arXiv:2302.07621v5 [cs.GT] 16 Sep 2024

模糊合同*

Paul D¨utting† Michal Feldman‡ Daniel Peretz‡
Larry Samuelson§

2024年9月10日

摘要

我们探讨在合同设计中有意引入模糊性。我们表明，当代理人厌恶模糊性，因而选择使其最低效用最大化的行动时，委托人可以通过使用模糊合同严格获益，而且这种收益可以任意高。我们刻画了最优模糊合同的结构，并表明模糊性会推动最优合同趋于简单。我们还刻画了抗模糊合同类，在这类合同中，委托人无法通过引入模糊性获益。最后，我们表明，当代理人能够采取混合行动时，模糊合同的优势便会消失。

1 引言

合同往往含糊不清。建筑合同可能要求建筑商
使用“优质材料”，专业服务合同可能会要求服务提供者

*本文被 EC 2023 接收并将在会上报告。我们感谢 Tomer Ezra、Uriel Feige 和 Yarden Rashti 提供的深刻反馈，也感谢共同编辑和审稿人提出的宝贵意见与建议。Feldman 和 Peretz 的研究工作得到了欧洲研究委员会（ERC）根据欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：866132）以及 NSF-BSF（资助编号：2020788）的支持。

†Google Research，瑞士苏黎世。电子邮箱：duetting@google.com
‡特拉维夫大学计算机科学学院，以色列。电子邮箱：mfeldman@tauex.ac.il, danielperetz@mail.tau.ac.il§耶鲁大学经济学系，美国康涅狄格州纽黑文。电子邮箱：larry.samuelson@yale.edu

“尽职调查”或“作为受托人行事”，劳动合同可能要求双方“诚信谈判”，而大学的晋升指南可能要求候选人展现“科研产出与卓越表现”。在每种情况下，这些短语的含义都可能模棱两可。

这种模糊性可能反映了无法进行精确规定。与此相反，我们探讨将模糊性刻意引入合同，作为委托人可用来增强其缔约能力的一种工具。

1.1 模型

我们考察一个熟悉的有限道德风险问题，并对其加以扩展，使其能够纳入模糊合同；这一做法类似于 Di Tillio 等人（2017）对机制设计问题的处理。在我们考虑的问题中，委托人（女性）与代理人（男性）互动。代理人可以采取 n 种有成本的行动。每种行动 $i \in [n]$都会诱导一个关于 m 结果的概率分布 $p_i = (p_1, \ldots\ldots, p_m)$，并使代理人承担非负成本 c_i 。每种结果 $j \in [m]$ 都会为委托人带来奖励r_j 。委托人无法直接观察代理人的行动，并试图通过对代理人所采取行动产生的随机结果支付报酬，来影响代理人的行动选择。委托人和代理人都是风险中性的，且有限责任约束要求支付非负。

在这种设定下，经典合同包含一个支付函数 $t = (t_1、\ldots\ldots、t_m)$，其中 t_j 规定了结果 $j \in [m]$ 实现时委托人向代理人支付的非负金额。给定支付函数 t，代理人会选择行动$i \in [n]$ ，以最大化其期望支付减去成本。反过来，委托人获得所实施行动带来的期望奖励，再减去按所选行动向代理人支付的期望金额。

我们关注模糊合同。模糊性的来源可以有多种解释。合同可能存在缺失条款、措辞含糊的条款，或写在篇幅极其冗长的细则中的条款，[1]在上述每种情况下，代理人面对的都是一组可能实际生效、但他无法进一步确定的合同。模糊性的消解可能反映委托人的决定、法院等第三方的行动，或随机事件。

[1]Zuboff（2023）认为，层层交叉引用可能使人无法读完典型合同中的所有细则。

为刻画这种模糊性，我们将一组支付函数 $\tau = \{t^1, t^2, \ldots, t^k\}$定义为一个模糊合同。代理人根据支付函数 $t^\ell \in \tau$可能带来的最低效用来评估每个行动 $i \in [n]$，并选择使这一最低效用最大化的行动。我们称模糊合同实施了所选行动。我们施加一致性条件：对于被实施的行动，τ支撑集中的每个支付函数都使委托人获得相同的收益。我们认为，这一要求确保委托人“威胁”说她可能选择任何一个支付函数 $t \in \tau$具有可信度；不过，我们也表明，这一要求并不损失一般性。

1.2 我们的贡献

第2节建立模型，并考察可实施行动的集合。我们回顾了行动能够通过经典合同得以实施的熟知条件（Hermalin 和 Katz（1991）），随后刻画了模糊合同下可实施的行动。一般而言，模糊性会扩大可实施行动的集合。

第3节考察最优模糊合同。我们首先说明，委托人可以利用模糊性为自己谋利：模糊性既可能使她以较低成本，通过经典合同实现最优行动，也可能让她利用模糊性来实现另一种行动。事实上，运用模糊合同的委托人，可能会选择诱导一种经典合同无法实现的行动。

接着，我们说明模糊性会使最优合同趋于简单。一般而言，最优模糊合同至多由 $\max\{n-1, m\}$ 个支付函数组成，每个支付函数都可以设定为仅对一个结果支付正额款项（即单一结果支付函数）。如果将讨论范围限制在满足单调似然比性质（MLRP）的委托代理问题，那么最优模糊合同至多包含两个（单一结果支付）合同。如果支付函数必须是单调的——更高的奖励会带来更高的支付——可能是出于公平性、监管或稳健性方面的考虑，那么也有类似的结果；此时，支付函数是阶梯函数（只有一个阶梯），而不是仅对单一结果支付。

第4节使用模糊性差距这一概念——即在最优模糊合同下委托人收益与最优经典

合同下委托人收益之比的最大可能值——来量化委托人利用模糊性所获得的收益。一般而言，这一比值可能任意大。当所有奖励都为正时，模糊性差距为 $n-1$，因此随着行动数量不断增加，它也会任意增大。

第5节将一类合同定义为具有模糊性免疫，条件是：与经典合同相比，委托人无法通过模糊合同以更低的期望支付来实施某项行动。我们证明，一类合同具有模糊性免疫，当且仅当它是有序的；也就是说，对于该类中的任意两份合同，其中一份对每种结果所规定的支付都不低于另一份。该结果的一个直接推论是，线性合同构成的类别具有模糊性免疫，除此之外还有其他类别。相比之下，许多其他自然的合同类别，例如所有仿射合同、多项式合同或单调合同构成的类别，并不具有模糊性免疫。

第6节表明，如果代理人可以在不同的行动之间进行混合，模糊性的优势便会消失。混合行动的能力为代理人提供了更多备选行动，使激励约束趋于严格，足以抵消委托人从模糊合同中获得的任何优势。正如 Raiffa（1961年）在评析 Ellsberg（1961年）悖论时所解释的，混合使代理人能够将模糊情形转化为风险情形，从而减轻模糊厌恶的影响。

1.3 含义

我们并不认为代理人真的会面对一大堆支付函数，苦思究竟哪一个会被实际采用；但我们确实认为，我们的研究结果有助于理解现实合同的三个方面。

首先，我们认为合同通常具有模糊性。事实上，很难想象有哪份合同能够毫无疑问地明确规定每一种结果所带来的影响。文献一直将可行性约束视为这种不精确性的根源——预见、描述或核实各种结果，可能成本高得令人望而却步，甚至根本不可能。[2] 与此相反，我们认为，委托人可能会有意接纳模糊性，将其作为一种激励工具。正如我们的模糊性差距结果所示，委托人这样做可能获得巨大收益。

其次，我们的研究结果揭示了一个主题：最优模糊合同往往十分简单。我们预计，实际情况往往会限制合同必须是

[2] Aghion 和 Holden（2011年）综述了一支源自（Hart，1988年）以及（Hart 和 Moore，1988年）的文献。

单调的。在这种情况下，最优模糊合同由一组阶梯函数构成，每个函数都只有一个阶跃。实际中，这种合同的形式可以是：一份合同规定，达到不同的绩效门槛即可获得奖金，但措辞足够含糊，以致绩效门槛和奖金都存在模糊性。如果技术满足单调似然比性质，此类绩效相关奖金的数量很少，即两个。因此，我们得到这样一份合同：要求绩效至少达到合格水平才支付报酬，绩效出色则另有奖金；同时，合同的措辞允许具体绩效门槛和支付金额存在一定模糊性。我们认为，在许多情况下，实际合同都符合这一描述。例如，助理教授可能认为，良好的科研业绩会带来晋升为副教授和加薪，杰出的科研业绩则会带来晋升为正教授和更大幅度的加薪，而晋升门槛和加薪金额都存在模糊性。

第三，模糊合同可能会成为代理人的负担：要么是因为它们更难评估和执行，要么是因为它们是从代理人那里攫取剩余的工具。因此，具体情形可能会让我们只关注具有模糊性免疫性的合同类别。我们的结果表明，坚持模糊性免疫性也会推动合同趋于（另一种意义上的）简单。有序合同（线性合同是其中的典型例子）易于处理。我们注意到，佣金合同很常见，其最简单的形式是线性的。[3]

文献已经指出了合同可能不精确、简单或线性的其他原因。在每种情况下，我们都不能声称自己提供了“唯一的”解释，但我们的研究为需要考虑的因素增添了另一个因素。

1.4 相关文献

我们研究一个经典的隐藏行动道德风险问题，如 Holmstr¨om（1979年）、Grossman 和 Hart（1983年）以及 Laffont 和 Martimort（2009，第4章）所述，其中摩擦源于有限责任（如 Innes（1990））， 而非风险厌恶。与道德风险文献中的许多研究不同，我们的委托人向一位模糊厌恶型代理人提供模糊合同。我们通过将代理人建模为最大化其最大最小效用，来体现其模糊厌恶（Schmeidler，1989年；Gilboa

[3]合同可以包含基本报酬和佣金，因此是仿射合同，而非线性合同。第 5 节指出，所有仿射合同构成的类别并不具有模糊性免疫性，但某些仿射合同类别具有模糊性免疫性。

和 Schmeidler，1993年）。

大量研究探讨了非贝叶斯不确定性下的设计问题。这类文献的一个分支研究委托人对代理人存在非贝叶斯不确定性的模型。Bergemann and Schlag（2011年）研究了委托人对买方估值持有模糊信念时的垄断定价。Carrasco 等（2018年）研究了委托人仅部分了解代理人偏好分布的筛选问题。Carroll（2015年）、Carroll 和 Walton（2022年）以及 Kambhampati（2023年）研究了道德风险问题，其中委托人对代理人可选择的行动集合持有模糊信念。Dai 和 Toikka（2022年）研究了委托人通过签订合同来塑造代理人团队行动的情形，此时委托人对代理人可采取的行动持有模糊信念。D¨utting 等（2019年）研究了道德风险问题，其中委托人对代理人行动所导致的结果分布持有模糊信念。

文献中的第二个分支考察代理人持有模糊信念、委托人可能加以利用的情形。Beauchˆene 等（2019）和 Cheng（2020）研究了发送者利用接收者的模糊厌恶的贝叶斯说服问题。Bodoh-Creed（2012）和 Di Tillio 等人（2017）研究了具有最大最小偏好的代理人所面临的筛选问题。Bose and Renou（2014）研究了代理人具有最大最小偏好的机制设计问题。Lopomo 等（2011）研究了具有 Bewley 偏好的代理人所面临的道德风险问题。Bose 等（2006）考察了卖方和竞标者都可能具有模糊厌恶的拍卖。本文与上述两个分支的区别在于，本文研究的是代理人对与结果相关的支付存在模糊性的道德风险问题。

与我们研究最密切相关的论文是 Di Tillio 等人（2017），他们在筛选模型的背景下开展了类似的研究：卖方将一件物品分配给一名具有模糊厌恶的买方。他们发现，卖方可以通过提供模糊机制获益；这种模糊机制由一组简单机制构成，正如我们的委托人可以通过提供模糊合同获益一样。在这两种情形中，收益都来自利用代理人的模糊厌恶来放宽激励约束。Di Tillio 等人（2017）表明，最优模糊机制至多包含 $N-1$ 个机制，其中 N 是代理人类型的数量（而在我们的情形中则是行动的数量）；这些机制中的每一个都采取一种简单形式，让人联想到我们的单一

结果支付函数。最后，他们表明，随着代理人类型的数量任意增大，委托人可以无限接近于提取全部剩余。

Di Tillio 等人（2017）对模糊机制施加了一致性条件，这类似于我们对模糊合同施加的一致性条件。在他们的情形中，这一限制是实质性的，而非在不损失一般性的前提下作出的限制，这反映了筛选问题与道德风险问题中激励约束结构的差异。Di Tillio 等人（2017）没有与我们的研究结果相对应的结论，即在满足单调似然比性质条件时，最优模糊合同中的支付函数数量恰好为两个；不过，他们始终维持这一假设在筛选问题中的对应条件，即单交叉条件。

我们的结果意味着，在道德风险问题的背景下，模糊性和最大最小效用会推动最优设计趋于简单。因此，我们加入了这样一支文献传统：该传统以 Holmstr¨om 和 Milgrom（1987）作为早期重要文献，试图解释为什么道德风险环境中的实际合同往往较为简单，而其理论对应物却并非如此。Carroll（2015）、Carroll 和 Walton（2022）以及 Dai 和 Toikka（2022）表明，当委托人不确定代理人可采取的行动，且具有最大最小偏好时，委托人会最优地选择线性合同。D¨utting 等人（2019）表明，当委托人不确定行动转化为结果所依赖的技术，且具有最大最小偏好时，同样的结论也成立。因此，这些论文表明，委托人的模糊厌恶可能导致线性合同；而我们发现，线性合同也可能作为一种防止委托人利用代理人模糊厌恶的工具而具有吸引力。在我们的设定中，利用代理人的模糊厌恶会使委托人转向另一类简单合同，即由单一结果支付函数或阶梯函数（当支付函数必须单调时）构成的合同；在满足单调似然比性质条件时，则仅包含两个这样的函数。

2 模型

我们的出发点是合同理论中的经典隐藏行动委托代理模型（例如，Holmstr¨om（1979年）、Grossman 和 Hart（1983年）以及 Laffont 和 Martimort（2009年，第4章））。委托人（她）通过制定一份将支付与可观察的、

