

对所有 $x \in G_1$ 均成立，由此完成步骤 1。

步骤 2. $f(h^{**}(y)) = y$ 几乎处处：我们知道 h^{**} 几乎处处在 G_1' 上是单射，并且 f 和 h^{**} 都满足 $(N)^{-1}$ 条件，因此当我们设定

$$G_2' := \big(G_1' \cap (h^{**})^{-1}(G_1)\big) \setminus (h^{**})^{-1}(f^{-1}(\Omega' \setminus G_1')),$$

我们知道这是一个全测度集。取 $y \in G_2'$。由于 f_k^{-1} 是映到 Ω 上的同胚，我们可以找到 $y_k \in \Omega'$，使得 $f_k^{-1}(y_k) = h^{**}(y)$。因此，

$$y_k = f_k(f_k^{-1}(y_k)) = f_k(h^{**}(y)) \to f(h^{**}(y)),$$

因此，y_k 收敛到某个 $\tilde{y} = f(h^{**}(y))$。对两边应用 h^{**}，得到 $h^{**}(\tilde{y}) = h^{**}(f(h^{**}(y)))$。由 $y \in G_2'$ 可知，$h^{**}(y) \in G_1$。由于 $h^{**}(f(x)) = x$ 于 G_1，我们得到 $h^{**}(\tilde{y}) = h^{**}(f(h^{**}(y))) = h^{**}(y)$。现在有两种可能：$\tilde{y} \in G_1'$ 或 $\tilde{y} \notin G_1'$。在第一种情况下，$\tilde{y} = y$，因为 h^{**} 在 G_1' 上是单射，所以 $f(h^{**}(y)) = y$。在另一种情况下，$f(h^{**}(y)) \in \Omega' \setminus G_1'$，这与 $y \in G_2'$ 矛盾。

□

注 3.2. 若 $p > n$，则等式 $h^{**}(f(x)) = x$ 可由下式容易地推出

$$|x - h^{**}(f(x))| \le |f_k^{-1}(f_k(x)) - f_k^{-1}(f(x))| + |f_k^{-1}(f(x)) - h^{**}(f(x))|,$$

利用一致收敛 $f_k^{-1} \rightrightarrows h^{**}$（取子序列后）以及针对 f_k^{-1} 的莫雷不等式。另一个关系 $f(h^{**}(y)) = y$也可依照上述方法得到。

注 3.3. 由于 f和 h 都满足 $(N)^{-1}$ 条件，因此恒等式 $h(f(x)) = x$在 Ω 中几乎处处成立，而 $f(h(y)) = y$ 在 Ω' 中几乎处处成立；这些结论对任意代表均成立。

4. Differentiability

首先，我们注意到以下众所周知的事实。

引理 4.1. 设 $n \ge 2$, $p > n-1$ 和 Ω' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域。若 $h \in W^{1,\,p}_{\text{局部}}(\Omega', \mathbb{R}^n)$ 满足强 (INV) 条件，则 h 在 Ω' 中几乎处处可微。

证明。由引理 2.3 可得

$$\operatorname{osc}_{B(y,r)} h \le Cr \left(r^{-n} \int_{B(y,2r)} |Dh|^p \right)^{1/p},$$

令 $r = |z - y|$，可推出

$$\limsup_{z \to y} \frac{|h(z) - h(y)|}{|z - y|} \le C|Dh(y)| < \infty$$

对于 $|Dh|^p$ 的任意勒贝格点 y，因此，根据斯捷潘诺夫定理 [27],（另见 [12, 定理 2.23]），h 几乎处处可微。

□

我们还需要对 [12, 引理 A.29], 作如下修改，由此可得定理 1.1 中映射 f 几乎处处可微——但导数仅相对于一个满测度集而言。

引理 4.2. 设 $n \ge 2$ 和 Ω、Ω' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域。设 $\Lambda \subset \Omega$、$\Lambda' \subset \Omega'$ 为满测度集，且 $h\colon \Omega' \to \Omega$ 满足：$h\colon \Lambda' \to \Lambda = h(\Lambda')$ 在 Λ' 中相对于由 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑诱导的相对拓扑可微，即对于所有 $y \in \Lambda'$，$J_h(y) > 0$。另假设 $h|_{\Lambda'}$ 是单射，且逆映射 $f := h^{-1}$ 在 Λ 中相对于 Λ 上的相对拓扑连续。那么，f 在 Λ 中相对于 Λ 上的相对拓扑可微，并且对于所有 $x \in \Lambda$，$Df(x) = (Dh(f(x)))^{-1}$。

