使用截断实心调和展开对磁场进行唯一紧凑表示

Marija Boberg[1,2],Tobias Knopp[1,2], 和 Martin M¨oddel[1,2]

[1] *Section for Biomedical Imaging, University Medical Center Hamburg-Eppendorf, Hamburg, Germany*
[2] *Institute for Biomedical Imaging, Hamburg University of Technology, Hamburg, Germany*

2023年2月16日

arXiv:2302.07591v1 [physics.med-ph] 15 Feb 2023

摘要 精确掌握磁场对于许多医学成像应用至关重要，例如磁共振成像或磁粒子成像（MPI），因为磁场是这些成像系统的基础。为了研究场不完美性对成像的影响，利用实固体球谐函数对磁场进行紧凑且唯一的表示非常有帮助；这种表示仅需测量磁场的少数几个点即可获得。在本文中，我们将实固体调和展开作为拉普拉斯方程的一般解进行综述，并介绍一种利用球面 t-设计高效计算其系数的方法。我们还提供了一种平移展开参考点的方法，即根据初始展开的系数计算平移后展开的系数。我们利用这些方法获取磁粒子成像系统的磁场。在此，空间编码场的无场点作为唯一的展开点。最后，我们通过分析展开系数，量化磁粒子成像中静态场和动态场的畸变程度。

关键词： 球谐函数、固体谐函数展开、磁粒子成像（MPI）、磁场

1 引言

自指南针发明以来，磁场一直是推动技术进步的重要因素。磁场是发电机、电动机、变压器和磁存储设备的基础。在医疗应用领域，磁场是磁共振成像（MRI）和磁粒子成像（MPI）等多种成像系统的基础。磁场的精确生成对图像质量有显著影响，即使微小偏差也可能导致图像伪影和误诊。如果已知磁场，在大多数此类应用中，都可以纠正这些缺陷带来的负面影响，例如磁共振图像中的磁场相关伪影 [1]。磁场表示的一种标准方法是球谐展开，该方法可通过在球面上的多个位置对磁场进行校准测量而获得 [2]。这种方法能够稳健、紧凑地表示球形区域内磁场的分布，并有助于分析和解决相关问题 [3]。

与磁共振成像（MRI）一样，磁场是近期成像技术磁粒子成像（MPI）的基本构成要素。静态磁场对磁粒子成像信号进行空间编码，而动态磁场则用于信号生成 [4]。磁粒子成像扫描仪的特点取决于其静态信号编码场的拓扑结构，该场要么是场自由点（FFP），要么是无场线（FFL） [5]。磁粒子成像中的许多重建方法都需要对磁场作出某些假设，或掌握相关信息。在 x 空间重建中，需要知道场自由点的位置，才能在重建的一个步骤中将测量数据映射到空间域 [6]。在用于扩大视野（FOV）的快速隐式多分区重建过程中，必须知道各个扫描区域的中心位置，以避免产生伪影 [7]。

尽管本文以磁粒子成像为应用示例，球谐展开也可应用于多个领域。由于球谐展开能够紧凑地表示磁场，因此可用于磁共振成像中，以有效设计主动或被动匀场 [8], 、确定两个电磁源之间的磁耦合 [9] ，或对地球岩石圈磁场建模 [10, 11]。此外，球谐函数还可用于通过确定物体的方向来配准物体 [12], 也可用于模拟高分辨率的宇宙微波背景各向异性全天图 [13]。

Bringout 等人 [14, 15] 和 Weber 等人 [16, 17] 已经证明，球谐展开的系数适用于表征磁粒子成像中的磁场。本文回顾了作为拉普拉斯方程通解的实正则球谐展开，并将在后文将其应用于磁粒子成像中的磁场。为计算该展开的系数，我们采用球面 *t*-设计作为高效的数值求积节点。在这些节点进行实际测量，即可获得有效磁场的系数

。这些系数可直接用于分析展开点处磁场的空间特性。为此，我们提出一种平移展开的参考点的方法。这样，便可利用通过基于测量的过程计算得到的一组系数，获取不同位置处磁场的空间特性。最后，我们利用不同展开点处的系数，对磁粒子成像中的静态场和动态场进行表征。

1.1 问题陈述

磁粒子成像是一种基于示踪剂的成像模态，它利用磁场进行信号生成和编码，以确定超顺磁性氧化铁纳米颗粒（SPIOs）的空间分布。信号编码场是一个静态线性磁场，称为选择场；在本文所讨论的情形中，它具有场自由点（FFP）拓扑。只有位于场自由点周围小范围低场区域（LFR）内的纳米颗粒未达到饱和状态，能够对激励场产生非线性响应，从而实现信号的空间编码。在我们的场景中，选取三个正交激励方向，施加正弦激励，并采用有理频率比，使场自由点沿着穿过立方体视野（FOV）的利萨如轨迹移动。 [18]中详细介绍了磁粒子成像接收信号的数学模型。这里，我们假设模拟滤波器为理想滤波器，且不存在馈通。在这种情况下，低场区域内纳米颗粒的磁化响应会在多个接收线圈中感应出电压信号 $k = 1, \ldots, K$，其表达式为

$$u_k(t) = -\mu_0 \int_\Omega \left\langle \boldsymbol{p}_{\mathrm{r}}^k(\boldsymbol{r}), \frac{\partial \bar{\boldsymbol{m}}}{\partial t}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t),t) \right\rangle c(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

其中， $c\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 描述视野 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$内的粒子分布； $\bar{\boldsymbol{m}}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 是粒子的平均磁矩； $\boldsymbol{p}_{\mathrm{r}}^k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 是接收线圈的线圈灵敏度； μ_0 是真空磁导率。粒子的磁矩是对所施加磁场$\boldsymbol{B}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$的响应，该磁场由静态选择场和动态驱动场组成。

图 1 展示了一个典型的磁粒子成像实验。小鼠被放置在扫描仪孔径的中心。测量过程中，会注射含有超顺磁性氧化铁纳米颗粒的示踪剂。在典型的测量方案中，使用沿 z 方向梯度强度为 0.2 至 7 $\mathrm{T\,m^{-1}}$ [19, 20]、沿 x 和 y 方向梯度强度为其一半的选择场，以及约为 6 至 18 mT [19, 21] 的驱动场幅值。驱动场幅值受到限制，因为更高的幅值可能导致外周神经刺激 [22]。更高的梯度强度会使产生信号的低场区域变小，从而提高成像系统的分辨率 [4]。然而，这会以视野尺寸减小为代价。例如，采用梯度强度为 2.0 $\mathrm{T\,m^{-1}}$、驱动场幅值为 12 mT 时，视野为 $24 \times 24 \times 12\,\mathrm{mm}^3$,，无法覆盖小鼠或大鼠等较大的物体。为此，采用多分区方法 [23]。额外的静态磁场（称为聚焦场）会平移初始场自由点，使不同扫描区域覆盖更大的视野。图 1 示意了一项实验，其中使用了九个不同的扫描区域来覆盖小鼠。

由于场不完美性，每个扫描区域的轨迹都略有不同，这可能带来多种负面影响。如果场自由点没有沿预期路径移动，空间编码就会发生变化，进而可能产生图像伪影。此外，扫描区域可能会平移到不同位置，导致采样视野中出现空隙，如图 1 所示。最后，不同或随空间位置变化的驱动场幅值可能导致对示踪剂浓度的估算不准确。

本研究的一个主要目标是量化底层磁场畸变的严重程度。理想情况下，磁粒子成像中仅存在常量场和线性场。若以选择场场自由点处的球谐展开系数表示，则只有少数系数非零，如图 2 所示。正交场分量中出现非零系数，或高阶系数非零，都能直接反映局部场不完美性。计算这些系数时，我们使用位于球面上的球面 t-设计求积节点处的磁场测量。相应展开以球心为展开点。然而，由于测量时场自由点的确切位置尚不确定，该球心很可能并非场自由点。通过对系数进行线性变换来平移展开的参考点，即可避免以场自由点为中心进行额外测量。该方法还可用于比较各扫描区域位置中心处的局部磁场；理想情况下，这些磁场应当相同。具体做法是分别将展开的参考点移动到各个中心位置。

2 理论

2.1 拉普拉斯方程的唯一解

本章首先介绍作为拉普拉斯方程通解的实心球谐展开。为求解该方程，我们在球面上采用狄利克雷边界条件；对于使用球谐函数展开的解，这是一个自然的选择。

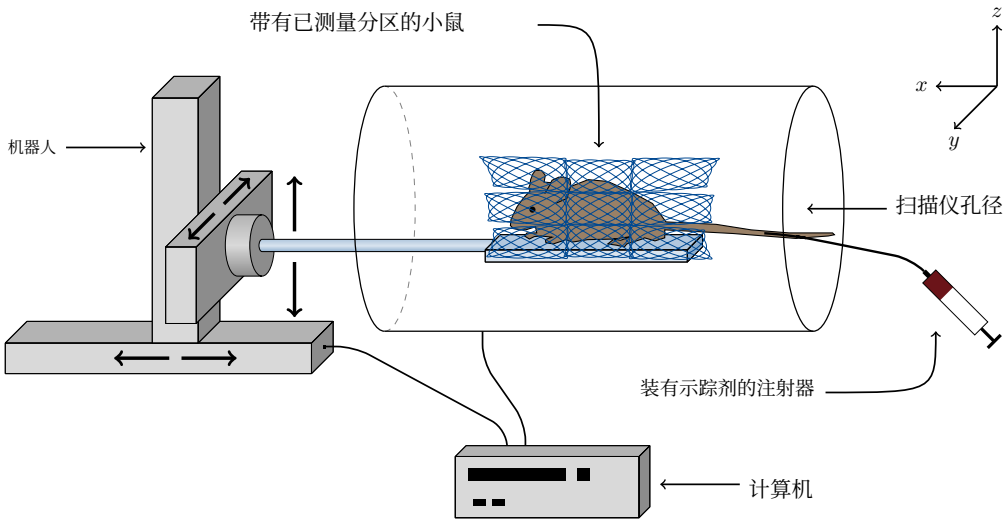

图 1：磁粒子成像测量示意图。磁粒子成像扫描仪和三轴机器人由一台计算机控制。测量前，机器人将小鼠放置在扫描仪孔径的中心。进行磁粒子成像测量时，将含有超顺磁性氧化铁纳米颗粒的示踪材料注射到小鼠体内。由于小鼠的体型大于单区视野的范围，因此需要使用多个分区覆盖其身体。偏离中心的分区会因静态场和动态场的空间特性而发生扭曲。

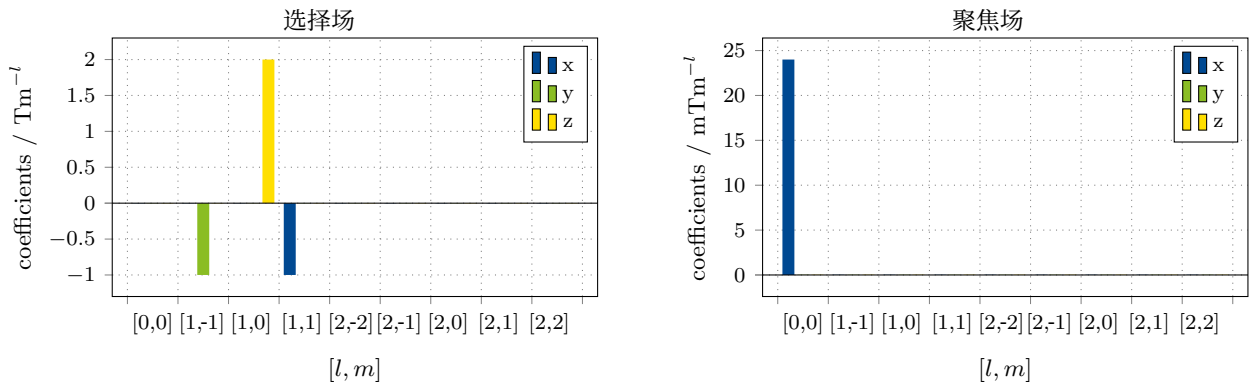

图 2：磁粒子成像中两种理想磁场的球谐系数。左侧显示的是理想选择场，其梯度强度在 z 方向为 2 T m^{-1}，在 x 和 y 方向为 -1 T m^{-1}。梯度强度由相应场方向的球谐展开中的线性系数（$l = 1$）表示。右侧展示的是 x 方向上场强度为 24 mT 的理想聚焦场。该恒定场由其在 x 方向上的展开常数系数（$l = 0$）表示。

