arXiv:2302.07651v1 [math.DG] 15 Feb 2023

空间形式中毛细边界超曲面的受约束平均曲率型流

XINQUN MEI 和 LIANGJUN WENG

摘要。本文为空间形式中的毛细边界超曲面引入了一种新的受约束平均曲率型流。我们证明该流在所有时间上均存在，并且全局收敛到一个球冠。此外，该流保持超曲面所围成的有界区域的体积不变，并使总能量递减。作为推论，我们用流方法证明了空间形式中星形毛细边界超曲面的毛细等周不等式。

1. 引言

设 $M^{n+1}(K)$为截面曲率为 K的完备单连通黎曼流形。经过伸缩变换，我们不妨设 $K=-1,\ 0,\ +1$。情形 $K=0$, $M^{n+1}(K)$就是欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$。若 $K=-1$, $M^{n+1}(K)$，则为双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$，我们对 $\mathbb{H}^{n+1}$采用庞加莱球模型，其定义为 $\left(\mathbb{B}^{n+1},\ \bar{g}_{\mathbb{H}}\right)$，其中

$$\mathbb{B}^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|<1\},\quad \bar{g}_{\mathbb{H}}=e^{2u}\delta_{\mathbb{B}^{n+1}}:=\frac{4}{(1-|x|^2)^2}|dx|^2.$$

令 $B_R^{\mathbb{H}}$ 为 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的测地球，其双曲半径为 $R\in(0,\ +\infty)$。利用 $\mathbb{H}^{n+1}$的等距变换，可将 $B_R^{\mathbb{H}}$ 视为半径为

$$r_0:=\sqrt{\frac{\cosh R-1}{\cosh R+1}}\in(0,1),$$

的欧几里得球，它位于具有双曲度量 $\bar{g}_{\mathbb{H}}$的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中。若 $K=1,\ M^{n+1}(K)$是球面空间形式 $\mathbb{S}^{n+1}$，并且我们使用该模型

$$(\mathbb{R}^{n+1},\bar{g}_{\mathbb{S}}),\quad \bar{g}_{\mathbb{S}}=e^{2v}\delta_{\mathbb{R}^{n+1}}:=\frac{4}{(1+|x|^2)^2}|dx|^2.$$

来表示 $\mathbb{S}^{n+1}\setminus\{\mathcal{S}\}$，即去掉南极的单位球。令 $B_R^{\mathbb{S}}$ 为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中以北极为中心、半径为 $R\in(0,\ \pi)$的测地球。与双曲空间类似，可将 $B_R^{\mathbb{S}}$ 视为半径为

$$r_0:=\sqrt{\frac{1-\cos R}{1+\cos R}}\in(0,\infty).$$

配备球面度量 $\bar{g}_{\mathbb{S}}$。为简洁起见且不致引起歧义，在本文余下部分，我们统一用 $\bar{g}$ 表示度量 $\bar{g}_{\mathbb{H}}$ 或 $\bar{g}_{\mathbb{S}}$，用 B_R 表示在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的测地球 $B_R^{\mathbb{H}}$ 或在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的测地球 $B_R^{\mathbb{S}}$，其测地半径为 R。

2020 数学学科分类。主要分类号 53C44，次要分类号 35K93。关键词和短语。平均曲率型流、空间形式、毛细边界、毛细等周不等式。

对于一个常单位向量 $a \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$，令 X_a 为 $M^{n+1}(K)$ $(K=-1,\ +1)$ 中的向量场，定义如下：

$$X_a := \frac{2}{1+Kr_0^2}\left[\langle x,a\rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2+r_0^2)a\right],$$

$\langle,\rangle$ 表示欧几里得度量。Wang-Xia 曾指出 [23, 命题 4.1]满足 X_a 是一个共形 Killing 向量场，且满足

$$L_{X_a}\bar{g} = V_a\bar{g},$$

其中

$$V_a := \frac{2\langle x,a\rangle}{1+K|x|^2}.$$

此外，X_a 满足 $\bar{g}(X_a,\ N) = 0$ 于 ∂B_R 上，其中 N 是沿着 ∂B_R 的单位法向量。根据 X_a 的这些性质，Wang-Xia [23, 命题 4.4] 在空间形式中得到了一个新的闵可夫斯基公式。也就是说，对于一个边界为 $\partial\Sigma \subset \partial B_R$ 的超曲面 $\Sigma \subset B_R$，若 $\partial\Sigma$ 以恒定接触角$\theta \in (0,\ \pi)$与 ∂B_R 相交，则在 $\mathbb{H}^{n+1}$中，有

$$\int_\Sigma n\left(V_a + \sinh R\cos\theta\bar{g}(Y_a,\nu)\right)dA = \int_\Sigma H\bar{g}(X_a,\nu)dA, \tag{1.1}$$

分别在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中，

$$\int_\Sigma n\left(V_a + \sin R\cos\theta\bar{g}(Y_a,\nu)\right)dA = \int_\Sigma H\bar{g}(X_a,\nu)dA, \tag{1.2}$$

其中 $H\nu$是 Σ的平均曲率向量，且 $Y_a := \frac{1}{2}(1-K|x^2|)a + K\langle x,a\rangle x$。

本文考虑一种新的平均曲率流，用于空间形式中的测地球内支撑的毛细边界超曲面（定义见第2.1 节） $M^{n+1}(K)$，其中 $K=-1$ 和 $K=1$；而 $K=0$ 的情形此前分别由 [21, 22] 研究。这类局部约束曲率流最初由 Guan-Li [4]用于空间形式中的闭超曲面，其研究动机来自闵可夫斯基公式。关于更一般的设定，另见 [5, 6, 7, 8, 13, 20] 及其中的参考文献，这些设定涵盖双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 和球面空间 $\mathbb{S}^{n+1}$。

近年来，研究具有非空边界的超曲面流受到广泛关注，尤其是因为它们与几何不等式密切相关。例如，[19, 22], 和 [16, 21, 24] 研究了欧几里得空间中自由边界超曲面以及毛细边界超曲面的一类新型约束曲率流。随后，在证明这些流的长时间存在性和收敛性后，得到了新的一类 Alexandrov-Fenchel 不等式。关于欧几里得球中自由边界超曲面的逆平均曲率流及其在几何不等式中的应用，可参阅 [11, 12]。

因此，除了欧几里得空间之外，自然也会想到在一般的环境空间（例如空间形式）中提出同样的问题。更确切地说，设 Σ_t 是由一族等距嵌入给出的 中带边界的超曲面族 B_R

$x(\cdot,\ t)$: $M \to B_R$ 来自紧致的 n 维流形 M，其边界为 $\partial M(n \geq 2)$，满足

$$\operatorname{int}(\Sigma_t) = x\left(\operatorname{int}(M), t\right) \subset B_R, \quad \partial\Sigma_t = x(\partial M, t) \subset \partial B_R.$$

并且 $x(\cdot,\ t)$ 满足

$$\begin{cases} (\partial_t x)^{\perp}(\cdot,t) = F(\cdot,t)\nu(\cdot,t), & \text{in } M \times [0,T), \\ \bar{g}(\nu(\cdot,t), \bar{N} \circ x(\cdot,t)) = -\cos\theta & \text{on } \partial M \times [0,T), \\ x(\cdot,0) = x_0(\cdot) & \text{in } M, \end{cases} \tag{1.3}$$

在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的情形下，我们将（1.3）中的速度函数选为

$$F := nV_a + n\sinh R\cos\theta\bar{g}(Y_a,\nu) - H\bar{g}(X_a,\nu). \tag{1.4}$$

在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的情形下，我们将（1.3）中的速度函数选为

$$F := nV_a + n\sin R\cos\theta\bar{g}(Y_a,\nu) - H\bar{g}(X_a,\nu). \tag{1.5}$$

这类流分别由闵可夫斯基公式（1.1）和（1.2）所启发。速度函数 F 选为（1.4）或（1.5），以确保围成的体积 $\Sigma_t \subset B_R$ 在流（1.3）下保持不变，同时总能量泛函（1.8）单调递减。我们将在后文讨论这一点。

定义 1.1。我们称 $\Sigma \subset \bar{B}_R \subset M^{n+1}(K)$ 关于 a 是星形的，当且仅当$\bar{g}(X_a,\ \nu) > 0$ 沿着 Σ。

本文的主要结果如下定理所示。

定理 1.2。若初始超曲面 Σ_0 是空间形式中的星形毛细边界超曲面 $M^{n+1}(K)$ 且接触角满足 $|\cos\theta| < \frac{3n+1}{5n-1}$，则流 (1.3) 存在于所有时间。进一步，$x(\cdot,\ t)$ 在 C^{∞} 拓扑下收敛到一个球冠，当 $t \to \infty$时，其所围区域的体积与 Σ_0所围区域的体积相同。

球冠族由半径为 r 的测地球以及双曲空间或球空间中的全测地球给出，这些球可视为赋予度量 r 的欧氏集合。

$$C_{\theta,r}(a) := \left\{ x \in B_R : \left| x - \sqrt{r^2 + 2rr_0\cos\theta + r_0^2}a \right| = r \right\}, \tag{1.6}$$

and

$$C_{\theta,\infty}(a) := \{x \in B_R : \langle x, a\rangle = \cos\theta\}, \tag{1.7}$$

并赋予度量 $\bar{g}$。

特别地，当 $K = 0$ 或 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 且 $K = -1$时，定理 1.2 分别在 [21]和 [17]中得到了证明。对于接触角范围 $|\cos\theta| < \frac{3n-1}{5n-1}$，我们还需要满足 [21], 中的技术限制，这对于我们在空间形式中获得一致梯度估计至关重要，见第 3 节。然而，我们预期该结果在空间形式中的整个 $\theta \in (0,\pi)$ 范围内均成立。

值得注意的是，[1, 2], 研究了欧几里得球内边界非空的超曲面的等周不等式，并证明了

在所围区域 Ω 体积固定的超曲面中，球冠是面积泛函的极小者 Σ。与仅考虑面积泛函不同，考虑总能量泛函也很有意义，即

$$E(\Sigma) := \mathrm{Area}(\Sigma) - \cos\theta \mathrm{Area}(T) \tag{1.8}$$

接触角为 $\theta \in (0, \pi)$。第二项 $T := \partial\Omega \setminus \Sigma$ 在毛细作用理论中称为 $\partial\Omega$ 的润湿部分，参见 [3]例如。