证明。由于 $h\colon \Lambda' \to \Lambda$ 是一个同胚，本引理的证明与 [12, 引理 A.29] 的证明思路相同。为方便读者，我们在此给出证明。

根据 h 的可微性，我们知道对于 $y \in \Lambda'$

$$\lim_{\bar{y} \to y,\, \bar{y} \in \Lambda'} \frac{h(\bar{y}) - h(y) - Dh(y)(\bar{y} - y)}{|\bar{y} - y|} = 0. \tag{4.1}$$

对于 $\bar{x}$，$x \in \Lambda$ 记 $\bar{y} = f(\bar{x})$、$y = f(x) \in \Lambda'$，则

$$h(\bar{y}) - h(y) = h(f(\bar{x})) - h(f(x)) = \bar{x} - x.$$

由于 $J_h(y) > 0$，我们得到对于足够接近 y 的 $\bar{y}$，有

$$|\bar{x} - x| = |h(\bar{y}) - h(y)| \approx |Dh(y)(\bar{y} - y)| \approx |\bar{y} - y|.$$

由（4.1）可得

$$0 = \lim_{\bar{y}\to y,\, \bar{y}\in\Lambda'} \frac{(Dh(y))^{-1}\left(h(\bar{y}) - h(y) - Dh(y)(\bar{y}-y)\right)}{|y'-y|} = \lim_{\bar{y}\to y,\, \bar{y}\in\Lambda'} \frac{(Dh(y))^{-1}\left(h(\bar{y}) - h(y)\right) - (\bar{y}-y)}{|y'-y|} \approx \lim_{\bar{x}\to x,\, \bar{x}\in\Lambda} \frac{(Dh(f(x)))^{-1}\left(\bar{x}-x\right) - (f(\bar{x}) - f(x))}{|\bar{x}-x|},$$

由此完成证明。

□

以下命题是逆函数定理的一个版本。

命题 4.3. 设 $n \geq 2$, $p > n-1$, Ω 和 Ω' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$\Lambda \subset \Omega$ 和 $\Lambda' \subset \Omega'$ 是满测度集，且 $h \in W^{1,p}(\Omega', \Omega)$ 满足强 (INV) 条件，并且对任意 $y \in \Lambda'$，均可微且满足 $J_h(y) > 0$。此外，假设对任意 $y \in \Lambda'$，限制映射 $h|_{\Lambda'}\colon \Lambda' \to \Lambda$ 是单射。那么对任意 $y_0 \in \Lambda'$，存在一个序列 $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}} \searrow 0$，使得拓扑像 $h^T(B(y_0, r_m))$ 包含 $B\left(h(y_0)\, \frac{r_m}{3}\right)$。

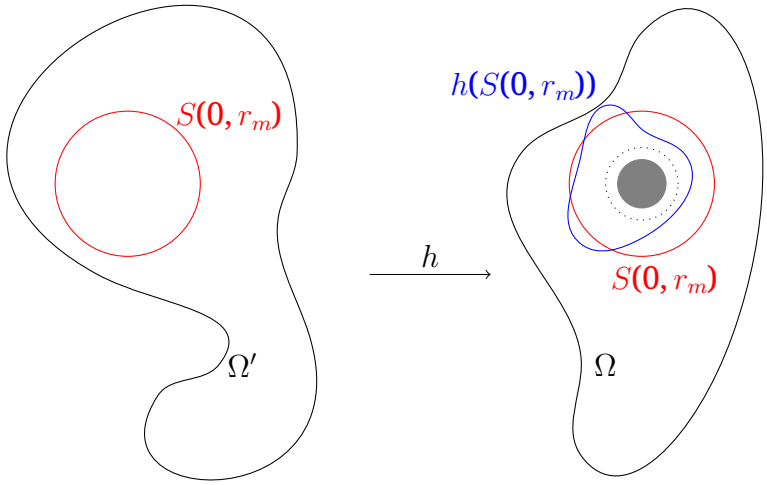

FIGURE 1. 映射 h 将红色球面 $S(0, r_m)$ 映射到 $h(S(0, r_m))$（蓝色）；灰色球 $B(0, r_m/3)$ 与 $h(S(0, r_m))$ 不相交，因为它到 0 的距离至少为 $r_m/2$（由点状球面表示）。