所选行动产生的随机结果挂钩的合同，促使代理人（他）采取有成本且不可观察的行动。我们通过引入模糊合同 这一概念，并考察最优模糊合同，对模型加以扩展。

2.1 委托代理模型

委托代理模型的基本要素既适用于经典合同，也适用于模糊合同。

定义 1 (实例**)。** 一个具有 n 个行动和 m 个结果的委托代理问题实例 (c, r, p) 由以下内容定义：

- 对于每个行动 $i \in [n]$，都有一个非负成本 $c_i \in \mathbb{R}_+$。我们用 $c = (c_1, \ldots, c_n)$ 表示成本向量，并将行动排序，使得 $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$。
- 对于每个结果 $j \in [m]$，都有一个奖励 $r_j \in \mathbb{R}$。我们用 $r = (r_1, \ldots, r_m)$ 表示奖励向量，并将结果排序，使得 $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_m$。
- 对于每个行动 $i \in [n]$，都有一个概率分布 $p_i \in \Delta^m$。我们用 p_{ij} 表示行动 i下结果 j 发生的概率。

我们用 $R_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} r_j$ 表示行动 i的期望奖励，并用$W_i = R_i - c_i$ 表示行动 i 的期望福利。

代理人保留不参与的选择权。为体现这一点，我们始终假设行动 1 是零成本行动，并且必然导致某个结果，我们将其视为现状结果。正如我们在第 2.2–2.3 节中所说明的，这一假设并未限制模型的普适性，反而使我们能够统一处理激励相容约束和个体理性约束。

文献通常关注满足单调似然比性质的实例：

定义 2 (单调似然比性质**)。** 若一个实例(c, r, p) 满足单调似然比性质（*monotone likelihood ratio property*），则称其满足 *MLRP*；如果对于任意两个行动 i, i' 满足 $c_i > c_{i'}$，则对所有 $j' > j$，都有：

$$p_{ij'} p_{i'j} \geq p_{ij} p_{i'j'}.$$

直观而言，单调似然比性质要求，有成本的行动更有可能产生较高的结果。

委托人和代理人都知道该设定（c, r, p）。只有代理人知道自己的行动，而委托人和代理人都能观察到实现的结果。

支付函数 $t : [m] \to \mathbb{R}_+$ 规定了每种结果实现时委托人向代理人支付的款项，其中，对结果 j 作出响应的支付 $t(j)$ 通常记作 t_j。支付与结果而非行动挂钩，因为委托人只能观察到前者。我们假设支付非负。这是标准的有限责任假设。

在许多情况下，公平性、监管或稳健性方面的考虑可能会使人们只关注单调支付函数。

定义 3. 如果产生较大奖励的结果会带来（至少弱意义上的）较大支付，则支付函数 t 单调：对于所有 $j, j' \in [m]$，均有 $r_j \geq r_{j'} \implies t_j \geq t_{j'}$。

2.2 经典合同

我们首先介绍经典设定，其中合同（记作 $\langle t, i \rangle$）由支付函数 t 和推荐行动 $i \in [n]$ 构成。其含义是：委托人提出一份合同，代理人观察合同后选择一项行动并承担相应成本；随后，根据该行动所诱导的结果分布抽取一个结果，委托人再按照合同规定向代理人支付款项。合同中纳入推荐行动，使我们能够体现一种普遍的假设：代理人“在无差异时会选择有利于委托人的一方”。

更准确地说，代理人在面对合同 $\langle t, \ i \rangle$ 时选择行动 i'，获得的期望效用为

$$U_A(i' \mid t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} p_{i'j} t_j - c_{i'} \quad = \quad T_{i'}(t) - c_{i'},$$

期望支付 $T_{i'}(t)$ 与成本 $c_{i'}$ 之差。由此得到的委托人效用为 $U_P(i' \mid t) = R_{i'} - T_{i'}(t)$。

定义 4（IC合同）。若合同 $\langle t, i \rangle$ 具有激励相容性（*IC*），则

$$i \in \operatorname*{argmax}_{i' \in [n]} U_A(i' \mid t),$$

在这种情况下，我们称合同 $\langle t, i\rangle$ 实施了行动 i。

由于支付非负且行动 1 的成本为零，激励相容确保代理人的期望效用至少为零，因此意味着个体理性。

我们假设代理人遵循激励相容合同的建议。如果委托人发布激励相容合同 $\langle t, i\rangle$，那么委托人和代理人的收益分别为

$$\begin{aligned} U_P(\langle t, i\rangle) &= U_P(i \mid t) &= R_i - T_i(t) \\ U_A(\langle t, i\rangle) &= U_A(i \mid t) &= T_i(t) - c_i. \end{aligned}$$

将委托人的合同限制为激励相容合同并不失一般性。其基本思想是，面对合同 $\langle t, i\rangle$ 的代理人会根据 t 选择使其期望效用最大化的行动，因此，委托人不妨直接在合同中指定这样的行动。通过求解附录 A 的图8中所列出的线性规划问题，可以确定实施每个行动i 的最优经典契约。最优的（激励相容）经典契约必然会使代理人无差异，因为某个激励约束将会紧 binding。

2.3 模糊合同

一个模糊合同 $\langle \tau, i\rangle = \langle \{t^1, \ldots, t^k\}, i\rangle$ 是一组支付函数和一项推荐行动。如果 $t \in \{t^1, \ldots, t^k\}$，那么我们称 t 属于 τ的支撑集。

委托人此时提出一份模糊合同，代理人观察该模糊合同并选择一项行动，同时承担相应成本；随后从该模糊合同的支撑集中选出一个支付函数，根据该行动所诱导的结果分布抽取一个结果，最后委托人按照所选合同中规定的内容向代理人支付。

代理人是一个最大最小期望效用最大化者（Schmeidler，1989年；Gilboa 和 Schmeidler，1993 年），因此会根据使该行动的期望支付最小的支付函数来评估每项行动 i 。

形式上，给定一个模糊合同 $\langle \tau, i\rangle$，代理人选择行动 $i' \in [n]$的效用为

$$U_A(i' \mid \tau) = \min_{t \in \tau} U_A(i \mid t).$$

定义 5 (激励相容模糊合同**)**。 如果一个模糊合同 $\langle \tau, i \rangle$ 满足以下条件，则该合同是激励相容的（*IC*）：

$$i \in \operatorname*{argmax}_{i' \in [n]} U_A(i' \mid \tau),$$

在这种情况下，我们称模糊合同 $\langle \tau, i \rangle$ 实施了行动 i。

与经典合同的情况一样，激励相容约束蕴含个体理性。将委托人限定为激励相容的模糊合同，同样不会造成损失。

如果委托人在支付方案 $t \in \tau$ 下的期望效用 $U_P(i \mid t)$ 严格高于某个 $t' \in \tau$对应的 $U_P(i \mid t')$，那么委托人声称她可能采用 τ 中的任意合同，这种“威胁”或许并不可信——面对模糊合同 $\langle \tau,\ i \rangle$ 的代理人可能担心委托人会蓄意始终选择支付函数 t，而非t'。因此，与 Di Tillio 等人（2017）一样，我们将委托人限定为一致的模糊契约。

定义 6 （一致性）。 若对任意 $\ell, \ell' \in [k]$，模糊合同 $\langle \tau, i \rangle = \langle \{t^1, \ldots, t^k\}, i \rangle$ 均满足下述条件，则称其为一致的：

$$U_P(i \mid t^\ell) = U_P(i \mid t^{\ell'}). \tag{1}$$

如果委托人发布一致且激励相容的模糊合同$\langle \tau,\ i \rangle = \langle \{t^1, \ldots, t^k\},\ i \rangle$，那么诱导支付 $T_i(\tau)$ 可定义为

$$\begin{aligned} T_i(\tau) = T_i(t^\ell) = T_i(t^{\ell'}) \qquad & \forall \ell, \ell' \in [k], \quad \text{and hence} \\ U_A(i \mid t^\ell) = U_A(i \mid t^{\ell'}) \qquad & \forall \ell, \ell' \in [k], \end{aligned}$$

其中第一项可由一致性直接推出，第二项则由 $U_A(i \mid t) = T_i(t) - c_i$ 得出。于是，对于任意 $t \in \tau$，委托人和代理人的期望效用 $U_P(\langle \tau,\ i \rangle)$ 和 $U_A(\langle \tau,\ i \rangle)$ 分别为

$$\begin{aligned} U_P(\langle \tau, i \rangle) &= U_P(i \mid t) = R_i - T_i(\tau), \quad \text{and} \\ U_A(\langle \tau, i \rangle) &= U_A(i \mid t) = T_i(\tau) - c_i. \end{aligned}$$

将委托人限制为一致的模糊合同并不失一般性：

引理 1. 假设 $\langle \tau, i \rangle$ 是激励相容的。那么，存在一致且激励相容的模糊合同 $\langle \tau', i \rangle$，使委托人获得的期望收益至少为 $\max_{t \in \tau} U_P(i \mid t)$。

证明。 考虑一个激励相容的模糊合同 $\langle \tau, \ i \rangle$ 它并非一致。将其中的支付函数编号，使得

$$U_P(i \mid t^1) = \max_{t \in \tau} U_P(i \mid t).$$

假设

$$U_P(i \mid t^1) > U_P(i \mid t^2).$$

那么必定有

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} t_j^1 < \sum_{j=1}^{m} p_{ij} t_j^2.$$

令 $\theta \in [0, 1)$ 满足

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \theta t_j^2 = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} t_j^1,$$

并考虑模糊合同 $\langle \tau', \ i \rangle = \langle \{t^1, \theta t^2, \ldots, t^k\}, \ i \rangle$，它由$\langle \tau, \ i \rangle$ 构造而成，方法是将支付函数 t^2 替换为 θt^2。我们有 $U_P(i \mid t^1) = U_P(i \mid \theta t^2) > U_P(i \mid t^2)$，因此，在 $\langle \tau', i \rangle$ 下委托人的收益至少与在 $\langle \tau, \ i \rangle$下相同。此外，我们有

$$\begin{array}{rcccl} U_A(i \mid \theta t^2) & = & U_A(i \mid t^1) & < & U_A(i \mid t^2) \qquad \text{and} \\ U_A(i' \mid \theta t^2) & = & \theta T_{i'}(t^2) - c_{i'} & \leq & U_A(i' \mid t^2), \end{array}$$

由此可推出

$$\begin{array}{rcll} \min\limits_{t \in \tau'} U_A(i \mid t) & = & \min\limits_{t \in \tau} U_A(i \mid t) & \text{and} \\ \min\limits_{t \in \tau'} U_A(i' \mid t) & \leq & \min\limits_{t \in \tau} U_A(i' \mid t) & \forall i' \in [n], \end{array}$$

这证明了 $\langle \tau', \ i \rangle$ 是激励相容的。对支付函数 $t^3, \ \ldots, \ t^k$ 应用类似的论证，即可得出该结果。 □

这一结果的一个推论是，我们可以等价地将委托人视为选择要实施的合同，或视为对结果持有最大最小偏好

由第三方进行选择。

2.4 可实施性

本节刻画了经典合同和模糊合同所能实施的行动。关于经典合同，以下结果是标准结论（例如，Hermalin 和 Katz（1991年，命题2））。

命题1。 行动 $i \in [n]$ 可由经典合同实施，当且仅当不存在行动 $i' \neq i$ 的凸组合 $\lambda_{i'} \in [0,1]$，使得对于所有 j，其产生的奖励分布 $\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} p_{i'j} = p_{ij}$ 相同，但成本 $\sum_{i'} \lambda_{i'} c_{i'} < c_i$严格更低。

为完整起见，我们在附录 A 中给出证明。相比之下，使用模糊合同实施行动的条件较为宽松：

命题2。 行动 $i \in [n]$ 可由模糊合同实施，当且仅当不存在其他行动 $i' \neq i$ 使得 $p_{i'} = p_i$ 且 $c_{i'} < c_i$。

证明。 我们首先证明，如果存在行动 $i' \neq i$ 使得 $p_{i'} = p_i$ 且 $c_{i'} < c_i$，那么就不可能用模糊合同实施行动 i。反设模糊合同 $\langle \tau, i \rangle = \langle \{t^1, \ldots, t^k\}, i \rangle$ 实施了行动 i。在这种情况下，由于 $p_i = p_{i'}$，对于所有 $\ell, \ell' \in [k]$，我们有 $T_i(t^\ell) = T_{i'}(t^{\ell'})$。但这样一来，$U_A(i' \mid \tau) = \min_{\ell \in [k]} T_{i'}(t^\ell) - c_{i'} > \min_{\ell \in [k]} T_i(t^\ell) - c_i = U_A(i \mid \tau)$，这与 $\langle \tau, i \rangle$ 激励相容这一事实相矛盾。

接下来我们证明，如果不存在行动 $i' \neq i$ 使得 $p_{i'} = p_i$ 且 $c_{i'} < c_i$，那么行动 i 可以通过一个模糊合同来实施。在这种情况下，对于每个行动 $i' \neq i$，要么（i） $p_{i'} \neq p_i$，要么（ii） $p_{i'} = p_i$ 且 $c_{i'} \geq c_i$。令 A 表示类型（i）的行动。如果 A 为空，则 i 必须是一个零成本行动。用于实施该行动的一个（一致的）模糊合同是 $\langle \tau, i \rangle$，其中 $\tau = \{(0, \ldots\ldots, 0)\}$。

假设 A 非空。我们构造一个模糊合同 $\langle \tau, i \rangle$ 用于实施行动 i，其中每个类型（i）的行动 $i' \neq i$ 对应一份合同 $t^{i'}$。对于每个行动 $i' \in A$，令 $j(i')$为一个结果 j，使得 $p_{ij}/p_{i'j}$ 达到最大值。注意$p_{ij(i')}/p_{i'j(i')} > 1$。令

$$T = \max_{i' \in A} \left\{ \min \left\{ x \geq 0 \;\middle|\; p_{ij(i')} \cdot \frac{x}{p_{ij(i')}} - c_i \geq p_{i'j(i')} \cdot \frac{x}{p_{ij(i')}} - c_{i'} \right\} \right\}.$$

奖励：$r_1 = 0$		$r_2 = 2$	$r_3 = 2$	成本
行动 1:	1	0	0	$c_1 = 0$
行动 2:	0	1	0	$c_2 = 1$
行动3:	0	0	1	$c_3 = 1$
行动 4:	0	1/2	1/2	$c_4 = 3$