此外，将定理 1.2 与我们关于 $k = 2$ 的高阶Minkowski公式（2.4）和（2.8）相结合，我们利用流方法证明了空间形式中关于（1.8）的毛细等周不等式，这也可视为 [21,定理 1.1]或 [15, 第 19]章

推论 1.3. 在测地球 $\bar{B}_R \subset M^{n+1}(K)$ 中，对于 $K = \pm 1$，在所围区域体积固定的星形毛细边界超曲面中，球冠是总能量 (1.8)的唯一极小化子，前提是接触角 θ 满足 $|\cos\theta| < \frac{3n+1}{5n-1}$。

证明。对于 $K = -1$，沿着流（1.3），其中 F 为（1.4），利用（2.2）和（1.1，可知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\Omega_t) &= \int_{\Sigma_t} [nV_a + n\sinh R\cos\theta \bar{g}(Y_a, \nu) - H\bar{g}(X_a, \nu)]\, dA_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

注意到 $\partial_t x\big|_{\partial M} \in T(\partial B_R^{\mathbb{H}})$，结合（2.3）和（2.4）以及 $k = 2$，可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\Sigma_t) &= \int_{\Sigma_t} H\left[nV_a + n\sinh R\cos\theta \bar{g}(Y_a, \nu) - H\bar{g}(X_a, \nu)\right] dA_t \\ &= \int_{\Sigma_t} (\frac{2n}{n-1}\sigma_2 - H^2)\bar{g}(X_a, \nu) dA_t \\ &= -\frac{1}{n-1}\int_{\Sigma_t} \sum_{1\le i<j\le n} (\kappa_i - \kappa_j)^2 \bar{g}(X_a, \nu) dA_t \le 0. \end{aligned}$$

对于 $K = 1$，证明与上文类似。因此，推论 1.3 可由定理1.2直接得到。□

本文结构如下。 第 2 节介绍空间形式测地球内支撑的毛细边界超曲面的一些预备知识，并分别证明双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 和球面空间 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的高阶 Minkowski 型公式。随后，我们借助共形变换将流（1.3）转化为半球面上的标量抛物方程。最后，第 3 节致力于获得一致先验估计并证明定理1.2。

2. 预备知识

本节第一部分中，我们汇集了关于支撑于空间形式测地球内的毛细边界超曲面的一些基本事实，并建立了

闵可夫斯基公式，可视为（1.1）和（1.2）的高阶对应形式。在第二部分中，如果演化超曲面按照定义 1.1 的意义是星形的，我们便将（1.3）化为一个标量流。

¯2.1. **空间形式中的毛细边界超曲面**。令 $x : M \to B_R$为一个可定向的 n维紧流形 M（其边界 ∂M光滑）的等距嵌入，记 $\Sigma := x(M)$和 $\partial\Sigma := x(\partial M)$，满足 int(Σ) ⊂int($B_R$)和 $\partial\Sigma \subset \partial B_R$。若无歧义，我们将 M 与 Σ 等同，并将 ∂M 与 $\partial\Sigma$等同。分别用 ∇、 D 表示(B_R、 $\bar{g}$)和(Σ、 g)的列维-奇维塔联络，其中 g 是由嵌入 x诱导的度量。

Σ 将球 B_R 分成两部分，我们用 Ω 表示其中一部分，并令 ν 为 Σ 相对于 Ω 的单位外法向量， $T := \partial\Omega \cap \partial B_R$ 为 $\partial\Omega$ 的润湿部分。令 μ 为沿 $\partial\Sigma \subset \Sigma$ 的单位外余法向量场，并令 $\bar{\nu}$ 为垂直于 $\partial\Sigma \subset \partial B_R$的单位¯法向量，使得 $\{\nu, \mu\}$ 和 $\{\bar{\nu}, N\}$ 在 $\partial\Sigma \subset B_R$的法丛中具有相同的定向。分别用 h 和 σ_k 表示浸入 x 的第二基本形式和 k-¯阶平均曲率，具体而言， $h(X, Y) := \bar{g}(\nabla_X \nu, Y)$以及 $\sigma_k := \sigma_k(\kappa)$，其中 X、 $Y \in T\Sigma$和 $\kappa := (\kappa_1, \cdots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n$是魏因加滕矩阵($h_i^j$)的特征值。我们将超曲面 Σ 与测地球 B_R 之间的接触角 $\theta \in (0, \pi)$定义为

$$\bar{g}(\nu, \bar{N}) = \cos(\pi - \theta), \quad \text{on } \partial\Sigma.$$

（例如，参见情形 $\mathbb{H}^{n+1}$ 下的图 1。）我们将这样的超曲面 Σ 称为毛细边界超曲面。特别地，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，它被称为自由边界超曲面。此外,– 由此可得

$$\begin{aligned} \mu &= \sin\theta \bar{N} + \cos\theta \bar{\nu}, \\ \nu &= -\cos\theta \bar{N} + \sin\theta \bar{\nu}. \end{aligned}$$

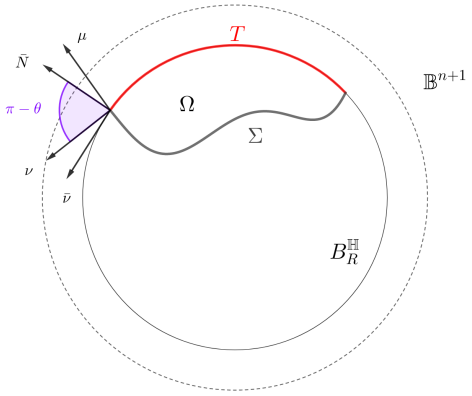

图 1. 双曲空间中的毛细边界超曲面 Σ

所谓的润湿能 $W(\Sigma)$ 就是区域 T 的面积，该区域由 $\partial\Sigma$ 在 ∂B_R 上围成。总能量泛函定义为

$$E(\Sigma) := \mathrm{Area}(\Sigma) - \cos\theta\, W(\Sigma). \tag{2.1}$$

为了证明总能量泛函的单调性 E 沿着我们的流（1.3），考虑 Σ 的一个可容许变分: $= x(M)$，其形式为 x_t : _ _$M \times (-\varepsilon,$ $\varepsilon) \to B_R$ 满足 $x_t(\cdot)$: $= x(\cdot,\ t)$: $M \to B_R$ 是一个浸入，且

$$\mathrm{int}(\Sigma_t) \subset B_R, \quad \text{and} \quad \partial\Sigma_t \subset \partial B_R,$$

¯其中 $\Sigma_t := x(M,\ t)$。记 Ω_t 为 B_R 中由 Σ_t 所围成的区域。

令 Y:=$\frac{\partial}{\partial t}x(\cdot,\ t)\big|_{t=0}$ 为与 x_t 相关的变分向量场，则 $\mathrm{Vol}(\Omega_t)$ 和 $E(\Sigma_t)$ 的第一变分公式已知为（参见 [18, 第 4]节）

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(\Omega_t) = \int_M \bar{g}(Y,\nu)dA, \tag{2.2}$$

and

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}E(\Sigma_t) = \int_M H\bar{g}(Y,\nu)dA + \int_{\partial M}\bar{g}(Y,\mu - \cos\theta\bar{\nu})ds, \tag{2.3}$$

其中，dA 和 ds 分别是 M 和 ∂M 的面积元。

由于闵可夫斯基公式对于空间形式中的闭超曲面发挥着重要作用，参见 [4, 5, 6] 等。在下文中，我们首先为支撑于空间形式中测地球内的毛细边界超曲面建立一个新的闵可夫斯基公式 $M^{n+1}(K)$，其中 $K = \pm 1$。而情形 $K = 0$ 最近已由 Weng-Xia 在 [24, 命题 28]中证明。对于 $K = \pm 1$，这也可能具有独立意义，$k = 2$ 因为本文仅使用（2.4）和（2.8）的特殊情形来证明总能量泛函（2.1）的单调性，这一点已在推论 1.3的证明中指出。

命题 2.1。设 $x: M \to B_R^{\mathbb{H}}$ 是从 $\Sigma := x(M)$到双曲球 $B_R^{\mathbb{H}}$的等距浸入，其边界 $\partial\Sigma$ 与 $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ 以恒定角$\theta \in (0,\pi)$相交，则有

$$(n-k+1)\int_\Sigma \left[\sigma_{k-1}V_a + \sinh R\cos\theta\sigma_{k-1}\bar{g}(Y_a,\nu)\right]dA = k\int_\Sigma \sigma_k\bar{g}(X_a,\nu)dA. \tag{2.4}$$

特别地，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，_公式 (2.4) 已由 Wang-Xia 证明 [23, 命题 5。1]。为完整起见，我们在此给出一般情形 θ的证明。

证明。设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 Σ上的一个标准正交标架，由 [23, 方程 (4.7)],可得 e

$$\frac{1}{2}(D_i(X_a^T)_j + D_j(X_a^T)_i) = V_a\bar{g}_{ij} - h_{ij}\bar{g}(X_a,\nu),$$

其中 X_a^T是 Σ上 X_a 的切向投影。令

$$Z_a := \bar{g}(\nu, e^{-u}a)x - \bar{g}(x,\nu)(e^{-u}a).$$

已知 x 是一个共形 Killing 向量 [4, 引理 2.1], 满足

$$\bar{\nabla}x = V_0\bar{g}, \tag{2.5}$$

其中 $V_0 := $ 双曲余弦 $R = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}$ 且 $R := R(x)$ 是到原点的双曲距离。根据 [23, 命题 4。3],

$$\bar{\nabla}_Z(e^{-u}a) = e^{-u}\left[\bar{g}(x, e^{-u}a)Z - \bar{g}(Z, e^{-u}a)x\right], \tag{2.6}$$