定义 2.1。设 $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \ \mathbb{R})$，其中 $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) := \left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \colon \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\rho}\|_2 \le R\right\}$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$, $R \in \mathbb{R}_+$。带狄利克雷边界条件的拉普拉斯方程为

$$\begin{cases} \Delta f(\boldsymbol{a}) = 0 & \forall \boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_R(\boldsymbol{\rho}) \\ f(\boldsymbol{a}) = \hat{f}(\boldsymbol{a}) & \forall \boldsymbol{a} \in \partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}). \end{cases} \tag{2}$$

ˆ 边界条件 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \ \mathbb{R})$ 给定在记作 $\partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ 的球的表面上，而
◦内部记作 $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$。

首先，我们在单位球上引入方程 (2) 的一个解，随后将其推广到任意半径和球心的球。

命题 2.2。设 $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_1(\mathbf{0}) \ \mathbb{R})$ 且 ˆ $f\colon \ \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R} \in L^2(\mathbb{S}^2)$ 满足 (2)。则 f 可写成实球谐展开

$$f(\boldsymbol{a}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \gamma_{l,m} Z_l^m(\boldsymbol{a}) \qquad \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{B}_1(\mathbf{0}) \tag{3}$$

其中，作为归一化实球谐函数扩展的归一化实固体球谐函数 Z_l^m 定义如下

$$Z_l^m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (r,\vartheta,\varphi) \mapsto K_l^{|m|} r^l P_l^{|m|}(\cos\vartheta) \cdot \begin{cases} \sqrt{2}\cos(m\varphi) & m > 0 \\ \sqrt{2}\sin(|m|\,\varphi) & m < 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

其中 $K_l^m = \sqrt{\frac{(l-m)!}{l+m}}$（）！，而缔合勒让德多项式为 P_l^m [24]。展开式的实球谐系数 $\gamma_{l,\ m} \in \mathbb{R}$可通过正交投影计算得出

$$\gamma_{l,m} = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \hat{f}(\boldsymbol{a}) Z_l^m(\boldsymbol{a}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{a}.$$

证明。该命题　　成立，因为受限的实固体球谐函数 $Z_l^m|_{\mathbb{S}^2}$ 构成一个正交基
　的$L^2(\mathbb{S}^2)$，因此系数可通过正交投影计算得出。 □

∞　l**备注**。每个实球谐展开 $\sum \ \sum \ \gamma_{l,m} Z_l^m$均满足式 (2) [24].$l=0\ m=-l$

接下来，我们将命题 2.2 推广到球 $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ 的任意半径 R 和球心 $\boldsymbol{\rho}$。在这种情况下，$\boldsymbol{\rho}$决定了级数展开的中心。

命题 2.3。设 $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \ \mathbb{R})$ 和 ˆ $f\colon \partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \to \mathbb{R} \in L^2(\partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}))$ 对任意 $R \in \mathbb{R}_+$和 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$均满足式 (2)。系数 $\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}, R)$ 取决于 $\boldsymbol{\rho}$ 和 R，可由下式计算：

$$\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}, R) = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \hat{f}(R\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\rho}) Z_l^m(\boldsymbol{a}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{a}. \tag{4}$$

对于 $\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{R^l}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}, R)$，$f$的实心调和展开可表示为

$$f^{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}) Z_l^m(\boldsymbol{a}) \qquad \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{B}_R(\mathbf{0}), \tag{5}$$

其中 $f^{\boldsymbol{\rho}} := \tau_{\boldsymbol{\rho}}(f)$，$\tau_{\boldsymbol{\rho}}(f)\colon \mathcal{B}_R(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \mapsto f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\rho})$表示作用于 $\mathcal{C}^2$函数的平移算子。中心 $\boldsymbol{\rho}$ 决定了底层坐标系的原点；对于 f，该坐标系用上标 $\boldsymbol{\rho}$ 表示。

证明。令 $f^{\boldsymbol{\rho},R} := \tau_{\boldsymbol{\rho}}(\sigma_R(f))\colon \mathcal{B}_1(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \mapsto f(R\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\rho})$，并令 ˆ $f^{\boldsymbol{\rho},R} := \tau_{\boldsymbol{\rho}}(\sigma_R(\hat{}f))$，定义类似，其中 σ_R 表示作用于 $\mathcal{C}^2$ 函数的缩放算子。利用命题 2.2，可计算 $f^{\boldsymbol{\rho},R}$ 的系数，得

$$\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}, R) = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \hat{f}^{\boldsymbol{\rho},R}(\boldsymbol{a}) Z_l^m(\boldsymbol{a}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{a},$$

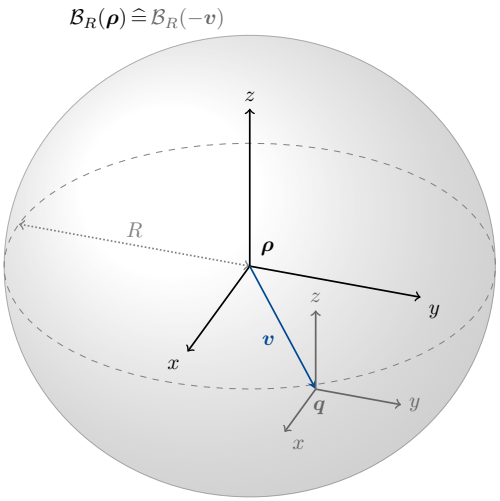

图3：函数 f 的定义域对应的系数所处的不同坐标系。黑色坐标系表示系数在展开点 $\boldsymbol{\rho}$ 处的初始坐标系。通过平移 $\boldsymbol{v}$，系数对应于平移后的灰色坐标系，其原点位于 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{v}$。在这个坐标系中，函数 f 的球形定义域现在表示为 $\mathcal{B}_R(-\boldsymbol{v})$。

由此得到（4）。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
f^{\boldsymbol{\rho},R} = \tau_{\boldsymbol{\rho}}(\sigma_R(f)) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}, R) Z_l^m \\
\Leftrightarrow \quad \tau_{\boldsymbol{\rho}}(f) = \tau_{\boldsymbol{\rho}}(\sigma_R(\sigma_R^{-1}(f))) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}, R)\, \sigma_R^{-1}(Z_l^m) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \underbrace{\frac{\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}, R)}{R^l}}_{=:\,\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})} Z_l^m
\end{aligned}
$$

由于 Z_l^m 是齐次多项式，因此 $\sigma_R^{-1}(Z_l^m(\boldsymbol{a})) = Z_l^m\left(\frac{1}{R}\boldsymbol{a}\right) = \frac{1}{R^l} Z_l^m(\boldsymbol{a})$。令 $f^{\boldsymbol{\rho}} := \tau_{\boldsymbol{\rho}}(f)$，即可得出式（5）。

□

注。为提高可读性，当 $R = 1$ 和 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ 时，省略指标 R 和 $\boldsymbol{\rho}$。

2.2 平移

系数 $\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})$ 对应于在边界条件定义域的中心 $\boldsymbol{\rho}$ 处进行的实心调和展开。接下来，我们引入平移算子 $\hat{\tau}$，以便对这些系数进行变换，使其对应于在新的中心点 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ 处进行的实心调和展开。例如，如果 $\mathbf{0} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$，则可以通过 $\hat{\tau}_{-\boldsymbol{\rho}}\left(\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\right)$ 计算系数$\gamma_{l,m}(\mathbf{0})$。原展开点和新展开点所在的坐标系如图3所示。

此后，我们假设 $f : \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \to \mathbb{R}$ 对 $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ 是 L^2 次数为 $L \in \mathbb{N}_0$ 的多项式，且

定义 2.4. 我们将截断实心调和展开定义为一个线性算子

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_L : \mathbb{R}^{(L+1)^2} &\to \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{B}_R(\mathbf{0})} \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_R(\boldsymbol{s}), \mathbb{R}), \\
\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}) &\mapsto \left(\boldsymbol{a} \mapsto \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{q}) Z_l^m(\boldsymbol{a}) \right),
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}) = (\gamma_{l,\ m}(\boldsymbol{q}))_{\substack{l=0 \\ m=-l \ \dots \ l}}^{L} \in \mathbb{R}^{(L+1)^2}$ 是一个包含展开中心$\boldsymbol{q} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$处截至 $l = L$ 的所有系数的向量。由于展开的定义域取决于计算系数时所使用的边界条件，因此有 $S_L(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q})) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{q})\ \mathbb{R})$。

备注。

i) 由于我们假设 f 是次数为 L的多项式，(5) 等价于

$$f^{\boldsymbol{\rho}} = \mathcal{S}_L(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}))$$

用 (4) 计算得到的 $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})$。

ii) 将坐标系平移 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\rho}$ 至级数展开 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{B}_R(-\boldsymbol{v})$ 的新中心 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$，可表示为

$$\begin{aligned} f^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{a}) = \tau_{\boldsymbol{v}}\big(f^{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{a})\big) &= \tau_{\boldsymbol{v}}\big(\mathcal{S}_L(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}))(\boldsymbol{a})\big) \\ &= \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\, \tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big). \end{aligned}$$

实球谐函数的平移可以转化为系数的平移，如下述定理所述。

定理 **2.5.** 对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$，存在一个算子 $\hat{}\tau_{\boldsymbol{v}} \colon \mathbb{R}^{(L+1)^2} \to \mathbb{R}^{(L+1)^2}$，满足 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\rho}$，使得 at

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{(L+1)^2} & \xrightarrow{\hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}} & \mathbb{R}^{(L+1)^2} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}_L} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}_L} \\ \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\tau_{\boldsymbol{v}}} & \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_R(-\boldsymbol{v}), \mathbb{R}) \end{array}$$

可交换，即

$$\tau_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{S}_L(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})) = \mathcal{S}_L \circ \hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})\big).$$

T实际计算 $\hat{}\tau_{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})\big) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q})$ 的方法由附录 *A.2* 中的方程 (22) 至(25) 给出 .

证明。 该定理的证明见附录。首先，我们在 A.1 节中将 Rico 等人著作 [25]中给出的未归一化实固体球谐函数的加法定理改写为适用于归一化实球谐函数的形式。将加法定理应用于实心调和展开并重新排列求和顺序，可得固体系数的加法定理，由此得到该定理的证明，详见第二部分 A.2 节。

□

备注。

i) 使用 (22) 至 (25) 计算系数 $\hat{}\tau_{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})\big)$ 的工作量为 $\mathcal{O}\big(L^4\big)$。

ii) 定理 2.5 可以推广到任意点 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ 之间的平移。

2.3 高效求积

为了获得多项式 $f \colon \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \to \mathbb{R}$ 的固体系数，必须知道它在边界 $\partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ 上的取值。例如，在磁场测定的应用场景中，这些值可以通过测量获得。以磁粒子成像（MPI）为例，测量点的选择仅受扫描仪孔径的尺寸和形状限制，因此迄今为止，MPI 中一直使用高斯-勒让德求积来计算系数 [15]。一种更高效的测量点选择方法是采用球面 t-设计 [26], ，下文将对此进行介绍。

定义 2.6. 球面 t-设计 是由节点 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathbb{S}^2$ 组成的集合，满足

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{Y}(\boldsymbol{a})\, \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{4\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{Y}(\boldsymbol{a}_k) \quad \forall \mathcal{Y} \in \Pi^t$$

其中 $\Pi^t = \operatorname{span}\{Z_l^m|_{\mathbb{S}^2} \colon\ l \le t\}$ 表示单位球面上所有次数不超过 $t \in \mathbb{N}$ 的多项式集合。 [26]

备注。 球面 t-设计是球面上的数值求积所采用的一种非常高效的采样模式。在 [27] 中可以找到多个 t-设计。例如，已知最小的 8-设计仅由 36 个点组成 [28]。相比之下，要达到相同的精度，需要 45 个高斯-勒让德求积节点 [17]。

命题 2.7. 假设 $f\colon \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \to \mathbb{R}$ 是一个次数为 $L \in \mathbb{N}_0$ 、满足 (2) 且 $f\colon \partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \to \mathbb{R} \in L^2(\partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}))$ 的多项式。设 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1,\dots,N}$ 是一个 $2L$-设计。对于 $l \le L$ ，有

$$\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{2l+1}{NR^l} \sum_{k=1}^{N} \hat{f}(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho}) Z_l^m(\boldsymbol{a}_k).$$

证明。 设 $l \le L$。则乘积 fZ_l^m 的次数至多为 $2L$。由命题 2.3 和定义 2.6 可得

$$\begin{aligned}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{1}{R^l}\frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \hat{f}(R\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\rho}) Z_l^m(\boldsymbol{a}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{a} \\ &= \frac{1}{R^l}\frac{2l+1}{4\pi}\frac{4\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} \hat{f}(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho}) Z_l^m(\boldsymbol{a}_k).\end{aligned}$$

由于 $\deg(f) \le L$ ，实心调和展开 (5) 可截断至 $l = L$。 □

3 方法

3.1 磁场

在磁粒子成像（MPI）中，我们关注扫描仪孔径内的准静态磁场，该磁场由孔径外的电流产生。由于这些磁场满足拉普拉斯方程，我们可以应用命题 2.3，并将磁场展开为实心调和展开。

引理 3.1。 设 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z) \in \mathcal{C}^2(\Omega\ \mathbb{R}^3)$ 是一个准静态磁场，其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 表示没有电流流过的区域。那么，对于所有$\boldsymbol{a} \in \Omega$，分量 B_i （其中 $i = x$、 y、 z）均满足拉普拉斯方程。

证明。 静磁场满足麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}) &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

对于所有 $\boldsymbol{a} \in \Omega$ [29]。由于 Ω 中没有电流流过，第二个方程等于零。因此，有$\boldsymbol{B} = -\nabla\Phi$ 其中 $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ 是磁标势 [17, 29]。文献 [17] 证明了 $-\Delta\Phi = 0$ 由此成立，这意味着 $\Delta B_i = 0$。

□

Note. 下文中，索引 i 表示磁场 $\boldsymbol{B}$的 x、 y和 z分量 .