图1：例1的实例（c， r， p）。

对于每个 $i' \in A$，令$t^{i'}_{j\ (i')} = T/p_{ij(i')}$，并令$t^{i'}_{j'} = 0$ 对应于 $j' \neq j(i')$。

我们最后验证 $\langle \tau,\ i\rangle = \langle \{t^{i'} \mid i' \in A\},\ i\rangle$ 是一个（具有一致性的）模糊合同，能够实施行动 i。一致性很容易验证。

为说明 $\langle \tau,\ i\rangle$ 具有激励相容性，首先考虑类型（ii）的行动 $i' \neq i$。对于这些行动，我们有

$$U_A(i' \mid \tau) = U_A(i \mid \tau) + c_i - c_{i'} \leq U_A(i \mid \tau),$$

其中我们利用了 $p_{i'} = p_i$ 和 $c_{i'} \geq c_i$。

接下来考虑类型（i）的行动 $i' \neq i$。对于这些行动，必然存在一个 $T_{i'} \geq 0$，满足 $T_{i'} \leq T$，使得

$$p_{ij(i')} \cdot \frac{T_{i'}}{p_{ij(i')}} - c_i \geq p_{i'j(i')} \cdot \frac{T_{i'}}{p_{ij(i')}} - c_{i'}.$$

由于 $T_{i'} \leq T$和$p_{ij(i')} > p_{i'j\ (i')}$，这意味着

$$\begin{aligned} U_A(i \mid \tau) = p_{ij(i')} \cdot \frac{T}{p_{ij(i')}} - c_i &\geq p_{i'j(i')} \cdot \frac{T}{p_{ij(i')}} - c_{i'} \\ &= \min_{i'' \in A} \left(p_{i'j(i'')} \cdot \frac{T}{p_{ij(i'')}} - c_{i'} \right) = U_A(i' \mid \tau), \end{aligned}$$

其中，第一个等式根据一致性成立，第二个等式根据 $j(i')$ 的定义成立，最后一个等式则根据定义成立。 □

以下示例展示了一种可通过含糊合同实现、但无法通过经典合同实现的行动。

例1（可由模糊合同实施、但经典合同无法实施的行动）。 考虑图1中的实例。行动2和3各占一半的组合所产生的

奖励：r_1	$=0$	$r_2=2$	$r_3=2$	成本
行动 1：	1	0	0	$c_1=0$
行动 2：	1/2	1/2	0	$c_2=1/4$
行动3：	1/2	0	1/2	$c_3=1/4$
行动 4：	0	1/2	1/2	$c_4=3/4$

图2：例2的实例（c， r， p）。

结果分布与行动4相同，但成本更低，因此没有经典合同能够实施行动4。然而，模糊合同 $\langle\tau,\ 4\rangle=\langle\{t^1,t^2\},\ 4\rangle$，其 $t^1=(0,\ 6,\ 0)$ 和 $t^2=(0,\ 0,\ 6)$，能够以最低可能的期望支付 $T_4(\tau)\ =c_4=3$ 实施行动4。

■

3 最优模糊合同

我们首先在第3.1节中说明，相较于采用经典合同，委托人采用模糊合同可以获益。这一观察促使我们研究最优模糊合同的结构。第3.2节确立了总是存在具有特别简单形式的最优模糊合同。第3.3节确立了关于单调合同的这些结果的对应结论。

3.1 最优模糊合同的优势 s

在下面这个例1的简单变体中，委托人通过以低于最佳经典合同的成本实施相同的行动，因模糊性而获益。

例2（严格改进）。考虑图2所示的实例。最佳经典合同是 $\langle(0,\ 1,\ 1)\ 4\rangle$，使委托人的期望效用为1。事实上，实现行动 2 的最佳经典合同是 $\langle(0,\ 1/2,\ 0)\ 2\rangle$，委托人的效用为 $3/4$；对于行动 3，结论同样成立，其合同为 $\langle(0,\ 0,\ 1/2)\ 3\rangle$。

最优模糊合同为 $\langle\tau,\ 4\rangle=\langle\{t^1,t^2\},\ 4\rangle$，其中 $t^1=(0,\ 3/2,\ 0)$ 和$t^2=(0,\ 0,\ 3/2)$。对于行动 2，τ中的最差支付函数为 t^2，因此代理人的期望支付为 0。同样，对于行动 3，最差支付函数为 t^1，期望支付为 0。因此，行动 2 和行动 3 都会使代理人获得负效用。相比之下，无论在 t^1 还是 t^2下，行动 4 的期望支付均为 $3/4$，代理人的期望效用为 0。因此，模糊合同 $\langle\tau,\ 4\rangle$ 实现了行动

奖励:	$r_1 = 0$	$r_2 = 32$	$r_3 = 33$	$r_4 = 34$	成本
行动 1:	1	0	0	0	$c_1 = 0$
行动 2:	0.4	0.6	0	0	$c_2 = 1$
行动3:	0	0.5	0.5	0	$c_3 = 11$
行动 4:	0	0	0.6	0.4	$c_4 = 12$

图 3：示例 3 中的实例（c，r，p）。

4，其期望支付为 $3/4$，委托人的期望效用为 $5/4$，严格高于她在经典合同下的最优效用。 ■

接下来，我们将展示，在满足单调似然比性质条件的实例中，也可能出现同样的现象。在这个例子中，最优模糊合同实施的行动不同于最优经典契约所实施的行动。

示例 3（单调似然比性质下的严格改进）。考虑图 3 所示的实例。在此实例中，委托人可以通过经典合同实施行动 2 和行动 4，且期望支付分别等于代理人的相应成本。可实现这一点的合同包括 $\langle(0,\ 5/3,\ 0,\ 0)\ 2\rangle$ 和 $\langle(0,\ 0,\ 0,\ 30)\ 4\rangle$。由此得到的委托人效用在行动 2 下为 $R_2 - c_2 = 18.2$，在行动 4 下为 $R_4 - c_4 = 21.4$。实施行动 3 的最低成本方式（例如，通过求解附录 A 中图 8 的线性规划）是采用合同 $\langle t = (0,\ 25/12,\ 245/12,\ 0)\ 3\rangle$，可获得效用 $R_3 - T_3(t) = 21.25.$。因此，委托人通过经典合同所能获得的最大效用为 21。4。与此形成对照的是最优模糊合同 $\langle\{t^1, t^2\},\ 3\rangle$，它由两个支付函数 $t^1 = (0,\ 22,\ 0,\ 0)$ 和 $t^2 = (0,\ 0,\ 22,\ 0)$ 组成。该模糊合同以等于代理人成本的期望支付实施行动 3，使委托人获得效用 $R_3 - c_3 = 21.5.$

■

在下一个例子中，委托人通过使用模糊合同来实施一项无法通过经典合同实施的行动，从而获益。

示例 4（采用模糊合同可使行动成为最优，但经典合同无法实现）。考虑图 4 所示的实例。经典合同无法实现行动 6，而行动 4 和 5 各占一半的组合能以更低的成本产生相同的结果分布。行动 2 和 3 的期望福利为负，因此永远不会是委托人的最优选择。经典合同均可实现行动 4 和 5，且二者为委托人带来的最大效用相同，其

奖励：$r_1 = -200$	$r_2 = 0$	$r_3 = 21$	$r_4 = 21$	成本
行动 1：	0	1	0	0	$c_1 = 0$
行动 2：	0.1	0	0.9	0	$c_2 = 8$
行动3：	0.1	0	0	0.9	$c_3 = 8$
行动 4：	0	0	1	0	$c_4 = 10$
行动 5：	0	0	0	1	$c_5 = 10$
行动 6：	0	0	0.5	0.5	$c_6 = 11$

图 4：示例 4 的实例（c， r， p）。

奖励：$r_1 = 0$	$r_2 = 9$	$r_3 = 9$	成本
行动 1：	1	0	0	$c_1 = 0$
行动 2：	0.6	0.3	0.1	$c_2 = 0.6$
行动3：	0.6	0.1	0.3	$c_3 = 0.6$
行动 4：	0.2	0.4	0.4	$c_4 = 3$

图5：例5的实例（c， r， p）。

中针对这些行动的最优经典合同包括 $\langle$(0，0，20，0) $4\rangle$ 和$\langle$(0，0，0，20) $5\rangle$，二者为委托人带来的期望效用均为 1。相比之下，最优模糊合同 $\langle$｛(0，0，22，0)，(0，0，0，22)｝，$6\rangle$ 可实现行动 6，为委托人带来的期望效用为 10。

■

最后，我们通过一个例子说明，模糊合同可能使委托人和代理人双方都受益。显然，只有当模糊合同下的最优行动不同于经典合同下的最优行动时，才可能出现这种情况。

例5 （模糊合同可能使委托人和代理人双方都受益）。 考虑图5所示的实例。一个最优经典契约是 $\langle$(0，2，0) $2\rangle$，它通过实施行动 2，使代理人和委托人的效用分别为0和3。模糊合同 $\langle$｛(0，8，0)，(0，0，8)｝，$4\rangle$ 实施行动 4，使代理人和委托人的效用分别为0。2和4。

■

3.2 最优模糊合同的结构

现在我们来探讨最优模糊合同的结构。我们首先引入单一结果支付合同的简洁性概念。

定义 7（SOP 支付函数）。 支付函数 $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ 是单一结果支付函数，当且仅当存在一个结果 $j \in [m]$ 使得 $t_j > 0$，且对于任意结果 $j' \neq j$，都有 $t_{j'} = 0$。

如果其所有支付函数都具有这一性质，则模糊合同是单一结果支付合同。命题2利用SOP合同确立了在模糊合同下实施的充分条件。

以下定理表明，考虑模糊SOP合同并不失一般性，并且至多需要$\min\{m, n-1\}$ 个支付函数。在附录B的命题5中，我们证明了这一界是紧的。

定理1（最优模糊合同）。 对于每个激励相容模糊合同 $\langle \tau, i \rangle$，都存在一个激励相容模糊合同 $\langle \tau', i \rangle$，其包含至多$\min\{m, n-1\}$ 个支付函数，并且满足：

1. $T_i(\tau') = T_i(\tau)$（即两个合同具有相同的期望支付，因而委托人获得相同的期望收益）。
2. 对于每个 $t' \in \tau'$， t' 都是一个*SOP*支付函数。

证明。 设模糊合同 τ 实施行动 i。设 $J = \{j \in [m] \mid p_{ij} > 0\}$。对于每个 $j \in J$，考虑支付为 $\frac{T_i(\tau)}{p_{ij}}$、针对结果j的 SOP 支付函数。令 τ' 为由这些 SOP 支付函数组成的模糊合同。根据构造， τ'满足性质 (1)–(2)。我们证明 τ'实施 i。考虑行动 $i' \neq i$。由于 τ 实施 i，存在 $t \in \tau$ 使得

$$c_i - c_{i'} \;\leq\; T_i(\tau) - \sum_j t_j p_{i'j} \;=\; \sum_j t_j p_{ij} - \sum_j t_j p_{i'j}.$$

要证明 τ' 实施 i，只需证明

$$c_i - c_{i'} \;\leq\; T_i(\tau) - \min_{j \in J} p_{i'j} \frac{T_i(\tau)}{p_{ij}} \;=\; \sum_j t_j p_{ij} - \min_{j \in J} \frac{p_{i'j}}{p_{ij}} \sum_j t_j p_{ij}.$$

将这些结果结合起来，只需证明

$$\min_{j \in J} \frac{p_{i'j}}{p_{ij}} \sum_j t_j p_{ij} \;\leq\; \sum_j t_j p_{i'j},$$

这等价于显而易见的陈述:

$$\min_{j\in J}\frac{p_{i'j}}{p_{ij}} \;\leq\; \frac{\sum_j t_j p_{i'j}}{\sum_j t_j p_{ij}}.$$

注意， τ'至多由 m个SOP支付函数组成（事实上，至多由 $|J|$个支付函数组成）。如果 $m > n-1$，则可以从 τ'中剔除所有不能使某个备选方案 $i' \neq i$的期望收益最小化的支付函数，剩下至多 $n-1$ 个SOP支付函数。

□

这一结果的一个推论是，如果代理人只有两个可行行动，那么就存在一个至多包含 $n-1=1$ 个支付函数的最优模糊合同，也就是经典合同。因此，当只有两个行动时，模糊合同无法为委托人带来比经典合同更高的收益。

借助定理1，我们可以证明，合同 $\langle\tau,\ i\rangle$ 是我们为证明实施条件的充分性而构造的（见命题2的证明），并且该合同是最优的。

命题3。 假设行动 $i \in [n]$ 可由模糊合同实施。令 $A = \{i' \neq i \mid p_{i'} \neq p_i\}$。如果 $A = \emptyset$，则 $c_i = 0$，且*IC*合同 $\langle\{(0,\ldots,0)\}, i\rangle$是行动 i的最优合同。否则，对每个 $i' \in A$ ，令 $j(i')$ 为一个结果，使得$p_{ij(i')}/p_{i'j(i')}$ 达到最大值。令

$$T = \max_{i'\in A}\left\{\min\left\{x \geq 0 \;\middle|\; p_{ij(i')}\cdot\frac{x}{p_{ij(i')}} - c_i \geq p_{i'j(i')}\cdot\frac{x}{p_{ij(i')}} - c_{i'}\right\}\right\}.$$

对于每个 $i' \in A$，令 $t_j^{i'}{}_{(i')} = T/p_{ij(i')}$ ，并令 $t_{j'}^{i'} = 0$ 对于 $j' \neq j$（i'）。那么，*IC*合同$\langle\tau, i\rangle = \langle\{t^{i'} \mid i' \in A\}, i\rangle$ 对于行动 i 是最优的。

附录C中命题3的证明依赖于与经典合同中两个行动的情形类似的论证：此时只对最大似然比结果支付报酬是最优的（例如，Laffont 和 Martimort（2009，第4.5.1章），D¨utting 等（2019，完整版，命题5））。

接下来，我们将证明，对于满足单调似然比性质条件的实例，最优模糊合同具有更加简单的结构，即仅由两个 SOP 支付函数组成的模糊合同。

定理 2 (MLRP 条件下的最优模糊合同)。 设(c, r, p) 为满足单调似然比性质条件的实例。对于任意激励相容模糊合同 $\langle \tau, i \rangle$，都存在一个激励相容模糊合同 $\langle \tau', i \rangle = \langle \{t^1, t^k\}, i \rangle$，使得：