证明。无妨通过平移和线性变量变换，假设 $y_0 = 0$, $h(y_0) = 0$，且 $Dh(y_0) = Id$。由于 h 在 0 处可微，当 $y \to 0$ 时，有 $h(y) = y + o(|y|)$。这意味着存在 $r_0 > 0$，使得

$$|h(y) - y| \leq \frac{|y|}{2} \quad \text{for all } y \in B(0, r_0) \subset \Omega'. \tag{4.2}$$

考虑一个序列 $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}} \searrow 0$，使得 h 在 $S(0, r_m)$ 上连续，且满足定义 2.2（i–ii）。现在令 $z \in B\left(0, \frac{r_m}{3}\right) \subset \Omega$，不等式 (4.2) 推出 $z \notin h(S(0, r_m))$。由于 $\operatorname{dist}(z, S(0, r_m)) > r_m/2$，由 (4.2) 可知 $1 = \deg(z, Id, S(0, r_m)) = \deg(z, h, S(0, r_m))$。因此，$B\left(0, \frac{r_m}{3}\right) \subset h^T(B(0, r_m))$，示意见图 1。□

本节的最后一个定理总结了定理 1.1 中关于可微性的部分。

定理 4.4。设 $n \geq 2$、$p > n-1$、Ω 和 Ω' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，且 $f_k \in W^{1,\,n-1}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 是将 Ω 同胚映射到 Ω' 的同胚，并满足 $J_{f_k} > 0$。设 $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ 是 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,\,n-1}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 中的弱极限，且 $J_f > 0$ 几乎处处成立。进一步假设序列 $\{f_k^{-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $W^{1,\,p}$-弱收敛于 $h\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$，且 $J_h > 0$ 几乎处处成立。那么，h^{**} 在 Ω' 中几乎处处可微，且 f 在 Ω 中几乎处处可微。

证明。我们再次取一个子序列（如有必要），使得 $f_k \to f$ 和 $f_k^{-1} \to h$几乎处处逐点收敛。由于 h是具有 $p > n-1$的索伯列夫同胚的一个 $W^{1,\,p}$-弱极限，超精确代表 h^{**} 满足强 (INV) 条件 [1, 定理 5.2 和引理 5.3], 几乎处处是单射的（见 [21, 引理 3.4] 和 [1, 定理 1.2]），并且在几乎所有球面 [11, 上连续（见 19]引理 2.）。根据引理 4.1，h 在 Ω'中几乎处处可微。此外，由于 $J_h(y) > 0$ 在 Ω'中几乎处处成立，根据变量替换公式，我们得出 h 满足 $(N)^{-1}$ 条件。

步骤 1. 寻找集合 Λ, Λ': 令 f 为任意固定的代表，并引入良集 $G \subset\Omega$, $G' \subset\Omega'$ 如下

$$G:= \{x \in\Omega :\ h^{**}(f(x)) = x\} \subset\Omega \text{ and } G':= \{y \in\Omega' :\ f(h^{**}(y)) = y\} \subset\Omega'.$$

容易验证 $f(G) = G'$, $h^{**}(G') = G$，并且由引理 3.1 可得，$|G| = |\Omega|, |G'| = |\Omega'|$。定义坏集 $\Sigma \subset G, \Sigma' \subset G'$ 如下

$$\Sigma :=G \setminus \{x \in \Omega\ :\ J_f(x) > 0,\ f_k(x) \to f(x)\},$$
$$\Sigma' :=G' \setminus \{y \in\Omega' :\ h^{**} \text{ 在 } y\text{中可微},\ J_{h^{**}}(y) > 0,\ f_k^{-1}(y) \to h^{**}(y)\}.$$

显然 $|\Sigma| = |\Sigma'| = 0$。于是，极良集 $\Lambda \subset G$、$\Lambda' \subset G'$ 定义为

$$\Lambda' := G' \setminus (\Sigma' \cup f^{-1}(\Sigma)) \qquad \text{and} \qquad \Lambda := h^{**}(\Lambda').$$

根据引理 3.1 以及 f 和 h^{**} 的 $(N)^{-1}$ 条件，不难看出 $|\Lambda'| = |G'| = |\Omega'|$、$|\Lambda| = |\Omega|$ 以及 $f(\Lambda) = \Lambda'$。