命题 3.2。 假设磁场 $\boldsymbol{B} \in \mathcal{C}^2(\Omega\ \mathbb{R}^3)$ 可以用次数为L的多项式描述。设 $R \in \mathbb{R}_+$ 和 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}) \subseteq \Omega$ ，并且令 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1,\dots,N}$ 为一个 $2L$-设计。给定边界条件 $B_i(\boldsymbol{a}) = \hat{}B_i(\boldsymbol{a})\ \ \forall \boldsymbol{a} \in \partial\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ ，其中 $\hat{} B_i \in L^2(\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho}))$ ，该磁场可表示为实心调和展开

$$\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=-l}^{l} \boldsymbol{\gamma}_{l,m}(\boldsymbol{\rho}) Z_l^m(\boldsymbol{a}) \qquad \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{0})$$

系数 $\boldsymbol{\gamma}_{l,\,m} = (\gamma_{l,\,m}^{x}, \gamma_{l,\,m}^{y}, \gamma_{l,\,m}^{z})$ 由以下方法计算

$$\gamma_{l,m}^{i}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{R^l}\frac{2l+1}{N} \sum_{k=1}^{N} \hat{B}_i(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho}) Z_l^m(\boldsymbol{a}_k).$$

证明。 根据引理 3.1，磁场 $\boldsymbol{B}$ 和边界 $\boldsymbol{B}$ 满足命题 2.7 的所有假设，因此可得这两个方程。

□

磁场 $\boldsymbol{B}$ 在展开点 $\boldsymbol{\rho}$ 处的展开，其系数为 $\boldsymbol{\gamma}^x(\boldsymbol{\rho})$、 $\boldsymbol{\gamma}^y(\boldsymbol{\rho})$ 和 $\boldsymbol{\gamma}^z(\boldsymbol{\rho})$，分别描述了磁场在局部 x、 y 和 z 方向上的特性。与泰勒级数类似，该展开可以写成多项式，其次数随索引 l 增大。也就是说，$\boldsymbol{\gamma}_{0,\,0}$ 描述磁场的常数部分，而系数 $\boldsymbol{\gamma}_{1,\,m}$ 包含其线性行为的信息；$\boldsymbol{\gamma}_{1,\,-1}$ 描述 y 方向上的行为，$\boldsymbol{\gamma}_{1,\,0}$ 描述 z 方向上的行为，而 $\boldsymbol{\gamma}_{1,\,1}$ 描述 x 方向上的行为。 $l > 1$ 的系数描述了磁场的非线性行为。

3.2 磁粒子成像中的磁场

在磁粒子成像中，信号编码和生成使用两种主要磁场：线性选择场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{SF}}$：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 以及动态驱动场 $\boldsymbol{B}^i_{\mathrm{DF}}$：$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$。每个动态驱动场都可以分解为常数线圈灵敏度 $\boldsymbol{p}^i_{\mathrm{DF}}$：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 和正弦电流 I^i：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{B}^i_{\mathrm{DF}}(\boldsymbol{r},\ t) = I^i(t)\boldsymbol{p}^i_{\mathrm{DF}}(\boldsymbol{r})$。在我们的设置中，三个正交的驱动场线圈同时也是接收线圈，因此 $\boldsymbol{p}^k_{\mathrm{DF}} = \boldsymbol{p}^k_{\mathrm{r}}$，其中 $k \in \{1,2,3\}$见式 (1)。在问题陈述中描述的多区块设置下，还会施加逐扫描区域恒定的聚焦场$\boldsymbol{B}^i_{\mathrm{FF}}$：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，以获得更大的视野。关于磁粒子成像成像原理以及磁粒子成像扫描仪设置的更多一般信息见 [30, 5]；磁粒子成像的数学背景见 [18]。

	选择场	聚焦场	驱动场
$l=0$	$\boldsymbol{\gamma}_{0,0}=\mathbf{0}$	$\gamma^i_{0,0}=f^i$	$\gamma^i_{0,0}=d^i$
$l=1$	$\gamma^y_{1,-1}=-0.5g$ $\gamma^z_{1,0}=g$ $\gamma^x_{1,1}=-0.5g$	$\boldsymbol{\gamma}_{1,m}=\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\gamma}_{1,m}=\mathbf{0}$

表 1：磁粒子成像中三种不同理想磁场的系数，单位为 $\mathrm{T\,m^{-}}^{l}$。

理想选择场、聚焦场和驱动场在展开点 $\mathbf{0}$ 处的固体系数列于表 1 中。表中未提及的所有系数均为零。由于选择场是线性场，只有 $l=1$的系数非零，它们描述了 $g \in [0\,\mathrm{T\,m^{-1}},\ 2。5\ \mathrm{T\,m^{-1}}]$在 z方向以及 $-0.5g$在 x 和 y方向上的梯度强度。同时，理想驱动场和聚焦场中只有 $l=0$ 的常数系数非零。聚焦场以平移 f^x, $f^y \in [-17\,\mathrm{mT},\ 17\ \mathrm{mT}]$和 $f^z \in [-42\,\mathrm{mT},\ 42\ \mathrm{mT}]$,为特征，而驱动场则以振幅 $d^i \in [0\,\mathrm{mT},\ 14\ \mathrm{mT}]$ 为特征，其中 $d^i = \max_t(I^i(t))\boldsymbol{p}^i_{\mathrm{DF}}(\mathbf{0})$。

3.3 测量装置

磁场可以使用霍尔效应传感器、超导量子干涉器件传感器或感应传感器等不同设备进行测量 [31]。配备三轴霍尔传感器的高斯计精度很高，因此广泛用于磁场测量 [32, 33]。因此，我们使用 Lake Shore（型号 460，美国 Westerville）的三通道高斯计，该设备配备三轴高灵敏度霍尔效应传感器 [34]，用于测量磁粒子成像扫描仪的静态场。其精度由约 $\pm0.10\%$ 的读数误差和所选量程的 $\pm0.005\%$ 之和决定 [34]。所使用的 $\pm0.3\,\mathrm{T}$ 量程会产生最大 ±300 微特斯拉的读数误差和 ±15微特斯拉的量程误差。动态驱动场的线圈灵敏度通过三轴线圈传感器测量，该传感器连接至模数转换器（ADC），用于对感应电压信号进行数字化 [35]。每个线圈的半径为 2.5 mm，精度约为 $\pm8\%$。磁场在我们的临床前磁粒子成像系统 25/20FF（Bruker BioSpin MRI GmbH, Ettlingen，德国）中测量；该系统配备三轴笛卡尔机器人（isel Germany AG，Eichenzell，德国），以便对测量设备进行简便且精确的定位。机器人在每个方向上的重复精度为 ±0.02mm；当电机步进角为 1.8° 时，角度误差为 $\pm5\%$。考虑到高斯计或线圈传感器的精度，机器人定位偏差造成的测量误差很小，可以忽略。所有磁场均在 8-设计的 36 个点处测量 [27], ，这些点由机器人逐一到达。图 4 展示了一个包含 6 个点的示例性 3 设计。根据扫描仪孔径的直径为 12 cm 这一条件，对各点进行重新缩放，以获得半径为 42 mm 的球面。在确保探头与扫描仪孔径不会发生碰撞的安全裕度的前提下，球面尺寸尽可能大。中心 $\boldsymbol{\rho}$ 选在靠近选择场场自由点的位置。每个点处均同时测量三个场方向。

对于每个磁场，我们都在不同场强下进行多次测量。请注意，以下场值描述的是扫描仪的输入参数，理想情况下，这些参数应产生上一节所述的理想磁场。首先，使用霍尔传感器测量选择场，其梯度强度设为 10 个不同值：0.25 至 2.5 $\mathrm{T\,m^{-1}}$，步长为 0.25 $\mathrm{T\,m^{-1}}$。聚焦场也使用霍尔传感器测量：在 x-和 y-方向上，平移量设为 11 个不同值，从 -17 至 17 mT，步长为 3.4 mT；在 z-方向上，平移量设为从 -42 至 42 mT，步长为 8.4 mT。对于使用线圈传感器测量的驱动场，三个方向均设定 4 个不同的振幅，范围为 6 至 12 mT，步长为 2 mT，因为这是我们实验中最常用的范围。

3.4 唯一表示

虽然线圈传感器的单个线圈都以同一点为中心，但霍尔传感器内部的三个正交探测器相对于杆的中心略有偏移。因此，每个探测器测量的是

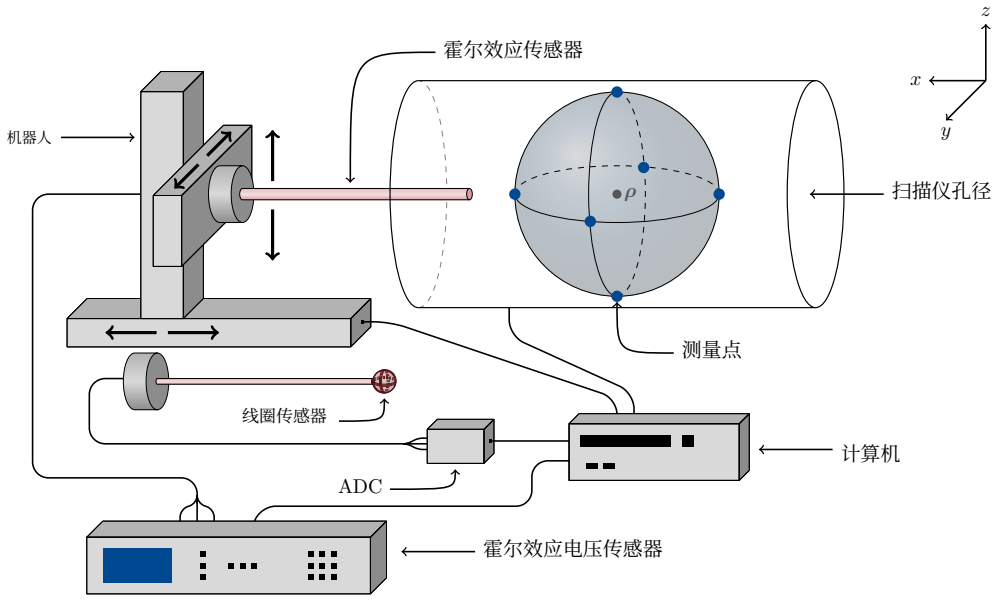

图 4：测量装置。高斯计的霍尔效应传感器安装在三轴笛卡尔机器人上，机器人将其移动到扫描仪孔径内选定的 t-设计位置。高斯计的电压传感器将测得的数据传输至计算机，计算机负责控制机器人的运动以及磁粒子成像扫描仪的设置。