1. $T_i(\tau') = T_i(\tau)$（即两份合同的期望支付相同，因此委托人的期望收益也相同）。

2. t^1 和 t^k 是*SOP*支付函数，其中，对于 $\ell = \min\{j \in [m] \mid p_{ij} > 0\}$，$t^1_\ell = {}^{T_i(\tau)}/_{p_{i\ell}}$；对于 $h = \max\{j \in [m] \mid p_{ij} > 0\}$，$t^k_h = {}^{T_i(\tau)}/_{p_{ih}}$。

定理 2 的证明推迟至附录 D，其中结合了定理1中确立的结构性质与单调似然比性质条件，论证只需使用两个在定理1的证明中引入的SOP支付函数即可。支付函数 t^k“击败”所有成本较低的行动，而支付函数 t^1 “击败”所有成本较高的行动。

将考察范围限定为SOP合同，使我们能够证明最优模糊合同相对容易识别。附录 H 表明，存在一种算法，能够在$O(n^2m)$时间内计算出最优模糊合同（在单调似然比性质条件下，计算时间为 $O(n^2 + m)$）。这些结果的关键含义是，随着实例规模增大，计算时间呈多项式增长，而非指数增长。

3.3 最优单调歧义合同

在某些情形下，出于公平性、稳健性或监管方面的原因，希望甚至必须将注意力限制在单调支付函数上。其支付函数为单调的合同称为单调合同。单调性要求排除了 SOP 合同。下面给出一种针对单调合同的自然的替代性简洁性概念。

定义 8（阶梯支付函数）。如果存在一个结果 $k \in [m]$ 和某个 $x \geq 0$，使得对每个结果 $j < k$ 都有 $t_j = 0$，并且对每个结果 $j \geq k$ 都有 $t_j = x$，则支付函数 $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ 称为阶梯支付函数。

由阶梯支付函数组成的合同称为阶梯合同。

以下定理表明，考虑由阶梯支付函数构成的单调模糊合同并不失一般性。从这个意义上说，阶梯合同之于单调合同，就如同 SOP 合同之于一般合同。

定理 3 (最优单调歧义合同**)**。 对于任意激励相容单调模糊合同 $\langle \tau,\ i \rangle$，都存在一个由至多 $\min\{m, n-1\}$ 个合同组成的激励相容单调模糊合同 $\langle \tau',\ i \rangle$，使得：

1. $T_i(\tau') = T_i(\tau)$ （即，两份合同的期望支付相同，因此委托人的收益也相同）。

2. τ' 中的每个支付函数都是阶梯支付函数。

显然，如果将“单调歧义合同”替换为“阶梯歧义合同”，该定理仍然成立。

定理 *3* 的证明。 我们按如下方式构造τ'。对于每个行动 $i' \neq i$，都必须存在一个单调支付函数 $t^{i'} \in \tau$，使得 $U_A(i' \mid t^{i'}) \leq U_A(i \mid t^{i'}) = U_A(i \mid \tau)$。根据定理1证明中的同样论证，现在只需证明存在一个阶梯支付函数$\hat{}t^{i'}$，将其放入 τ'，使得 (i) $T_i(\hat{}t^{i'}) = T_i(t^{i'})$，且 (ii) $T_{i'}(\hat{}t^{i'}) \leq T_{i'}(t^{i'})$。

对于满足以下条件的行动 $i' \neq i$：存在一个结果$\hat{}\, j \in [m]$，使得$\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i\ell} > 0$且 $\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i'\ell} = 0$，令$\hat{}t_j^{i'} = \frac{T_i(t^{i'})}{\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i\ell}}$，对所有 $j \geq \hat{}j$，并令$\hat{}t_j^{i'} = 0$ 对所有 $j < \hat{}j$。为说明条件（i）得到满足，注意到

$$T_i(\hat{t}^{i'}) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot \hat{t}_j^{i'} = \sum_{j=\hat{j}}^{m} p_{ij} \cdot \frac{T_i(t^{i'})}{\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i\ell}} = T_i(t^{i'}) \cdot \frac{\sum_{j=\hat{j}}^{m} p_{ij}}{\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i\ell}} = T_i(t^{i'}).$$

条件（ii）成立，因为 $\sum_{\ell=\hat{}\,j}^{m} p_{i'\ell} = 0$ 且 $\hat{}\, t_j = 0$ 对于 $j < \hat{}j$ 意味着$T_{i'}(\hat{}t^{i'}) = 0$, 而 $T_{i'}(t^{i'}) \geq 0$ 则源于有限责任。

接下来考虑行动 $i' \neq i$，使得对于所有满足 $\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i\ell} > 0$ 的$\hat{}\, j \in [m]$，都有 $\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i'\ell} > 0$。令

$$\hat{j} \in \underset{j' \in [m]:\sum_{\ell=j'}^{m} p_{i\ell} > 0}{\operatorname{argmax}} \frac{\sum_{\ell=j'}^{m} p_{i\ell}}{\sum_{\ell=j'}^{m} p_{i'\ell}}.$$

按如下方式定义$\hat{}t^{i}$：令$\hat{}t_j^{i'} = \frac{T_i(t^{i'})}{\sum_{\ell=\hat{}\,j}^{m} p_{i\ell}}$对所有 $j \geq \hat{}j$成立，并令$\hat{}t_j^{i'} = 0$ 对所有 $j < \hat{}j$成立。它

再次变得简单 需要验证条件（i）成立。注意到.....即可得出条件（ii）。

$$\begin{aligned} T_{i'}(\hat{t}^{i'}) &= \sum_{j=\hat{j}}^{m} p_{i'j} \frac{T_i(t^{i'})}{\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i\ell}} = \frac{\sum_{j=\hat{j}}^{m} p_{i'j}}{\sum_{\ell=\hat{j}}^{m} p_{i\ell}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} t' i_j \\ &= \min_{j' \in [m]: \sum_{\ell=j'}^{m} p_{i\ell} > 0} \frac{\sum_{j=j'}^{m} p_{\prime j}}{\sum_{j=j'}^{m} p_{i\ell}} \sum_{j=1}^{m} p_{i,j} t_j^{i'} \leq \sum_{j=1}^{m} p_{ij} t_j^{i'} = T_{i'}(t^{i'}), \end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为可以观察到， j' 的一种可能取法是满足 $p_{ij'} > 0$的最小索引。

我们仍需证明 $|\tau'| \leq \min\{m, n-1\}$。显然，根据 τ'的构造， $|\tau'| \leq n-1$（我们为每个 $i' \neq i$添加一个支付函数）。由 τ'的一致性可得 $|\tau'| \leq m$ ，再结合任意支付函数$t \in \tau'$都是阶梯支付函数这一事实即可得出这一结论；也就是说， T_i（τ）与支付函数发生阶跃的结果相结合，便唯一确定了该支付函数。

□

接下来我们证明，对于满足单调似然比性质条件的实例，最优单调歧义合同具有更简单的结构。具体而言，与未施加单调性约束的无约束情形类似，单调似然比性质条件意味着最优模糊合同仅由两个支付函数构成。

定理4 （单调似然比性质下的最优单调模糊合同）。 设(c, r, p) 是一个满足单调似然比性质条件的实例。对于任意激励相容单调模糊合同 $\langle \tau, i \rangle$，都存在一个激励相容单调模糊合同 $\langle \tau', i \rangle = \langle \{t^1, t^k\}, i \rangle$，使得：

1. $T_i(\tau') = T_i(\tau)$ （即两个合同的期望支付相同，因此委托人的收益也相同）。

2. t^1 和 t^k 是阶梯支付函数：对于所有 $j \geq \ell$，$t_j^1 = T_i(\tau)$ ，其中 $\ell = \min\{j \in [m] \mid p_{ij} > 0\}$；对于所有 $j \geq h$，$t_j^k = {}^{T_i(\tau)}\, p_{ih}$ ，其中 $h = \max\{j \in [m] \mid p_{ij} > 0\}$。

定理4的证明见附录E，证明过程是验证第二个要点中所述的合同满足第一个要点中的条件，并且能够实施行动 i。与定理 2 的情况一样， t^k 防范所有成本较低的行动，而 t^1 防范所有成本较高的行动。

例6 (单调似然比性质下单调契约的严格改进)。 我们回到图 3 所示的实例，但现在要求合同为单调。实施各种行动的最优经典单调契约的支付函数，以及委托人相应的收益如下:

$$\begin{array}{lrr} \text{action } 1: & (0,0,0,0) & 0 \\ \text{action } 2: & (0,5/3,5/3,5/3) & 18.2 \\ \text{action } 3: & (0,25,25,25) & 7.5 \\ \text{action } 4: & (0,0,0,30) & 21.4. \end{array}$$

模糊合同使我们能够降低仅实施行动3的成本。最优模糊合同通过以下两个阶梯支付函数来实施行动3

$$\begin{array}{rcll} t^1 & = & (0,11,11,11), & \text{and} \\ t^k & = & (0,0,22,22). & \end{array}$$

使委托人的收益达到21.5。 ■

4 模糊性差距

第3.1节证实，委托人提供模糊合同可能更有利。为量化潜在收益的大小，我们引入模糊性差距这一概念，将其定义为有模糊性与无模糊性时委托人效用之间的最坏情况比率。

本节始终仅考虑最优经典合同能使委托人获得非负效用的实例。令 $\mathcal{C}(c,r,p)$ 和 $\mathcal{A}(c,r,p)$ 分别为实例 (c,r,p) 的激励相容经典合同集合与激励相容的模糊契约集合。

定义9 （模糊性差距）。 给定实例（c, r, p）的模糊性差距 ρ（c, r, p），以及实例类 $\mathcal{I}$ 的模糊性差距 ρ（$\mathcal{I}$），为

$$\rho(c,r,p) = \frac{\max_{\langle \tau,i\rangle \in \mathcal{A}(c,r,p)} U_P(\langle \tau, i\rangle)}{\max_{\langle t,i\rangle \in \mathcal{C}(c,r,p)} U_P(\langle t, i\rangle)} \qquad \textit{and} \qquad \rho(\mathcal{I}) = \sup_{(c,r,p)\in\mathcal{I}} \rho(c,r,p).$$

奖励:	$r_1 = -r$	$r_2 = -r$	$r_3 = 0$	$r_4 = r$	成本
行动 1:	0	0	1	0	$c_1 = 0$
行动 2:	0.5	0	0	0.5	$c_2 = 10$
行动3:	0	0.5	0	0.5	$c_3 = 10$
行动 4:	0.2	0.2	0	0.6	$c_4 = 20$

图 6：例 7 的实例（c， r， p）

4.1 一般情形下无界的模糊性差距

以下示例表明，模糊性差距可以任意大。

例 7 （负奖励下的无界差距）。 考虑图 6 所示的实例，其中 $r \geq 0$ 是一个我们允许变化的参数。行动 2 和 3 会产生负福利，因此只有行动 4 能够（取决于 r）带来正福利。福利为

$$\max\{0, 0.2r - 20\},$$

当且仅当 $r > 100$ 时为正。实施行动 4 的最优经典合同为 $\langle t, 4\rangle = \langle$**(0，0，0，100)** $4\rangle$，其给出

$$U_P(\langle t, 4\rangle) = 0.2r - 60,$$

当且仅当 $r > 300$ 时为正。实施行动 4 的最优模糊合同为 $\langle \tau, 4\rangle = \langle\{t^1, t^2\}$，$4\rangle = \langle\{$**(100，0，0，0)，(0，100，0，0)**$\}, 4\rangle$，给出

$$U_P(\langle \tau, 4\rangle) = 0.2r - 20,$$

当且仅当 $r > 100$ 时，该值为正。因此，对于 $r \in (100, 300]$，，最佳经典合同的收益为 0，而最佳模糊合同的收益为正，从而产生无限大的模糊性差距。

■

4.2 非负奖励下的紧致模糊性差距

与一般实例中的无界歧义差距相反，下面我们将证明，对于所有奖励均为非负数的实例，模糊性差距至多为 $n-1$

奖励:	$r_1 = 0$	$r_2 = 0$	$r_3 = \frac{1}{\gamma^{n-2}}$	成本
行动 1:	1	0	0	$c_1 = 0$
行动 $2 \le i \le n-1$:	0	$1-\gamma^{n-i}$	γ^{n-i}	$c_i = \frac{1}{\gamma^{i-2}} - (i-1) + (i-2)\gamma$
行动 n:	δ	0	$1-\delta$	$c_n = \frac{1}{\gamma_{n-2}} - (n-1) + (n-2)\gamma$

图 7：命题 4 的证明中使用的实例（c， r， p）。

且这一界是紧的。

命题 4。 固定 $n \ge 2$。令 $\mathcal{I}_n^+$ 表示具有 n 个行动和非负奖励的所有实例组成的类。$\mathcal{I}_n^+$ 的模糊性差距为

$$\rho(\mathcal{I}_n^+) = n - 1.$$

论证的上界部分用到了线性合同的概念，并利用该概念陈述以下引理。

定义10 （线性合同）。 考虑实例 （c、 r、 p） $\in \mathcal{I}_n^+$。若（经典）合同 $\langle t$、 $i\rangle$ 满足 线性 条件，即 $t =$ （αr_1、 ...、 αr_m） ，其中 $\alpha \ge 0$，则称其为线性合同。

对于实例（c， r， p） $\in \mathcal{I}_n^+$，记 $\mathcal{L}(c,\ r,\ p)$ 为所有激励相容的线性合同组成的集合。令 $W = \max_{i\in[n]} W_i$ 表示最大福利。

下面的引理表明，对于现状结果的奖励为零的实例，委托人可以通过线性合同获得相当于最优社会福利的 $1/(n-1)$ 比例的效用。

引理 2. 考虑实例 $(c, r, p) \in \mathcal{I}_n^+$，其中行动 1 的成本为 $c_1 = 0$，且始终会带来奖励 $r_1 = 0$。那么，存在一个行动子集 $A \subseteq [n]$，满足 $|A| \le n-1$，并且对每个 $i \in A$，都存在一个标量 $\alpha_i \ge 0$，使得每份满足 $t =$ 的线性合同$\langle t, i\rangle$，其形式为$(\alpha_i r_1, \ldots, \alpha_i r_m)$，都是激励相容的，且

$$\max_{\langle t,i\rangle \in \mathcal{L}(c,r,p)} U_P(\langle t, i\rangle) = \max_{i\in A} (1-\alpha_i) R_i \ge \frac{W}{n-1}. \tag{2}$$

