arXiv:2302.07653v1 [math.MG] 15 Feb 2023

Nil几何中的类平移等视曲面与平移三角形的角和*

G´eza Csima 和 Jen˝o Szirmai，布达佩斯技术与经济大学数学研究所几何系，M¨uegyetem rkp. 3., H-1111 匈牙利布达佩斯
csimageza@gmail.com，szirmai@math.bme.hu

2023年2月16日

摘要

在研究了 Sol 和 SL_2R 几何中的测地三角形、平移三角形及其角和之后，我们考虑 Nil空间中的类似问题；Nil空间是八种三维瑟斯顿几何之一。

我们分析 Nil几何中平移三角形的内角和，并提出一种新方法来证明其可以大于或等于 π。

此外，我们首次在非恒定曲率的瑟斯顿几何中，提出了一种确定 Nil 等视曲面方程的方法，这些曲面对应于类平移线段。作为特例，我们研究了 Nil几何中的类平移泰勒斯球，并将其称为 Thaloid。

在我们的工作中，我们将采用 E. Moln´ar 在 [19]中描述的 Nil几何射影模型。

*2010年数学主题分类：53A20、53A35、52C35、53B20。关键词与短语：瑟斯顿几何、Nil几何、平移与测地三角形、内角和

1 引言

本文关注 Nil空间中的平移三角形和等视曲面。Nil空间是八种瑟斯顿几何之一（参见 [29] 和 [42]），由海森堡矩阵群 [19, 22]导出。

在 Thurston 空间中，可以通过将每个点平移到任意一点的平移，自然地引入平移曲线（见 [20, 37]）。考虑原点处的一个单位向量。根据一开始的设定，平移通过其切映射将该向量带到任意一点。如果曲线 $t \to (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 在每一点处的切向量恰好是该平移后的向量，则称该曲线为平移曲线。这一假设导出一个一阶微分方程组，因此，在 Nil几何、SL_2R 和 Sol 几何中，平移曲线比测地线更简单，且与测地线不同。除此之外，平移曲线在这些几何中发挥着重要作用，而且往往看起来比测地线更自然。

在其余五种 Thurston 几何 $E^3, S^3, H^3, S^2\times R$ 和 $H^2\times R$ 中，平移曲线与测地线彼此重合。
文献 [38]研究了 $S^2\times R$ 和 $H^2\times R$ 中三角形的内角和。
在 [7] 中，我们研究了$\widetilde{SL_2R}$ 几何中的平移三角形和测地三角形的角和，并证明平移三角形的内角和可能值必须大于或等于 $\pi.$ 。然而，对于测地三角形，这个和可以小于、大于或等于 π。

在 [36] 中，研究了 Sol几何中平移三角形的内角和，得出其必须大于或等于 $\pi.$ 。测地曲线的这一角和仍有待进一步研究。

在 [1] 中，Brodaczewska 表明，Nil空间中平移三角形的内角和大于或等于 π，这也是本研究的目标。不过，下面采用的方法似乎普遍适用于这三种几何，在这些几何中，测地曲线和平移曲线有所不同。

备注 1.1 在瑟斯顿几何中，常曲率几何（欧几里得几何 $E^3,$ 、双曲几何 $H^3,$ 、球面几何 S^3）已得到广泛研究，但其余五种$\widetilde{\text{几何}}$——$H^2\times R$、$S^2\times R$、Nil几何、SL_2R、Sol——至今仅从微分几何和拓扑学的角度进行了深入研究。然而，彰显这些几何之美及其内在结构的经典概念，例如测地曲线和球面、平移曲线和平移球面、格、测地三角形和平移三角形及其曲面、它们的内角和，以及平面或空间中由一条线段张成给定

角的点的轨迹（等视曲线或曲面），以及与常曲率几何中已知结论类似的命题，都可以加以表述。这些内容尚未成为研究重点（见 *[39, 41]*）。

本文将探讨其中的一些主题。

在第 2 节中，我们介绍 Nil几何的射影模型，并使用其标准黎曼度量；该度量通过拉回变换由原点处的无穷小弧长平方得到。我们还回顾 Nil几何的等距变换群，并概述平移曲线。

在第 3 节中，我们研究 Nil平移三角形，并证明 Nil几何中平移三角形的内角和可以大于或等于$\pi.$。我们还确定了该内角和恰好等于 $\pi.$的条件。

在第 4 节中，我们首先采用通常的欧几里得平面定义介绍等光曲线，然后定义空间可见性的基本概念，即等光曲面的概念。借助这些概念，我们可以为任意线段引入等光曲面和正交光曲面，并以类似方式在 Nil几何中为类平移线段定义它们。

在最后的第 5 节中，我们考察给定平移型线段的类平移等光曲面。我们给出了这些曲面的定义，以及确定任意平移型线段的类平移等光曲面的步骤。该步骤或许还可以进一步完善，以确定任意给定 Nil曲线的类平移等光曲面。我们确定了这些曲面的隐式方程，并对其进行了可视化。Thaloids 也作为特殊情形进行了分析。关于这一主题的类似研究仅在常曲率空间中开展过（见 [8, 9, 27, 28, 5]）。

2 Nil几何及其平移曲线

Nil几何可由维尔纳·海森堡发现的著名实矩阵群 L(ℝ) 导出。海森堡矩阵的左（行—列）乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+xb+z \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

定义了 Nil几何中点的“平移”L(ℝ) $= \{(x, y, z) : \ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$ $=\{(a, b, c) : \ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$。这些平移一般不满足交换律。该

形式为矩阵 K(z) $\lhd$ L 的矩阵

$$\mathbf{K}(z) \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (0,0,z) \tag{2.2}$$

构成单参数中心，即其每个元素都与 L 的所有元素交换。K 的元素称为纤维平移。海森堡群的 Nil几何可通过点上的“右平移”以射影（仿射）方式解释，其矩阵公式如下

$$(1;a,b,c) \to (1;a,b,c) \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1; x+a, y+b, z+bx+c) \tag{2.3}$$