如图 5 所示，磁场位于一个略有偏移的球面上。所有探测器均位于杆尖端后方 1.8 mm 处， x-和 y-探测器还分别从中心向外偏移 2.08 mm。因此，每个方向都对应三个展开点略有不同的展开式 $\boldsymbol{\rho}_i$ 。利用定理 2.5 中的平移，可以将系数平移到以杆尖端为中心的共同坐标系中 $\boldsymbol{\rho}$。

在磁粒子成像中，主选择场具有唯一的场自由点。我们可以利用这一点，将在杆尖端展开的磁场系数进一步平移至场自由点；该点由展开式通过牛顿法确定。这样，系数便与测量设备本身和整个测量装置无关，仅取决于磁粒子成像扫描仪特有的磁场。利用选择场的场自由点，我们还可以将驱动场和聚焦场的系数平移至该点。总之，我们得到了一组唯一的系数，用以表示磁粒子成像扫描仪的磁场。

3.5 实现

迄今为止描述的所有数值方法均使用 Julia 编程语言（版本 1.8） [36] 在开源软件包 SphericalHarmonicExpansions.jl（版本 0.1） [37]中实现。该软件包提供

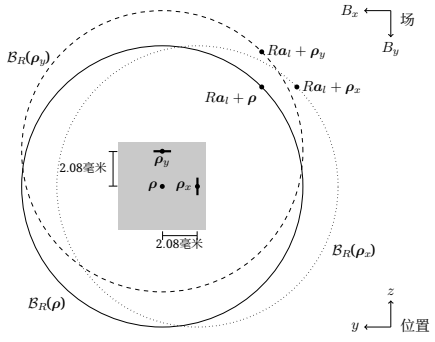

图 5：三轴霍尔效应传感器分别配备了用于 x、 y 和 z 方向的三个独立传感器。用于 x 和 y 方向的传感器（$\boldsymbol{\rho}_x$ 和 $\boldsymbol{\rho}_y$）在传感器杆（灰色方块）内部偏离中心安装。对于每个传感器，图中显示了用于测量磁场的相应球面 $\mathcal{B}_R$（$\boldsymbol{\rho}_x$）和 $\mathcal{B}_R$（$\boldsymbol{\rho}_y$），以及位于杆尖端的球面 $\mathcal{B}_R$（$\boldsymbol{\rho}$）。此外，右下方还显示了磁粒子成像扫描仪的空间坐标系。上方显示的是由探测器方向所定义的磁场坐标系。

用于存储和处理球面展开或实心球展开系数的方法、基于 t-设计的高效数值求积方法（用于计算球面或实心球系数）、将系数转换到其他展开点的方法，以及在笛卡尔坐标中快速数值求值展开式的方法。此外，还可通过 MPIFiles.jl 软件包（版本 0.12） [38]获取一组球面 t-设计。一个示例脚本展示了如何根据上述测量结果求得一个 2 T m^{-1} 选择场的展开式，详见 https://github.com/IBIResearch/SphericalHarmonicExpansionOfMagneticFields。

3.6 误差分析

测量仪器始终存在微小的统计独立测量误差 $\delta > 0$，该误差会依据误差传播定律 [39, 40]传播至系数和最终的磁场。在我们的测量装置中，误差有两个来源，即磁场测量的不确定性以及霍尔效应传感器定位中的误差。系统性位置误差可能源于测量传感器的非理想机器人支架，或用于固定传感器的杆发生弯曲。这种系统性误差实际上会导致坐标系发生平移，而通过向 FFP 的平移可以对其进行补偿，因此可以忽略。只需考虑非系统性位置偏差；在我们的装置中，这类偏差非常小，因此也予以忽略。

推论 3.3。 令 $\boldsymbol{\gamma}^i(\boldsymbol{\rho})$ 为利用命题 *2.7* 计算得到的固体系数， $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{\rho}}$ 为利用命题 *3.2* 计算得到的磁场。此外，对于测得的边界条件 $\hat{} B_i(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho})$，我们还存在独立的观测误差 $\delta_k(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho})$ 。

i) 系数 $\gamma^i_{l,m}(\boldsymbol{\rho})$ 传播误差的标准差可通过以下方式获得

$$\varepsilon^i_{l,m}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{2l+1}{NR^l}\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(\delta_k(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho})\, Z^m_l(\boldsymbol{a}_k)\right)^2}.$$

ii) 对于磁场 $B^{\boldsymbol{\rho}}_i$ 的每个分量，位置 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\rho})$ 处传播误差的标准差可通过以下方式计算

$$\hat{\varepsilon}^{\boldsymbol{\rho}}_i(\boldsymbol{a}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(\delta_k(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho})\, \mathcal{S}_L\left(\frac{2l+1}{NR^l} Z^m_l(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho})\right)(\boldsymbol{a})\right)^2}.$$

备注。 由于平移映射关于系数是线性的，因此可以用类似的方法传播系数的误差。

在误差分析中，我们将截断展开给出的场值与测量值进行比较。在我们的示例研究中，我们使用了在球面 t-设计位置获得的磁场测量值，这些测量值也用于生成截断展开。在典型的应用场景中，应使用独立测量进行误差估计。对于选择场，可通过以下方式进行

$$\zeta_i(k) = \frac{B^{\boldsymbol{\rho}}_i(R\boldsymbol{a}_k) - \hat{B}_i(R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho})}{Rg_i}, \tag{6}$$

该方法将缩放后的 t-设计位置 $R\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\rho}$ 处的测量磁场 $\hat{} B_i$ 与同一位置处的计算磁场 $B^{\boldsymbol{\rho}}_i$ 进行比较。两者之差按所考察方向的缩放后梯度强度 g_i 归一化。传播误差也采用相同的归一化方式 $\hat{} \zeta_i(k) = \hat{\varepsilon}^{\boldsymbol{\rho}}_i(R\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{\rho})\, Rg_i$ ，从而可以评估截断展开的近似质量。

4 结果

例如，我们考察梯度强度为 2 T m^{-1} 的选择场结果。表 2 左侧列出了未经任何后处理、根据测量计算得出的初始系数，右侧则列出了处理后的系数。后处理包括以测量球面的半径进行归一化、校正霍尔传感器的平移，并平移至根据初始系数计算出的场自由点。由于平移至场自由点， $[l, m] = [0, 0]$ 对应的系数在浮点精度范围内等于零。现在，可以直接从 $l = 1$对应的系数中读出梯度；该梯度与理想梯度略有偏差（参见表 1）。所有其他非零系数均可归因于测量误差或选择场的不完善。

	初始系数			处理后的系数		
$[l,m]$	x	y	z	x	y	z
[0,0]	$-3.89\cdot10^{-6}$	$-2.42\cdot10^{-4}$	$-4.25\cdot10^{-3}$	$-3.61\cdot10^{-19}$	$-3.29\cdot10^{-19}$	$-8.83\cdot10^{-19}$
[1,-1]	$1.46\cdot10^{-5}$	$-4.21\cdot10^{-2}$	$-1.65\cdot10^{-5}$	$3.81\cdot10^{-4}$	-1	$-2.65\cdot10^{-3}$
[1,0]	$4.24\cdot10^{-4}$	$-1.08\cdot10^{-4}$	$8.48\cdot10^{-2}$	$9.95\cdot10^{-3}$	$-3.07\cdot10^{-3}$	2.02
[1,1]	$-4.25\cdot10^{-2}$	$-2.45\cdot10^{-4}$	$7.59\cdot10^{-4}$	-1.01	$-5.64\cdot10^{-3}$	$1.79\cdot10^{-2}$
[2,-2]	$2.02\cdot10^{-4}$	$8.36\cdot10^{-8}$	$4.97\cdot10^{-5}$	$3.83\cdot10^{-2}$	$-1.52\cdot10^{-3}$	$3.33\cdot10^{-2}$
[2,-1]	$6.26\cdot10^{-5}$	$8.19\cdot10^{-4}$	$-7.76\cdot10^{-4}$	$3.78\cdot10^{-2}$	0.2	-0.15
[2,0]	$6.67\cdot10^{-5}$	$-1.73\cdot10^{-4}$	$-8.25\cdot10^{-4}$	$3.85\cdot10^{-2}$	$-6.85\cdot10^{-2}$	$-1.96\cdot10^{-2}$
[2,1]	$8.95\cdot10^{-4}$	$9.64\cdot10^{-5}$	$-2.59\cdot10^{-5}$	0.5	$5.24\cdot10^{-2}$	$-1.15\cdot10^{-2}$
[2,2]	$-2.44\cdot10^{-5}$	$-1.47\cdot10^{-4}$	$-2.7\cdot10^{-4}$	$-1.46\cdot10^{-2}$	$-7.61\cdot10^{-2}$	-0.15
[3,-3]	$8.39\cdot10^{-6}$	$1.21\cdot10^{-5}$	$3.27\cdot10^{-5}$	0.11	0.16	0.44
[3,-2]	$1.12\cdot10^{-5}$	$-2.13\cdot10^{-5}$	$3.41\cdot10^{-5}$	0.15	-0.29	0.46
[3,-1]	$-2.03\cdot10^{-6}$	$-3.3\cdot10^{-3}$	$-2.94\cdot10^{-5}$	$-2.74\cdot10^{-2}$	-44.48	-0.4
[3,0]	$5.56\cdot10^{-5}$	$2.87\cdot10^{-5}$	$5.23\cdot10^{-3}$	0.75	0.39	70.61
[3,1]	$-3.28\cdot10^{-3}$	$-3.03\cdot10^{-5}$	$6.3\cdot10^{-5}$	-44.22	-0.41	0.85
[3,2]	$-1.07\cdot10^{-5}$	$-3.87\cdot10^{-6}$	$8.29\cdot10^{-5}$	-0.14	$-5.22\cdot10^{-2}$	1.12
[3,3]	$-4.11\cdot10^{-5}$	$1.57\cdot10^{-7}$	$1.82\cdot10^{-5}$	-0.55	$2.11\cdot10^{-3}$	0.24

表 2：比较　　初始系数（单位：T，左）与归一化处理后的系数（单位：T m^{-}　　^{l}，右）对应于 2 T m　$^{-1}$ 选择场。

4.1 磁粒子成像中的磁场

4.1.1 静态场

通过平移系数，可以比较磁粒子成像中施加的不同磁场。图 6 展示了图 1 中央和左下扫描区域的静态磁场。第一行展示了梯度强度为 2 T m^{-1} 的选择场在其场自由点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{c}}$ 以及左下扫描区域中心点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}}$ 处的系数。$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{c}}$ 处的系数没有明显的不完善，而平移后的系数则在 $l \geq 1$ 处出现了一些不完善。由于 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}}$ 不是选择场的场自由点，$\gamma_{0\,0.}^{\mathrm{SF}}(\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}},\ R_{\mathrm{s}})$ 不为零，并包含偏置场的信息。施加一个具有相同偏置场但符号相反的额外聚焦场，即可抵消偏置场，并将场自由点平移至 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}}$。第二行展示了该聚焦场，其在 x方向上的偏置场为 -24 mT，在 z方向上为 24 mT。这两个位置均存在一些不完善，但偏离中心的位置 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}}$处的不完善略多。最后一行显示了选择场与聚焦场的组合场。右侧场图的坐标轴因系数平移至场自由点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}}$而发生了偏移。因此，场自由点的坐标为 (0，0)，与上方场图中的情况相同。由于平移至场自由点，可以直接比较初始选择场与组合场的系数。可以看出，组合场的不完善程度远高于初始选择场，而且从 $l=1$开始就已如此。

这些系数不仅便于比较，还可以用于计算实际梯度强度和聚焦场平移；其数值与第 3.3 节给出的输入参数不同。对于图 6 所示的装置，选择场在其场自由点处的实际梯度强度为 -1.02, -1.01 和 2.03 T m^{-1}，分别沿 x-、 y-和 z 方向。同时，实际聚焦场平移分别为 -22.96 和 23.28 mT，沿 x-和 z 方向。