引理 2 的证明与（D¨utting 等人，2019年）中的论证类似。为完整起见，我们在附录 F 中给出该引理的证明。现在我们可以证明命题 4 了。

命题 4 的证明。我们首先证明模糊性差距的上界。为此，固定任意 $n \geq 2$ 以及任意实例 $(c, r, p) \in \mathcal{I}_n^+$。显然，委托人通过模糊合同能够实现的最大效用满足 $\max_{\langle \tau, i\rangle \in \mathcal{A}(c,r,p)} U_P(\langle \tau, i\rangle) \leq W$。因此，为证明模糊性差距的上界，只需证明委托人通过经典合同能够实现的最大效用满足 $\max_{\langle t, i\rangle \in \mathcal{C}(c,r,p)} U_P(\langle t, i\rangle) \geq W/(n-1)$。考虑使用形如 $\langle t, i\rangle$ 的合同，其中 $t = (\alpha(r_1 - r_1), \ldots\ldots, \alpha(r_m - r_1))$，并令 (c, r', p) 为一个修改后的实例，其中对所有 $j \in [m]$ 均有 $r'_j = r_j - r_1$。注意，从代理人的角度看，在原实例中应用合同 $\langle t, i\rangle$，等价于在修改后的实例中应用合同 $\langle t', i\rangle$，其中 $t' = (\alpha r'_1, \ldots\ldots, r'_m)$。

令 R'_i 和 W'_i 分别表示修改后的实例中行动 i在 $i \in [n]$ 下的期望奖励和福利，并令 $W' = \max_{i\in[n]} W'_i$。注意，对于所有 $i \in [n]$，都有 $R_i = r_1 + R'_i$和 $W_i = r_1 + W'_i$，因此也有 $W = r_1 + W'$。将引理 2应用于修改后的实例，我们知道存在一个集合 $A \subseteq [n]$ 以及对于 $i \in A$的标量 α_i，使得

$$\begin{aligned}
\max_{\langle t,i\rangle \in \mathcal{C}(c,r,p)} U_P(\langle t, i\rangle) &\geq \max_{i\in A} \left(r_1 + (1-\alpha_i)R'_i\right) \\
&= r_1 + \max_{i\in A} \left((1-\alpha_i)R'_i\right) \\
&\geq r_1 + \frac{1}{n-1} W' \\
&\geq \frac{1}{n-1}\left(r_1 + W'\right) = \frac{1}{n-1} W,
\end{aligned}$$

其中，最后一步利用了 $r_1 \geq 0$。这就完成了关于模糊性差距上界的证明。

接下来我们证明模糊性差距的下界。为此，我们对 D¨utting 等人（2021年）提出的一个下界构造进行变体处理。当 $n = 2$ 时无需证明任何内容，因此固定任意 $n \geq 3$。令 $\gamma, \epsilon \in (0,1)$，并令 $\delta = \epsilon \cdot \gamma^{n-2}$。考虑由 n 个行动构成的参数化实例 (c, r, p)，如图 7所示。附录 G中的引理 3表明，在此实例中，委托人通过经典合同所能实现的最大效用至多为 1. 论证通过对每个行动 $i \in [n]$证明其上界为 1来进行。对于行动 $i = 1,2$，其上界是显然的，因为这些行动的福利为 $W_1 \leq W_2 \leq 1$。对于行动 $i \in \{3, \ldots, n\}$，可以仅考虑激励相容约束的一个子集来证明其上界。

证明　通过观察可知，在采用模糊合同的情况下，委托人

可以实施行动 n，期望支付等于 c_n。这足以证明该结论，因为该行动带来的福利为 $W_n = (n-1) - (n-2)\gamma - \epsilon$，并且$W_n \to n-1$由于 $\gamma,\ \epsilon \to 0$。实现这一点的模糊合同为 $\langle \{t^1, t^2\},\ n\rangle$其中 $t^1 = (\frac{c_n}{\delta},\ 0,\ 0)$ 和 $t^2 = (0,\ 0,\ \frac{c_n}{1-\delta})$。不难验证，该合同是一致的，并且对行动 n entails an expected payment of c_n。该合同满足激励相容，因为对于所有行动 $i \neq n$，它给出的最低支付为零。

□

5 模糊性免疫性

本节探讨哪些类别的合同适合通过模糊合同加以改进。我们从支付函数的性质出发来表述结果。

为简化论述，我们只考虑具有如下性质的支付函数：若两个结果诱导出相同的奖励，则它们也诱导出相同的支付。因此，我们可以将支付函数视为从 $\mathbb{R}$ 映射到 $\mathbb{R}_+$的函数。在此设定下，一类支付函数 $\mathcal{T}$ 是支付函数 t的一个集合（可能是无限集）：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$。

我们首先给出模糊性免疫的支付函数类的定义。对于给定的实例（$c,\ r,\ p$），令 $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}(c,\ r,\ p)$表示支付函数来自 $\mathcal{T}$的所有激励相容的经典合同所构成的集合。令 $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(c,\ r,\ p)$表示模糊合同的对应定义。

定义 11（模糊性免疫）。若对于任意实例（$c,\ r,\ p$）以及任意行动 $i \in [n]$，均有以下性质，则称支付函数类 $\mathcal{T}$ 是模糊性免疫的：

$$\max_{\tau:\langle \tau, i\rangle \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(c,r,p)} U_P(\langle \tau, i\rangle) \leq \max_{t:\langle t, i\rangle \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(c,r,p)} U_P(\langle t, i\rangle),$$

即委托人无法通过使用具有模糊性的合同而非经典合同来从实施任何行动中获益 i。

例如，例2中的委托代理情境表明，所有合同这一合同类别并非模糊性免疫。

我们对歧义无关性的条件如下：

定义 12（支付函数的有序类）。 如果对于任意两个支付函数 t 和 $t' \in \mathcal{T}$，均有以下性质，则支付函数类$\mathcal{T}$是有序的：

$$t(x) \geq t'(x) \quad for\ all\ x \in \mathbb{R} \quad or \quad t(x) \leq t'(x) \quad for\ all\ x \in \mathbb{R}.$$

定理5 (歧义无关性刻画)。 支付函数类$\mathcal{T}$是模糊性免疫的，当且仅当它是有序的。

证明。 我们首先证明，有序的支付函数类是模糊性免疫的。假设 $\mathcal{T}$是有序的。考虑一个（一致的）激励相容模糊合同 $\langle \tau,\ i\rangle = \langle \{t^1, \ldots, t^k\},\ i\rangle \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(c,\ r,\ p)$，其中 $k \geq 2$。由于 $\mathcal{T}$是有序的，必定存在 τ中的一个支付函数，不妨记为 t^1，使得对所有 $j \in [m]$和所有 $t \in \tau$，都有 $t_j^1 \leq t_j$。因此，对于每个行动 $i' \in [n]$，我们有

$$U_A(i' \mid t^1) = \sum_{j=1}^{m} p_{i'j} t_j^1 - c_{i'} = \min_{t \in \tau} \sum_{j=1}^{m} p_{i'j} t_j - c_{i'} = \min_{t \in \tau} U_A(i' \mid t) = U_A(i' \mid \tau),$$

这意味着经典合同 $\langle t^1,\ i\rangle \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(c,\ r,\ p)$是激励相容的。此外，根据 $\langle \tau,\ i\rangle$的一致性，还有

$$U_P(\langle t^1, i\rangle) = U_P(i \mid t^1) = U_P(i \mid \tau) = U_P(\langle \tau, i\rangle).$$

因此，经典合同 $\langle t^1, i\rangle$ 以与 $\langle \tau, i\rangle$相同的成本实施行动 i，因此 $\mathcal{T}$具有模糊性免疫性。

接下来，我们通过证明逆否命题，说明歧义无关性蕴含有序性。假设 $\mathcal{T}$ 不满足有序性。那么存在 $t, t' \in \mathcal{T}$ 和 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，使得 $t(x_1) > t'(x_1)$ 且 $t(x_2) < t'(x_2)$。令 $\delta_1 = t(x_1) - t'(x_1) > 0$,$\delta_2 = t(x_2) - t'(x_2) < 0$, $q_1 = \frac{-\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}$ 和 $q_2 = \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2}$，我们得到满足 $q_1 + q_2 = 1$ 的值 $q_1, q_2 > 0$

$$q_1 t(x_1) + q_2 t(x_2) = q_1 t'(x_1) + q_2 t'(x_2). \tag{3}$$

令 $\kappa = \min_{j=1,2} \min\{t(x_j)\ t'(x_j)\}$。注意，由于有限责任，$\kappa \geq 0$。现在考虑如下实例：有 2 个结果 $r_1 = x_1$ 和 $r_2 = x_2$，以及 3 个行动：

- 行动 $i \in \{1, 2\}$：$p_{ii} = 1$和 $c_i =$最小值$\{t(r_i)\ t'(r_i)\} - \kappa$。
- 行动3：对于 $j \in \{1, 2\}$、$p_{3j} = q_j$ 和 $c_3 = \sum_{j=1}^{2} q_j t\ (r_j) - \kappa$。

请注意，这种构造确保对所有 $i \in \{1,2,3\}$ 都有 $c_i \geq 0$，并且对某些 $i \in \{1,2\}$ 有 $c_i = 0$；我们可以将其视为默认行动。

我们论证，行动3可以通过模糊合同来实施，而任何经典合同都无法实施行动3。首先，我们证明可以通过模糊合同 $\langle \tau, 3 \rangle$ 来实施行动3，其中 $\tau = \{t, t'\}$，且其期望支付等于 $c_3 + \kappa$。为说明 $\langle \tau, 3 \rangle$ 是一致的，请注意

$$T_3(t) = \sum_{j=1}^{2} q_j \cdot t(r_j) \overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{2} q_j \cdot t'(r_j) = T_3(t').$$

由于 t 和 t' 在行动3下的期望支付相同，因此代理人在 t 和 t' 下采取行动3的期望效用相同，且等于

$$U_A(3 \mid t) = U_A(3 \mid t') = \sum_{j=1}^{2} q_j \cdot t(r_j) - c_3 = \kappa.$$

剩下要证明的是，对于任意行动 $i \in \{1,2\}$，代理人在 $\langle \tau, 3 \rangle$ 下的效用至多为 κ。若 $t(r_i) < t'(r_i)$，则 $c_i = t(r_i) - \kappa$，且代理人采取行动i 的期望效用为 $U_A(i \mid \tau) = U_A(i \mid t) = t(r_i) - c_i = \kappa.$。类似地，若 $t'(r_i) \leq t(r_i)$，则 $c_i = t'(r_i) - \kappa$，且代理人采取行动 i 的效用为 $U_A(i \mid \tau) = U_A(i \mid t') = t'(r_i) - c_i = \kappa$。因此，无论是哪种情况，代理人从模糊合同中获得的效用都至多为 κ。

我们通过证明行动3无法由任何经典合同实施来完成论证（即使不限制经典合同必须来自类$\mathcal{T}$）。我们有

$$\sum_{j=1}^{2} q_j c_j = \left(\sum_{j=1}^{2} q_j \cdot \min(t(r_j), t'(r_j)) \right) - \kappa < \left(\sum_{j=1}^{2} q_j \cdot t(r_j) \right) - \kappa = c_3.$$

因此，通过向量（q_1，q_2）对行动1、2进行凸组合，所得奖励分布与行动3相同，但成本严格更低。根据命题1，这意味着任何经典合同都无法实施行动3。

□

作为我们刻画的直接推论，对于任意固定的$d \in \mathbb{R}_+$ 和 $\beta \leq r_1$，支付函数类 $\mathcal{T}_d(\beta) = \{t(x) = \alpha \cdot (x - \beta)^d \mid \alpha \geq 0\}$具有模糊性免疫性。如果所有奖励都非负，那么我们可以令 $\beta = 0$，从而得出线性合同类 $\mathcal{T}_1(0)$具有模糊性免疫性。对于一般的奖励，如果 $\beta < 0$,

那么 $\mathcal{T}_1(\beta)$描述了一个具有模糊性免疫性的仿射合同类。以下推论对此进行了表述。

推论 1. 对于任意固定的 $d \in \mathbb{R}_+$和 $\beta \leq r_1$，支付函数$\mathcal{T}_d(\beta) = \{t(x) = \alpha \cdot (x - \beta)^d \mid \alpha \geq 0\}$ 这一类具有模糊性免疫性。特别是，当所有奖励均为正时，线性支付函数这一类（对应于 $\mathcal{T}_1(0)$）具有模糊性免疫性。

另一方面，我们的刻画表明，许多自然的合同类别，例如所有仿射合同、所有多项式合同或所有单调合同，都不具有模糊性免疫性。

6 混合对冲以应对模糊性

本节探讨在允许代理人选择混合行动且允许委托人实施混合行动时，模糊性的作用。我们的主要结果（定理6）表明，在这种情况下，委托人无法从采用模糊合同中获益。Bade（2023）在机制设计背景下得到了类似的结果：如果代理人具有动态一致性，也就是说，他们会根据所获信息更新信念，从而使继续执行其事前最优行动计划成为最优选择，那么模糊性就不会扩大可实施社会选择函数的集合。与此相反，Kambhampati（2023）表明，若委托人对代理人可采取的行动抱有模糊信念，通常可以通过向代理人提供随机合同来提高自身收益。

6.1 混合行动的扩展

支付函数的定义保持不变，$t = (t_1, \ldots\ldots, t_m) \in \mathbb{R}_+^m$为每个结果 $j \in [m]$定义一个非负转移支付 t_j。代理人的混合行动记为 $\psi \in \Delta^n$，是对行动 $i \in [n]$的凸组合，其中 ψ_i 表示代理人选择行动 i的概率。纯行动是混合行动的一种特殊情形，即对于某个 i，$\psi_i = 1$，而对于其他所有 $i' \neq i$，$\psi_{i'} = 0$。混合行动 ψ的期望奖励为 $R_\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i R_i$。对于支付函数 t，我们用 $T_\psi(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i T_i(t)$表示混合行动 ψ 的期望支付。

经典合同 $\langle t, \psi \rangle$ 下，混合行动 ψ' 的代理人的期望效用为$U_A(\psi' \mid t) = \sum_{i=1}^n \psi_i' U_A(i \mid t)$。如果对任意