步骤 2。$f|_\Lambda$ 的连续性：限制映射 $f|_\Lambda\colon\ \Lambda \to \Lambda'$ 关于 Λ 中的相对拓扑是连续的。事实上，设 $f|_\Lambda$ 在某点 $x_0 \in \Lambda$ 不连续，则存在一个序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$、$x_k \to x_0$，但 $f(x_k) \nrightarrow f(x_0)$。令 $y_k\colon = f(x_k) \in \Lambda'$，以及 $y_0\colon = (h^{**})^{-1}(x_0) = f(x_0)$。由于 $h^{**}|_{\Lambda'} = (f|_\Lambda)^{-1}$，我们有 $h^{**}(y_k) \to h^{**}(y_0)$，但 $y_k \nrightarrow y_0$。

根据命题 4.3，存在一个序列 $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}} \searrow 0$，使得

$$B\left(h^{**}(y_0), \frac{r_m}{3}\right) \subset (h^{**})^T(B(y_0, r_m)).$$

取足够大的 m 和 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于 $k \geq k_0$ 和 $h^{**}(y_{k_0}) \in B\left(h^{**}(y_0) \frac{r_m}{6}\right)$，有无穷多个 y_k 位于 $B(y_0, r_m)$ 之外。取一个子序列后，暂且可以假设，对所有 k，都有 $y_k \notin B(y_0, r_m)$。于是我们可以找到 $r > 0$，使得

$$B(y_{k_0}, r) \cap B(y_0, r_m) = \varnothing$$

并且，由于 $h^{**}|_{\Lambda'}$ 连续，

$$h^{**}(B(y_{k_0}, r) \cap \Lambda') \subset B\left(h^{**}(y_{k_0}), \frac{r_m}{6}\right).$$

综上所述，我们得到

$$h^{**}(B(y_{k_0}, r) \cap \Lambda') \subset B\left(h^{**}(y_{k_0}), \frac{r_m}{6}\right) \subset B\left(h^{**}(y_0), \frac{r_m}{3}\right) \subset (h^{**})^T(B(y_0, r_m)).$$

因此，对于每一个

$$z \in (B(y_{k_0}, r) \cap \Lambda') \subset (\Omega' \setminus B(y_0, r_m))$$

成立：$h^{**}(z) \in (h^{**})^T(B(y_0, r_m))$，后者与 h^{**} 的强 (INV) 条件矛盾，因为正测度集合 $B(y_{k_0}, r) \cap \Lambda'$ 从球 $B(y_0, r_m)$ 外部映入了该球的拓扑像内部。

因此， f 关于相对拓扑在 Λ 上连续；根据引理 4.2，我们得出 f 关于相对拓扑在 Λ 上可微。

步骤 3. f 几乎处处可微：接下来只需证明，由式 (2.3) 给出的超精确代表 $\tilde{f}$ 在 $x_0 \in \Lambda$ 处相对于 Ω 可微。由于 Λ 是一个全测度集，且 f 在 Λ 上关于相对拓扑连续，因此任意点 $x \in \Lambda$ 都是 f 的勒贝格点，故 $f = f$ 在 Λ 上成立。

固定 $x_0 \in \Lambda$ 和 $\varepsilon > 0$。由 f 在 Λ 上关于相对拓扑可微可知，存在 $s > 0$，使得对于任意 $x \in B(x_0, s)$，都有 $\cap \Lambda$

$$\frac{|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.3}$$

其中， $Df(x_0)$ 表示 $Df|_\Lambda(x_0)$ 相对于相对拓扑的导数。为了证明 f 可微，我们需要证明对于任意接近 x_0 的 x'，都有

$$\frac{|\tilde{f}(x') - \tilde{f}(x_0) - Df(x_0)(x' - x_0)|}{|x' - x_0|} < \varepsilon. \tag{4.4}$$

如果 $x' \in \Lambda$，则 (4.4) 由 (4.3) 立即得出。在另一种情况下，粗略地说，我们想找到一个点 $z \in \Lambda$，使得 $\frac{|f(x') - f(z)|}{|x' - x_0|}$ 和 $\frac{|x' - z|}{|x' - x_0|}$ 都很小，这样我们就可以估计

$$\begin{aligned}
&\frac{|\tilde{f}(x') - \tilde{f}(x_0) - Df(x_0)(x' - x_0)|}{|x' - x_0|} \\
&\quad \le \frac{|\tilde{f}(x') - \tilde{f}(z)| + |Df(x_0)(x' - z)|}{|x' - x_0|} + \frac{|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(x_0) - Df(x_0)(z - x_0)|}{|x' - x_0|} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