4.1.2 动态场

图 7 展示了我们的磁粒子成像扫描仪的 12 mT 动态场。与静态场一样，左侧各列展示了选择场在场自由点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{c}}$ 和偏移场自由点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}}$ 处的系数，三行则分别展示 x-、 y-和 z-驱动场。总体而言，系数随 l 增大而减小，这说明将展开截断至 $L=4$ 是合理的。可以观察到，即使在中心也会出现不完善，尤其是 $l>1$；对于 y-和 z-驱动场，这种情况更为严重。$l=0$ 的系数表明，x-、 y-和 z-驱动场的驱动场幅值分别为 12.35、12.29 和 12.15 mT，与 12 mT 的输入参数存在偏差。这是因为驱动场线圈比选择场和聚焦场线圈更靠近扫描仪孔径。比较中心场自由点和偏移场自由点处的系数可知，驱动场的不完善程度有所增加。此处 $l=0$ 也会出现不完善，且在 z-驱动场中尤为明显。在偏移

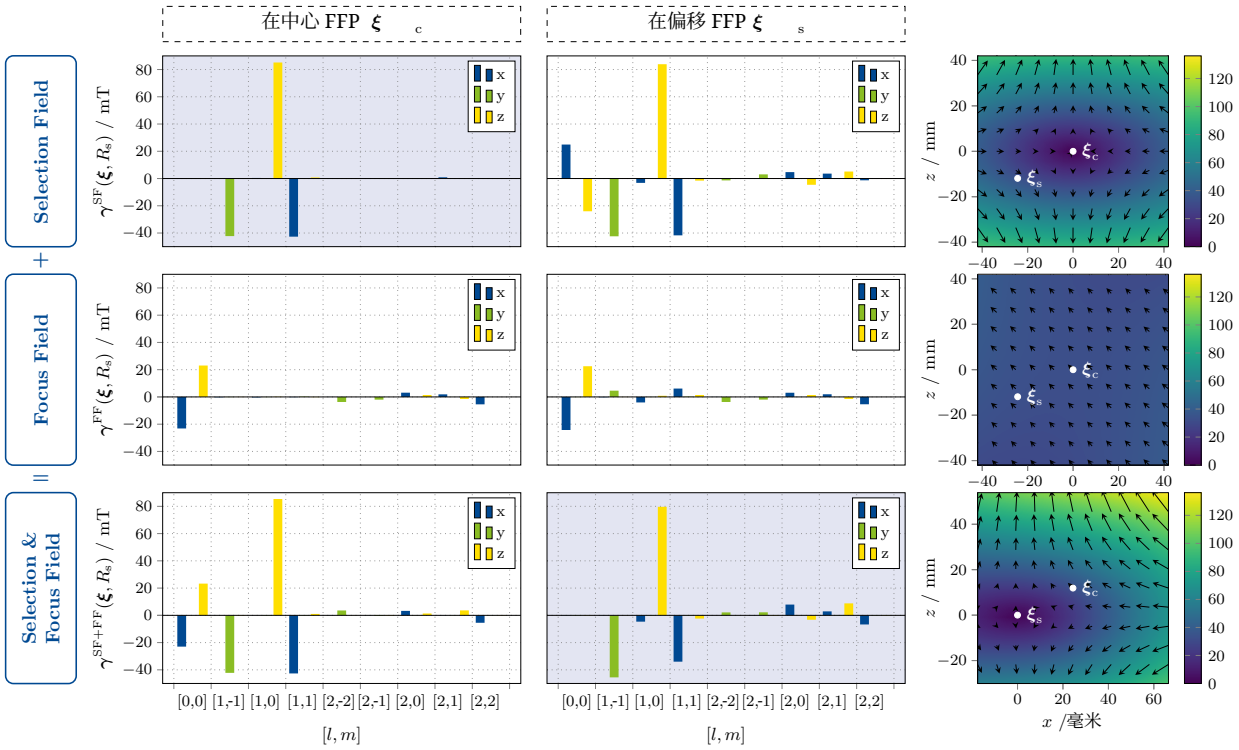

图6：磁粒子成像中静态场的实球谐分析，即选择场和聚焦场。第一行显示了梯度强度为 2 T m^{-1}的选择场。第一列显示选择场在场自由点 $\boldsymbol{\xi}_\mathrm{c}$ 处的系数，第二列显示在另一点 $\boldsymbol{\xi}_\mathrm{s}$ 处的系数。两个点都在右侧的场图中标出。第二行显示了聚焦场在两个位置分别沿 x方向为 $-24\,\mathrm{mT}$、沿 z方向为 $24\,\mathrm{mT}$ 的情况。该附加场用于将场自由点从 $\boldsymbol{\xi}_\mathrm{c}$ 平移至 $\boldsymbol{\xi}_\mathrm{s}$。最后一行显示了选择场与聚焦场的合成场。在理想磁粒子成像系统中，浅蓝色背景对应的系数应完全相同。

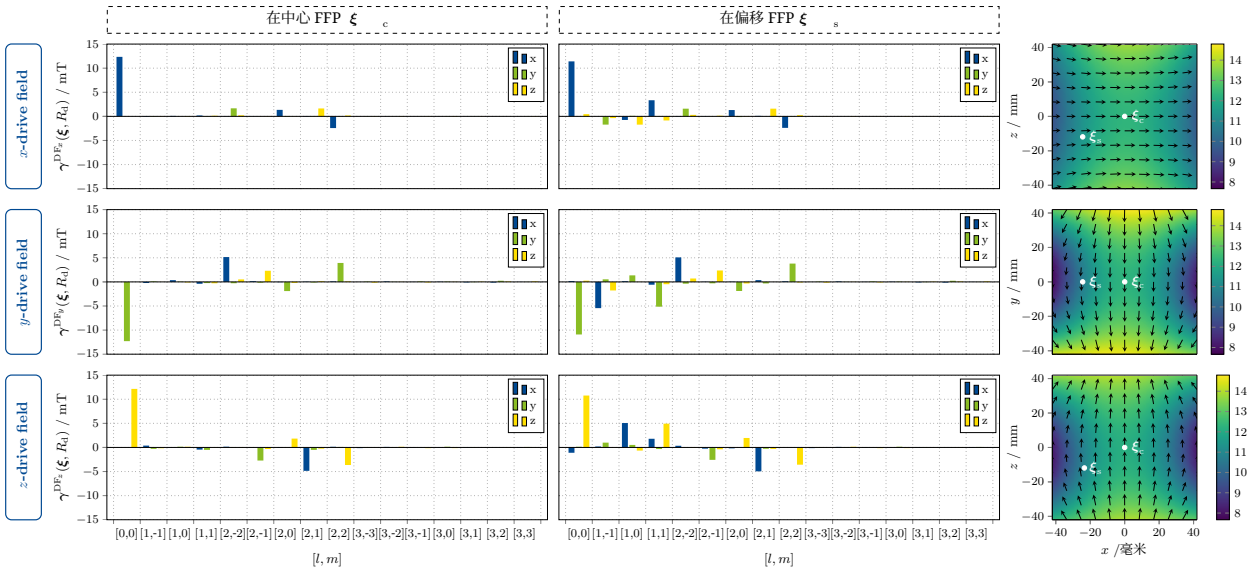

图7：磁粒子成像中动态场（即驱动场）的实球谐分析。每行显示一个沿 x、 y 和 z 方向、振幅为 12 mT 的驱动场。左侧各列展示了图6所示选择场的场自由点处截至 $L = 3$ 的系数，右侧则展示了 xz 平面和 xy 平面中的场。

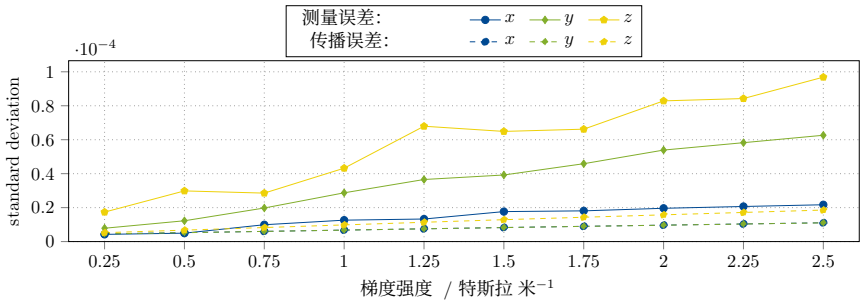

图8：标　　准差：测量误差（实线）和传播误差（虚线）　　es).

场自由点处， z 驱动场的常数部分并未完全沿 z 方向对齐，也略微指向 x 方向。结合选择场和聚焦场的偏差，这导致图1中左下扫描区域的轨迹发生畸变。这些偏差也体现在右侧的场图中，其中为每个驱动场都展示了一个代表性平面。

4.2 误差分析

将截断展开提供的不同梯度强度下的场值与测量值进行方向比较后发现，误差（标准差）在 4 至 100 微特斯拉之间。如图8所示，该误差随梯度强度增大，在 y 和 z 方向上大致相同，在 x 方向上则约小一半。若按照式（6）的定义对误差进行归一化，可观察到误差范围为 $4 \cdot 10^{-4}$ 至 $17 \cdot 10^{-4}$。归一化误差在最小梯度强度下最大，但在其余梯度强度下没有明显趋势。关于空间依赖性，适用的观察结果与前述相同。

若将校准测量的不确定性传播计算在内，则预期误差范围为 5 至 18 微特斯拉，且如图8所示，误差随梯度强度增大。这些误差在 x 和 y 方向上相近，而在 z 方向上则大 20% 至 70%，并随梯度强度线性增大。直接比较可见，观测到的误差最大可达传播误差的 6 倍。因此，观测到的误差只能部分归因于使用霍尔效应传感器进行测量时的不确定性。

5 讨论

本文回顾了实固体调和展开作为拉普拉斯方程通解的性质，并介绍了利用球面 t-设计高效计算展开系数的求积方法。

此外，我们提出了一种利用空间偏移改变展开参考点的方法，从而得到一种独特的、不依赖测量装置的磁场展开。我们还展示了如何利用参考点附近展开的多项式结构分析场不完美性。我们将所述方法应用于磁粒子成像中的信号生成场和编码场；其中，系数利用静态选择场特有的无场点作为唯一展开中心，对磁场进行了紧凑表示。这种唯一性使得能够比较不同扫描区域或磁粒子成像扫描仪的磁场特性。

使用这些截断展开来近似磁场的主要优势之一是采集时间极短。与传统方法在整个视野内密集测量磁场不同，只需在球面表面进行较少次数的测量，即可获得实固体调和函数的截断展开，而不受底层场多项式次数的影响。在我们的设置中，在球面 8-设计的位置进行测量约需 2 分钟，足以近似磁粒子成像中的静态场和动态场。相比之下，高斯-勒让德求积方案在磁粒子成像场景中已被广泛使用，其节点数多出 25%，采集时间约为 2.5 分钟。

我们的误差分析表明，模型（截断展开）与球面上的测量结果之间的偏差处于千分量级。然而，观测到的偏差中只有一小部分（在最坏情况下为 20%）可归因于所用霍尔效应传感器的测量不准确。因此，影响最大的误差来源必然另有原因。例如，展开截断可能导致模型误差。可以通过选择次数更高的展开来检验这一假设。为此，当然需要选择新的球面 t-设计，其 $t = 2L$ 也必须相应调整。不过，对于本研究所针对的磁粒子成像应用而言，本研究实现的最高次数为 $L = 4$ 的实固体调和展开，其近似精度已经足够。

这些系数便于比较磁粒子成像系统的不同场设置。事实上，如图 6 和图 7 所示，我们分别观察到平移后的空间编码场和激励场存在轻微的不完美性。这些不完美性是造成成像伪影的主要原因，而准确掌握它们是减少伪影的关键。首先，这些信息可用于磁粒子成像测量规划。在许多场景中，将扫描区域平移至正确位置至关重要，例如多分辨率数据采集 [41]或磁驱动 [42]。尤其是在多补丁磁粒子成像中，平移后的扫描区域形状和位置发生畸变，可能导致视野内出现未覆盖区域，如图 1 所示；如果逐补丁成像算子未纳入这些不完美性 [7]，也可能产生成像伪影。对于不可忽略的场偏差，可通过专门测量每个扫描区域的成像算子 [43], 、对成像算子进行依赖于场的后处理 [44] ，或对纳入场不完美性的成像算子进行建模 [45]，以避免后者。此外，球谐展开还可直接纳入重建过程 [15]。