对于任意 $Z \in T\Sigma$。利用（2.5）和（2.6），可得

$$\begin{aligned} D_i(\bar{g}(\nu, e^{-u}a)x^T)_j &= e^{-u}h_{ik}\bar{g}(e_k, a)\bar{g}(x, e_j) - e^{-u}\bar{g}(e_i, e^{-u}a)\bar{g}(x, e_j)\bar{g}(\nu, x) \\ &\quad + \bar{g}(\nu, e^{-u}a)\left[V_0\bar{g}_{ij} - h_{ij}\bar{g}(x, \nu)\right], \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} D_i(\bar{g}(x, \nu)(e^{-u}a)^T)_j &= e^{-u}h_{ik}\bar{g}(x, e_k)\bar{g}(a, e_j) + \bar{g}(x, \nu)\big[e^{-u}\big(\bar{g}(x, e^{-u}a)\bar{g}_{ij} \\ &\quad - \bar{g}(e_i, e^{-u}a)\bar{g}(x, e_j)\big) - h_{ij}\bar{g}(e^{-u}a, \nu)\big]. \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\bar{g}(Z_a^T, \mu)|_{\partial\Sigma} = r_0\bar{g}(\bar{\nu}, a),$$

and

$$\bar{g}(X_a^T, \mu)|_{\partial\Sigma} = -\frac{2r_0^2}{1-r_0^2}\cos\theta\bar{g}(a, \bar{\nu}),$$

结合 $\sinh R = \frac{2r_0}{1-r_0^2}$，可得——

$$\bar{g}(X_a^T + \sinh R\cos\theta Z_a^T, \mu)|_{\partial\Sigma} = 0. \tag{2.7}$$

记 $\sigma_{k-1}^{ij} := \frac{\partial\sigma_k}{\partial h_j^i}$ 为第 k 个Newton变换，注意到

$$\begin{aligned} V_0\bar{g}(\nu, e^{-u}a) - e^{-u}\bar{g}(x, \nu)\bar{g}(x, e^{-u}a) &= \bar{g}\left(\nu, \frac{1}{2}(|x|^2+1)a - \langle x, a\rangle x\right) \\ &= \bar{g}(\nu, Y_a), \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} &\sigma_{k-1}^{ij}D_i(X_a^T + \sinh R\cos\theta Z_a^T)_j \\ =\ & (n-k+1)\sigma_{k-1}V_a - k\sigma_k\bar{g}(X_a, \nu) + \sinh R\cos\theta\bar{g}(\nu, e^{-u}a)V_0\sigma_{k-1}^{ij}\bar{g}_{ij} \\ & - \sinh R\cos\theta e^{-u}\bar{g}(x, \nu)\bar{g}(x, e^{-u}a)\sigma_{k-1}^{ij}\bar{g}_{ij} \\ =\ & (n-k+1)\sigma_{k-1}V_a - k\sigma_k\bar{g}(X_a, \nu) + (n-k+1)\sinh R\cos\theta\sigma_{k-1}\big[V_0\bar{g}(\nu, e^{-u}a) \\ & - e^{-u}\bar{g}(x, \nu)\bar{g}(x, e^{-u}a)\big] \\ =\ & (n-k+1)\sigma_{k-1}V_a - k\sigma_k\bar{g}(X_a, \nu) + (n-k+1)\sinh R\cos\theta\sigma_{k-1}\bar{g}(Y_a, \nu), \end{aligned}$$

在 Σ 上对上述恒等式积分，并利用散度定理，可得

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \left[(n-k+1)\sigma_{k-1}V_a + (n-k+1)\sinh R\cos\theta\sigma_{k-1}\bar{g}(Y_a, \nu) - k\sigma_k\bar{g}(X_a, \nu)\right]dA \\ =\ & \int_\Sigma \sigma_{k-1}^{ij}D_i(X_a^T + \sinh R\cos\theta Z_a^T)_j dA = \int_\Sigma D_i\left(\sigma_{k-1}^{ij}\bar{g}(X_a^T + \sinh R\cos\theta Z_a^T, e_j)\right)dA \\ =\ & \int_{\partial\Sigma} \sigma_{k-1}^{ij}\bar{g}(X_a^T + \sinh R\cos\theta Z_a^T, e_j)\bar{g}(\mu, e_i)ds = \int_{\partial\Sigma}\sigma_{k-1}^{\mu\mu}\bar{g}(X_a^T + \sinh R\cos\theta Z_a^T, \mu)ds = 0, \end{aligned}$$

其中最后一行是由于 μ 是 $\partial\Sigma \subset \Sigma$ 的主方向（参见 [23,) 命题 2。1]）和（2.7）。至此，我们完成了命题2.1的证明。 □

除 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的情形外，我们得到了支撑于球面空间 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中测地球内的毛细边界超曲面所对应的闵可夫斯基公式。

命题 2.2。 设 $x : M \to B_R^{\mathbb{S}}$ 是从 $\Sigma := x(M)$ 到球 $B_R^{\mathbb{S}}$ 中的一个等距浸入，其边界 $\partial\Sigma$ 与 $\partial B_R^{\mathbb{S}}$ 相交，且交角为恒定角 $\theta \in (0, \pi)$，则有

$$\int_\Sigma [(n-k+1)\sigma_{k-1}V_a + (n-k+1)\sin R\cos\theta\sigma_{k-1}\bar{g}(Y_a,\nu)]\,dA = k\int_\Sigma \sigma_k\bar{g}(X_a,\nu)dA \quad (2.8)$$

证明与命题 2.1的证明类似，留给感兴趣的读者。

2.2. **标量方程**。 本节首先将流（1.3）化为$^-$上一个标量方程，其中演化的超曲面按定义 1.1的意义为星形。一般性不失，以下设 $a := -e_{n+1} = (0, \cdots, 0, -1)$，并设半空间

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{x | x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}.$$

我们使用极坐标 $(\rho, \beta, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}^{n-1}$中的坐标，于是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$中的标准欧几里得度量形式为

$$|dz|^2 = d\rho^2 + \rho^2 g_{\mathbb{S}^n_+} = d\rho^2 + \rho^2(d\beta^2 + \sin^2\beta g_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

令 f 为从单位球到半空间的共形微分同胚（参见 [21,第 3 节2] 或 [17, 23]），定义为

$$\begin{aligned} f : \quad \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ &\to \bar{\mathbb{B}}^{n+1}, \\ (z', z_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{2z'}{|z'|^2 + (1+z_{n+1})^2}, \frac{|z|^2 - 1}{|z'|^2 + (1+z_{n+1})^2}\right) := (y', y_{n+1}). \end{aligned}$$

其中 $z' := (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$， $y' := (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$。定义

$$\phi(y) = r_0 y := x,$$

它将 $\bar{\mathbb{B}}^{n+1}$ 映射到 $\bar{B}_{r_0}$。于是映射 $\bar{f} := \phi \circ f : \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ \to \bar{B}_{r_0}$ 满足

$$\bar{f}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = B_{r_0}, \quad \bar{f}(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+) = \partial B_{r_0}.$$

$\bar{f}$是从（$\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$， $\delta_{\mathbb{R}^{n+1}_+} := |dz|^2$）到（$\bar{B}_{r_0}$， $\bar{g}_{\mathbb{H}} = \quad ^4(1-|x|^2)_2|dx|^2$）或（$\bar{B}_{r_0}$， $\bar{g}_{\mathbb{S}} = \quad ^4(1+|x|^2)_2|dx|^2$）的共形变换（参见 [17, 命题 2.1]），并且

$$\bar{f}^*\bar{g}_{\mathbb{H}} = e^{2U}|dz|^2, \qquad \bar{f}^*\bar{g}_{\mathbb{S}} = e^{2V}|dz|^2,$$

其中

$$e^U := \frac{4r_0}{(1-r_0^2)(1+|z|^2) + 2(1+r_0^2)z_{n+1}},$$

and

$$e^V := \frac{4r_0}{(1+r_0^2)(1+|z|^2) + 2(1-r_0^2)z_{n+1}}.$$

设 $\Sigma\subset B_{r_0}$ 为一个具有毛细管边界的适当嵌入紧致超曲面，由嵌入 $x:\ \mathbb{S}^n_+\to B_{r_0}$ 给出。我们将 Σ 与相应的超曲面 $\widehat{\Sigma}\subset\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$关联，该超曲面由嵌入给出

$$\widehat{x}=\bar{f}^{-1}\circ x:\ \bar{\mathbb{S}}^n_+\to\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+.$$

由于 $(\bar{B}_{r_0},\bar{g})$ 和 $(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+,e^{2U}|dz|^2)$ 或 $(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+,e^{2V}|dz|^2)$ 等距，因此 $x:\bar{\mathbb{S}}^n_+\to\bar{B}_{r_0}$可视为嵌入 $\bar{x}:\bar{\mathbb{S}}^n_+\to(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+,e^{2U}|dz|^2)$ 或 $(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+,e^{2V}|dz|^2)$。

容易验证，$\widehat{X}_a:=(\bar{f}^{-1})_*(X_a)=\frac{2r_0}{1+Kr_0^2}(\rho\partial_\rho)$，因此，超曲面 $\widehat{\Sigma}\subset(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+,e^{2U}|dz|^2)$ 或 $(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+,e^{2V}|dz|^2)$ 关于原点是星形的（经典意义下），当且仅当 $\Sigma\subset(\bar{B}_{r_0},\bar{g})\subset M^{n+1}(-1)$ 或 $\Sigma\subset(\bar{B}_{r_0},\bar{g})\subset M^{n+1}(+1)$ 关于 $a\in\mathbb{S}^n$ 是星形的。于是存在定义在 $\mathbb{S}^n_+$ 上的某个正函数 $\rho(y)$，使得

$$\widehat{x}=\rho(y)y=\rho(\beta,\theta)y,\quad y:=(\beta,\theta)\in[0,\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{S}^{n-1}.$$

我们分别用 div ∇ 表示散度算子，用 $\mathbb{S}^n_+$ 上的协变导数表示，并用 $\mathbb{S}^n_+$ 上的标准球面度量 σ 表示。令 $u:=\log\rho$ 和 $v:=\sqrt{1+|\nabla u|^2}$。对于 $\mathbb{H}^{n+1}$ 和 $\mathbb{S}^{n+1}$，分别有以下恒等式。