现在我们严格证明上述段落。设 $x' \in B\left(x_0, \frac{s}{2}\right)$。由 (2.3)，存在一个序列 $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}} \searrow 0$，使得 $r_k < 2^{-k}|x' - x_0|$ 且

$$\left| \tilde{f}(x') - \frac{1}{|B(x', r_k)|} \int_{B(x', r_k) \cap \Lambda} \tilde{f}(x)\, dx \right| < 2^{-k}|x' - x_0|. \tag{4.5}$$

接下来，对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们按坐标逐一进行。记 a_k^i 和 b_k^i 为 $B(x', r_k) \cap \Lambda$ 中的点，使得

$$\tilde{f}_i(a_k^i) \ge \frac{1}{|B(x', r_k)|} \int_{B(x', r_k) \cap \Lambda} f_i(x)\, dx - 2^{-k}|x' - x_0|, \tag{4.6}$$

$$\tilde{f}_i(b_k^i) \le \frac{1}{|B(x', r_k)|} \int_{B(x', r_k) \cap \Lambda} f_i(x)\, dx + 2^{-k}|x' - x_0|. \tag{4.7}$$

如果（4.6）或（4.7）中有等号，则相应地定义 x_k^i 为 a_k^i 或 b_k^i。否则，由于 $\tilde{f}_i$ 在 Λ 上的连续性，存在两个球 $B(a_k^i, \rho(a_k^i))$ 和 $B(b_k^i, \rho(b_k^i))$，它们包含于 $B(x', r_k)$ 中，使得对于任意 $a \in B(a_k^i, \rho(a_k^i)) \cap \Lambda$，（4.6）成立；对于任意 $b \in B(b_k^i, \rho(b_k^i)) \cap \Lambda$，（4.7）成立。不失一般性，我们可假设 $a_k^i = (0, \dots, 0)$ 且 $b_k^i = (b_1, 0, \dots, 0)$。现在考虑直线 $l_d := (t, d_2, \dots, d_n)$，它连接 $B(a_k^i, \rho(a_k^i))$ 和 $B(b_k^i, \rho(b_k^i))$。由于 Λ 具有全测度，对于 $\mathcal{L}^{n-1}$-几乎处处的 $d := (d_2, \dots, d_n)$，直线 l_d 包含 $x_a \in B(a_k^i, \rho(a_k^i)) \cap \Lambda$ 和 $x_b \in B(b_k^i, \rho(b_k^i)) \cap \Lambda$，且 $\mathcal{L}^1(l_d \setminus \Lambda) = 0$.

此外， $f_i \in W^{1,n-1}$，因此 f_i 在 $\mathcal{L}^{n-1}$-几乎处处的 l_d 上绝对连续。因此，由介值性质，存在一点 $c_k^i \in l_d$，使得

$$\left| \tilde{f}_i(c_k^i) - \frac{1}{|B(x', r_k)|} \int_{B(x', r_k) \cap \Lambda} \tilde{f}_i(x)\, dx \right| \le 2^{-k}|x' - x_0|. \tag{4.8}$$

此外，存在 $x_k^i \in l_d \cap \Lambda \subset B(x', r_k)$，使得

$$|\tilde{f}(c_k^i) - \tilde{f}(x_k^i)| \le 2^{-k}|x' - x_0|. \tag{4.9}$$

于是，由 (4.5)、(4.8) 和 (4.9)，

$$|\tilde{f}_i(x_k^i) - \tilde{f}_i(x')| \le |\tilde{f}_i(x_k^i) - \tilde{f}_i(c_k^i)| + |\tilde{f}_i(c_k^i) - \tilde{f}_i(x')| < 2^{-k+2}|x' - x_0|. \tag{4.10}$$

此外，

$$\begin{aligned}&\frac{|\tilde{f}_i(x') - \tilde{f}_i(x_0) - Df_i(x_0)(x' - x_0)|}{|x' - x_0|} \\ &\quad\le \frac{|\tilde{f}_i(x') - \tilde{f}_i(x_k^i)| + |Df_i(x_0)(x' - x_k^i)|}{|x' - x_0|} + \frac{|\tilde{f}_i(x_k^i) - \tilde{f}_i(x_0) - Df_i(x_0)(x_k^i - x_0)|}{|x' - x_0|}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