如 2.1 所示。这里我们将 L 视为在齐次坐标下具有右作用的射影共线变换群。我们将使用笛卡尔齐次坐标单形 E_0(e$_0$),E_1^∞(e$_1$),E_2^∞(e$_2$), E_3^∞(e$_3$), ({e$_i$} $\subset$ V^4, 其单位点为 E(e $=$ e$_0$ +e$_1$ +e$_2$ +e$_3$))；该单形由原点E_0 以及坐标轴的理想点分别确定。此外，y $= c$x 与 $0 < c \in \mathbb{R}$ (或 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) 定义了射影三维球面 $\mathcal{PS}^3$ 上的点 (x) $=$ (y) （或射影空间 $\mathcal{P}^3$ 上的点，其中相反射线 (x) 和 (−x) 被视为相同）。对偶系 {($\boldsymbol{e}^i$)}, ({$\boldsymbol{e}^i$} $\subset \boldsymbol{V}_4$)，其中 e$_i\boldsymbol{e}^j = \delta_i^j$ （克罗内克符号），描述了单形平面，尤其是无穷远平面 ($\boldsymbol{e}^0$) $= E_1^\infty E_2^\infty E_3^\infty$；一般而言，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\frac{1}{c}$ 定义了 $\mathcal{PS}^3$ （或 $\mathcal{P}^3$）中的平面 ($\boldsymbol{u}$) $=$ ($\boldsymbol{v}$)。因此， $0 =$ x$\boldsymbol{u} =$ y$\boldsymbol{v}$ 表示点 (x) $=$ (y) 与平面 ($\boldsymbol{u}$) $=$ ($\boldsymbol{v}$) 的关联，也记作 (x)I($\boldsymbol{u}$)。由此，Nil几何也可在仿射三维空间 A^3 （即 E^3）中可视化 [24]。

在此背景下，E. Moln´ar [19] 推导出了众所周知的、在 Nil几何任意一点处对平移 L 不变的无穷小弧长平方如下

$$\begin{gathered} (dx)^2 + (dy)^2 + (-xdy + dz)^2 = \\ (dx)^2 + (1+x^2)(dy)^2 - 2x(dy)(dz) + (dz)^2 =: (ds)^2 \end{gathered} \tag{2.4}$$

由公式 2.3 定义的平移群 L 可扩展为一个更大的射影变换群 G，该群保持纤维不变，并且等价于 Nil几何的（保向）等距变换群。

在 [21] E. Moln´ar 中，已证明绕原点处的 z-轴旋转角度 ω，作为 Nil几何的等距变换，在处处保持黎曼度量不变,

将是从 x, y 到 z像 $\overline{z}$ 的二次映射，如下所示:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}=\mathbf{r}(O,\omega):(1;x,y,z)\to(1;\overline{x},\overline{y},\overline{z});\\ \overline{x}=x\cos\omega-y\sin\omega,\ \ \overline{y}=x\sin\omega+y\cos\omega,\\ \overline{z}=z-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}(x^2-y^2)\sin 2\omega+\frac{1}{2}xy\cos 2\omega.\end{gathered}\tag{2.5}$$

然而，旋转公式 $\mathcal{M}$ 通过二次映射 α 与线性旋转 Ω 共轭，如下所示

$$\begin{gathered}\alpha^{-1}:\ \ (1;x,y,z)\xrightarrow{\alpha^{-1}}(1;x',y',z')=(1;x,y,z-\frac{1}{2}xy)\ \text{ to}\\ \Omega:\ \ (1;x',y',z')\xrightarrow{\Omega}(1;x",y",z")=(1;x',y',z')\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\omega&\sin\omega&0\\0&-\sin\omega&\cos\omega&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\\ \text{with }\ \alpha:(1;x",y",z")\xrightarrow{\alpha}(1;\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(1;x",y",z"+\frac{1}{2}x"y").\end{gathered}\tag{2.6}$$

这一二次共轭也会改变 2.3 节中的 Nil平移。现在，2.3 节中参数为 (*X*, *Y*, *Z*) 的平移（而非 (*x*, *y*, *z*)）将通过上述共轭变换为该平移

$$(1;x,y,z)\longrightarrow(1;\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(1;x,y,z)\begin{pmatrix}1&X&Y&Z-\frac{1}{2}XY\\0&1&0&-\frac{1}{2}Y\\0&0&1&\frac{1}{2}X\\0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{2.7}$$

它仍然是一个仿射共线变换。

2.1 平移曲线与球面

我们考虑一条 Nil曲线 (1, *x*(*t*) *y*(*t*) *z*(*t*))，其在原点 $O=E_0=$ (1, 0, 0, 0) 处具有给定的初始切向量

$$u=\dot{x}(0),\ v=\dot{y}(0),\ w=\dot{z}(0).\tag{2.8}$$

对于一条平移曲线，令其在点 (1, $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$) 处的切向量由矩阵 2.3 及以下方程定义：

$$(0,u,v,w)\begin{pmatrix}1 & x(t) & y(t) & z(t)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x(t)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(0,\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)). \tag{2.9}$$

因此，Nil几何中的平移曲线（见 [20], [24] [25]）由上述一阶微分方程组 $\dot{x}(t) = u$, $\dot{y}(t) = v$, $\dot{z}(t) = v \cdot x(t) + w$定义，其解如下：

$$x(t)=ut,\ y(t)=vt,\ z(t)=\frac{1}{2}uvt^2+wt. \tag{2.10}$$

我们假设平移曲线的起点是原点，因为通过平移 2.3，我们可以将曲线变换到任意起点；此外，可以用“地理”参数 ϕ 和θ来假设单位初速度平移：

$$\begin{gathered}x(0)=y(0)=z(0)=0;\\ u=\dot{x}(0)=\cos\theta\cos\phi,\ \ v=\dot{y}(0)=\cos\theta\sin\phi,\ \ w=\dot{z}(0)=\sin\theta;\\ -\pi\le\phi\le\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

定义 2.1 点 P_1 和 P_2之间的平移距离 $d^t(P_1, P_2)$，定义为上述平移曲线从 P_1 到 P_2的弧长。

定义 2.2 半径为 $r > 0$、中心位于原点的球面（记作$S^t_O(r)$），其经度和高度参数分别为 ϕ 和 θ（见 2.11），由以下方程指定：

$$S^t_O(r):\begin{cases}x(\phi,\theta)=r\cos\theta\cos\phi,\\ y(\phi,\theta)=r\cos\theta\sin\phi,\\ z(\phi,\theta)=\frac{r^2}{2}\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi+r\sin\theta.\end{cases} \tag{2.12}$$

定义 2.3 在 Nil空间 中，中心为 O、半径为 r 的平移球面的内部称为平移球，记作 $B^t_O(r)$，即当且仅当 $0 \le d^t(O, Q) \le r$ 时， $Q \in B^t_O(r)$。

2.12 中的参数化使我们能够得出 $B^t_O(r)$ 的隐式方程：

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{xy}{2}\right)^2=r^2 \tag{2.13}$$