命题 2.3. 在 $\mathbb{H}^{n+1}$中的测地球 $B^{\mathbb{H}}_R$ 内，有

(1) $\bar{g}(X_a,\ \nu)=e^U\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{\rho}{v}$。(2) $V_a=\frac{2r_0(1-\rho^2)}{(1-r_0^2)(\rho^2+1)+2(1+r_0^2)\rho\cos\beta}$。(3) $\widehat{\Sigma}$在$(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+,\ e^{2U}|dz|^2)$中的平均曲率 $\widetilde{H}$为

$$\begin{aligned}\widetilde{H}\ &=\ -\Bigg[\frac{1}{\rho ve^U}\sum_{i,j=1}^n(\sigma^{ij}-\frac{u^iu^j}{v^2})u_{ij}+\frac{1+r_0^2}{2r_0}\frac{n\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u}{v}\\&\quad+\frac{n(\rho^2-1)(1-r_0^2)}{4r_0\rho v}\Bigg].\end{aligned}$$

(4) $\bar{g}(Y_a,\ \nu)=-\frac{r_0\rho e^U}{v}+\frac{r_0^2-1}{2r_0}\frac{e^U}{2v}\left(\rho^2\cos\beta+2\rho+\cos\beta-(\rho^2-1)\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right).$

证明。(1)-(3)已在 [17, 命题 2 中证明。2]。我们只需证明 (4)。注意，

$$\begin{aligned}\widehat{e}_{n+1}:\ &=\ (\bar{f}^{-1})_*(e_{n+1})\\&=\ \sum_{i=1}^n\frac{\partial z_i}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial}{\partial z_{n+1}}\\&=\ \frac{1+z_{n+1}}{r_0}\sum_{i=1}^n z_i\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{(1+z_{n+1})^2-|z|^2}{2r_0}\frac{\partial}{\partial z_{n+1}}\\&=\ \frac{1}{r_0}\rho\cos\beta(\rho\sin^2\beta\partial_\rho+\frac{\sin\beta}{2}\partial_\beta)+\frac{1+\rho^2\cos2\beta}{2r_0}(\cos\beta\partial_\rho-\frac{\sin\beta}{\rho}\partial_\beta)+\frac{1}{r_0}\rho\partial_\rho\\&=\ \frac{\rho^2\cos\beta+2\rho+\cos\beta}{2r_0}\partial_\rho+\frac{(\rho^2-1)\sin\beta}{2r_0\rho}\partial_\beta,\end{aligned}$$

且 $\widehat{\Sigma} \subset (\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_{+}, e^{2U}|dz|^2)$ 的单位法向量为

$$\widehat{\nu} := (\bar{f}^{-1})_*(\nu) = e^{-U}\frac{\partial_\rho - \rho^{-1}\nabla u}{v},$$

根据定义 X_a 和 Y_a，我们有

$$Y_a = \frac{r_0^2-1}{2}e_{n+1} - \frac{1-r_0^2}{2}X_a.$$

因此可得

$$\begin{aligned}\bar{g}(Y_a,\nu) &= \bar{g}(\frac{r_0^2-1}{2}e_{n+1} - \frac{1-r_0^2}{2}X_a, \nu)\\ &= \bar{f}^*\bar{g}(\frac{r_0^2-1}{2}\widehat{e}_{n+1} - \frac{1-r_0^2}{2}\widehat{X}_a, \widehat{\nu})\\ &= -\frac{r_0\rho e^U}{v} + \frac{(r_0^2-1)e^U}{2r_0}\left(\frac{\rho^2\cos\beta + 2\rho + \cos\beta}{2v} - \frac{(\rho^2-1)\sin\beta}{2v}\nabla_{\partial_\beta}u\right).\end{aligned}$$

□

同理，在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的情形下。

命题 2.4. 在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的测地球 $B^{\mathbb{S}}_R$ 中，有

(1) $\bar{g}(X_a,\nu) = e^V\frac{2r_0}{1+r_0^2}\frac{\rho}{v}$.(2) $V_a = \frac{2r_0(1-\rho^2)(}{1+r_0^2)(\rho^2+1)+2(1-r_0^2)\rho\text{余弦}\beta}$.(3) $\widehat{\Sigma}$ 在 $(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_{+}, e^{2V}|dz|^2)$ 中的平均曲率 $\widetilde{H}$ 为

$$\begin{aligned}\widetilde{H} &= -\left[\frac{1}{\rho v e^V}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma^{ij} - \frac{u^iu^j}{v^2})u_{ij} + \frac{1-r_0^2}{2r_0}\frac{n\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u}{v}\right.\\ &\quad\left. + \frac{n(\rho^2-1)(1+r_0^2)}{4r_0\rho v}\right].\end{aligned}$$

(4) $\bar{g}(Y_a,\nu) = \frac{r_0\rho e^V}{v} - \frac{r_0^2+1}{2r_0}\frac{e^V}{2v}\left(\rho^2\cos\beta + 2\rho + \cos\beta - (\rho^2-1)\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right)$.

命题2.4 的证明与命题2.3类似，这里省略。

借助命题2.3 和2.4，按照 [21, 第 3 节3], 中的论证，我们可以将式（1.3）中的第一个方程化简为以下标量方程

$$\partial_t u = \frac{v}{\rho e^U}\widehat{F}. \tag{2.9}$$

此外，在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的情况下，

$$\begin{aligned}\widehat{F} &:= nV_a + n\sinh R\cos\theta\bar{g}(Y_a,\nu) - \widetilde{H}\bar{g}(X_a,\nu)\\ &= \frac{2nr_0(1-\rho^2)}{(1-r_0^2)(1+\rho^2)+2(1+r_0^2)\rho\cos\beta}\frac{|\nabla u|^2}{v^2} - \frac{2n\cos\theta r_0^2}{1-r_0^2}\frac{\rho e^U}{v}\\ &\quad -\frac{n\cos\theta e^U}{2v}\left(\rho^2\cos\beta + 2\rho + \cos\beta - (\rho^2-1)\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right)\\ &\quad +\frac{n(1+r_0^2)\rho e^U\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u}{(1-r_0^2)v^2} + \frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{1}{v^2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma^{ij} - \frac{u^iu^j}{v^2})u_{ij},\end{aligned}$$

现在很容易看出，2.9）等价于

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \frac{2r_0}{1-r_0^2}\mathrm{div}(\frac{\nabla u}{\rho v e^U}) - \frac{2(n+1)r_0}{(1-r_0^2)v}\sigma\left(\nabla u, \nabla(\frac{1}{\rho e^U})\right) - \frac{2n\cos\theta r_0^2}{1-r_0^2}\\ &\quad -\frac{n\cos\theta}{2\rho}\left(\rho^2\cos\beta + 2\rho + \cos\beta - (\rho^2-1)\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right) \qquad (2.10)\\ &:= G(\nabla^2 u, \nabla u, \rho, \beta).\end{aligned}$$

类似地，在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的情形下， $\widehat{F}$ 流 (2.9) 具有如下形式

$$\begin{aligned}\widehat{F} &:= nV_a + n\sin R\cos\theta\bar{g}(Y_a,\nu) - \widetilde{H}\bar{g}(X_a,\nu)\\ &= \frac{2nr_0(1-\rho^2)}{(1+r_0^2)(1+\rho^2)+2(1-r_0^2)\rho\cos\beta}\frac{|\nabla u|^2}{v^2} + \frac{2n\cos\theta r_0^2}{1+r_0^2}\frac{\rho e^V}{v}\\ &\quad -\frac{n\cos\theta e^V}{2v}\left(\rho^2\cos\beta + 2\rho + \cos\beta - (\rho^2-1)\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right)\\ &\quad +\frac{n(1-r_0^2)\rho e^V\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u}{(1+r_0^2)v^2} + \frac{2r_0}{1+r_0^2}\frac{1}{v^2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{v^2})u_{ij},\end{aligned}$$

由此可知，(2.9) 等价于

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \frac{2r_0}{1+r_0^2}\mathrm{div}(\frac{\nabla u}{\rho v e^V}) - \frac{2(n+1)r_0}{(1+r_0^2)v}\sigma\left(\nabla u, \nabla(\frac{1}{\rho e^V})\right) + \frac{2n\cos\theta r_0^2}{1+r_0^2}\\ &\quad -\frac{n\cos\theta}{2\rho}\left(\rho^2\cos\beta + 2\rho + \cos\beta - (\rho^2-1)\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right) \qquad (2.11)\\ &:= G(\nabla^2 u, \nabla u, \rho, \beta).\end{aligned}$$

接下来推导边界条件。这里我们证明 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的情形，因为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的情形类似。流 (1.3) 中的毛细边界条件意味着

$$-\cos\theta = \bar{g}(\nu, \bar{N}\circ x) = e^{2U}\left\langle\widehat{\nu}, (\bar{f}^{-1})_*(\bar{N}\circ x)\right\rangle.$$

注意，若在 $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上有 $(\bar{f}^{-1})_*(\bar{N}\circ x) = -e^{-U}\frac{\partial_\beta}{\rho}$，则

$$\nabla_{\partial_\beta}u = \cos\theta\sqrt{1+|\nabla u|^2}, \quad \text{on } \partial\mathbb{S}^n_+. \qquad (2.12)$$

综上，流 (1.3) 等价于下述标量抛物型方程在 $\mathbb{S}^n_+$ 上，

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} = G(\nabla^2 u, \nabla u, \rho, \beta) & \text{in } \mathbb{S}^n_+\times[0,T),\\ \nabla_{\partial_\beta}u = \cos\theta\sqrt{1+|\nabla u|^2} & \text{on } \partial\mathbb{S}^n_+\times[0,T),\\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{in } \mathbb{S}^n_+,\end{cases} \qquad (2.13)$$

其中 G 具有如下形式（2.10），见 $\mathbb{H}^{n+1}$；而（2.11）见 $\mathbb{S}^{n+1}$，分别有 $u_0 := \log\rho_0$ 且 ρ_0 在变换 x_0（M）下对应于超曲面 f。