由于 $x_k^i \in B(x', r_k)$ 且 (4.10) 成立，(4.11) 中的第一项可以估计为

$$\frac{|\tilde{f}_i(x') - \tilde{f}_i(x_k^i)| + |Df_i(x_0)(x' - x_k)|}{|x' - x_0|} \le 2^{-k+2} + 2^{-k}|Df(x_0)|.$$

而要估计 (4.11) 中的第二项，我们注意到

$$|x_k^i - x_0| \le |x_k^i - x'| + |x' - x_0| \le (1 + 2^{-k})|x' - x_0| \le 2|x' - x_0| \le s,$$

由于 $x_k^i \in B(x', r_k)$。因此，由 (4.3)，我们得出

$$\frac{|\tilde{f}_i(x_k^i) - \tilde{f}_i(x_0) - Df_i(x_0)(x_k^i - x_0)|}{|x' - x_0|} \le \frac{2|\tilde{f}_i(x_k^i) - \tilde{f}_i(x_0) - Df_i(x_0)(x_k^i - x_0)|}{|x_k^i - x_0|} \le \varepsilon.$$

综上，对于 $x_0 \in \Lambda$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在 $s > 0$，使得对于任意 $x' \in B\left(x_0, \frac{s}{2}\right)$ 均成立

$$\frac{|\tilde{f}_i(x') - \tilde{f}_i(x_0) - Df_i(x_0)(x' - x_0)|}{|x' - x_0|} \le \liminf_{k\to\infty}(2^{-k}(4 + |Df_i(x_0)|) + \varepsilon) = \varepsilon.$$

因此，$\tilde{f}_i$ 在 Ω 中的任意 $x_0 \in \Lambda$ 处都是可微的，而且，$D\tilde{f}_i(x_0) = Df_i|_\Lambda(x_0)$。□

5. Proofs of Theorem 1.1 and Corollary 1.2

定理 1.1 的证明。定理 1.1 由引理 3.1 和定理 4.4 立即得出。□

推论 1.2 的证明。首先注意到，按照定理 1.1] 的证明，将 n 替换为 p，我们得到

$$\int_{\Omega'} |Df_k^{-1}|^p(y)\,dy \le \int_\Omega \frac{|\operatorname{adj} Df_k|^p(x)}{(J_{f_k}(x))^{p-1}}\,dx.$$

因此，$\mathcal{E}(f_k) \le \mathcal{F}(f_k)$，且序列 $\{f_k^{-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,\,p}(\Omega', \mathbb{R}^n)$ 中有界；必要时取一个子序列，可得一个弱极限 h。此外，由引理 2.3]和 (1.1)，不等式