3 平移三角形

我们在 Nil空间的射影模型中考虑 3 个点 A_1, A_2, A_3。连接点 A_i 和 A_j（$i < j$, i, j, $k \in \{1, 2, 3\}, k \neq i, j$）的平移线段 a_k 称为顶点为 A_1, A_2, A_3 的平移三角形的边。在 Rie-

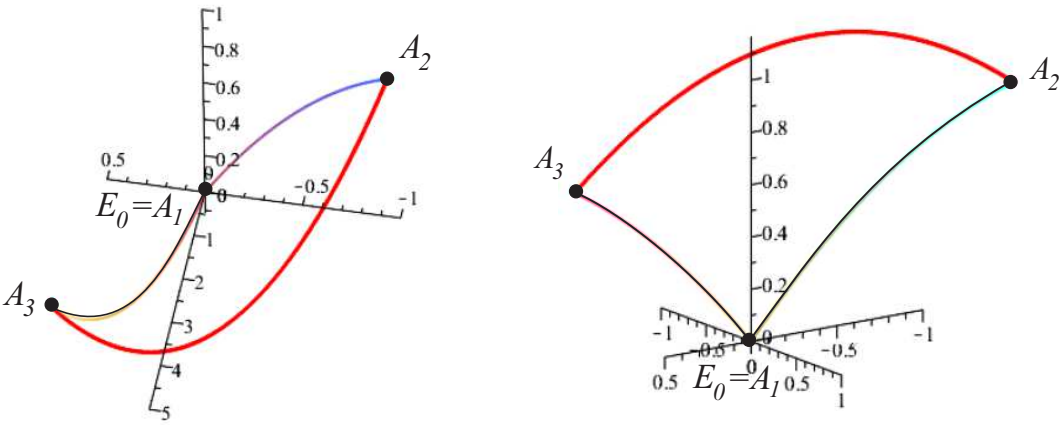

图 1：顶点为 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$、$A_2 = (1, -1, 1, 1)$、$A_3 = (1, 1/2, 5, 1/2)$ 的平移三角形（左），以及顶点为 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$、$A_2 = (1, -1, 1, 1)$、$A_3 = (1, 1/2, -1, 1/2)$ 的平移三角形（右）。

在流形几何中，度量张量（或无穷小弧长平方，见 2.4）用于定义两条曲线之间的角 θ。若它们在交点处的切向量分别为 u 和 v，且 g_{ij} 是度量张量的分量，则

$$\cos(\theta) = \frac{u^i g_{ij} v^j}{\sqrt{u^i g_{ij} u^j \; v^i g_{ij} v^j}} \tag{3.1}$$

根据上述角的定义和无穷小弧长平方（2.4）可知，在 Nil几何的射影模型原点处，这些角与欧几里得角相同。

考虑一个平移三角形 $A_1A_2A_3$，根据 Nil几何的齐性，我们可以假设其中一个顶点与原点 $A_1 = E_0 = (1, 0, 0, 0)$重合，另外两个顶点分别为 $A_2(1, x^2, y^2, z^2)$和 $A_3(1, x^3, y^3, z^3)$。

我们将考察在顶点 A_i 处标记为 ω_i（$i \in \{1, 2, 3\}$）的平移三角形的内角。这里需要指出的是，两条相交平移曲线的角取决于其切向量的方向。

为了确定平移三角形 $A_1A_2A_3$ 的内角及其内角和 $\sum_{i=1}^{3}(\omega_i)$，我们将平移 $\mathbf{T}_{A_i}$、$(i \in \{2,3\})$ 定义为 Nil几何的等距变换群中的元素，该变换将原点 E_0 映射到 A_i（见图 2）。

例如，等距变换 $\mathbf{T}_{A_2}$ 及其逆变换（相差一个正行列式因子）可表示为:

$$\mathbf{T}_{A_2}=\begin{pmatrix}1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{T}_{A_2}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x_2 & -y_2 & x_2y_2-z_2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -x_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{A_3}=\begin{pmatrix}1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{T}_{A_3}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x_3 & -y_3 & x_3y_3-z_3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -x_3\\ 0 & 0 & 0 & 1,\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

顶点 $A_i(i \in \{1,2,3\})$ 的像 $\mathbf{T}_{A_2}^{-1}(A_i)$ 如下（另见图 2）：

$$\begin{gathered}T_{A_2}^{-1}(A_1)=A_1^2=(1,-x_2,-y_2,x_2y_2-z_2);\ T_{A_2}^{-1}(A_2)=A_2^2=E_0=(1,0,0,0);\\ T_{A_2}^{-1}(A_3)=A_3^2=(1,-x_2+x_3,-y_2+y_3,x_2y_2-x_2y_3-z_2+z_3);\\ T_{A_3}^{-1}(A_1)=A_1^3=(1,-x_3,-y_3,x_3y_3-z_3);\ T_{A_3}^{-1}(A_3)=A_3^3=E_0=(1,0,0,0);\\ T_{A_3}^{-1}(A_2)=A_2^3=(1,x_2-x_3,y_2-y_3,-x_3y_2+x_3y_3+z_2-z_3).\end{gathered} \tag{3.3}$$

我们的目标是确定平移三角形 $A_1A_2A_3$（见图 1 和图 2）的内角和 $\sum_{i=1}^{3}(\omega_i)$。我们已经看到，ω_1 与原点处有公共点的平移曲线之间的角 E_0 与欧几里得情形相同，因此可按通常的欧几里得方法求得。

平移 $\mathbf{T}_{A_i}$ $(i=2,3)$ 是 Nil几何中的等距变换，因此 ω_i 等于角 $(t(A_i^i, A_1^i)t(A_i^i, A_j^i))\angle(i,j=2,3,\ i\neq j)$（见图 2），其中 $t(A_i^i, A_1^i)$、$t(A_i^i, A_j^i)$ 是定向平移曲线（$E_0=A_2^2=A_3^3$），而 ω_1 等于角 $(t(E_0, A_2)t(E_0, A_3))\angle$，其中 $t(E_0, A_2)$、$t(E_0, A_3)$ 也都是定向平移曲线。

我们用 $\mathbf{t}_i^j$ 表示定向测地曲线$t(E_0, A_i^j)$的定向单位切向量，其中 $(i,j) \in \{(1,3),(1,2),(2,3),(3,2),(3,0),(2,0)\}$ 且$A_3^0=A_3, A_2^0=A_2$。$\mathbf{t}_i^j$ 的欧几里得坐标为:

$$t_i^j=(\cos\theta_i^j\cos\phi_i^j, \cos\theta_i^j\sin\phi_i^j, \sin\theta_i^j). \tag{3.4}$$