3. 先验估计与收敛

本节重点建立标量抛物型方程（2.13）解的一致高度与梯度估计。关键在于梯度估计。由于（G 2.13）中 $\mathbb{H}^{n+1}$ 和 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的表达式相似，我们只

展示 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的情形。只需对下文的方法稍作调整，即可对$\mathbb{S}^{n+1}$ 的情形得到相同的先验估计。

流（1.3）的短时间存在性可由标准偏微分方程理论推出（参见 [9]），这是基于我们关于星形的假设， $\bar{g}(X_a,\nu) > 0$在 $x_0(M)$上。接下来，为了证明流的长时间存在性，我们需要得到流解的一致高度与梯度估计；随后，长时间存在性及一致 C^∞ 估计可由带严格斜边界条件的标准拟线性抛物型偏微分方程理论推出（参见 [10]）。

下文中，我们采用爱因斯坦求和约定，即除非另有说明，重复出现的阿拉伯数字指标 i,j,k 均从 1 到 n 求和。此外，我们引入以下记号。 $a^{ij}:=(\sigma^{ij}-\frac{u^iu^j}{v^2})$, $u_\beta:=\nabla_{\partial_\beta}u=\sigma(\nabla u,\partial_\beta)$ 以及

$$
\begin{aligned}
G^{ij} &:= \frac{\partial G(r,p,\rho,\beta)}{\partial r_{ij}}\Big|_{r=\nabla^2u,p=\nabla u} = \frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{1}{\rho v e^U}a^{ij},\\
G_{p_k} &:= \frac{\partial G(r,p,\rho,\beta)}{\partial p_k}\Big|_{r=\nabla^2u,p=\nabla u}\\
&= -\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{u_k}{e^U\rho v^3}a^{ij}u_{ij}+\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{1}{e^U\rho v}(-\frac{\delta_i^ku^j+\delta_j^ku^i}{v^2}+\frac{2u_ku^iu^j}{v^4})u_{ij}\\
&\quad+\frac{n(1+r_0^2)}{1-r_0^2}\frac{\sin\beta\sigma(\partial_\beta,\partial_k)}{v}-\frac{n(1+r_0^2)}{1-r_0^2}\frac{\sin\beta u_\beta u_k}{v^3}+\frac{n(1-\rho^2)}{\rho}\frac{u_k}{v}\\
&\quad+\frac{n(\rho^2-1)|\nabla u|^2u_k}{2\rho v^3}+\frac{\rho^2-1}{2\rho}\sin\beta\sigma(\partial_\beta,\partial_k),\\
G_\rho &:= \frac{\partial G(r,p,\rho,\beta)}{\partial\rho}\Big|_{r=\nabla^2u,p=\nabla u}\\
&= \frac{1}{2v}(1-\frac{1}{\rho^2})a^{ij}u_{ij}-\frac{n}{2}(1+\frac{1}{\rho^2})\frac{|\nabla u|^2}{v}-\frac{n\cos\theta\cos\beta}{2}(1-\frac{1}{\rho^2})\\
&\quad+\frac{n}{2}(1+\frac{1}{\rho^2})\cos\theta\sin\beta u_\beta,\\
G_\beta &:= \frac{\partial G(r,p,\rho,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{r=\nabla^2u,p=\nabla u}\\
&= \frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{-a^{ij}u_{ij}\sin\beta+n\cos\beta u_\beta}{v}+\frac{n\cos\theta}{2\rho}\Big[\sin\beta\rho^2+\sin\beta\\
&\quad+(\rho^2-1)\cos\beta u_\beta\Big].
\end{aligned}
$$

首先，对于情形 $\mathbb{H}^{n+1}$，我们得到流（2.13）解的高度估计。

命题 3.1. 假设 $\Sigma_0 := x_0(M) \subset B_R^{\mathbb{H}}$ 关于 $a\in\mathbb{S}^n$是星形的，并且满足

$$\Sigma_0 \subset C_{\theta,r_1}(a)\setminus C_{\theta,r_2}(a), \tag{3.1}$$

对于某个 $0<r_1<r_2$，其中 $C_{\theta,r}(a)$ 由 (1.6)定义。则解 $\Sigma_t := x(M,t)$ 满足 (1.3) 所给条件

$$\Sigma_t \subset C_{\theta,r_2}(a)\setminus C_{\theta,r_1}(a).$$

此外，若 u 是 (2.13) 的解，且 G 具有 (2.10)的形式，则

$$||u||_{C^0\left(\bar{\mathbb{S}}_+^n\times[0,T)\right)}\leq C,$$

其中， C 是一个正的常数，仅取决于初始数据。

证明。 由于球冠 $C_{\theta,\ r}(a)$ 是对每个$r>0$而言流（1.3）的静态解，即它满足

$$nV_a+n\sinh R\cos\theta\bar{g}(Y_a,\nu)-H\bar{g}(X_a,\nu)=0.$$

于是，根据带有毛细管边界条件的严格抛物型方程的避碰原理（见 [21, 命题 4.2]），断言得证。□

为了获得梯度估计，我们需要使用距离函数$d(x):=dist_\sigma(x,\ \partial\mathbb{S}_+^n)$。众所周知，对于 x ，在$\partial\mathbb{S}_+^n$ 附近以及在 $\partial\mathbb{S}_+^n$上， d 是良定义且光滑的，其中 ∂_β 是 $\partial\mathbb{S}_+^n$在 $\mathbb{S}_+^n$ 中的单位外法向量场。我们可以将 d 延拓为定义在 $\mathbb{S}_+^n$ 中的光滑函数，并满足

$$d\geq 0,\qquad |\nabla d|\leq 1,\quad \text{in }\bar{\mathbb{S}}_+^n.$$

我们将使用 $O(s)$ 表示由 Cs 控制的项，其中常数$C>0$仅取决于 C^0 的 u 范数。常数 C 可能随行而变。接下来，我们选取一个适当的辅助函数，该函数曾用于 [21] ，以在2.13流的情形 $\mathbb{H}^{n+1}$下获得一致梯度估计。

命题3.2. 若 $u\colon \mathbb{S}_+^n\times[0,T)\to\mathbb{R}$ 是 (2.13) 的解，且 G 具有 (2.10)的形式，|余弦 $\theta|<\frac{3n+1}{5n-1}$，则对于任意 $(x,t)\in\bar{\mathbb{S}}_+^n\times[0,T)$，

$$|\nabla u|(x,t)\leq C,$$

其中， C 是一个正常数，仅取决于初始数据。

证明。 定义函数如下

$$\Phi:=(1+Kd)v+\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d),$$

其中， K是一个待定的正常数。对于任意 $T'<T$，假设 Φ在某一点处取得最大值，记该点为（x_0,t_0） $\in\mathbb{S}_+^n\times[0,T']$。

按照命题4.3中情形 1], 的相同论证，通过选取足够大的$K>0$ ， Φ 不会在 $\partial\mathbb{S}_+^n$上取得最大值，因此我们有 $x_0\in\mathbb{S}_+^n$ 或 $t_0=0$。若 $t_0=0$，不难看出

$$\sup_{\bar{\mathbb{S}}_+^n\times[0,T']}|\nabla u|\leq C,\tag{3.2}$$

其中， C 是一个仅依赖于 n 和 u_0的正常数。

接下来我们分析 $x_0\in\mathbb{S}_+^n$ 的情形，并完成梯度估计。通过在 x_0 处旋转测地坐标 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ ，不妨设 —

$$|\nabla u|=u_1>0,\ \text{and }\{u_{\alpha\beta}\}_{2\leq\alpha,\beta\leq n}\text{ is diagonal.}$$

假设 $u_1(x_0,\ t_0)$ 足够大，否则证明即告完成。以下所有计算均在点 $(x_0,\ t_0)$ 处进行。注意

$$0=\nabla_i\Phi=(1+Kd)v_i+Kd_iv+\cos\theta(u_{li}d_l+u_ld_{li}),\ 1\le i\le n.$$

由此可得

$$\left[(1+Kd)\frac{u_1}{v}+\cos\theta d_1\right]u_{1\alpha}=\cos\theta u_{\alpha\alpha}d_\alpha-\cos\theta u_ad_{1\alpha}-Kd_\alpha v,$$

and

$$\left[(1+Kd)\frac{u_1}{v}+\cos\theta d_1\right]u_{11}=-\cos\theta u_{\alpha1}d_\alpha-\cos\theta u_1d_{11}-Kd_1v.$$

记 $S:=(1+Kd)\frac{u_1}{v}+\cos\theta d_1$，容易看出 $0<C(\delta,\theta)\le S\le 2+K$。若假设 $u_1\ge\delta>0$，否则证明即告完成。因此

$$\begin{aligned}u_{1\alpha}&=-\frac{\cos\theta d_\alpha}{S}u_{\alpha\alpha}-\frac{1}{S}(\cos\theta u_1d_{1\alpha}+Kd_\alpha v)\\&=-\frac{\cos\theta d_\alpha}{S}u_{\alpha\alpha}+O(v),\ 2\le\alpha\le n,\end{aligned}\tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned}u_{11}&=-\frac{1}{S}\cos\theta u_{\alpha1}d_\alpha+\frac{1}{S}(-\cos\theta u_1d_{11}-Kd_1v)\\&=\frac{\cos^2\theta}{S^2}\sum_{\alpha=2}^n d_\alpha^2u_{\alpha\alpha}+O(v).\end{aligned}\tag{3.4}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}0&\le(\partial_t-G^{ij}\nabla_{ij}-G_{p_i}\nabla_i)\Phi\\&=\frac{(1+Kd)}{v}u_l(u_{lt}-G^{ij}u_{lij}-G_{p_i}u_{li})+d_k\cos\theta(u_{kt}-G^{ij}u_{kij}-G_{p_i}u_{ki})\\&\quad+(1+Kd)(\frac{G^{ij}u_lu_{li}u_ku_{kj}}{v^3}-\frac{G^{ij}u_{li}u_{lj}}{v})-(2G^{ij}u_{ki}d_{kj}\cos\theta+2KG^{ij}d_iv_j)\\&\quad-(G^{ij}u_kd_{kij}\cos\theta+KG^{ij}d_{ij}v)-G_{p_i}(Kd_iv+\cos\theta u_kd_{ki})\\&:=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6.\end{aligned}\tag{3.5}$$