医学成像系统通常采用圆柱形机架，因此用柱谐波展开磁场是自然的选择。然而，采用柱谐波展开进行近似需要的系数要多得多，这使得磁场不完美性的分析更加复杂。此外，我们发现，要达到与球谐展开相近的精度，需要更多系数，因为柱谐波展开的基函数并不十分适用于本文所研究的磁场。据我们所知，在圆柱面上进行数值求积时，并不存在像球面 t-设计那样节点数量如此少的方法。

磁粒子成像中磁场的紧凑表示为进一步研究提供了多种可能。利用本文介绍的工具，我们可以在各种应用中处理磁场不完美性。首先，磁场不完美性是基于模型的重建中的一个重要参数。将实际的磁场参数纳入建模的成像算子后，得到的重建结果会更接近使用测量算子所获得的结果。因此，借助这些工具，我们可以处理磁场不完美性，而不必不惜一切代价地避免它们。我们可以在成像序列或磁驱动中将其纳入考虑。此外，球面 t-设计提供了数量足够少的测量点，因此可以同时使用多个霍尔效应传感器，一次测量磁场。这可用于磁场校准的直接反馈。

参考文献

[1] A. Janke、H. Zhao、G. J. Cowin、G. J. Galloway 和 D. M. Doddrell，《利用球谐反卷积方法补偿磁共振成像图像中的非线性梯度效应》，《医学磁共振》：国际磁共振医学学会官方期刊，第 52 卷，第 1 期，第 115–122 页，2004 年。

[2] M. O’Donnell、S. G. Karr、W. D. Barber、J. M. Wang 和 W. A. Edelstein，《在任意体积上均匀化静磁场的方法》，1987年7月。美国专利申请 4680551。

[3] C. Eccles、S. Crozier、M. Westphal 和 D. Doddrell，《梯度脉冲产生的涡流场的时间球谐展开与补偿》，《磁共振杂志》A辑，第103卷，第2期，第135–141页，1993年。[4] J. Rahmer、J. Weizenecker、B. Gleich 和 J. Borgert，《磁粒子成像中的信号编码：系统函数的性质》，《BMC医学影像》，第9卷，第1期，第1–21页，2009年。[5] T. Knopp、N. Gdaniec 和 M. M¨oddel，《磁粒子成像：从原理验证到临床前应用》，《物理医学与生物学》，第62卷，第14期，第R124页，2017年。[6] P. Goodwill 和 S. Conolly，《磁粒子成像过程的x空间表述：一维信号、分辨率、带宽、信噪比、比吸收率和磁刺激》，《IEEE医学影像汇刊》，第29卷，第11期，第1851–1859页，2010年。[7] P. Szwargulski、M. M¨oddel、N. Gdaniec 和 T. Knopp，《磁粒子成像中利用单个系统矩阵重用实现多补丁数据的高效联合图像重建》，IEEE医学影像汇刊，2018年。[8] S. Noguchi，《用于匀场的由磁矩和电流产生的整个磁场分量的球谐系数表述》，《应用物理学杂志》，第115卷，第16期，第163908页，2014年。[9] T. Q. Van Hoang、A. Br´eard 和 C. Vollaire，《利用等效球谐源预测近场磁耦合》，《IEEE电磁兼容汇刊》，第56卷，第6期，第1457–1465页，2014年。[10] S. Maus、M. Rother、K. Hemant、C. Stolle、H. L¨uhr、A. Kuvshinov 和 N. Olsen，《根据CHAMP卫星测量结果确定的截至球谐90次的地球岩石圈磁场》，《国际地球物理学杂志》，第164卷，第2期，第319–330页，2006年。[11] E. Th´ebault、G. Hulot、B. Langlais 和 P. Vigneron，《截至1050次的地球岩石圈磁场球谐模型》，《地球物理研究快报》，第48卷，第21期，第e2021GL095147页，2021年。[12] G. Burel 和 H. Henoco，《利用球谐函数确定三维物体的方向》，《图形模型与图像处理》，第57卷，第5期，第400–408页，1995年。[13] P. F. Muciaccia、P. Natoli 和 N. Vittorio，《快速球谐分析：生成和/或反演全天、高分辨率宇宙微波背景各向异性图的快速算法》，《天体物理学杂志》，第488卷，第2期，第L63页，1997年。[14] G. Bringout 和 T. Buzug，《磁粒子成像中磁场的稳健紧凑表示》，《生物医学技术》，第59卷，第978–1页，2014年。[15] G. Bringout、W. Erb 和 J. Frikel，《利用真实磁场拓扑结构进行代数重建的磁粒子成像新三维模型》，《逆问题》，第36卷，第124002页，2020年12月。[16] A. Weber、J. Weizenecker、R. Pietig、U. Heinen 和 T. Buzug，《控制磁粒子成像中无场点的位置》，载于《摘要集》，IWMPI，2016年。[17] A. Weber，《磁粒子成像中的缺陷》。博士论文，吕贝克大学，2017年。[18] T. Kluth，《磁粒子成像的数学模型》，《逆问题》，第34卷，第8期，第083001页，2018年。[19]M. Gr¨aser、F. Thieben、P. Szwargulski、F. Werner、N. Gdaniec、M. Boberg、F. Griese、M. M¨oddel、P. Ludewig、D. van de Ven 等，《用于脑部应用的人体尺寸磁粒子成像》，《自然·通讯》，第10卷，第1期，第1–9页，2019年。[20] J. J. Konkle、P. W. Goodwill、D. W. Hensley、R. D. Orendorff、M. Lustig 和 S. M. Conolly，《磁粒子成像x空间重建的凸表述》，《公共科学图书馆·综合》，第10卷，第10期，第e0140137页，2015年。[21] J. Weizenecker、B. Gleich、J. Rahmer、H. Dahnke 和 J. Borgert，《三维实时活体磁粒子成像》，《物理医学与生物学》，第54卷，第5期，第L1–L10页，2009年。

[22] E. U. Saritas、P. W. Goodwill、G. Z. Zhang 和 S. M. Conolly，《磁粒子成像中的磁刺激限制》，IEEE 医学影像汇刊，第 32 卷，第 9 期，第 1600–1610 页，2013年。[23] T. Knopp、K. Them、M. Kaul 和 N. Gdaniec，《磁粒子成像非重叠焦点场数据的联合重建》，《物理医学与生物学》，第 60 卷，第 8 期，第 L15 页，2015年。[24] G. Arfken 和 H. Weber，《物理学家的数学方法》。爱思唯尔，2005年。[25] J. F. Rico、R. L´opez、I. Ema 和 G. Ram´ırez，《实固体球谐函数的平移》，《国际量子化学杂志》，第 113 卷，第 10 期，第 1544–1548 页，2013年。[26]C. H. L. Beentjes，《球面上的数值求积》，工作札记，可在网站 http://people.maths.ox.ac.uk/beentjes/Essays 获取，2015年。[27] R. H. Hardin 和 N. J. A. Sloane，《三维设计库》。http://neilsloane.com/sphdesigns/dim3/。访问日期：19.08.2021。[28] R. H. Hardin 和 N. J. A. Sloane，《Mclaren改进的扭棱立方体及其他新的三维球面设计》，《离散与计算几何》，第 15 卷，第 429–441 页，1996年4月。[29] J. D. Jackson，《经典电动力学》。威立，1999年。[30] T. Knopp 和 T. Buzug，《磁粒子成像——成像原理与扫描仪仪器简介》。施普林格·柏林·海德堡，2012年。[31] S. Tumanski，《现代磁场传感器综述》，《器官》，第 10 卷，第 1 期，第 1–12 页，2013年。[32] D. P. Renella、S. Spasic、S. Dimitrijevic、M. Blagojevic 和 R. S. Popovic，《现代科学与工业应用中商用特斯拉计概述》，Acta Imeko，第 6 卷，第 1 期，第 43–49 页，2017年。[33] D. P. Renella、S. Spasic、R. Ughini 和 R. S. Popovic，《非均匀磁场的精确三轴测量》，tm - Technisches Messen，第 86 卷，第 10 期，第 599–608 页，2019年。[34] L. S. Cryotronics，《460型三通道高斯计用户手册》，2014年3月。[35] F. Thieben、M. Boberg、M. Graeser 和 T. Knopp，《磁性粒子成像系统的高效三维驱动场表征》，《磁性粒子成像国际期刊》，第 8 卷，2022年。[36] J. Bezanson、A. Edelman、S. Karpinski 和 V. B. Shah，《Julia：一种数值计算的新方法》，《SIAM评论》，第 59 卷，第 1 期，第 65–98 页，2017年。[37] 《SphericalHarmonicExpansions.jl：用于处理球谐函数的 Julia 软件包》。https://github.com/hofmannmartin/SphericalHarmonicExpansions.jl。版本：0.1。[38] T. Knopp、M. M¨oddel、F. Griese、F. Werner、P. Szwargulski、N. Gdaniec 和 M. Boberg，《MPIFiles.jl：用于磁性粒子成像文件的 Julia 软件包》，《开放源代码软件期刊》，第 4 卷，第 38 期，第 1331 页，2019年。[39] R. T. Birge，《误差传播》，《美国物理学杂志》，第 7 卷，第 6 期，第 351–357 页，1939年。[40] A. Ferrero 和 S. Salicone，《测量不确定度》，《IEEE 仪器测量杂志》，第 9 卷，第 3 期，第 44–51 页，2006 年。[41] N. Gdaniec、P. Szwargulski 和 T. Knopp，《利用自适应特征检测实现磁粒子成像的快速多分辨率数据采集》，《医学物理学》，第 44 卷，第 12 期，第 6456–6460 页，2017年。[42] J. Rahmer、C. Stehning 和 B. Gleich，《相同螺旋微型机器的空间选择性远程磁驱动》，《科学机器人学》，第 2 卷，第 3 期，第 eaal2845 页，2017年。[43] M. Boberg、T. Knopp、P. Szwargulski 和 M. M¨oddel，《利用相似系统矩阵簇进行广义MPI多补丁重建》，IEEE医学影像汇刊，第 39 卷，第 5 期，第 1347–1358 页，2020年。[44] M. Boberg、T. Knopp 和 M. M¨oddel，《通过扭曲高效联合多分区磁粒子成像中的系统矩阵来减少位移伪影》，《磁性粒子成像国际期刊》，第 6 卷，第 2 期，增刊 1，2020年。

[45] H. Albers、T. Knopp、M. M¨oddel、M. Boberg 和 T. Kluth，《多维磁粒子成像中大规模固定化磁性纳米颗粒集合的磁化动力学建模》，《磁学与磁性材料》，第543卷，页码168534，2022年。

A. 系数平移的推导

A.1 归一化实固体谐波加法定理

实球谐函数系数的平移基于归一化实固体谐波加法定理，该定理改编自 [25] 中给出的未归一化实固体谐波加法定理。设 z_l^m 表示 [25] 中定义的未归一化实球谐函数。本文所用归一化实球谐函数 Z_l^m 与未归一化实固体谐波之间的对应关系为

$$z_l^m = (-1)^m \sqrt{\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} Z_l^m \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0. \end{cases}$$

将其应用于 [25], 中的公式 (6) 和 (7)，可得 $m \geq 0$ 的表达式

$$\begin{aligned} \tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big) = &\sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\mu=\max\{0,\lambda-l+m\}}^{\min\{\lambda,m\}} \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,\mu) \Big[Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{m-\mu}(\boldsymbol{v}) - (1-\delta_{\mu 0})(1-\delta_{\mu m}) Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{-(m-\mu)}(\boldsymbol{v}) \Big] \\ &+ \sum_{\lambda=m+1}^{l-1} \sum_{\mu=m+1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l+m\}} \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu) \Big[Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{\mu-m}(\boldsymbol{v}) + Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{-(\mu-m)}(\boldsymbol{v}) \Big] \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{l-m-1} \sum_{\mu=\max\{-\lambda,\lambda-l+m\}}^{-1} \sigma_{l,m}^{(3)}(\lambda,\mu) \Big[Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{m-\mu}(\boldsymbol{v}) + Z_\lambda^{\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{-(m-\mu)}(\boldsymbol{v}) \Big] \end{aligned} \tag{7}$$