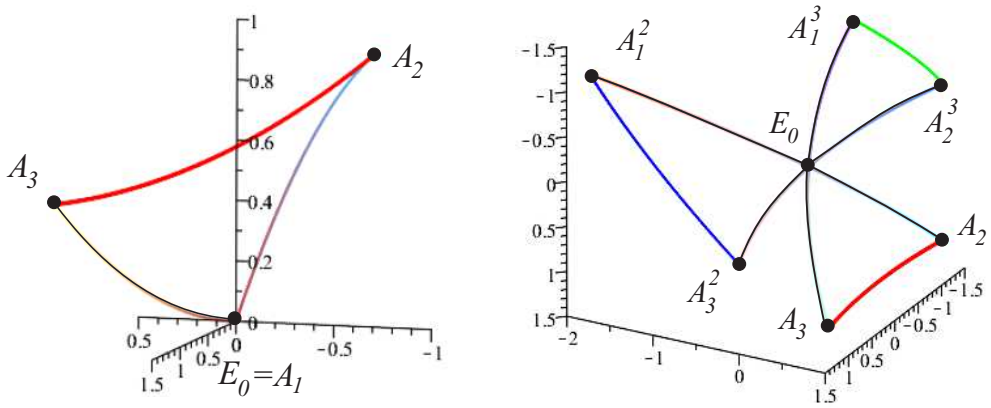

图2：顶点为 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$、 $A_2 = (1, -1, 1, 1)$、$A_3 = (1, 1/2, 3/2, 1/2)$ 的平移三角形及其平移副本 $A_1^2A_3^2E_0$ 和 $A_1^3A_2^3E_0$。

为了求两条平移曲线 $t_{E_0A_i^j}$ 和 $t_{E_0A_k^l}$ （$(i, j) \neq (k, l)$；(i, j)，$(k, l) \in \{(1, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 0), (2, 0)\}$）在原点 E_0 相交处的夹角，我们需要确定它们在起点 E_0处的切向量 t_s^r （$(s, r) \in \{(1, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 0), (2, 0)\}$）（见 3.4）。由 3.4 可知，原点处的切向量由相应平移曲线（见 2.11）的参数 ϕ 和 θ 给出，这些参数可根据平移曲线终点的齐次坐标确定。

根据 Nil几何的齐性，可以假设给定平移曲线段的起点为 $E_0 = P_1 = (1, 0, 0, 0)$，而另一个终点由其齐次坐标 $P_2 = (1, a, b, c)$ 给出。我们考虑平移曲线段 $t_{P_1P_2}$，并确定其参数 (ϕ, θ, r)，这些参数由 P_2 的实坐标 a, b, c 表示。由方程组 2.11 可直接得到：

引理 3.1 1. 设 $(1, a, b, c)$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ c \in \mathbb{R})$ 为点 $P \in$ Nil几何的齐次坐标。相应平移曲线 t_{E_0P} 的参数如下

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{arccot}\left(\frac{a}{b}\right),\ \textit{or}\ \phi = \operatorname{arccot}\left(\frac{a}{b}\right) - \pi, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{c - \frac{ab}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),\ r = \left|\frac{c - \frac{ab}{2}}{\sin\theta}\right|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

2. 设 $(1, a, 0, c)$ $(a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ 为该点的齐次坐标 *t*

$P \in$ Nil几何。相应平移曲线 t_{E_0P} 的参数如下

$$\phi = \pi \cdot n,\ (n \in \{0,1\}),\ \theta = \arctan\Big(\frac{c}{a}\Big),\ r = \Big|\frac{a}{\cos\theta}\Big|. \tag{3.6}$$

3. 设 (1, a, 0, 0) ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) 为 Nil几何中点$P \in$ 的齐次坐标。相应平移曲线 t_{E_0P} 的参数如下

$$\phi = \pi \cdot n,\ (n \in \{0,1\}),\ \theta = \pi \cdot n,\ (n \in \{0,1\}),\ r = |a|. \tag{3.7}$$

4. 设 (1, 0, b, 0) ($b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) 为 Nil几何中点$P \in$ 的齐次坐标。相应平移曲线 t_{E_0P} 的参数如下

$$\phi = \pm\frac{\pi}{2},\ \theta = \pi \cdot n,\ (n \in \{0,1\}),\ r = |b|. \tag{3.8}$$

5. 设 (1, 0, 0, c) ($c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) 为 Nil几何中点$P \in$ 的齐次坐标。相应平移曲线 t_{E_0P} 的参数如下

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2},\ r = |c|.\ \square \tag{3.9}$$

应用上述引理，我们得到如下结果

定理 3.2 平移三角形的内角和大于或等于 π。

证明：平移 $\mathbf{T}_{A_2}^{-1}$ 和 $\mathbf{T}_{A_3}^{-1}$ 是 Nil几何中的等距变换，因此 ω_2 等于有向平移线段 $t_{A_2^2A_1^2}$、 $t_{A_2^2A_3^2}$与 ω_3所成的角 $((A_2^2A_1^2),(A_2^2A_3^2))\angle$ （见图 2），也等于有向平移线段 $t_{A_3^3A_1^3}$ 和 $t_{A_3^3A_2^3}$ 所成的角 $((A_3^3A_1^3), (A_3^3A_2^3))\angle$（$E_0 = A_2^2 = A_3^3$）。

将点 A_i^j（见 3.3 和 3.4）$((i, j) \in \{$(1, 3), (1, 2), (2,3),(3,2),(3,0),(2,0)$\})$ 的坐标代入引理 3.1 的相应方程，显然可得

$$\begin{aligned}
&\theta_2^0 = -\theta_1^2,\ \phi_2^0 - \phi_1^2 = \pm\pi \Rightarrow \mathbf{t}_2^0 = -\mathbf{t}_1^2,\\
&\theta_3^0 = -\theta_1^3,\ \phi_3^0 - \phi_1^3 = \pm\pi \Rightarrow \mathbf{t}_3^0 = -\mathbf{t}_1^3,\\
&\theta_3^2 = -\theta_2^3,\ \phi_3^2 - \phi_2^3 = \pm\pi \Rightarrow \mathbf{t}_3^2 = -\mathbf{t}_2^3.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