混合行动 ψ'，均有 $U_A(\psi' \mid t) \leq U_A(\psi \mid t)$。我们用 $U_A(\langle t, \psi \rangle)$ 表示激励相容合同 $\langle t, \psi \rangle$下代理人的效用，并用 $U_P(\langle t, \psi \rangle) = \sum_i \psi_i U_P(i \mid t)$ 表示委托人的效用。

我们将代理人在模糊合同 $\langle \tau, \psi \rangle$ 下采取混合行动 ψ' 时的期望效用定义为任意支付函数 $t \in \tau$下的最低效用。也就是说，代理人的期望效用为 $U_A(\psi' \mid \tau) = \min_{t \in \tau} U_A(\psi' \mid t)$。

如果对于每个混合行动 ψ'，都有 $U_A(\psi' \mid \tau) \leq U_A(\psi \mid \tau)$，我们就称模糊合同 $\langle \tau, \psi \rangle$ 实施了混合行动 ψ。如果对于任意两个合同 $t, t' \in \tau$，都有 $U_P(\psi \mid t) = U_P(\psi \mid t')$，进而 $T_\psi(t) = T_\psi(t')$，那么激励相容合同 $\langle \tau, \psi \rangle$ 就是一致的。对于（一致的）激励相容合同 $\langle \tau, \psi \rangle$，我们用 $U_A(\langle \tau, \psi \rangle)$ 表示代理人在 ψ下的效用，用 $T_\psi(\tau)$ 表示由此产生的期望支付。委托人在（一致的）激励相容合同 $\langle \tau, \psi \rangle$ 下的期望效用为 $U_P(\langle \tau, \psi \rangle) = U_P(\psi \mid \tau) = R_\psi - T_\psi(\tau)$。

下文中，不失一般性，我们仅考虑一致的激励相容合同。

6.2 混合策略对冲模糊性

当代理人可以选择混合行动时，委托人无法通过采用模糊合同获得收益。为证明这一结果，我们将利用应用于一个适当定义的零和博弈的极小极大定理。

定理6. 考虑一个激励相容的模糊合同 $\langle \tau, \psi \rangle$，其收益为 $U_A(\psi \mid \tau)$ 和 $U_P(\psi \mid \tau)$。那么，存在一个激励相容的经典合同 $\langle \hat{t}, \psi \rangle$，使代理人和委托人的收益与之相同。

证明。设 $\langle \tau, \psi \rangle$ 是一个收益为 $U_A(\psi \mid \tau)$ 和 $U_P(\psi \mid \tau)$ 的激励相容模糊合同。

考虑由代理人和委托人进行的零和博弈。代理人的（凸且紧）策略集为混合行动集 $\psi' \in \Delta^n$，而委托人的（同样凸且紧）策略集为支付函数集 $\hat{\mathcal{T}} = \{t \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \psi_i p_{ij} t_j = T_\psi(\tau)\}$。这是在代理人采取行动 ψ 时，能够保持委托人收益 $U_P(\psi \mid \tau)$ 不变的支付函数集。注意，$\hat{\mathcal{T}}$ 非空，因为每个支付函数 $t \in \tau$ 在 ψ 下的期望支付都相同（即 $T_\psi(\tau)$）。代理人在此博弈中的收益为 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \psi_i (p_{ij} t_j - c_i)$，而委托人的收益则是该数值的相反数。请注意，这样一来，

代理人在此博弈中的收益恰好就是其在委托代理情境中的效用，而委托人的收益则不同于其在委托代理情境中的收益。

极小极大定理意味着：

$$\max_{\psi' \in \Delta^n} \min_{t \in \hat{\mathcal{T}}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i'(p_{ij} t_j - c_i) = \min_{t \in \hat{\mathcal{T}}} \max_{\psi' \in \Delta^n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i'(p_{ij} t_j - c_i). \tag{4}$$

^注意，$\mathcal{T}$只是一个支付函数集合，因此我们可以将其理解为一个构成含歧义^^合同中支付函数的（可能是无限规模的）集合。此外，根据 $\mathcal{T}$ 的构造，我们有 $U_A(\psi \mid \mathcal{T}) = U_A(\psi \mid \tau)$，因为^$\psi$确保委托人面对 $\mathcal{T}$中的每个元素时都能获得效用 $U_P(\psi \mid \tau)$，从而代理人面对 $\mathcal{T}$中的每个元素时都能获得效用^$U_A(\psi \mid \tau)$。

接下来我们将证明，零和博弈的值也等于该数量。为此，我们证明

$$U_A(\psi \mid \tau) \geq \max_{\psi' \in \Delta^n} \min_{t \in \hat{\mathcal{T}}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i'(p_{ij} t_j - c_i) \geq U_A(\psi \mid \hat{\mathcal{T}}).$$

为了解这一点，注意到

$$\begin{aligned}
U_A(\psi \mid \tau) &= \min_{t \in \tau} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i(p_{ij} t_j - c_i) = \max_{\psi' \in \Delta^n} \min_{t \in \tau} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i'(p_{ij} t_j - c_i) && (5) \\
&\geq \max_{\psi' \in \Delta^n} \min_{t \in \hat{\mathcal{T}}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i'(p_{ij} t_j - c_i) \geq \min_{t \in \hat{\mathcal{T}}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i(p_{ij} t_j - c_i) && (6) \\
&= U_A(\psi \mid \hat{\mathcal{T}}). && (7)
\end{aligned}$$

式（5）中的第二个等式基于以下事实：τ 实现了 ψ；式（6）中的第一个不等式来自对相应最小化问题的可行集进行比较；而下面的不等式成立，是因为 ψ 在最大化问题中是可行的。

考虑支付函数 ^$t \in \operatorname{argmin}_{t \in \hat{\mathcal{T}}} \max_{\psi' \in \Delta^n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i'(p_{ij} t_j - c_i)$。（4）表明，在 Δ^n 中，不存在任何行动能使代理人在面对 ^t 时获得高于 $\max_{\psi' \in \Delta^n} \min_{t \in$ ^$\tau} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_i'(p_{ij} t_j - c_i) = U_A(\psi \mid \tau)$ 的收益。根据构造，混合行动ψ 在面对支付函数 ^t时可获得这一收益。因此，$\langle \hat{t}, \psi \rangle$ 是一个激励相容的经典合同，代理人的收益为 $U_A(\psi \mid \tau)$，委托人的收益为 $U_P(\psi \mid \tau)$。

□

混合行动使代理人拥有更多备选行动，从而进一步收紧激励约束，足以消除委托人从模糊合同中获得的任何优势。下面的例子对此进行了说明。

例8。 回到例*2*。 假设代理人只能选择纯行动。正如我们所见，唯一的最优模糊合同是 $\langle \tau,\ 4\rangle$，其中$\tau = \{(0,\ 3/2,\ 0),\ (0,\ 0,\ 3/2)\}$。在 τ 下，行动1、2、3和4的收益分别为0、 $-1/4$、$-1/4$和0。因此，对代理人而言，纯行动2和3严格劣于行动4。

现在假设代理人可以选择混合行动。如果纯行动的收益是由经典合同产生的，那么对行动2和3进行任何混合都无法带来高于 $-1/4$的收益，因此这类混合都不会优于行动4。在模糊性下，混合行动的这一熟知性质不再成立。以概率 $1/2$分别选择行动2和3的混合行动，其期望收益为 $1/8$，严格高于该混合行动支撑集中的任何纯策略的收益，因此模糊合同 $\langle \tau,\ 4\rangle$ 不再能实施行动4。事实上，鉴于代理人可以选择这种混合行动，支付低于1时就无法实施行动4；这与经典合同下的支付相同。

■

6.3 与埃尔斯伯格悖论及Raiffa批评的关系

Ellsberg（1961年）率先提出，人类往往偏好具有可量化风险的选择，而不是具有无法量化、无法计算风险的选择，由此催生了模糊厌恶文献。我们已经证明，当且仅当代理人受到只能采取纯行动的限制时，委托人才能利用代理人的模糊厌恶。

Raiffa（1961年）对埃尔斯伯格实验提出的一项批评是，面对埃尔斯伯格 urn 时，参与者可以在心中抛一枚硬币，并实施一种能够在结果上诱导出客观概率分布的混合行动。这样做消除了决策中的所有模糊性，也就不再需要模糊厌恶。Raiffa的论点凸显了模糊厌恶型代理人通过采取混合行动可能获得的力量。事实上，定理6表明，采取混合策略会完全消除委托人源于模糊合同的力量。

Raiffa 的论证引发了一场讨论，核心问题是这种心理上的抛硬币是否确实能消除不确定性（例如，Ke

和 Zhang（2020）；Saito（2015））。将这种“对 Raiffa 批评的批评”形式化的一种方式，是 Bade（2023）提出的动态半一致性概念。根据这一行为假设，代理人不应根据与环境无关的信号（例如独立的抛硬币结果）更新其信念。这一概念排除了定理6所需的那种混合，但与我们第2–5节结果所依据的行为假设一致。

参考文献

Aghion, P. 和 Holden, R.（2011年）。不完全合同与企业理论：过去25年我们学到了什么？《经济展望杂志》，25(2):181–197。Bade, S.（2023）。设计导致的模糊性。SSRN工作论文 4561349。Beauchˆene, D., Li, J. 和 Li, M.（2019年）。模糊说服。《经济理论杂志》，179:312–365。Bergemann, D. 和 Schlag, K.（2011年）。稳健垄断定价。《经济理论杂志》，146(6):2527–2543。Bodoh-Creed, A. L.（2012）。模糊信念与机制设计。《博弈与经济行为》，75(2):518–537。Bose, S., Ozdenoren, E. 和 Pape, A. D.（2006）。存在模糊性的最优拍卖。《理论经济学》，1(4):411–438。Bose, S. 和 Renou, L.（2014）。采用模糊通信装置的机制设计。《计量经济学》，82(5):1853–1872。Carrasco, V., Farinha Luz, V., Kos, N., Messner, M., Monteiro, P. 和 Moreira, H.（2018）。矩条件下的最优销售机制。《经济理论杂志》，177:245–279。Carroll, G.（2015）。稳健性与线性合同。《美国经济评论》，105(2):536–563。Carroll, G. 和 Walton, D.（2022年）。稳健契约模型的一般框架。《计量经济学》，90(5):2129–2159。

Cheng, X.（2020年）。模糊说服：事前表述。arXiv预印本 arXiv:2010.05376。Dai, T. 和 Toikka, J.（2022年）。团队的稳健激励。《计量经济学》，90(4):1583–1613。Di Tillio, A., Kos, N. 和 Messner, M.（2017年）。模糊机制的设计。《经济研究评论》，84(1):237–276。D¨utting, P., Roughgarden, T. 和 Talgam-Cohen, I.（2019年）。简单合同与最优合同。载于*EC'19*：第*20*届*ACM*经济学与计算会议，凤凰城，亚利桑那州，美国，*2019*年*6*月*24*日至*28*日，第369–387页。完整版见：https://arxiv.org/abs/1808.03713。D¨utting, P., Roughgarden, T. 和 Talgam-Cohen, I.（2021年）。合同的复杂性。《*SIAM*计算杂志》，50(1):211–254。Ellsberg, D.（1961年）。风险、模糊性与萨维奇公理。《经济学季刊》，75(4):643–669。Gilboa, I. 和 Schmeidler, D.（1993年）。模糊信念的更新。《经济理论杂志》，59(1):33–49。Grossman, S. J. 和 Hart, O. D.（1983年）。委托代理问题分析。《计量经济学》，51(1):7–45。Hart, O.（1988年）。不完全合同与企业理论。《法律、经济学与组织杂志》，4(1):119–139。Hart, O. 和 Moore, J.（1988年）。不完全合同与重新谈判。《计量经济学》，56(4):755–785。Hermalin, B. E. 和 Katz, M. L.（1991年）。道德风险与可验证性：重新谈判对代理的影响。《计量经济学》，59(6):1735–1753。Holmstr¨om, B.（1979年）。道德风险与可观察性。《贝尔经济学杂志》，10(1):74–91。

Holmstr¨om, B. 和 Milgrom, P.（1987）。跨期激励提供中的聚合与线性。《计量经济学》：计量经济学会期刊，第303–328页。Innes, R. D.（1990）。有限责任与具有事前行动选择的激励契约。《经济理论杂志，52(1)：45–67。Kambhampati, A.（2023）。在稳健委托—代理问题中，随机化是最优的。《经济理论杂志，207：105585。Ke, S. 和 Zhang, Q.（2020）。随机化与模糊厌恶。《计量经济学，88(3)：1159–1195。Laffont, J.-J. 和 Martimort, D.（2009）。《激励理论》：委托人—代理人模型。普林斯顿大学出版社。Lopomo, G.、Rigotti, L. 和 Shannon, C.（2011）。奈特不确定性与道德风险。《经济理论杂志，146(3)：1148–1172。Raiffa, H.（1961年）。风险、模糊性与萨维奇公理：一则评论。《经济学季刊，75：690—694。Saito, K.（2015）。不确定性下的灵活性偏好与随机化。《美国经济评论，105(3)：1246–1271。Schmeidler, D.（1989年）。没有可加性的主观概率与期望效用。《计量经济学，57(3)：571–587。Zuboff, S.（2023）。《监视资本主义时代。公共事务出版社。

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \ \sum p_{ij} t_j \\
&\text{s.t.} \ \sum_j p_{ij} t_j - c_i \geq \sum_j p_{i'j} t_j - c_{i'} \quad \forall i' \neq i \\
&\qquad t_j \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall j
\end{aligned}
$$

(a) 行动 i 的原始线性规划。

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \ \sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} (c_i - c_{i'}) \\
&\text{s.t.} \ \sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} (p_{ij} - p_{i'j}) \ \leq p_{ij} \quad \forall j \\
&\qquad \lambda_{i'} \geq 0 \qquad\qquad\qquad\quad \forall i' \neq i
\end{aligned}
$$

(b) 行动 i 的对偶线性规划。

图8：最低支付线性规划。

命题1的证明

命题*1*的证明。 图8展示了确定实施行动 i的最优经典契约的线性规划及其对偶问题。考虑图8 (a)中针对行动 i的原始线性规划，但将目标函数$\min \sum_j p_{ij} t_j$替换为$\min 0$。当且仅当所得线性规划可行时，行动 i 才可实施。该线性规划的对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} (c_i - c_{i'}) \\
& \sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} (p_{ij} - p_{i'j}) \leq 0 \qquad\qquad \forall\ j \\
& \lambda_{i'} \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall\ i' \neq i
\end{aligned}
$$