以及 $m < 0$ 的表达式

$$\begin{aligned} \tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big) = &\sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\mu=\max\{-\lambda,m\}}^{\min\{0,-\lambda+l+m\}} \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,\mu) \Big[(1-\delta_{\mu m}) Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{-(|m|+\mu)}(\boldsymbol{v}) + (1-\delta_{\mu 0}) Z_\lambda^{\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{|m|+\mu}(\boldsymbol{v}) \Big] \\ &+ \sum_{\lambda=-m+1}^{l-1} \sum_{\mu=\max\{-\lambda,\lambda-l+m\}}^{m-1} \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu) \Big[-Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{\mu+|m|}(\boldsymbol{v}) + Z_\lambda^{\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{-(\mu+|m|)}(\boldsymbol{v}) \Big] \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{l+m-1} \sum_{\mu=1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l+m\}} \sigma_{l,m}^{(3)}(\lambda,\mu) \Big[Z_\lambda^{\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{-(|m|+\mu)}(\boldsymbol{v}) - Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a}) Z_{l-\lambda}^{|m|+\mu}(\boldsymbol{v}) \Big] \end{aligned} \tag{8}$$

使用前置因子

$$\begin{aligned} \sigma_{l,m}(\lambda,\mu) &= \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(\lambda+\mu)!(\lambda-\mu)!(l-\lambda+m-\mu)!(l-\lambda-m+\mu)!}} \\ \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,\mu) &= \sigma_{l,m}(\lambda,\mu) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \mu \neq 0 \wedge \mu \neq m \wedge m \neq 0 \\ 1, & \text{else} \end{cases} \\ \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu) &= \sigma_{l,m}(\lambda,\mu) \frac{(-1)^{\mu-m}}{2} \begin{cases} \sqrt{2}, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \\ \sigma_{l,m}^{(3)}(\lambda,\mu) &= \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu)(-1)^m \end{aligned}$$

和克罗内克δ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

A.2 将加法定理应用于实球谐系数

定理 *2.5* 的证明。为应用上一节中的实球谐函数加法定理，我们先将求和拆分为三部分，其中 $m>0$、 $m<0$ 和 $m=0$ 成立:

$$\begin{aligned}\tau_{\boldsymbol{v}}\big(\mathcal{S}_L(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}))(\boldsymbol{a})\big) &= \sum_{l=0}^{L}\sum_{m=-l}^{l}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\,\tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big)\\ &= \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{l}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\,\tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big) &(9)\\ &+ \sum_{l=0}^{L}\qquad\gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\,\tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big) &(10)\\ &+ \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=-l}^{-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\,\tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big). &(11)\end{aligned}$$

对每个部分，均执行以下三个步骤。

i) 将 A.1 节中的加法定理应用于 $\tau_{\boldsymbol{v}}\big(Z_l^m(\boldsymbol{a})\big)$。

ii) 将每一项分别重新整理为以下形式

$$\sum_{l,m} Z_l^m(\boldsymbol{a})\sum_{\lambda,\mu}\kappa(l,m,\lambda,\mu). \tag{12}$$

iii) 设 $\hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}(\gamma_{l,\ m}(\boldsymbol{\rho})) := \sum_{\lambda,\ \mu}\kappa(l,\ m,\ \lambda,\ \mu)$，最终得到定理 2.5。

加项的计算(9)

在第一个加项中，有 $m>0$，结合式 (7) 可得

$$(9)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{l}\Bigg[\sum_{\lambda=0}^{l}\sum_{\mu=\max\{0,\lambda-l+m\}}^{\min\{\lambda,m\}}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\,\sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,\mu)\left(Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{m-\mu}(\boldsymbol{v})-(1-\delta_{\mu 0})(1-\delta_{\mu m})Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-(m-\mu)}(\boldsymbol{v})\right) \tag{13}$$

$$+\sum_{\lambda=m+1}^{l-1}\sum_{\mu=m+1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l+m\}}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\,\sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu)\left(Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{\mu-m}(\boldsymbol{v})+Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-(\mu-m)}(\boldsymbol{v})\right) \tag{14}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{l-m-1}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,\lambda-l+m\}}^{-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\,\sigma_{l,m}^{(3)}(\lambda,\mu)\left(Z_\lambda^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{m-\mu}(\boldsymbol{v})+Z_\lambda^{\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-(m-\mu)}(\boldsymbol{v})\right)\Bigg]. \tag{15}$$

现在，对每个加项重新排列，以得到式 (12) 中的结构。为此，必须交换对 l 和 λ的求和以及对 m 和 μ 的求和，以提取出 $Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})$。为简洁起见，我们省略具体的加项，并用 α 表示该加项及此步骤中重要的指标。

1. 我们从对加项 (13) 进行变换开始。利用这两种改写方式交换求和次序

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{L}\sum_{\lambda=0}^{l}\alpha_{l\lambda} &= \sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{l=\lambda}^{L}\alpha_{l\lambda}+\sum_{l=1}^{L}\alpha_{l0},\\ \sum_{m=1}^{l}\sum_{\mu=\max\{0,\lambda-l+m\}}^{\min\{\lambda,m\}}\alpha_{m\mu} &= \sum_{\mu=0}^{\lambda}\sum_{m=\max\{1,\mu\}}^{\mu-(\lambda-l)}\alpha_{m\mu}.\end{aligned}$$

请注意，第二种改写成立，因为加项 (9) 中有 $m>0$。将其应用于 (13)，得到

$$
\begin{aligned}
(13) = & \sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda} Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=\lambda}^{L}\sum_{m=\mu}^{\mu-(\lambda-l)} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,\mu)\ Z_{l-\lambda}^{m-\mu}(\boldsymbol{v}) \\
& -\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1} Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=\lambda}^{L}\sum_{m=-\mu+1}^{-\mu-(\lambda-l)} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,-\mu)\ Z_{l-\lambda}^{-(m+\mu)}(\boldsymbol{v}) \\
& +\sum_{\lambda=1}^{L} Z_{\lambda}^{0}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=\lambda}^{L}\sum_{m=1}^{-(\lambda-l)} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,0)\ Z_{l-\lambda}^{m}(\boldsymbol{v}) \\
& +Z_{0}^{0}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{l} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(0,0)\ Z_{l}^{m}(\boldsymbol{v}),
\end{aligned}
$$

通过将指标 λ 替换为 l，并将 μ 替换为 m，其结构与 (12) 相同。注意，为了提出公因子 Z_{λ}^{μ}，第二个加项中的 μ 符号发生了反转。

2. 接下来，通过交换求和次序，将加项 (14) 变换为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{l}\sum_{\lambda=m+1}^{l-1} \alpha_{m\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{l-1}\sum_{m=1}^{\lambda-1} \alpha_{m\lambda}, \\
&\sum_{l=1}^{L}\sum_{\lambda=1}^{l-1} \alpha_{l\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{l=\lambda+1}^{L} \alpha_{l\lambda}, \\
&\sum_{m=1}^{\lambda-1}\sum_{\mu=m+1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l+m\}} \alpha_{m\mu} = \sum_{\mu=1}^{\lambda}\sum_{m=\max\{1,\mu-(l-\lambda)\}}^{\mu-1} \alpha_{m\mu}.
\end{aligned}
$$

交换求和次序后得到

$$
\begin{aligned}
(14) = & \sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda} Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=\max\{1,\mu-(l-\lambda)\}}^{\mu-1} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu)\ Z_{l-\lambda}^{\mu-m}(\boldsymbol{v}) \\
& +\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1} Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=\max\{1,-\mu-(l-\lambda)\}}^{-\mu-1} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,-\mu)\ Z_{l-\lambda}^{\mu+m}(\boldsymbol{v}),
\end{aligned}
$$

通过将指标 λ 替换为 l，并将 μ 替换为 m，其结构再次与 (12) 相同。

3. 最后，以类似的方式变换加项 (15)。通过以下方式交换关于 m 和 λ 的求和

$$
\sum_{m=1}^{l}\sum_{\lambda=1}^{l-m-1} \alpha_{m\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{l-1}\sum_{m=1}^{-\lambda+l-1} \alpha_{m\lambda},
$$

按照变换 (14) 时的做法，对 l 和 λ 求和，并通过以下方式对 m 和 μ 求和

$$
\sum_{m=1}^{-\lambda+l-1}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,\lambda-l+m\}}^{-1} \alpha_{m\mu} = \sum_{\mu=-\lambda}^{-1}\sum_{m=1}^{\mu-(\lambda-l)} \alpha_{m\mu}
$$

导致变换

$$
\begin{aligned}
(15) = & \sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda} Z_{l}^{\mu}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=1}^{-\mu-(\lambda-l)} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(3)}(\lambda,-\mu)\ Z_{l-\lambda}^{\mu+m}(\boldsymbol{v}) \\
& +\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1} Z_{l}^{\mu}(\boldsymbol{a}) \sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=1}^{\mu-(\lambda-l)} \gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(3)}(\lambda,\mu)\ Z_{l-\lambda}^{-(m-\mu)}(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}
$$

总之，将指标 l 重新标记为 λ，并将 m 重新标记为 μ，可得

$$
\begin{aligned}
(9) &= (13)+(14)+(15)\\
&= \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{l} Z_l^m(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=m}^{m-(l-\lambda)} \gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(1)}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{\mu-m}(\boldsymbol{v})\\
&\qquad + \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=\max\{1,m-(\lambda-l)\}}^{m-1} \gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(2)}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{m-\mu}(\boldsymbol{v})\\
&\qquad + \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=1}^{-m-(l-\lambda)} \gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(3)}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{m+\mu}(\boldsymbol{v})\Bigg]\\
&\quad + \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=-l}^{-1} Z_l^m(\boldsymbol{a})\Bigg[-\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=-m+1}^{-m-(l-\lambda)} \gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(1)}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{-(\mu+m)}(\boldsymbol{v})\\
&\qquad + \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=\max\{1,-m-(\lambda-l)\}}^{-m-1} \gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(2)}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{m+\mu}(\boldsymbol{v})\\
&\qquad + \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=1}^{m-(l-\lambda)} \gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(3)}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{-(\mu-m)}(\boldsymbol{v})\Bigg]\\
&\quad + \sum_{l=1}^{L} Z_l^0(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=1}^{-(l-\lambda)} \gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(1)}(l,0)\ Z_{\lambda-l}^{\mu}(\boldsymbol{v})\Bigg]\\
&\quad + Z_0^0(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{\lambda,\mu}^{(1)}(0,0)\ Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{v})\Bigg].
\end{aligned}
$$

方括号内的部分是定义后续 $\hat{}\tau_{\boldsymbol{v}}\gamma_{l,m}$ 的首项。下面将以类似方式变换加项 (10) 和 (11)。

加项的计算 (10)

由于第二个加项满足 $m=0$，应用 (7) 可得

$$
\begin{aligned}
(10) = \sum_{l=0}^{L}\Bigg[&\sum_{\lambda=0}^{l}\gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,0}^{(1)}(\lambda,0)\ Z_{\lambda}^{0}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{0}(\boldsymbol{v}) && (16)\\
&+\sum_{\lambda=1}^{l-1}\sum_{\mu=1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l\}} \gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,0}^{(2)}(\lambda,\mu)\ \left(Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{v})+Z_{\lambda}^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-\mu}(\boldsymbol{v})\right) && (17)\\
&+\sum_{\lambda=1}^{l-1}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,\lambda-l\}}^{-1} \gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,0}^{(3)}(\lambda,\mu)\ \left(Z_{\lambda}^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-\mu}(\boldsymbol{v})+Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{v})\right)\Bigg]. && (18)
\end{aligned}
$$

再次交换关于 l、λ、m 和 μ 的求和顺序，以得到 (12) 中的结构。由于 (16) 的处理很直接，我们直接从第（17）项开始。

1. 交换求和次序可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{L}\sum_{\lambda=1}^{l-1}\alpha_{l\lambda} &= \sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{l=\lambda+1}^{L}\alpha_{l\lambda},\\
\sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l\}}\alpha_{l\mu} &= \sum_{\mu=1}^{\lambda}\sum_{l=\lambda+\mu}^{L}\alpha_{l\mu},
\end{aligned}
$$

由此得到

$$(17)=\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda}Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda+\mu}^{L}\gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{l,0}^{(2)}(\lambda,\mu)\;Z_{l-\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{v})$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda-\mu}^{L}\gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{l,0}^{(2)}(\lambda,-\mu)\;Z_{l-\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{v}).$$

2. 对于第三个加项（18），我们对 l 和 λ 使用相同的变换，并将 l 和 μ 交换，得到

$$\sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,\lambda-l\}}^{-1}\alpha_{l\mu}=\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}\sum_{l=\lambda-\mu}^{L}\alpha_{l\mu}.$$