接下来，我们逐一仔细处理这些项。对（2.13）中的第一个方程求导，

$$u_{tl}=G^{ij}u_{ijl}+G_{p_i}u_{il}+G_\rho\rho u_l+G_\beta\sigma(\partial_\beta,\partial_l),$$

结合关于 $\mathbb{S}^n_+$ 的交换公式，

$$u_{ijl}=u_{lij}+u_j\sigma_{li}-u_l\sigma_{ij},$$

由此可得

$$u_{tl}=G^{ij}u_{lij}+G^{ij}u_j\sigma_{li}-\sum_{i=1}^n G^{ii}u_l+G_{p_i}u_{il}+G_\rho\rho u_l+G_\beta\sigma(\partial_\beta,\partial_l).$$

首先，我们处理术语 I_1。

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(1+Kd)}{v}u_l(u_{lt}-G^{ij}u_{lij}-G_{p_i}u_{il}) \\
&= \frac{(1+Kd)}{v}G^{ij}u_ju_l\sigma_{li}+\frac{(1+Kd)u_l}{v}\left(G_\rho\rho u_l+G_\beta\sigma(\partial_\beta,\partial_l)\right) \\
&\quad -\frac{(1+Kd)|\nabla u|^2}{v}\sum_{i=1}^{n}G^{ii} \\
&= \left[\frac{(1+Kd)|\nabla u|^2}{2v^4}(\rho-\frac{1}{\rho})u_{11}-\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)\sin\beta u_\beta}{v^4}u_{11}\right] \\
&\quad +\left[\frac{(1+Kd)|\nabla u|^2}{2v^2}(\rho-\frac{1}{\rho})\sum_{\alpha=2}^{n}u_{\alpha\alpha}\right] \\
&\quad -\left[\frac{n(1+Kd)|\nabla u|^4}{2v^2}(\rho+\frac{1}{\rho})-\frac{n(1+Kd)|\nabla u|^2}{2v}(\rho+\frac{1}{\rho})\cos\theta\sin\beta u_\beta\right] \\
&\quad -\left[\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)u_\beta\sin\beta}{v^2}\sum_{\alpha=2}^{n}u_{\alpha\alpha}+\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{n(1+Kd)\cos\beta u_\beta^2}{v^2}\right. \\
&\quad -\frac{n\cos\theta(1+Kd)u_\beta}{2\rho v}\left(\sin\beta\rho^2+\sin\beta+(\rho^2-1)\cos\beta u_\beta\right) \\
&\quad \left.-\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)(1-n)|\nabla u|^2}{\rho v^2e^U}+\frac{n(1+Kd)|\nabla u|^2\cos\beta\cos\theta}{2v}(\rho-\frac{1}{\rho})\right] \\
&:= I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}.
\end{aligned}$$

根据（3.4），我们得到

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{(1+Kd)|\nabla u|^2}{2v^4}(\rho-\frac{1}{\rho})u_{11}-\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)\sin\beta u_\beta}{v^4}u_{11} \\
&= \left[\frac{(1+Kd)|\nabla u|^2}{2v^4}(\rho-\frac{1}{\rho})-\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)\sin\beta u_\beta}{v^4}\right] \\
&\quad \cdot\left(\frac{\cos^2\theta}{S^2}\sum_{\alpha=2}^{n}d_\alpha^2u_{\alpha\alpha}+O(v)\right) \\
&= O(\frac{1}{v^2})\sum_{\alpha=2}^{n}|u_{\alpha\alpha}|+O(\frac{1}{v}).
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
I_{14} &= -\left[\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)u_\beta\sin\beta}{v^2}\sum_{\alpha=2}^{n}u_{\alpha\alpha}+\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{n(1+Kd)\cos\beta u_\beta^2}{v^2}\right. \\
&\quad -\frac{n\cos\theta(1+Kd)u_\beta}{2\rho v}\left(\sin\beta\rho^2+\sin\beta+(\rho^2-1)\cos\beta u_\beta\right) \\
&\quad \left.-\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)(1-n)|\nabla u|^2}{\rho v^2e^U}+\frac{n(1+Kd)|\nabla u|^2\cos\beta\cos\theta}{2v}(\rho-\frac{1}{\rho})\right] \\
&= O(\frac{1}{v^2})\sum_{\alpha=2}^{n}|u_{\alpha\alpha}|+O(v).
\end{aligned}$$

对于项 I_2,

$$\begin{aligned}
I_2 &= d_k\cos\theta(u_{kt}-G^{ij}u_{kij}-G_{p_i}u_{ki})\\
&= \cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)\rho G_\rho+\cos\theta G_\beta d_\beta+\cos\theta G^{11}\sigma(\nabla u,\nabla d)\\
&\quad-\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)\sum_{i=1}^{n}G^{ii}\\
&= \left[\frac{\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2v^3}(\rho-\frac{1}{\rho})u_{11}-\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{\sin\beta\cos\theta d_\beta}{v^3}u_{11}\right]\\
&\quad+\left[\frac{\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2v}(\rho-\frac{1}{\rho})\sum_{\alpha=2}^{n}u_{\alpha\alpha}\right]\\
&\quad-\left[\frac{n\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})(\frac{|\nabla u|^2}{v}-\cos\theta\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u)\right]\\
&\quad-\left[\frac{n\cos^2\theta\cos\beta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2}(\rho-\frac{1}{\rho})-\frac{n\cos\theta\cos\beta d_\beta\nabla_{\partial_\beta}u}{v}\right.\\
&\quad+\frac{2(n-1)r_0}{\rho ve^U(1-r_0^2)}\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)+\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{\cos\theta\sin\beta d_\beta}{v}\sum_{\alpha=2}^{n}u_{\alpha\alpha}\\
&\quad\left.-\frac{n\cos^2\theta d_\beta}{2\rho}\left(\sin\beta\rho^2+\sin\beta+(\rho^2-1)\cos\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right)\right]\\
&:= I_{21}+I_{22}+I_{23}+I_{24}.
\end{aligned}$$

对于项 I_{21}, I_{24}, 我们看到

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \frac{\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2v^3}(\rho-\frac{1}{\rho})u_{11}-\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{\sin\beta\cos\theta d_\beta}{v^3}u_{11}\\
&= \left[\frac{\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2v^3}(\rho-\frac{1}{\rho})-\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{\sin\beta\cos\theta d_\beta}{v^3}\right]\\
&\quad\cdot\left(\frac{\cos^2\theta}{S^2}\sum_{\alpha=2}^{n}d_\alpha^2u_{\alpha\alpha}+O(v)\right)\\
&= O(\frac{1}{v^2})\sum_{\alpha=2}^{n}|u_{\alpha\alpha}|+O(\frac{1}{v^2}),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
I_{24} &= -\left[\frac{n\cos\theta^2\cos\beta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2}(\rho-\frac{1}{\rho})-\frac{n\cos\theta\cos\beta d_\beta\nabla_{\partial_\beta}u}{v}\right.\\
&\quad+\frac{2(n-1)r_0}{\rho ve^U(1-r_0^2)}\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)+\frac{1+r_0^2}{1-r_0^2}\frac{\cos\theta\sin\beta d_\beta}{v}\sum_{\alpha=2}^{n}u_{\alpha\alpha}\\
&\quad\left.-\frac{n\cos^2\theta d_\beta}{2\rho}\left(\sin\beta\rho^2+\sin\beta+(\rho^2-1)\cos\beta\nabla_{\partial_\beta}u\right)\right]\\
&= O(\frac{1}{v})\sum_{\alpha=2}^{n}|u_{\alpha\alpha}|+O(v).
\end{aligned}$$

接下来，我们处理项 I_3。

$$\begin{aligned} I_3 &= (1+Kd)(\frac{G^{ij}u_l u_{li}u_k u_{ki}}{v^3} - \frac{G^{ij}u_{li}u_{lj}}{v}) \\ &= \frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v e^U}(-\frac{1}{v^5}u_{11}^2 - \frac{2}{v^3}\sum_{\alpha=2}^n u_{1\alpha}^2) - \frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v^2 e^U}\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha}^2 \\ &= \frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v e^U}(-\frac{1}{v^5}u_{11}^2 - \frac{2}{v^3}\sum_{\alpha=2}^n u_{1\alpha}^2) \\ &\quad -(1-\varepsilon)\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v^2 e^U}\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha}^2 - \varepsilon\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v^2 e^U}\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha}^2 \\ &:= I_{31}+I_{32}+I_{33}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} I_{31} &= \frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v e^U}(-\frac{1}{v^5}u_{11}^2 - \frac{2}{v^3}\sum_{\alpha=2}^n u_{1\alpha}^2) \\ &\le O(\frac{1}{v^4})\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha}^2 + O(v). \end{aligned}$$

最后，我们处理式（3.5）中的其他剩余项。

$$\begin{aligned} I_4+I_5+I_6 &= -(2G^{ij}u_{ki}d_{kj}\cos\theta + 2KG^{ij}d_i v_j) - (G^{ij}u_k d_{kij}\cos\theta + KG^{ij}d_{ij}v) \\ &\quad -G_{p_i}(Kd_i v + \cos\theta u_k d_{ki}) \\ &= O(\frac{1}{v})\sum_{\alpha=2}^n |u_{\alpha\alpha}| + O(v). \end{aligned}$$

根据算术几何平均不等式，我们有

$$\begin{aligned} I_{12}+I_{22}+I_{32} &= \frac{(1+Kd)|\nabla u|^2}{2v^2}(\rho-\frac{1}{\rho})\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha} + \frac{\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2v}(\rho-\frac{1}{\rho})\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha} \\ &\quad -(1-\varepsilon)\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v^2 e^U}\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha}^2 \\ &= \frac{u_1}{2v}S(\rho-\frac{1}{\rho})\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha} - (1-\varepsilon)\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v^2 e^U}\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha}^2 \\ &\le \frac{1-r_0^2}{2r_0}\frac{(n-1)}{1+Kd}\frac{(\rho-\frac{1}{\rho})^2 S^2 \rho e^U}{16(1-\varepsilon)}u_1^2 \\ &\le \frac{1-r_0^2}{2r_0}\frac{(n-1)(1+|\cos\theta|)S}{16(1-\varepsilon)}(\rho-\frac{1}{\rho})^2\rho e^U u_1^2. \end{aligned}$$