根据一般原始-对偶对的强对偶性，可得到以下四种情况：

（1）对偶线性规划和原始线性规划均可行。（2）对偶线性规划无界，原始线性规划不可行。（3）对偶线性规划不可行，原始线性规划无界。（4）对偶线性规划和原始线性规划均不可行。

在我们的情形中，对偶线性规划总是可行的（对于所有 $i' \neq i$，我们可以选择 $\lambda_{i'} = 0$ ）。这排除了情况（3）和（4）。因此，要证明这一结论，只需证明：对偶线性规划无界，当且仅当存在一个凸组合 $(\gamma_{i'})_{i' \neq i}$ ，使得对于所有 j，$\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} p_{i'j} = p_{ij}$ 且 $\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} c_{i'} < c_i$。

我们首先证明，如果存在这样的凸组合，那么对偶线性规划是无界的。事实上，如果存在这样的凸组合，那么它对应于对偶线性规划的一个可行

解，因为对于所有的 j,

$$\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'}(p_{ij} - p_{i'j}) = \left(\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'}\right) p_{ij} - \left(\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} p_{i'j}\right) = 0,$$

其中我们用到了 $\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} = 1$ 和 $\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} p_{i'j} = p_{ij}.$。此外，该解取得的目标值为

$$\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'}(c_i - c_{i'}) = \left(\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'}\right) c_i - \left(\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} c_{i'}\right) = \delta$$

对于某个 $\delta > 0$, 其中我们用到了 $\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} = 1$ 和 $\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} c_{i'} < c_i.$。但此时，对于任意 $\kappa \geq 0$，将对偶变量设为 $\kappa \cdot \gamma_{i'}$（对于 $i' \neq i$），便得到一个可行解，其目标值等于 $\kappa \cdot \delta$。因此，对偶线性规划无界。

接下来我们证明，如果对偶线性规划无界，则必定存在具有所需性质的凸组合。由于对偶线性规划无界，对于任意 $\delta > 0$，必定存在一个对偶线性规划的可行解 $(\lambda_{i'})_{i' \neq i}$，使得 $\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} (c_i - c_{i'}) \geq \delta$，且对于所有 j，$\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} (p_{ij} - p_{i'j}) \leq 0$。现在考虑对于所有 $i' \neq i$，$\gamma_{i'} = \lambda_{i'} / (\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'})$。我们声称 $(\gamma_{i'})_{i' \neq i}$ 是一个具有所需性质的凸组合。首先注意，$(\gamma_{i'})_{i' \neq i}$ 是一个凸组合，即对于所有 $i' \neq i$，$\gamma_{i'} \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} = 1$。还需注意

$$\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'}(c_i - c_{i'}) = \frac{1}{\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'}} \sum_{i' \neq i} \lambda_{i'}(c_i - c_{i'}) = \frac{1}{\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'}} \cdot \delta > 0$$

因此 $\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} c_{i'} < (\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'}) c_i = c_i$。此外，对于所有 j，利用 $\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} p_{i'j} \geq (\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'}) p_{ij}$ 这一事实，我们必有

$$\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} p_{i'j} = \frac{1}{\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'}} \sum_{i' \neq i} \lambda_{i'} p_{i'j} \geq \frac{1}{\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'}} \left(\sum_{i' \neq i} \lambda_{i'}\right) p_{ij} = p_{ij}.$$

因此我们知道，对于所有的 j、$\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} p_{i'j} \geq p_{ij}$ 都成立。我们主张，对于所有的 j，该不等式必须取等号。事实上，反设对于某个 j'，我们有一个

奖励:	$r_1 = 0$	$r_2 = \delta$	$r_3 = 2\delta$	$\dots$	$r_m = m - 1$	成本
行动 1:	0	$\frac{1}{m-1}$	$\frac{1}{m-1}$	$\dots$	$\frac{1}{m-1}$	$c_1 = 0$
行动 2:	$\frac{1}{m-1}$	0	$\frac{1}{m-1}$	$\dots$	$\frac{1}{m-1}$	$c_2 = 0$
行动3:	$\frac{1}{m-1}$	$\frac{1}{m-1}$	0	$\dots$	$\frac{1}{m-1}$	$c_3 = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
行动 m:	$\frac{1}{m-1}$	$\frac{1}{m-1}$	$\frac{1}{m-1}$	$\dots$	0	$c_m = 0$
行动 $m+1$:	$\frac{1}{(m-1)^2}$	$\frac{1}{(m-1)^2}$	$\frac{1}{(m-1)^2}$	$\dots$	$1 - \frac{1}{m-1}$	$c_{m+1} = 1$

图9：命题5证明中使用的实例（c， r， p）。

严格不等式。于是，对所有 j 求和可得

$$\sum_j \left(\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} p_{i'j} \right) > \sum_j p_{ij} = 1, \tag{8}$$

其中我们利用了 p_i 是结果 j上的概率分布。另一方面，我们有

$$\sum_j \left(\sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} p_{i'j} \right) = \sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} \left(\sum_j p_{i'j} \right) = \sum_{i' \neq i} \gamma_{i'} = 1, \tag{9}$$

其中我们利用了 $p_{i'}$ 也是关于结果的概率分布，并且 $(\gamma_{i'})_{i' \neq i}$ 是一个凸组合。结合 (8) 与 (9)，我们得到了所需的矛盾。

□

B 定理1的紧性

命题5。 假设 $m > 4$。存在一些实例，使得由 $n - 1 = m$ 个支付函数组成的最佳模糊合同严格优于任何由更少支付函数组成的模糊合同。

证明。Con 考虑图9所示的实例 (c, r, p)，其中有 m 个结果和 $n =$

$m+1$ 个行动，其中 δ 是一个趋近于零的正数。首先请注意，在此实例中，任意行动 $i \leq m$ 的期望奖励 R_i 为

$$R_i \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m-1} r_j = \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{(j-1)}{m-1} \cdot \delta \right) + \frac{m-1}{m-1} = 1 + \frac{1}{2}(m^2 - 3m + 2)\delta,$$

通过将 δ 选得足够小，可以使其任意接近 1。另一方面，行动 $m+1$ 的期望奖励为

$$R_{m+1} = \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{(m-1)^2} \cdot (j-1)\delta \right) + \left(1 - \frac{1}{m-1} \right) \cdot (m-1) = (m-2) \left(1 + \frac{1}{2(m-1)} \delta \right).$$

由于 δ 为正且 $m > 4$，可知 $R_{m+1} \geq m-2$ 且 $W_{m+1} = R_{m+1} - c_{m+1} \geq m-3 \geq 2$。因此，要证明该结论，只需证明存在一个由 $n-1 = m$ 个支付函数组成的（一致的）激励相容模糊合同，该合同能够实施行动 $m+1$，且期望支付等于 c_{m+1}；而任何由严格少于 $n-1 = m$ 个支付函数组成的（一致的）激励相容模糊合同，若要实施行动 $m+1$，则必须支付严格更多的金额。

我们首先证明，确实可以通过一个由 $n-1 = m$ 个支付函数组成且期望支付等于 c_{m+1} 的模糊合同来实施行动 $m+1$。为此，考虑模糊合同 $\langle \tau,\ m+1 \rangle$，其由 $n-1 = m$ 个 SOP 支付函数组成：

$$\begin{aligned} \tau &= \{t^1, t^2, \ldots, t^m\} \ \ s.t \\ t_j^j &= \frac{c_{m+1}}{p_{(m+1)j}} \ \text{ and } \ t_{j'}^j = 0 \ \ \forall j' \neq j \end{aligned}$$

因此很容易验证，对于任意支付函数 $t^j \in \tau$, $T_{m+1}(t^j) = c_{m+1}$，这表明 $\langle \tau, m+1 \rangle$ 是一致的。由于 $T_{m+1}(\tau) = c_{m+1}$，行动 $m+1$ 的代理人的效用为 $U_A(m+1 \mid \tau) = 0$。另一方面，对于任意行动 $i \neq m+1$，都存在一个 SOP 合同 $t^j \in \tau$，使得 $T_i(t^j) = 0$。因此，对于任意行动 $i \neq m+1$,$U_A(i \mid \tau) \leq 0$，这表明 $\langle \tau, m+1 \rangle$ 是激励相容的。

为完成证明，采用反证法，假设存在一个（一致且）激励相容模糊合同 $\langle \tau', m+1 \rangle$ 满足 $T_{m+1}(\tau') = c_{m+1}$ 但 $|\tau'| < n-1 = m$。由于$U_A(m+1 \mid \tau') = 0$，为了使 $\langle \tau',\ m+1 \rangle$ 实施行动 $m+1$，我们必须对每个行动 $i \in [m]$都有$U_A(i \mid \tau') \leq 0$。要实现这一点，唯一的方法是对于

每个这样的行动 $i \in [m]$，都存在一个支付函数 $t' \in \tau'$，使得 $T_{i'}(t') = 0$。由于对于每个行动 $i \in [m]$，只有一个结果（记作 $j(i)$）的概率为 0，而对于所有其他 j'，我们都有 $p_{ij'} > 0$，因此，期望支付为 0 的支付函数类型只有一种，即针对该特定结果支付的 SOP 支付函数 $j(i)$。由于每个行动都只有一个概率为 0 的唯一结果（也就是说，对于所有 $i,\ i' \in [m],\ i \neq i'$，都有 $j(i) \neq j(i')$），因此，对于每个行动，使其期望支付为 0 的 SOP 支付函数也是唯一的。这表明 τ' 必须至少由 $n-1=m$ 个支付函数构成，这与我们的假设矛盾。

□

C 命题3的证明

命题*3*的证明。 根据命题2，当且仅当不存在其他行动 i' 使得 $p_{i'} = p_i$ 且 $c_{i'} < c_i$时，行动 i 才可实施。因此，若 $A = \emptyset$，则必有 $c_i = 0$。在这种情况下，$\langle \{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\}, i \rangle$ 可实施行动 i，显然，没有其他合同能以更低的期望支付做到这一点。因此，假设 $A \neq \emptyset$，并考虑命题陈述中针对这种情况的合同 $\langle \tau, i \rangle$。我们已经论证过该合同是（一致且）激励相容的（见命题2的证明）。接下来只需证明它是最优的。

反证：假设存在一个（一致的）激励相容合同 $\langle \tau', i \rangle$，使得 $T_i(\tau') < T_i(\tau)$。根据定理1，我们可以假设 $\langle \tau', i \rangle$ 是一个 SOP 合同。

考虑行动 $i' \in A$，使得

$$\min \left\{ x \geq 0 \;\middle|\; p_{ij(i')} \cdot \frac{x}{p_{ij(i')}} - c_i \geq p_{i'j(i')} \cdot \frac{x}{p_{ij(i')}} - c_{i'} \right\} = T, \tag{10}$$

并回忆 $T_i(\tau) = T$。

首先注意到，由于 $\langle \tau,\ i \rangle$ 是激励相容的，我们必须有 $T \geq c_i$。此外，我们不能有$T = c_i$，因为这样我们将有 $T_i(\tau') < T_i(\tau) = T = c_i$，这将与我们关于 $\langle \tau',\ i \rangle$ 是激励相容的假设相矛盾。

因此考虑 $T > c_i$ 的情形。在这种情况下，由于 $p_{ij(i')}/p_{ij(i')} > p_{i'j(i')}/p_{ij(i')}$，方程（10）意味着 $c_i > c_{i'}$。

由于 $\langle \tau',\ i \rangle$ 是激励相容的，因此必定存在一个 SOP 支付函数 $t' \in \tau'$，使得 $U_A(i' \mid \tau') = U_A(i' \mid t') \leq U_A(i \mid t') = U_A(i \mid \tau')$。由于 t' 是 SOP，因此必定存在一个结果 j'，满足 $t'_{j'} \geq 0$，而对所有 $j'' \neq j',\ t'_{j''} = 0$ 均成立。

如果 $j' = j(i')$，那么

$$p_{i'j(i')} \cdot \frac{T_i(\tau')}{p_{ij(i')}} - c_{i'} = U_A(i' \mid t') \le U_A(i \mid t') = p_{ij(i')} \cdot \frac{T_i(\tau')}{p_{ij(i')}} - c_i,$$

这与 T 的最小性相矛盾。

否则，$j' \neq j(i')$。在这种情况下，由于 $U_A(i \mid t') \ge U_A(i' \mid t')$ 且 $c_i > c_{i'}$，我们必有 $p_{i'j'}/p_{ij'} < 1$。此外，根据 $j(i')$ 的定义，我们必有 $p_{i'j'}/p_{ij'} \ge p_{i'j(i')}/p_{ij(i')}$。因此

$$T_i(\tau) = \frac{c_i - c_{i'}}{1 - \frac{p_{i'j(i')}}{p_{ij(i')}}} \le \frac{c_i - c_{i'}}{1 - \frac{p_{i'j'}}{p_{ij'}}} \le T_i(\tau'),$$

其中，等式根据 T 的定义成立，第一个不等式利用了 $c_i - c_{i'} > 0$，而最后一个不等式成立是因为 $U_A(i \mid t') \ge U_A(i' \mid t')$。这与我们的假设 $T_i(\tau') < T_i(\tau)$ 相矛盾。

□

D 定理 2 的证明

证明。 定理1保证存在一个模糊合同 $\langle \tau'', i \rangle$，它由 SOP 支付函数 $\tau'' = \{t^1, \dots, t^k\}$ 构成，能够实施行动 i，且期望支付为 $T_i(\tau)$，其中 t^1 和 t^k 按照第 2 点中的规定设定。为证明该结论，只需证明模糊合同 $\langle \tau', i \rangle$ 在 $\tau' = \{t^1, t^k\}$ 的情况下也能实施行动 i。进一步，只需注意到

$$i' < i \implies T_{i'}(\tau'') = \min_{j=1,\dots,k} p_{i'j} \frac{T_i(\tau)}{p_{ij}} \ge p_{i'h} \frac{T_i(\tau)}{p_{ih}} \ge \min_{j=1,k} p_{i'j} \frac{T_i(\tau)}{p_{ij}} = T_{i'}(\tau'), \quad (11)$$

$$i' > i \implies T_{i'}(\tau'') = \min_{j=1,\dots,k} p_{i'j} \frac{T_i(\tau)}{p_{ij}} \ge p_{i'\ell} \frac{T_i(\tau)}{p_{i\ell}} \ge \min_{j=1,k} p_{i'j} \frac{T_i(\tau)}{p_{ij}} = T_{i'}(\tau'). \quad (12)$$