综合这些变换，第三个加项（18）可改写为

$$(18)=\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda}Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda+\mu}^{L}\gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{l,0}^{(3)}(\lambda,-\mu)\;Z_{l-\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{v})$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda-\mu}^{L}\gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{l,0}^{(3)}(\lambda,\mu)\;Z_{l-\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{v}).$$

总之，通过将 l 与 λ、m 与 μ 重新标记，我们得到

$$\begin{aligned}(10)&=(16)+(17)+(18)\\&=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{l}Z_{l}^{m}(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l+m}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{\lambda,0}^{(2)}(l,m)\;Z_{\lambda-l}^{m}(\boldsymbol{v})\\&\qquad+\sum_{\lambda=l+m}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{\lambda,0}^{(3)}(l,-m)\;Z_{\lambda-l}^{m}(\boldsymbol{v})\Bigg]\\&\quad+\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=-l}^{-1}Z_{l}^{m}(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l-m}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{\lambda,0}^{(2)}(l,-m)\;Z_{\lambda-l}^{m}(\boldsymbol{v})\\&\qquad+\sum_{\lambda=l-m}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{\lambda,0}^{(3)}(l,m)\;Z_{\lambda-l}^{m}(\boldsymbol{v})\Bigg]\\&\quad+\sum_{l=1}^{L}Z_{l}^{0}(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{\lambda,0}^{(1)}(l,0)\;Z_{\lambda-l}^{0}(\boldsymbol{v})\Bigg]\\&\quad+Z_{0}^{0}(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=0}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{\lambda,0}^{(1)}(0,0)\;Z_{\lambda}^{0}(\boldsymbol{v})\Bigg].\end{aligned}$$

加项（11）的计算

最后，将（8）应用于满足 $m<0$ 的第三个加项，可得

$$(11)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=-l}^{-1}\Bigg[\sum_{\lambda=0}^{l}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,m\}}^{\min\{0,-\lambda+l+m\}}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,\mu)\Big((1-\delta_{\mu0})Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{|m|+\mu}(\boldsymbol{v})+(1-\delta_{\mu m})Z_{\lambda}^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-(|m|+\mu)}(\boldsymbol{v})\Big)\tag{19}$$

$$+\sum_{\lambda=-m+1}^{l-1}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,\lambda-l+m\}}^{m-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu)\;\Big(Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-(\mu+|m|)}(\boldsymbol{v})-Z_{\lambda}^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{\mu+|m|}(\boldsymbol{v})\Big)\tag{20}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{l+m-1}\sum_{\mu=1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l+m\}}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\;\sigma_{l,m}^{(3)}(\lambda,\mu)\;\Big(Z_{\lambda}^{\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{-(|m|+\mu)}(\boldsymbol{v})-Z_{\lambda}^{-\mu}(\boldsymbol{a})Z_{l-\lambda}^{|m|+\mu}(\boldsymbol{v})\Big)\Bigg].\tag{21}$$

现在，每个加项都按类似于式（9）的方式进行变换。

1. 对于第一个加项（19），将对 l 和 λ 的求和顺序互换，做法与式（13）相同。再结合

$$\sum_{m=-l}^{-1}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,m\}}^{\min\{0,-\lambda+l+m\}}\alpha_{m\mu}=\sum_{\mu=-\lambda}^{0}\sum_{m=\mu-(l-\lambda)}^{\min\{-1,\mu\}}\alpha_{m\mu}$$

这得出

$$\begin{aligned}(19)=&\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda}^{L}\sum_{m=\mu-(l-\lambda)}^{\mu}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,\mu)\ Z_{l-\lambda}^{|m|+\mu}(\boldsymbol{v})\\&+\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda}Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda}^{L}\sum_{m=-\mu-(l-\lambda)}^{-\mu-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,-\mu)\ Z_{l-\lambda}^{-(|m|-\mu)}(\boldsymbol{v})\\&+\sum_{\lambda=1}^{L}Z_\lambda^0(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda}^{L}\sum_{m=-(l-\lambda)}^{-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(\lambda,0)\ Z_{l-\lambda}^{-|m|}(\boldsymbol{v})\\&+Z_0^0(\boldsymbol{a})\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=-l}^{-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(1)}(0,0)\ Z_l^{-|m|}(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

2. 对于第二个加项 (20)，交换求和次序可得

$$\begin{aligned}\sum_{m=-l}^{-1}\sum_{\lambda=-m+1}^{l-1}\alpha_{m\lambda}&=\sum_{\lambda=1}^{l-1}\sum_{m=-\lambda+1}^{-1}\alpha_{m\lambda},\\\sum_{m=-\lambda+1}^{-1}\sum_{\mu=\max\{-\lambda,m\}}^{m-1}\alpha_{m\mu}&=\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}\sum_{m=\mu+1}^{\min\{-1,\mu-(\lambda-l)\}}\alpha_{m\mu},\end{aligned}$$

并且对 l 和 λ 的求和也以与 (14) 相同的方式交换。将此应用于 (20) 可得

$$\begin{aligned}(20)=&\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=\mu+1}^{\min\{-1,\mu-(\lambda-l)\}}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,\mu)\ Z_{l-\lambda}^{-(\mu+|m|)}(\boldsymbol{v})\\&-\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda}Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=-\mu+1}^{\min\{-1,-\mu-(\lambda-l)\}}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,m}^{(2)}(\lambda,-\mu)\ Z_{l-\lambda}^{|m|-\mu}(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

3. 最后，对加项 (21) 进行变换。利用以下变换

$$\begin{aligned}\sum_{m=-l}^{-1}\sum_{\lambda=1}^{l+m-1}\alpha_{m\lambda}&=\sum_{\lambda=1}^{l-1}\sum_{m=\lambda-l+1}^{-1}\alpha_{m\lambda},\\\sum_{m=\lambda-l+1}^{-1}\sum_{\mu=1}^{\min\{\lambda,-\lambda+l+m\}}\alpha_{m\mu}&=\sum_{\mu=1}^{\lambda}\sum_{m=\mu-(l-\lambda)}^{-1}\alpha_{m\mu},\end{aligned}$$

并对 l 和 λ 进行与式（14）相同的变换，得到

$$\begin{aligned}(21)=&\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda}Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=\mu-(l-\lambda)}^{-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,|m|}^{(3)}(\lambda,\mu)\ Z_{l-\lambda}^{-(|m|+\mu)}(\boldsymbol{v})\\&-\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}Z_\lambda^\mu(\boldsymbol{a})\sum_{l=\lambda+1}^{L}\sum_{m=-\mu-(l-\lambda)}^{-1}\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma_{l,|m|}^{(3)}(\lambda,-\mu)\ Z_{l-\lambda}^{|m|-\mu}(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

最后，将 l 重新标记为 λ，并将 m 重新标记为 μ，第三个加项（11）现在可写为

$$
\begin{aligned}
(11) &= (19) + (20) + (21) \\
&= \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{l} Z_l^m(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=-m-(\lambda-l)}^{-m-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{-(|\mu|-m)}(\boldsymbol{v}) \\
&\qquad - \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=-m+1}^{\min\{-1,-m-(l-\lambda)\}}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(2)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{|\mu|-m}(\boldsymbol{v}) \\
&\qquad + \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=m-(\lambda-l)}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(3)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{-(|\mu|+m)}(\boldsymbol{v})\Bigg] \\
&\quad + \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=-l}^{-1} Z_l^m(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=m-(\lambda-l)}^{m}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{|\mu|+m}(\boldsymbol{v}) \\
&\qquad + \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=m+1}^{\min\{-1,m-(l-\lambda)\}}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(2)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{-(m+|\mu|)}(\boldsymbol{v}) \\
&\qquad - \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=-m-(\lambda-l)}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(3)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{|\mu|-m}(\boldsymbol{v})\Bigg] \\
&\quad + \sum_{l=1}^{L} Z_l^0(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=-(\lambda-l)}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,0)\ Z_{\lambda-l}^{-|\mu|}(\boldsymbol{v})\Bigg] \\
&\quad + Z_0^0(\boldsymbol{a})\Bigg[\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(0,0)\ Z_{\lambda}^{-|\mu|}(\boldsymbol{v})\Bigg].
\end{aligned}
$$

系数的平移

现在，我们已经具备了求得平移后系数所需的一切条件。 $\tau_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{S}_L(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}))$ 的每个加项都被重新整理成 $\sum_{l,m} Z_l^m \sum_{\lambda,\mu} \kappa(l,m,\lambda,\mu)$ 的形式，这样我们就可以将所有部分组合起来，并将系数的平移定义为所有对应 κ 的总和。

$l \neq 0$ 和 $m > 0$ 的平移定义为

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}(\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})) := &\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=m}^{m-(l-\lambda)}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{\mu-m}(\boldsymbol{v}) \\
&+ \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=\max\{1,m-(\lambda-l)\}}^{m-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(2)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{m-\mu}(\boldsymbol{v}) \\
&+ \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=1}^{-m-(l-\lambda)}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(3)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{\mu+m}(\boldsymbol{v}) \\
&+ \sum_{\lambda=l+m}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\ \Big(\sigma^{(2)}_{\lambda,0}(l,m) + \sigma^{(3)}_{\lambda,0}(l,-m)\Big)\ Z_{\lambda-l}^{m}(\boldsymbol{v}) \\
&+ \sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=-m-(\lambda-l)}^{-m-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{\mu+m}(\boldsymbol{v}) \\
&- \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=-m+1}^{\min\{-1,-m-(l-\lambda)\}}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(2)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z_{\lambda-l}^{-(\mu+m)}(\boldsymbol{v}) \\
&+ \sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=m-(\lambda-l)}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(3)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z_{\lambda-l}^{\mu-m}(\boldsymbol{v}),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

对于 $l \neq 0$ 和 $m < 0$，其定义为

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}\big(\gamma_{l,m}(\boldsymbol{\rho})\big) := &-\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=-m+1}^{-m-(l-\lambda)}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z^{-(\mu+m)}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=\max\{1,-m-(\lambda-l)\}}^{-m-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(2)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z^{\mu+m}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=1}^{m-(l-\lambda)}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(3)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z^{-(\mu-m)}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=l-m}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\ \Big(\sigma^{(2)}_{\lambda,0}(l,-m)+\sigma^{(3)}_{\lambda,0}(l,m)\Big)\ Z^{m}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=m-(\lambda-l)}^{m}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z^{m-\mu}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=m+1}^{\min\{-1,m-(l-\lambda)\}}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(2)}_{\lambda,\mu}(l,m)\ Z^{\mu-m}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&-\sum_{\lambda=l+1}^{L}\sum_{\mu=-m-(\lambda-l)}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(3)}_{\lambda,\mu}(l,-m)\ Z^{-(\mu+m)}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v}),
\end{aligned}\tag{23}$$

对于 $l \neq 0$ 和 $m = 0$，其表达式为

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}\big(\gamma_{l,0}(\boldsymbol{\rho})\big) :=&\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda-l}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,0)\ Z^{\mu}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=l}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,0}(l,0)\ Z^{0}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=-(\lambda-l)}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,0)\ Z^{\mu}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v})\\
=&\sum_{\lambda=l}^{L}\sum_{\mu=-(\lambda-l)}^{\lambda-l}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(l,0)\ Z^{\mu}_{\lambda-l}(\boldsymbol{v}),
\end{aligned}\tag{24}$$

最后，对于 $l = m = 0$，其定义为

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}\big(\gamma_{0,0}(\boldsymbol{\rho})\big) :=&\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(0,0)\ Z^{\mu}_{\lambda}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=0}^{L}\gamma_{\lambda,0}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,0}(0,0)\ Z^{0}_{\lambda}(\boldsymbol{v})\\
&+\sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{-1}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(0,0)\ Z^{\mu}_{\lambda}(\boldsymbol{v})\\
=&\sum_{\lambda=0}^{L}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\gamma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{\rho})\ \sigma^{(1)}_{\lambda,\mu}(0,0)Z^{\mu}_{\lambda}(\boldsymbol{v}),
\end{aligned}\tag{25}$$

这与带有 $l = 0$ 的 (24) 相等。

根据这些定义，我们最终得到算符 $\hat{\tau}_{\boldsymbol{v}} : \mathbb{R}^{(L+1)^2} \to \mathbb{R}^{(L+1)^2}$，使得

$$\tau_{\boldsymbol{v}} \circ \mathcal{S}_L(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})) = \mathcal{S}_L \circ \hat{\tau}_{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})\big).$$

□