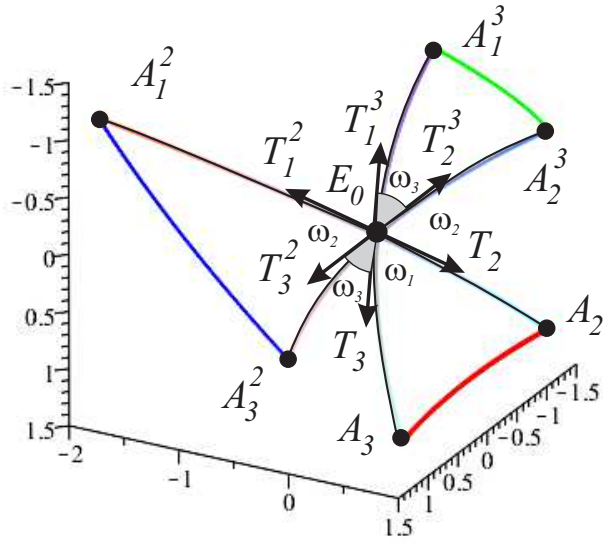

图3：顶点为 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$、 $A_2 = (1, -1, 1, 1)$、$A_3 = (1, 1/2, 3/2, 1/2)$ 的平移三角形，其平移副本为 $A_1^2A_3^2E_0$、 $A_1^3A_2^3E_0$，角为 $\omega_i(i \in \{1, 2, 3\}$。

位置向量 $\mathrm{t}_i^j = \overrightarrow{E_0T_i^j}$ 的端点 T_i^j 位于以原点为中心的单位球面上。向量 t_i^j 和 t_r^s 之间的角 ω_i $(i \in \{1, 2, 3\})$ 的度量，等于单位球面上相应点 T_i^j 和 T_r^s 之间的球面距离（见图 3）。此外，由方程 (3.9) 可直接得出，每一对点 (T_2, T_1^2)、(T_3, T_1^3)、(T_2^3, T_3^2) 都包含关于中心为 E_0 的单位球面的对跖点。

由于对跖性 $\omega_1 = T_2E_0T_3\angle = T_1^2E_0T_1^3\angle$，因此它们对应的球面距离也相等（见图3）。现在，内角 $\sum_{i=1}^{3}(\omega_i)$ 之和可视为三段连续的球面弧（$T_3^2T_1^2$）、（$T_1^2T_1^3$）、 $T_1^3T_2^3$）。由于球面上满足三角不等式，这些弧长之和大于或等于单位球面上大圆周长的一半，即 π。 □

下面的引理可直接由上述证明得出：

引理3.3 Nil平移三角形 $A_1A_2A_3$ 的角和 $\sum_{i=1}^{3}(\omega_i)$ 当且仅当点 T_i^j $((i, j) \in \{(1, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 0), (2, 0)\})$ 位于一个欧几里得平面上（图4）。

现在，我们区分内角和恰好为 π. 的情形

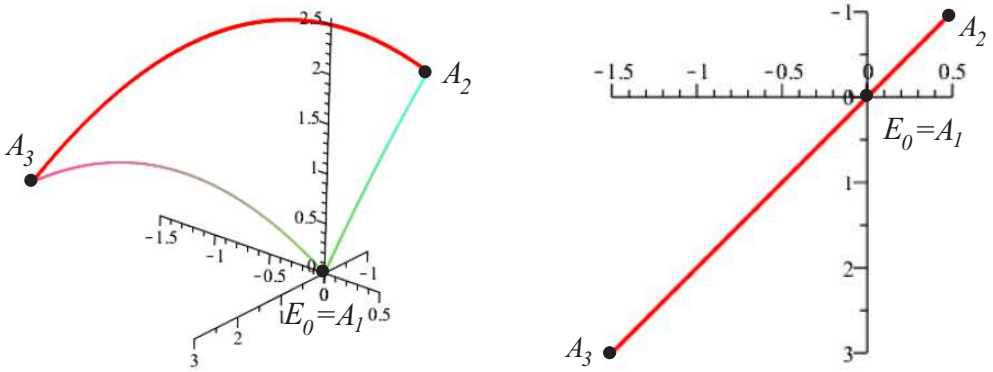

图4：顶点为 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$、$A_2 = (1, -1, 1/2, 2)$、$A_3 = (1, 3, -3/2, 1)$ 的平移三角形。平移曲线段 $t_{A_1A_2}$, $t_{A_2A_3}$, $t_{A_3A_1}$ 位于一个与 $[x, y]$ 底平面正交的平面上。此平移三角形的内角和为 $\sum_{i=1}^{3}(\omega_i) = \pi$。

引理3.4 如果平移三角形 $A_1A_2A_3$ 的顶点位于一个垂直于 Nil几何模型底平面（坐标平面 $[x, y]$）的平面内，那么其内角和 $\sum_{i=1}^{3}(\omega_i) = \pi$。

证明：由平移曲线的方程组 (2.10) 可知，平移曲线 t_{E_0P} ($P \in$ Nil几何) 上的点都位于一个垂直于 $[x, y]$ 底平面的欧几里得平面内，因此，其切线也位于该平面内。

此外，由公式（2.10）和（3.3）可直接推出：如果平移三角形 $A_1A_2A_3$ 位于这个垂直于底平面的平面 α 内，那么经平移得到的平移像也位于一个垂直于底平面的平面 α' 内，并且每条与底平面正交的 α' 都可以由 α 的平移副本导出。因此，应用引理3.3，我们证明了这个引理。□

我们可以确定任意平移三角形的内角和。下表总结了给定平移三角形的内角的一些数值数据：

表 2: $A_2(1,-1,1,1)$, $A_3(1,1/2,y^3,1/2)$

y^3	ω_1	ω_2	ω_3	$\sum_{i=1}^{3}(\omega_i)$
-10	1.85298	0.75454	0.58205	3.18956
-2	1.78411	0.52781	0.83577	3.14770
-1	1.70632	0.44929	0.98637	3.14198
$1/10$	1.35152	0.46598	1.32927	3.14677
$3/4$	1.19668	0.68254	1.31811	3.19733
$3/2$	1.19912	1.08556	0.97181	3.25650
5	1.24271	1.94607	0.36983	3.55861
10	1.25686	2.12780	0.40324	3.78790

4 等视曲线简介

众所周知，在欧几里得平面上，使一条线段张成给定角 α $(0 < \alpha < \pi)$ 的点的轨迹，是除端点外的两段圆弧的并集，这两段圆弧以该线段为公共弦。如果这个 α 等于 $\frac{\pi}{2}$，那么我们得到泰勒斯圆。将这条线段替换为另一条一般曲线，便得到等光曲线的欧几里得定义：

定义 4.1（**[44]**）与曲线相交且夹角恒为 α $(0 < \alpha < \pi)$ 的切线交点的轨迹，称为给定曲线的 α –等光曲线。夹角为直角的等光曲线称为正交等光曲线。