固定一个正的常数 $a_0 \in \left(|\cos\theta|, \frac{3n+1}{5n-1}\right)$，若

$$\frac{|\nabla u|^2}{v} - \cos\theta\sin\beta u_\beta < (1-a_0)u_1,$$

then

$$\frac{|\nabla u|^2}{v} - |\cos\theta|u_1 \le \frac{|\nabla u|^2}{v} - \cos\theta\sin\beta u_\beta < (1-a_0)u_1,$$

这意味着

$$u_1^2 \leq \frac{(\cos\theta + (1-a_0))^2}{1-(\cos\theta+(1-a_0))^2},$$

由此完成证明。因此，我们假设对于任意固定的正常数$a_0 \in (|\cos\theta|, \frac{3n+1}{5n-1})$，有

$$\frac{|\nabla u|^2}{v} - \cos\theta \sin\beta u_\beta \geq (1-a_0)u_1,$$

于是可得

$$\begin{aligned} I_{13}+I_{23} &= -\left[\frac{n(1+Kd)|\nabla u|^4}{2v^2}(\rho+\frac{1}{\rho}) - \frac{n(1+Kd)|\nabla u|^2}{2v}(\rho+\frac{1}{\rho})\cos\theta\sin\beta u_\beta\right] \\ &\quad -\left[\frac{n\cos\theta\sigma(\nabla u,\nabla d)}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})(\frac{|\nabla u|^2}{v}-\cos\theta\sin\beta\nabla_{\partial_\beta}u)\right] \\ &= -\frac{n}{2}u_1 S(\rho+\frac{1}{\rho})(\frac{|\nabla u|^2}{v}-\cos\theta\sin\beta u_\beta) \\ &\leq -\frac{n}{2}(1-a_0)Su_1^2(\rho+\frac{1}{\rho}). \end{aligned}$$

由于 $|\cos\theta| < a_0$，并取 $\varepsilon := \frac{\varepsilon_0}{2} \in (0,1)$，满足 $\varepsilon_0 := \frac{3n+1-a_0}{(5n-1)\,4n(1-a_0)} > 0$，我们有 $(n-1)(1+a_0) - 4(1-\varepsilon)(1-a_0)n < 0$，于是

$$\begin{aligned} & I_{13}+I_{23}+I_{12}+I_{22}+I_{32} \\ \leq\ & -\frac{n}{2}(1-a_0)Su_1^2(\rho+\frac{1}{\rho}) + \frac{1-r_0^2}{2r_0}\frac{(n-1)(1+|\cos\theta|)S}{16(1-\varepsilon)}(\rho-\frac{1}{\rho})^2\rho e^U u_1^2 \\ \leq\ & u_1^2 S\left[\frac{(n-1)(1+|\cos\theta|)}{16(1-\varepsilon)}(\rho-\frac{1}{\rho})^2\frac{2\rho}{\rho^2+1} - \frac{n}{2}(1-a_0)(\rho+\frac{1}{\rho})\right] \\ =\ & \frac{u_1^2 S}{8\rho(\rho^2+1)(1-\varepsilon)}\Big[\left((n-1)(1+a_0)-4n(1-\varepsilon)(1-a_0)\right)(\rho^4+1) \\ & -\left(2(n-1)(1-a_0)+8n(1-\varepsilon)(1-a_0)\right)\rho^2\Big] \\ \leq\ & -\alpha_0 u_1^2, \end{aligned}$$

其中，α_0为正常数，取决于 n，a_0，$||u||_{C^0}$。

将上述所有项代入（3.4），可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{2r_0}{1-r_0^2}\frac{(1+Kd)}{\rho v^2 e^U}\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha\alpha}^2 - \alpha_0 u_1^2 + O(\frac{1}{v})\sum_{\alpha=2}^n |u_{\alpha\alpha}| + O(v) \\ &\leq -\alpha_0 u_1^2 + O(v), \end{aligned}$$

由此可得

$$u_1 \leq C.$$

其中正的常数 C 仅依赖于 n，r_0 和 $\|u\|_{C^0}$。至此，我们完成了证明。□

按照上述针对情形 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的论证，我们可以得到情形 $\mathbb{S}^{n+1}$ 下标量抛物型方程 (2.13) 的一致高度与梯度估计。也就是说，

命题 3.3。 若 $u\colon \mathbb{S}^n_+ \times [0,T) \to \mathbb{R}$ 满足 (2.13) 且 G 具有形式 (2.11)，$|$余弦$\theta| < \frac{3n+1}{5n-1}$，则

$$\|u\|_{C^1\left(\bar{\mathbb{S}}^n_+ \times [0,T)\right)} \leq C, \tag{3.6}$$

其中常数 C 为正数，取决于初始数据。

为使本文简洁，我们将命题 3.3 的证明留给感兴趣的读者。

总之，对于该流（1.3），无论是在双曲空间还是球面空间中，我们都得到如下收敛性。

命题 3.4. 若初始超曲面 $\Sigma_0 \subset \bar{B}_R \subset M^{n+1}(K)$ 满足 $K = \pm 1$，且按定义 *1.1* 的意义下为星形，并且 $|\cos\theta| < \frac{3n+1}{5n-1}$，则流 (1.3) 的光滑解存在于所有时间，并具有一致的 C^∞估计。

证明。 命题 3.1、3.2 和 3.4 表明 u 在 $C^1(\bar{\mathbb{S}}^n_+ \times [0,T))$中一致有界，因此（2.13）中的标量方程是一致抛物型的。由于 $|\cos\theta| < 1$，故由标准的拟线性抛物型理论及严格斜边界条件理论可得所需结论（参见 [14, 10]）。□

最后，利用 [19, 24]，中的论证，我们得出收敛结果，也就完成了定理 1.2 的证明。

命题 3.5。 若初始超曲面 $\Sigma_0 \subset \bar{B}_R \subset M^{n+1}(K)$ 是星形毛细边界超曲面，且 $|\cos\theta| < \frac{3n+1}{5n-1}$，则流 (1.3) 将光滑收敛到唯一确定的球冠 $C_{\theta,\ r}(a)$ 由 (1.6) 给出，且具有毛细边界，其中 $t \to +\infty$。

证明。 下面，我们给出在情形 1.3 下流（ $\mathbb{H}^{n+1}$）收敛性的完整证明。由于情形 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的证明类似，这里略去。

由推论 1.3 的证明以及一致 C^∞ 估计可知

$$\int_0^\infty \int_{\Sigma_t} \sum_{1\leq i<j\leq n} (\kappa_i(x,t) - \kappa_j(x,t))^2 \bar{g}(X_a, \nu) dA_t \leq C,$$

其中， $\kappa_i(x,t)$ $i = 1, \cdots, n$ 是该径向图在点 (x,t) 处的主曲率。结合一致估计可知， $\bar{g}(X_a,\nu)$ 和 dA_t 一致有界，因此

$$\max_{\substack{x\in\Sigma_t \\ 1\leq i<j\leq n}} |\kappa_i(x,t) - \kappa_j(x,t)| = o_t(1),$$

其中， $o_t(1)$ 表示一个当 $t \to +\infty$ 时趋于零的量。因此， $x(\cdot,\ t)$ 的任意收敛子列在 $t \to +\infty$ 时都收敛到一个球冠。

接下来，我们沿用[19, 24]中的论证，证明极限球冠是唯一的。首先，我们知道 $x(\cdot,t)$ 的任意收敛子列都光滑收敛到球冠$C_{\theta,\rho_\infty}(a_\infty)$。由于体积沿流保持不变（1.3），半径与 t子列的选取无关。现在只需证明 $a_\infty = a$。

记 $\rho(\cdot,t)$ 为以点$\sqrt{\rho^2(\cdot,t)+r_0^2+2\rho(\cdot,t)r_0\cos\theta}a$、接触角为 θ 且经过点 $x(\cdot,t)$的唯一球冠的半径。根据命题3.1中的同一屏障论证,

$$\rho_{\max}(t):=\max_{x\in M}\rho(x,t)=\rho(\xi_t,t),$$

对于某个点 $\xi_t\in M$， t 是非递增的，因此极限 $\lim_{t\to+\infty}\rho_{\max}(t)$ 存在，显然 $\rho_{\max}(t)\geq\rho_\infty$。我们断言

$$\lim_{t\to+\infty}\rho_{\max}(t)=\rho_\infty. \tag{3.7}$$

我们通过反证法证明上述断言。假设（3.7）不成立，则存在常数 $\varepsilon>0$，当 t 足够大时，使得

$$\rho_{\max}(t)>\rho_\infty+\varepsilon. \tag{3.8}$$

根据 $\rho(\cdot,t)$ 的定义，

$$2\langle x,a\rangle\sqrt{\rho^2+r_0^2+2\rho r_0\cos\theta}=|x|^2+r_0^2+2\rho r_0\cos\theta, \tag{3.9}$$

对（3.9）两边求时间导数，得到

$$\langle x_t,x-\sqrt{\rho^2+r_0^2+2\rho r_0\cos\theta}a\rangle=\left(\frac{(\rho+r_0\cos\theta)\langle x,a\rangle}{\sqrt{\rho^2+r_0^2+2\rho r_0\cos\theta}}-r_0\cos\theta\right)\partial_t\rho.$$

我们在点 (ξ_t,t) 处求值。注意到 Σ_t 在点 (ξ_t,t) 处与 $C_{\theta,\rho_{\max}}(a)$ 相切，这意味着

$$(\nu_0)_{\Sigma_t}(\xi_t,t)=(\nu_0)_{\partial C_{\theta,\rho_{\max}(a)}}=\frac{x-\sqrt{\rho_{\max}^2(t)+r_0^2+2\rho_{\max}(t)r_0\cos\theta}a}{\rho_{\max}(t)},$$