$$\int_\Omega \varphi(J_f(x))\,dx \le C$$

保证在 Ω 中 $J_f > 0$ 几乎处处成立，且在 Ω 中 $J_h > 0$ 几乎处处成立′。为完成证明，我们应用定理 1.1。□

Acknowledgement

我们谨向 Stanislav Hencl 教授致以谢意，感谢他使我们关注这一问题，并与我们进行了许多富有成效的讨论。

References

[1] O. Bouchala, S. Hencl, and A. Molchanova. Sobolev 同胚弱极限的几乎处处单射性. 《函数分析杂志》, 279(7):108658, 32, 2020年.[2] A. P. Calder´on. 关于绝对连续函数的可微性. 《帕尔马大学数学杂志》, 2:203–213, 1951年.[3] D. Campbell, S. Hencl, A. Kauranen, and E. Radici. 平面 BV 同胚的严格极限. 《非线性分析》, 177(part A):209–237, 2018年.[4] L. Cesari. 关于二元绝对连续函数. 《比萨高等师范学院科学类年刊》 (2), 10:91–101, 1941年.[5] M. Cs¨ornyei, S. Hencl, and J. Mal´y. Sobolev 空间中的同胚 $W^{1,n-1}$. 《纯粹与应用数学杂志》, 644:221–235, 2010年.[6] G. De Philippis and A. Pratelli. 平面微分同胚在 Sobolev 空间中的闭包. Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire, 37(1):181–224, 2020年.[7] A. Dole˘zalov´a, S. Hencl, and J. Mal´y. W^1中的同胚弱极限$^{n-1}$ 及 (INV) 条件. arXiv, 2021年.[8] A. Dole˘zalov´a, S. Hencl, and A. Molchanova. W^1中的同胚弱极限$^{n-1}$: 可逆性与能量下半连续性. arXiv, 2022年.[9] N. Fusco, G. Moscariello, and C. Sbordone. 具有有限畸变的 $W^{1,1}$ 同胚的极限. 《变分与偏微分方程》, 33(3):377–390, 2008年.[10] F. W. Gehring and O. Lehto. 复变量函数的全可微性. 《芬兰科学院 A I 辑年刊》 No., 272:9, 1959年.[11] S. Hencl and P. Koskela. 有限畸变映射: 拟轻映射的离散性与开性. Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire, 22(3):331–342, 2005年.[12] S. Hencl and P. Koskela. 有限畸变映射讲义. 《数学讲义》, Vol. 2096. 施普林格国际出版公司, 2014年.[13] S. Hencl and J. Onninen. Sobolev 同胚弱极限的雅可比行列式. 《高等变分学》, 11(1):65–73, 2018年.[14] S. Hencl and V. Tengvall. Sobolev 映射几乎处处可微性的尖锐性及容量估计. 《伊比利亚美洲数学杂志》, 33(2):595–622, 2017年.[15] T. Iwaniec and J. Onninen. 总能量最小的超弹性变形. 《理性力学与分析档案》, 194(3):927–986, 2009年.[16] T. Iwaniec and J. Onninen. Sobolev 同胚的极限. 《欧洲数学会杂志》 (JEMS), 19(2):473–505, 2017年.[17] T. Iwaniec, J. Onninen, and Zh. Zhu. 双共形能量变形及拟共形性的一种新刻画. 《理性力学与分析档案》, 236(3):1709–1737, 2020年.[18] M. Marcus and V. J. Mizel. Sobolev 空间函数所诱导的变换及参数变分问题的下半连续性. 《美国数学会通报》, 79:790–795, 1973年.[19] A. Molchanova and S. Vodop′yanov. 非线性弹性力学中几乎处处单射性与有限畸变映射. 《变分与偏微分方程》, 59(1):Paper No. 17, 25, 2020年.[20] G. Moscariello and A. Passarelli di Napoli. 具有有限畸变的 Sobolev 同胚逆映射的正则性. 《几何分析杂志》, 24(1):571–594, 2014年.[21] S. M¨uller and S. Spector. 允许空穴化的非线性弹性存在性理论. 《理性力学与分析档案》, 131(1):1–66, 1995年.[22] J. Onninen. 单调 Sobolev 函数的可微性. 《实分析交流》, 26(2):761–772, 2000/01年.[23] J. Onninen. 有限畸变空间映射逆映射的正则性. 《变分与偏微分方程》, 26(3):331–341, 2006年.[24] Yu. G. Reshetnyak. 广义导数与几乎处处可微性. 《苏联科学院院刊》 , 170:1273–1275, 1966 年 .[25] Yu. G. Reshetnyak. 有界畸变空间映射 . 《西伯利亚数学杂志》, 8(3):466–487, 1967年.[26] Yu. G. Reshetnyak. 广义导数与几乎处处可微性. 《数学文集》 (N.S.), 75(117):323–334, 1968年..[27] W. Stepanoff. 关于全可微性. 《数学年刊》, 90(3-4):318–320, 1923年.[28] V. Tengvall. Sobolev 空间中的可微性 $W^{1,n-1}$. 《变分与偏微分方程》, 51(1–2):381–399, 2014 年 .[29] J. V¨ais¨al¨a. 拟共形性的两种新刻画 . 《芬兰科学院 A I 辑年刊》 No., 362:12, 1965年.[30] S. K. Vodop′yanov. 畸变函数满足特定条件的 Sobolev 类映射的可微性. 《西伯利亚数学杂志》, 59(6):1240–1267, 2018年.

[31] S. K. Vodop′yanov. 索伯列夫映射的逆映射的正则性与$\mathcal{Q}_{q,\ p}$-同胚理论。《西伯利亚数学杂志》, 61(6):1002–1038,2020年。[32] S. K. Vodop′yanov and V. M. Gol′dshtein. 拟共形映射与具有广义一阶导数的函数空间。《西伯利亚数学杂志》, 17(3):399–411, 1976。

Department of Mathematical Analysis, Charles University, Sokolovská 83, 186 00Prague 8, Czech Republic电子邮箱：dolezalova@karlin.mff.cuni.cz

Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090Vienna, Austria电子邮箱：anastasia.molchanova@univie.ac.at