注 4.2 有时我们将 α –和 $\pi - \alpha$ –等光曲线放在一起考虑。因此，在截面的情形下，我们得到两个以该线段为公共弦的圆（不包括该线段的端点）。下文称它们为 α –等光圆。

虽然 Taylor 于 1884年提出了“等光曲线”这一名称（[42]），但在 [44] 中可以找到更早研究成果的相关记载。在等光曲线晦暗的历史中，我们可以看到 la Hire（1704年研究摆线）和 Chasles（1837年研究圆锥曲线和外旋轮线）等学者的名字，他们都是该领域的先驱。 [44]，中介绍了一张非常有趣的等光曲线和直角等光曲线表，可惜没有准确注明出处。不过，近年来该主题仍有相关研究，显示出其时效性。 [2] 和 [3]，利用支撑函数研究了闭严格凸曲线的欧几里得等光曲线。论文 [13, 46, 47] 讨论了以圆或椭圆为等光曲线的欧几里得曲线

。在欧几里得平面几何中，其他作为等光曲线出现的曲线也得到了充分研究，见 E^2, , 例如 [14, 45]。[10] 和 [30] 研究了圆锥曲线的等光曲线。Kunkli 等人也研究了贝塞尔曲线，见 [12]。许多论文关注等光曲线的性质，例如 [15, 16, 17], 及其中的参考文献。等光曲线也有一些推广，例如 Odehnal 在 [28] 中研究的等光曲线，以及 Skrzypiec 在 [27, 31] 中研究的 secantopics。

我们可以将最初的问题推广到空间中："一个给定线段所张的给定角的点轨迹是什么？"或者问一个与之等价的问题："对于给定的空间点 A 和 B, 使三角形 $ABP\triangle$ 在 P处的内角为给定角的点 P的轨迹是什么？"我们用这个问题来定义欧几里得空间线段的 α–等光曲面。

定义4.3 欧几里得空间线段 $\overline{A_1A_2}$ 的 α–等光曲面，是由满足以下条件的点 P构成的轨迹：由 A_1、A_2 和 P构成的三角形在 P处的内角为 α. 。如果 α 是直角，则该曲面称为 $\overline{A_1A_2}$.的 Thaloid。

在欧几里得空间中很容易看出：

定理4.4 在欧几里得空间中，使给定线段所张的角为给定角 α $(0 < \alpha < \pi)$ 或 $\pi - \alpha$ 的点的轨迹，是一个自交环面。该环面由绕截面所在直线旋转 α – 等光圆而得到，这些等光圆绘制于包含该截面的任意平面内。 □

注 4.5 1. 上述定理中的环面同时包含给定角及其补角对应的等视曲面。在这种情况下，我们可以沿自交线轻易地将 α – 和 $\pi - \alpha$ – 等视曲面分开。具体而言，正交视曲面是一个球面，其直径就是该截面。我们可以将其称为该线段的 Thaloid。

2. 没有必要以这种方式考察其他空间曲线所定义的等视曲面，因为如果曲线的曲率不恒为 0，那么就存在一个外部点，使得无法将该曲线与此点置于同一平面内。在这种情况下，上述定义需要加以推广。

关于欧几里得几何中的其他等视曲面，请参见 [8, 9], , 其中我们将等视曲面的定义扩展到了其他空间对象。等光曲线的概念也可以扩展到其他常曲率平面（双曲平面H^2和球面H^2）。我们在 [5] 和 [6]中研究了这些问题。

5 Nil几何中的类平移等视曲面

在本研究的其余部分，我们将重点讨论Nil几何中平移型线段的等光曲面。该线段在射影模型中远非直线，而是一条由2.10描述的参数曲线。我们可以参照定义4.3作出如下定义。

定义 5.1 设 α –为一条平移型线段 $\overline{A_1A_2}$ 的 Nil几何类平移 α –等光曲面，它是满足以下条件的点 P 的轨迹：由 A_1、 A_2 和 P 构成的类平移三角形中，P 处的内角为 $\alpha.$。若 α 为直角，则称其为 $\overline{A_1A_2}$.的平移型塔洛伊德曲面。

这里我们强调，截面本身并未出现在我们的计算中，我们只处理端点。超出本研究范围的一个有趣问题是：直纹曲面，或者更准确地说，在本例中，由从外部点连向截面上所有点的曲线生成的三角曲面是什么形状。因此，在 Nil几何意义下，这个角确实可以视为平面角；也可能出现线段与射线之间不理想的相交。截面本身和射线也可以是类平移的或类测地线的。其中一些问题在 [39]中提出。

根据 Nil几何 的齐性，我们可以假设其中一个端点与原点 $A_1 = E_0 =$ (1, 0, 0, 0)重合，而另一个端点为 $A_2(1, a, b, c)$。考虑一点 $P(1, x, y, z)$，我们可以按照上一节所述的步骤确定 角 $A_1PA_2\angle$。

我们将 $\mathbf{T}_P^{-1}$ 应用于这三个点。该变换保持 角$A_1PA_2\angle$ 不变，并将 P拉回到原点，因此所求的角似乎是实际大小。将 (3.2) 中的 x_2、 y_2 和 z_2 分别替换为 x、 y 和 z，即可得到 $\mathbf{T}_P^{-1}$：

$$\mathbf{T}_{A_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & -y & xy - z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_P^{-1}(P) &= (1, 0, 0, 0); \\ \mathbf{T}_P^{-1}(A_1) &= (1, -x, -y, xy - z); \\ \mathbf{T}_P^{-1}(A_2) &= (1, a - x, b - y, -bx + xy + c - z). \end{aligned} \tag{5.2}$$

根据 2.10 和 2.11，从原点到点 $T(1, x, y, z)$ 的平移曲线在原点处的切线可通过以下公式得到：

$$\mathbf{t} = (u, v, w) = \left(x, y, z - \frac{xy}{2}\right) \tag{5.3}$$

我们将从原点 $E_0 = \mathsf{T}_P^{-1}(P)$ 出发，分别连接 $\mathsf{T}_P^{-1}(A_1)$ 和 $\mathsf{T}_P^{-1}(A_2)$ 的平移曲线的切线记为 t_1 和 t_2。我们可以通过将 5.3 应用于 5.2 来计算这些切线。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \left(-x, -y, \frac{xy}{2} - z\right) \\ \mathbf{t}_2 &= \left(a - x, b - y, c - z + \frac{(x+a)(y-b)}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