因此

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(\rho_{\max}(t)+r_0\cos\theta)\langle x,a\rangle}{\sqrt{\rho_{\max}^2(t)+r_0^2+2\rho_{\max}(t)r_0\cos\theta}}-r_0\cos\theta\right)\partial_t\rho_{\max}(t)\\&=e^{-U}F\left\langle(\nu_0)\big|_{\Sigma_t}(\xi_t,t),x-\sqrt{\rho_{\max}^2(t)+r_0^2+2\rho_{\max}(t)r_0\cos\theta}a\right\rangle\\&=e^{-U}\rho_{\max}(t)\left(nV_a+n\sinh R\cos\theta\bar g(Y_a,\nu)-H\bar g(X_a,\nu)\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

由于球面 $C_{\theta,\ \rho_{\max}}(a)$ 是流（1.3）的静态解，$\bar H$ 在 $C_{\theta,\ \rho_{\max}}(a)$ 中的平均曲率为

$$\bar H=e^{-u}\left[\frac{n}{\rho_{\max}(t)}+\frac{2n}{1-|x|^2}\langle x,\nu_0\big|_{\partial C_{\theta,\rho_{\max}}(a)}\rangle\right]=\frac{n\left(1-r_0^2-2r_0\rho_{\max}(t)\cos\theta\right)}{2\rho_{\max}(t)},$$

then

$$\frac{nV_a+n\sinh R\cos\theta g(Y_a,\nu)}{\bar g(X_a,\nu)}\Big|_{C_{\theta,\rho_{\max}}(a)}=\frac{n\left(1-r_0^2-2r_0\rho_{\max}(t)\cos\theta\right)}{2\rho_{\max}(t)}. \tag{3.11}$$

由于 $x(\cdot,t)$ 收敛到 $C_{\theta,\rho_\infty}(a_\infty)$，且 ρ_∞ 是唯一确定的，因此我们有

$$\bar H\to\frac{n(1-r_0^2-2\rho_\infty r_0\cos\theta)}{2\rho_\infty}. \tag{3.12}$$

我们声称存在一个正常数 $\delta > 0$，使得

$$\frac{(\rho_{\max}(t) + r_0 \cos\theta)\,\langle x, a\rangle}{\sqrt{\rho_{\max}^2(t) + r_0^2 + 2\rho_{\max}(t) r_0 \cos\theta}} - r_0 \cos\theta \geq \delta. \tag{3.13}$$

事实上，由（3.9），可得

$$\begin{aligned} &\langle x, a\rangle^2(\rho^2 + 2\rho r_0 \cos\theta + r_0^2) \\ &= \frac{1}{4}(|x|^2 + r_0^2)^2 + \rho r_0 \cos\theta(|x|^2 + r_0^2) + \rho^2 r_0^2 \cos^2\theta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

结合（3.9），可得

$$\begin{aligned} & (\rho + r_0\cos\theta)\langle x, a\rangle - r_0\cos\theta\sqrt{\rho^2 + 2\rho r_0\cos\theta + r_0^2} \\ = \;& (\rho + r_0\cos\theta)\langle x, a\rangle - r_0\cos\theta\frac{|x|^2 + r_0^2 + 2\rho r_0\cos\theta}{2\langle x, a\rangle} \\ = \;& \frac{1}{\rho\langle x, a\rangle}\left[\rho(\rho + r_0\cos\theta)\langle x, a\rangle^2 - \rho^2 r_0^2\cos^2\theta - \rho r_0\cos\theta\frac{|x|^2 + r_0^2}{2}\right] \\ = \;& \frac{1}{\rho\langle x, a\rangle}\left[\frac{(|x - r_0 a||x + r_0 a|)^2}{4} + \frac{1}{2}\rho r_0\cos\theta(|x|^2 + r_0^2) - \rho r_0\cos\theta\langle x, a\rangle^2\right], \end{aligned}$$

结合命题3.1，可得断言（3.13成立。

另一方面，由（3.7）、（3.11）、（3.12以及此前建立的一致估计，可知存在某个足够大的常数 T_0，使得对于 $t > T_0$，有

$$e^{-U}\left(nV_a + n\sinh R\cos\theta\bar{g}(Y_a, \nu) - H\bar{g}(X_a, \nu)\right)\big|_{x(\xi_t, t)} \leq -C\varepsilon.$$

最后，由（3.10）和（3.13），我们得出存在一个正常数 C_0使得

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_{\max}(t)\right) \leq -C_0\varepsilon.$$

这与以下事实矛盾：$\lim_{t\to+\infty}\frac{d}{dt}\left(\rho_{\max}(t)\right) = 0$，因此（3.7）成立。类似地，可以得到

$$\lim_{t\to+\infty}\rho_{\min}(t) = \rho_\infty.$$

因此，$\lim_{t\to+\infty}\rho(\cdot, t) = \rho_\infty$。这意味着，收敛子列的任何极限都是$C_{\theta,\rho_\infty}(a)$ 附近的 a 半径为 ρ_∞的球冠。由此完成命题3.5的证明，该命题也可由定理1.2推出。□

致谢。 两位作者谨向 Xinan Ma 教授和 Guofang Wang 教授致以诚挚的谢意，感谢他们一直以来的鼓励，以及围绕这一主题所进行的许多富有启发性的交流。XM 获得 CSC（编号：202106340053）和 USTC 博士学位论文创优项目的部分资助。LW 获得中国博士后科学基金（编号：2021M702143）和 NSFC（编号：12201003、12171260）的部分资助。

参考文献

[1] Jürgen G. Bokowsky 和 Emanuel Jr. Sperner，通过最小分离曲面分解凸体，《纯粹与应用数学杂志》311/312（1979），80–100。[2] Yu. D. Burago，Vladimir G. Maz'ya，不规则边界区域的位势理论与函数论中的若干问题，（俄文）《列宁格勒斯捷克洛夫数学研究所列宁格勒分部科学研讨会记录》（LOMI）3，1967，152；英文译本：《不规则区域的位势理论与函数论》。俄文译出。列宁格勒斯捷克洛夫数学研究所数学研讨会，第

3 1969 卷，

[3]
Consultants Bureau，纽约 Robert Finn，平衡毛细曲面。《数学科学基础丛书》284，Springer-Verlag，纽约，1986。[4] Pengfei Guan，Junfang Li，空间形式中的平均曲率型流。《国际数学研究通知》2015，第13期，4716–4740。[5] Pengfei Guan，Junfang Li，全非线性流与曲率积分不等式（中文），《中国科学：数学》48（2018），第1期，147–156。[6] Pengfei Guan，Junfang Li，Mu-Tao Wang，扭曲乘积空间中的保体积流与等周问题。《美国数学学会汇刊》372（2019），第4期，2777–2798。[7] Yingxiang Hu，Haizhong Li，双曲空间中静态凸区域的几何不等式。《美国数学学会汇刊》375（2022），第8期，5587–5615。[8] Yingxiang Hu，Haizhong Li，Yong Wei，双曲空间中的局部约束曲率流与几何不等式。《数学年刊》382（2022），第3–4期，1425–1474。[9] Gerhard Huisken，Alexander P.，超曲面的几何演化方程。载于《变分法与几何演化问题》，1999：45–84。[10] Olga A. Ladyzenskaja，Vsevolod A Solonnikov，Nina N. Ural'ceva，抛物型线性与拟线性方程。载于：《数学专著译著》，第23卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，xi+648 页（1968）。[11] Ben Lambert，Julian Scheuer，垂直于球面的逆平均曲率流。《数学年刊》364（2016），第3–4期，1069–1093。[12] Ben Lambert，Julian Scheuer，单位球内凸自由边界超曲面的一个几何不等式。《美国数学学会学报》145（2017），第9期，4009–4020。[13] Ben Lambert，Julian Scheuer，广义罗伯逊-沃克空间中的类空区域等周问题。《演化方程杂志》21（2021），第1期，377–389。[14] Gary M. Lieberman，二阶抛物型偏微分方程。World Scientific，1996。[15] Francesco Maggi，有限周长集与几何变分问题：几何测度论导论。《剑桥高等数学研究丛书》135，剑桥大学出版社，剑桥，2012。[16] Xinqun Mei，Guofang Wang，Liangjun Weng，约束平均曲率流与 Alexandrov-Fenchel 不等式。即将发表于《国际数学研究通知》。https://doi.org/10.1093/imrn/rnad020。[17] Tao Qiang，Liangjun Weng，Chao Xia，双曲球内具有自由边界的局部约束平均曲率型流。即将发表于《美国数学学会学报》。https://doi.org/10.1090/proc/15917。[18] Antonio Ros，Rabah Souam，球内毛细曲面的稳定性。《太平洋数学杂志》178（1997），第2期，345–361。[19] Julian Scheuer，Guofang Wang，Chao Xia，球内具有自由边界的凸超曲面的 Alexandrov-Fenchel 不等式。《微分几何杂志》120（2022），第2期，345–373。[20] Julian Scheuer，Chao Xia，局部约束逆曲率流。《美国数学学会汇刊》372（2019），第10期，6771–6803。[21] Guofang Wang，Liangjun Weng，单位球内具有毛细边界的平均曲率型流。《变分法与偏微分方程》59（2020），第5期，论文编号149，26页。[22] Guofang Wang，Chao Xia，球内自由边界超曲面的 Guan-Li 型平均曲率流。即将发表于《分析与几何通讯》。ArXiv：1910.07253。[23] Guofang Wang，Chao Xia，球内稳定毛细超曲面的唯一性。《数学年刊》374（2019），第3–4期，1845–1882。[24] Liangjun Weng，Chao Xia，球内具有毛细边界的凸超曲面的 Alexandrov-Fenchel 不等式。《美国数学学会汇刊》375（2022），8851–8883。

中国科学技术大学数学科学学院，中华人民共和国安徽省合肥市，230026

阿尔伯特-路德维希大学弗赖堡数学研究所，弗赖堡，布赖斯高地区，79104，德国电子邮箱地址：qunmx@mail.ustc.edu.cn

罗马第二大学数学系，科学研究街，I-00133，罗马，意大利电子邮箱地址：ljweng08@mail.ustc.edu.cn