这些陈述中的第一个不等式都由单调似然比性质条件推出。例如，对于式（11），注意到若 $i' < i$，则单调似然比性质条件意味着（由于 $h > j$）$p_{ih} p_{i'j} \ge p_{ij} p_{i'h}$，即可推出该不等式。

□

E 定理4的证明

定理4的证明。 根据构造，模糊合同 $\langle \tau',\ i \rangle$ 具有 $\tau' = \{t^1, t^k\}$是一致的，并且 $T_i(\tau') = T_i(\tau)$，因此第1点得到满足。为证明 $\langle \tau',\ i \rangle$ 具有激励

相容性，注意到由于 $\langle \tau,\ i \rangle$ 实施行动 i，每个行动 $i' \neq i$ 都有一个单调支付函数 $t^{(i')} \in \tau$，使得 $U_A(i' \mid t^{(i')}) \leq U_A(i \mid \tau)$。因此，只需证明每个行动 $i' \neq i$ 都有一个支付函数 $t \in \tau'$，使得$T_{i'}(t) \leq T_{i'}(t^{(i')})$。

对于满足 $i' \neq i$ $c_{i'} \leq c_i$ 的行动，我们声称 $T_{i'}(t^k) \leq T_{i'}(t^{(i')})$。事实上，对于任意这样的行动 i',

$$T_{i'}(t^k) = \sum_{j=1}^{m} p_{i'j} \cdot t_j^k = \sum_{j=h}^{m} p_{i'j} \cdot t_j^k = p_{i'h} \cdot t_h^k,$$

其中我们使用了：对于 $j < h$，有 $t_j^k = 0$；并且根据单调似然比性质条件，对于 $j > h$，有 $p_{i'j} = 0$。代入 $t_h^k = T_i(\tau)/p_{ih}$ 的定义，并利用一致性得到的 $T_i(\tau) = T_i(t^{(i')})$，我们得到

$$T_{i'}(t^k) = p_{i'h} \cdot \frac{T_i(t^{(i')})}{p_{ih}} = p_{i'h} \cdot \frac{\sum_{j\in[m]} p_{ij} \cdot t_j^{(i')}}{p_{ih}} = \sum_{j=1}^{h} \frac{p_{i'h} \cdot p_{ij}}{p_{ih}} \cdot t_j^{(i')},$$

在最后一步中，我们使用了对于 $j > h$ 有 $p_{ij} = 0$ （根据 h 的定义）。

根据单调似然比性质条件，由于 $c_{i'} \leq c_i$，对所有 $j \leq h$:

$$\frac{p_{i'h}}{p_{ih}} \leq \frac{p_{i'j}}{p_{ij}} \Longrightarrow \frac{p_{i'h} \cdot p_{ij}}{p_{ih}} \leq p_{i'j}.$$

利用这一点，我们得到

$$T_{i'}(t^k) \leq \sum_{j=1}^{h} p_{i'j} \cdot t_j^{(i')} = \sum_{j=1}^{m} p_{i'j} \cdot t_j^{(i')} = T_{i'}(t^{(i')}),$$

这里我们再次根据单调似然比性质条件，使用了对于 $j > h$ 有 $p_{i'j} = 0$。

对于满足 $i' \neq i$ such that $c_{i'} > c_i$ we claim that $T_{i'}(t^1) \leq T_{i'}(t^{(i')})$ 的行动，在此情况下，当 $\ell' = \min\{j \in [m] \mid p_{i'j} > 0\}$ 时，行动 i' 在 t^1 下的期望支付为

$$T_{i'}(t^1) = \sum_{j=1}^{m} p_{i'j} \cdot t_j^1 = \sum_{j=\ell'}^{m} p_{i'j} \cdot T_i(\tau) \leq T_i(\tau) = T_i(t^{(i')})$$

完成证明。 □

F 引理 2 的证明

引理 *2* 的证明。 如果 $W = 0$，那么线性合同 $\langle(0, \dots, 0)\ 1\rangle$ 是最优的，并且方程（2）在 $A = \{1\}$ 和 $\alpha_1 = 0$ 下显然成立。因此，假设 $W > 0$。

令 $A \subseteq [n] \setminus \{1\}$ 为如下行动子集： (i) 排除行动 1（空行动）；(ii) 排除无法通过线性合同实施的行动；(iii) 对剩余行动中成本相同的每个子集（若存在），选取一个行动。令 $n' = |A|$。注意，由于 $W > 0$，必有 $A \neq \emptyset$，因此 $1 \leq n' \leq n-1$。根据使 $\langle t, i\rangle = \langle(\alpha r_1, \dots, \alpha r_m)\ i\rangle$ 激励相容的最小 $\alpha \in [0, 1]$，重新标记行动 $i \in A$；令 α_i 表示相应的 α。对于 $i \in A$，序列 $\{R_i\}$、$\{W_i\}$、$\{c_i\}$ 关于 i 严格递增，且 $R_1 > 0$ 和 $c_1 \geq 0$。

注意，对于 $i = 1$，我们有 $\alpha_1 = c_1/R_1$；而对于 $i > 1$，我们有

$$\alpha_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{R_i - R_{i-1}}.$$

使用这一记法，我们有

$$\max_{\langle t,i\rangle \in \mathcal{L}(c,r',p)} U_P(\langle t, i\rangle) = \max_{i \in A} (1 - \alpha_i) R_i.$$

接下来，我们证明最大社会福利的一个上界。注意，

$$W = \max_{i \in A} W_i = W_{n'} = R_{n'} - c_{n'},$$

其中我们用到了福利最高的行动属于 A 中的行动这一事实。该上界由 $(1 - \alpha_i)R_i$ 的一个下界推出，并对所有 $i \in A$ 求和。

对于 $i = 1$，根据 α_1 的定义，我们有 $(1 - \alpha_1)R_1 = (1 - c_1/R_1)R_1 = R_1 - c_1$。对于 $i > 1$，我们再次使用 α_i 的公式，得到

$$(1 - \alpha_i)R_i = \left(1 - \frac{c_i - c_{i-1}}{R_i - R_{i-1}}\right) R_i \geq (R_i - c_i) - (R_{i-1} - c_{i-1}),$$

其中我们还使用了 $R_i/(R_i - R_{i-1}) \geq 1$。

因此，通过裂项求和论证，

$$W = W_{n'} = (R_1 - c_1) + \sum_{i=2}^{n'} \Big((R_i - c_i) - (R_{i-1} - c_{i-1}) \Big) \le \sum_{i=1}^{n'} (1 - \alpha_i) R_i.$$

将此用于下面的不等式，我们即可得到

$$\max_{\langle t,i\rangle \in \mathcal{L}(c,r,p)} U_P(\langle t, i\rangle) = \max_{i \in A} (1 - \alpha_i) R_i \ge \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} (1 - \alpha_i) R_i \ge \frac{1}{n'} W,$$

从而得出结论。 □

下界实例中的 G 经典合同

下面的引理表明，在图 7 所示的实例中，委托人使用经典合同无法获得大于 1 的效用。

引理 3. 设 $n \ge 3$。设 $\gamma, \epsilon \in (0,1)$，且设 $\delta = \epsilon \cdot \gamma^{n-2}$。考虑参数化实例 (c, r, p)，其中包含图 7 所示的 n 个行动。则

$$\max_{\langle t,i\rangle \in \mathcal{C}(c,r,p)} U_p(\langle t, i\rangle) \le 1.$$

证明。 由于 $W_1 \le W_2 \le 1$，因此这些行动无需证明。接下来考虑任意满足 $3 \le i \le n-1$ 的行动 i。假设 $\langle t, i\rangle$ 实现了行动 i。由于行动 i 对结果 1 赋予的概率为零，不失一般性地假设 $t_1 = 0$。我们仅考虑比较行动 i 与行动 $i-1$ 的激励相容约束，从而推导 $T_i(t)$ 的下界。根据这一约束，我们必须有

$$(1 - \gamma^{n-i}) t_2 + \gamma^{n-i} t_3 - c_i \ge (1 - \gamma^{n-i+1}) t_2 + \gamma^{n-i+1} t_3 - c_{i-1}.$$

由于 $(1 - \gamma^{n-i}) < (1 - \gamma^{n-i+1})$ 和 $\gamma^{n-i} > \gamma^{n-i+1}$，我们通过令 $t_2 = 0$ 并求出满足以下条件的最小 t_3，得到期望支付 $T_i(t)$ 的下界：

$$\gamma^{n-i} t_3 - c_i \ge \gamma^{n-i+1} t_3 - c_{i-1}.$$

重新整理并代入 c_i 和 c_{i-1}，可得

$$t_3 \geq \frac{1}{\gamma^{n-i}} \cdot \frac{c_i - c_{i-1}}{1-\gamma} = \frac{1}{\gamma^{n-i}} \left(\frac{1}{\gamma^{i-2}} - 1 \right).$$

因此，行动 i 带给委托人的效用至多为

$$\gamma^{n-i} r_3 - \gamma^{n-i} t_3 \leq \frac{1}{\gamma^{i-2}} - \left(\frac{1}{\gamma^{i-2}} - 1 \right) = 1.$$

接下来考虑行动 n以及任意 IC合同 $\langle t,\ n \rangle$。由于行动 n 发生结果 2 的概率为零，我们不妨假设 $t_2 = 0$。为了得到委托人效用的一个上界，我们沿用之前的方法，但现在除了与行动 $n-1$ 比较之外，还要与行动 1 比较。与行动 1 的比较给出

$$\delta t_1 + (1-\delta) t_3 - c_n \geq t_1,$$

或者等价地

$$t_3 - t_1 \geq \frac{c_n}{1-\delta}.$$

由此可得一个重要结论： $t_3 - t_1 \geq 0$。结合代理人不愿偏离至行动 $n-1$这一事实，我们得到

$$\gamma t_3 - c_{n-1} \leq \delta t_1 + (1-\delta) t_3 - c_n = t_3 - \delta(t_3 - t_1) - c_n \leq t_3 - c_n.$$

重新排列并代入 c_n 和 c_{n-1}，可得

$$t_3 \geq \frac{1}{1-\gamma}(c_n - c_{n-1}) = \frac{1}{\gamma^{n-2}} - 1.$$

因此，行动 n 带给委托人的效用至多为

$$(1-\delta) r_3 - (1-\delta) t_3 \leq 1 - \delta,$$

由此完成证明。 □

H 算法含义

在本节中，我们将展示第3节所规定的最优模糊合同的结构性质具有重要的算法含义。具体而言，这些性质可以为最优模糊合同问题带来多项式时间算法。

定理 7（计算）。 存在一种算法，可在 $O(n^2m)$ 时间内计算出最优模糊合同。如果该实例满足单调似然比性质，则运行时间可缩短至 $O(n^2+m)$。

证明。 我们将说明，对于任意给定的行动 $i\in[n]$，我们可以在 $O(nm)$ 时间内：(1) 判断其是否可由模糊合同实施；(2) 找到能够实施该行动的最优合同 $\langle\tau,\ i\rangle$（若其可实施）。将此算法应用于所有行动 $i\in[n]$，并选出使委托人效用最大的模糊合同，我们便可在 $O(n^2m)$ 时间内找到最优模糊合同。

任取一个行动 $i\in[n]$。根据命题2，如果不存在其他行动 $i\neq i$ 使得 $p_{i'}=p_i$ 且 $c_{i'}<c_i$，那么行动 i 可实施。对于给定的行动 $i'\neq i$，我们可以在 $O(m)$ 时间内检查 $p_{i'}=p_i$ 和 $c_{i'}<c_i$。将此方法应用于所有行动 $i'\neq i$，我们便可在 $O(nm)$ 时间内检验可实施性。

对于每个可实施的行动 $i\in[n]$，我们都可以根据命题3确定一个最优模糊合同。注意，我们可以在 $O(nm)$时间内确定集合 A（只需遍历所有行动 $i'\neq i$ 并检查 $p_{i'}\neq p_i$是否成立）。如果$A=\emptyset$，那么最优模糊合同为 $\langle(0,\dots,0)\ i\rangle$，输出该合同需要 $O(1)$时间。另一方面，如果 $A\neq\emptyset$，那么对于 A 中至多 $n-1$ 个行动，我们可以在 $O(m)$时间内确定最大似然比结果$j(i')$。然后，我们可以在 $O(1)$时间内计算行动 i'对 T 的贡献。因此，我们可以在 $T(O)$时间内计算所有 $i'\in A$ 的最大似然比结果。输出命题3中针对这种情况所述的最优模糊合同需要 $O(nm)$时间。由此可知，我们可以在 $O(nm)$时间内确定行动 i 对应的最优模糊合同。

MLRP 实例运行时间的改进，源于对这类实例的最优模糊合同有更强的刻画（定理 2）。根据这一刻画，要找到实现行动 i 的最优模糊合同 $\langle\tau,i\rangle$（如果存在），我们可以先确定索引（ℓ_i,h_i）（定义见要点 2）。然后，对于每个满足 $c_{i'}\le c_i$ 的行动 $i'\neq i$，我们可以找到结果 h_i 上的最低支付，使代理人更愿意选择行动 i 而非行动 i'；而对于满足以下条件的行动

$i' \neq i$ ，满足 $c_{i'} > c_i$ 的行动，我们可以对结果 ℓ_i 做同样的处理，而不是对结果 h_i进行处理。对所有行动 $i \in [n]$ 应用这一过程后，我们便得到一个算法，可用于寻找最优模糊合同；在已知索引（ℓ_i, h_i）的情况下，该算法的运行时间为 $O(n^2)$。证明至此完成，只需注意到，对于 MLRP 实例，这些索引关于成本是单调（非递减）的，因此可以在 $O(n+m)$ 时间内预先计算。

□

值得注意的是，利用与证明定理 7 时相似的思路，可以证明，对于单调合同，存在一种算法，能够在 $O(n^2 m)$ 时间内计算出最优模糊合同。如果该实例满足单调似然比性质，那么运行时间可缩短至 $O(n^2 + m)$。