最后，将 t_1 和 t_2 的角度固定为 α，我们得到 $\overline{A_1A_2}$. 的类平移 α –等光曲面

定理 5.2 设 Nil几何中的一个类平移线段由其端点 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$ 和 $A_2 = (1, a, b, c)$ 给出。那么，该类平移线段 $\overline{A_1A_2}$ 的类平移 α – 等光曲面具有如下隐式方程:

$$\cos(\alpha) = \frac{x\,(x-a) + y\,(y-b) + \left(z - \frac{xy}{2}\right)\left(z - c - \frac{(x+a)(y-b)}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + \left(z - \frac{xy}{2}\right)^2\right)\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + \left(z - c - \frac{(x+a)(y-b)}{2}\right)^2\right)}} \tag{5.5}$$

□

图 5 展示了 Nil几何中一般类平移线段的一些等视曲面。左侧显示的是对应于一个锐角的等视曲面，右侧显示的是同一线段的平移型塔洛伊德曲面。

我们来考察线段的端点位于 z 轴上的特殊情况，即 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$ 和 $A_2 = (1, 0, 0, c)$。在这种情况下，类平移线段在模型中看起来像一条欧几里得线段。在 5.5 a 中将 b 和 α 替换为 0、0 和 $\frac{\pi}{2}$，即可得到下列方程:

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{xy}{2}\right)\left(z - \frac{xy}{2} - c\right) = 0 \tag{5.6}$$

或者，经过一些变换后:

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{xy}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} \tag{5.7}$$

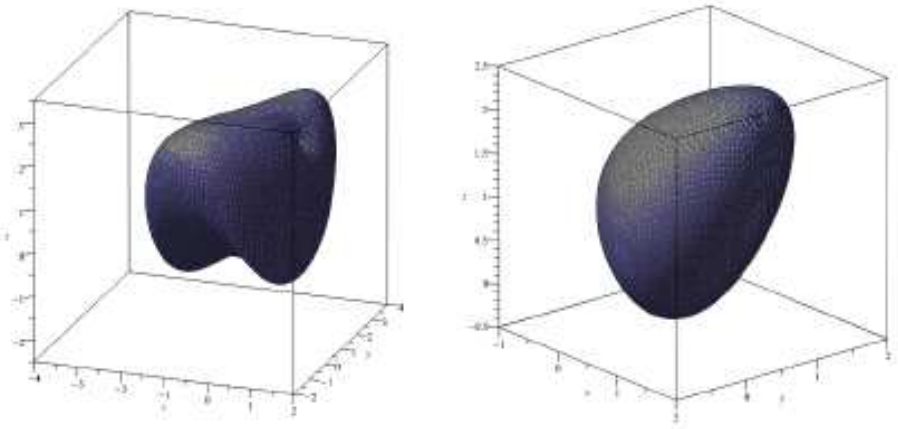

图5：等光曲面，其中 $A_2 = (1, 1, 1, 2)$ 以及 $\alpha = \frac{\pi}{3}$（左）和 $\frac{\pi}{2}$（右）.

现在，将 $\mathbf{T}_F^{-1}$ 应用于该方程中的所有点，其中 $F(1, 0, 0, c/2)$，我们得到

$$\mathbf{T}_F^{-1}(P) = (1; x', y', z') = (1; x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(1; x, y, z - \frac{c}{2}\right) \tag{5.8}$$

$$(x')^2 + (y')^2 + \left(z' - \frac{xy}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} \tag{5.9}$$

比较方程 5.9 和 2.13，我们可以得出以下引理:

引理5.3 给定 Nil几何中一个由端点 $A_1 = (1, 0, 0, 0)$ 和 $A_2 = (1, a, b, c)$ 确定的平移型线段。那么，该线段的平移型塔洛伊德曲面是一个去掉线段端点的 Nil球面，当且仅当 $a = b = 0.$。此时，Nil球面的中心为 $F(1, 0, 0, c/2)$，半径为 $\frac{|c|}{2}$。

证明：为证明引理5.3，我们还需进一步考虑上述计算未涵盖的另一方向。由于计算和公式较为冗长，这里仅给出证明概要。首先，我们需要求出平移截段 $\overline{A_1A_2}$ 的中点F 及其长度，该长度的一半即为球面的半径

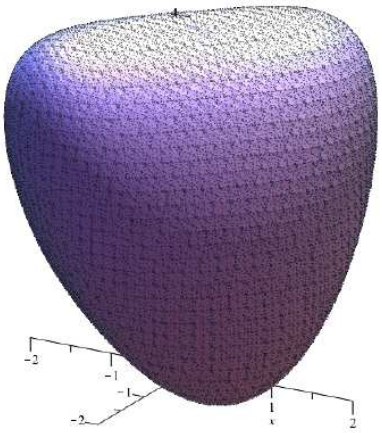

图 6：平移线段的等光曲面（平移型塔洛伊德曲面） $\overline{A_1A_2}$其中 $A_1 =$(1, 0, 0, 0)、 $A_2 =$(1, 0, 0, 4)，以及 $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

。然后，利用 T_F^{-1} 和 2.13，写出直径为 $\overline{A_1A_2}$. 的平移球面的方程。我们将其与方程 5.5 右侧的分子进行比较（代入 $\alpha = \pi/2$）。最后，考虑这两个方程之差，可得其为 0 当且仅当 $ay - bx = 0$，或$ay - bx = 2ab - 4c$，这等价于 $a = b = 0$. □

图 6 展示了与平移线段 $A_1 =$ (1,0,0,0) 和 $A_2 =$ (1,0,0,4) 相关的平移型塔洛伊德曲面，以及一个中心为$F =$(1,0,0,2)、半径为 2 的球面。

参考文献

[1] Brodaczewska, K.：《Nil中的初等几何》。博士论文（自然科学博士），德累斯顿工业大学数学与自然科学学院（2014年）。[2] Cie´slak, W. – Miernowski, A. – Mozgawa, W.：《闭严格凸曲线的等光线》，数学讲义，1481（1991年），第28–35页。[3] Cie´slak, W. – Miernowski, A. – Mozgawa, W.：《闭严格凸曲线的等光线 II》，帕多瓦大学数学研讨会报告 96（1996年），第37–49页。

[4] Chavel, I.：《黎曼几何：现代导论》。剑桥高等数学研究丛书（2006年）。[5] Csima, G. – Szirmai, J.：《常曲率几何中圆锥曲线的等光曲线》，数学通讯，19（2014年），277–290。[6] Csima, G. – Szirmai, J.：《双曲平面中广义圆锥曲线的等光曲线》，乌克兰数学杂志，71/12（2020年），1929–1944。[7] Csima, G. – Szirmai, J.：《SL_2R空间中平移三角形和测地三角形的内角和》，Filomat，32/14（2018年），5023–5036。[8] Csima, G. – Szirmai, J.：《n维欧几里得空间中的等视超曲面》，KoG，17（2013年），53–57。[9] Csima, G. – Szirmai, J.：《多面体的等视曲面》，计算机辅助几何设计 47（2016年），55–60。[10] Holzm¨uller, G.：《等角对应理论导论》，B.G. Teuber，莱比锡-柏林（1882年）。[11] Kobayashi, S. – Nomizu, K.：《微分几何基础》，第一卷，Interscience，Wiley，纽约（1963年）。[12] Kunkli, R. – Papp, I. – Hoffmann, M.：《贝塞尔曲线的等光线》，计算机辅助几何设计 30（2013年），78–84。[13] Kurusa, A.：《凸平面体是否由一条等光曲线确定？》，Beitr. Algebra Geom. 53（2012年），281–294。[14] Loria, G.：《特殊代数与超越平面曲线》第1、2卷，B.G. Teubner，莱比锡-柏林（1911年）。[15] Michalska, M.：《卵形线的等光曲线面积具有凸性的一个充分条件》，帕多瓦大学数学研讨会报告 110（2003年），161–169。[16] Michalska, M. – Mozgawa, W.：三角形的 α 等光曲线及其与卵形线 α等光曲线的联系，帕多瓦大学数学研讨会报告，第133卷（2015年），第159–172页

[17] Miernowski, A. – Mozgawa, W.：关于等光曲线凸性的一些几何条件, Rend. Semin. Mat., Torino 55, No.2 (1997), 93–98.[18] Milnor, J.：李群左不变度量的曲率，Advances in Math., 21, 293–329 (1976).[19] Moln´ar, E.：八种三维齐性几何的射影解释。Beitr. Algebra Geom., 38 No. 2, (1997), 261–288.[20] Moln´ar, E. – Szil´agyi, B.：齐性几何中的平移曲线及其球面，Publ. Math. Debrecen, 78/2 (3010), 327–346.[21] Moln´ar, E.：关于瑟斯顿几何的射影模型，以及Nil轨形和流形的一些相关注记。Sib. Electron. Math. Izv., 7 (2010), 491–498, http://mi.mathnet.ru/semr267.[22] Moln´ar, E. – Szirmai, J.：八种齐性三维几何中的对称性。Symmetry Cult. Sci., 21/1-3 (2010), 87-117.[23] Moln´ar, E. – Szirmai, J.：Sol晶格的分类。Geom. Dedicata, 161/1 (2012), 251-275.[24] Moln´ar, E. – Szirmai, J.：关于Nil晶体学, Symmetry Cult. Sci., 17/1- 2 (2006), 55–74.[25] Moln´ar, E. – Szir mai, J. – Vesnin, A.：沿二桥结和链环的奇异点具有奇异性的圆锥流形的射影度量实现，J. Geom., 95 (2009), 91–133.[26] Moln´ar, E. – Szirmai, J. – Vesnin, A.：SL_2R中的平移球堆积，J. Geom., 105(2) (2014), 287–306.[27] Mozgawa, W. – Skrzypiec, M.：secantopics的克罗夫顿公式和凸性条件，Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin 16, No. 3 (2009), 435– 445.[28] Odehnal, B.：圆锥曲线的等光曲线，J. Geom Graph. 14 No.1 (2010), 29–43.[29] Scott, P.：三维流形的几何，Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 401–487.

.[30] Siebeck, F. H.：关于与椭圆函数相关的四次曲线一类，J. Reine Angew. Math. 57 (1860), 359–370; 59 (1861), 173–184.[31] Skrzypiec, M.：关于secantopics的一则注记，Beitr. Algebra Geom. 49 No. 1 (2008), 205–215.[32] Szirmai, J.：瑟斯顿几何中等球最密堆积的一种候选构型，Beitr. Algebra Geom., 55(2) (2014), 441–452.[33] Szirmai, J.：由Sol几何中的平移曲线导出的四面体的等分面与外接球。New York J. Math., 25 (2019), 107–122.[34] Szirmai, J.：Sol空间中由基本格实现的最密平移球堆积。Beitr. Algebra Geom., 51(2) (2010), 353–373.[35] Szirmai, J.：Nil测地三角形及其内角和，Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), 49 (2018), 761–773, DOI: 10.1007/s00574-018-0077-9.[36] Szirmai, J.：与Sol几何中平移曲线相关的三角形角和，Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 67 (2022), 621–631, arXiv: 1703.06646, doi: 10.24193/subbmath.2022.3.14.[37] Szirmai, J.：Nil空间中的类格平移球堆积。Publ. Math. Debrecen, 80/3-4 (2012), 427–440, DOI: 10.5486/PMD.2012.5117.[38] Szirmai, J.：$S^2\times R$和$H^2\times R$几何中测地三角形的内角和，Bull. Academ. De Stiinte A Rep. Mol., 93 Num 2 (2020), 44–61.[39]Szirmai, J.：$S^2\times R$和$H^2\times R$几何中的阿波罗尼斯曲面、四面体的外接球、梅涅劳斯定理和塞瓦定理，Quarterly Journal of Mathematics, 73 (2022), 477–494, doi: 10.1093/qmath/haab038, arXiv: 2012.06155.[40] Szirmai, J.：关于Nil几何中的梅涅劳斯定理和塞瓦定理，Acta Univ. Sapientiae, Mathematica,（即将发表）(2023), arXiv: 2110.08877.[41] Szirmai, J.：瑟斯顿几何中的经典概念与问题，投稿稿件，(2022), arXiv: 2203.05209.

[42] Thurston, W. P.（与编辑 Levy, S.），《三维几何与拓扑》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，第1卷（1997）。[43] Szirmai, J. – Vr´anics, A：利用 Nil 几何中的类平移平分曲面进行全等平移球的格覆盖，KoG，23（2019），6–17，doi: 10.31896/k.23.1，arXiv:1710.02394。[44] Yates, R. C.：《曲线及其性质手册》，J. W. Edwards，安娜堡（1947），138–140。[45]Wieleitener, H.：《特殊平面曲线》。舒伯特丛书 LVI，G¨oschen’sche Verlagshandlung。莱比锡（1908）。[46] Wunderlich, W.：具有等视圆的曲线，Aequat. math. 6（1971），71-81。[47] Wunderlich, W.：具有等视椭圆的曲线，Monatsh. Math. 75（1971），346-362。