arXiv:2302.07657v1 [cs.DM] 15 Feb 2023

具有时变容量的动态流

Thomas Bl¨asius[1][0000−0003−2450−744X]、Adrian Feilhauer[1]和 Jannik Westenfelder[1]

卡尔斯鲁厄理工学院（KIT），76131 卡尔斯鲁厄，德国{thomas.blaesius、adrian.feilhauer}@kit.edu

摘要。 动态网络流有时也称为随时间变化的流，它将网络流的概念扩展为为每条边纳入通行时间。尽管 Ford 和 Fulkerson 证明了某些动态流问题可以通过归约为静态流来求解，但许多考虑拥塞和时间依赖网络的高级模型会导致 NP-困难问题。为了加深对这些高级动态流情形的理解，我们研究了具有时变容量或时变通行时间的经典扩展的结构复杂性和计算复杂性。

如果考察时间区间有限，我们证明，即使只有一条边的容量或通行时间发生一次变化，动态流问题也已是弱 NP 困难的。若考察时间无限，则通行时间发生一次变化或容量发生两次变化，都会使问题成为弱 NP 困难问题。对于仅发生一次容量变化的情形，我们推测该问题可以在多项式时间内求解。此外，我们证明，在上述问题为 NP-困难的情形下，动态割和动态流在结构上可能变得极其复杂，复杂度呈指数级增长。我们还证明，尽管割与流之间存在对偶性，两者的复杂度仍可能相差指数级。

1 引言

网络流是一种成熟的方法，可用于对以图表示的系统中的货物或数据运输进行建模。动态流（有时称为随时间变化的流）通过考虑流经一条边所需的时间，纳入了时间这一因素。Ford 和 Fulkerson [2], 提出了动态流，并证明可以使用时间重复流求得静态网络中的最大动态流：只要可行，就沿静态最大流的路径发送流。

由于现实网络中的容量往往更加动态，文献中已考虑了若干种推广。其中一类是对网络中的拥塞进行建模，即边的通行时间可能取决于分配到该边上的流量 [6,7]。其他推广则对网络本身的变化进行建模，使其独立于所分配的流量 [4,11,9]。这样既能对网络已知的物理变化建模，也能适用于以下情况：我们掌握了由给定流问题之外的实体造成的、随时间变化的整体拥塞估计。此外，还有一些研究尝试纳入不同的流目标，例如，在疏散场景中，流的目标是尽可能提高所有时刻的到达量，而不仅仅是考察时间区间结束时的到达量[1]。

通过依赖流量的通行时间对拥塞进行建模的大多数问题都是NP-困难的。如果通行时间取决于边的当前负载，流问题就会变成强NP-困难；除非P = NP [6]，否则不存在 ε 近似算法。如果边的通行时间仅取决于其流入率，而忽略较早进入该边的流量，那么流问题同样是强NP-困难的 [7]。当允许在顶点处存储流时，如果存在时变容量 [4] ，则可以使用伪多项式算法；若还存在时变通行时间 [11,9]，也可以使用伪多项式算法。在上述疏散场景中，目标是寻找所谓的最早到达流（EAF）。这一问题同样是NP-困难的，因为难以求出此类流的平均到达时间 [1]。此外，对于所有已知的编码方式，所有已知的最早到达流算法在最坏情况下都具有指数级的输出规模 [1]。

本文研究了动态流的一些自然推广形式，这些形式迄今很少受到关注，允许容量或通行时间随时间变化。我们证明，即使图是无环的，且只有一条边在某个时刻发生一次容量变化，求解具有时变容量或时变通行时间的动态流问题仍然是弱 NP 困难的。这表明，仅一次容量变化就足以提高动态流问题的复杂性，而该问题在其他情况下可在多项式时间内求解。这也意味着，时变容量下的动态流问题关于容量变化次数不是 FTP。上述结果适用于考察时间区间有限的情形。如果改为考察无限时间，对于时变通行时间，结果仍然相同。对于时变容量，只需两次容量变化，问题就会变为弱 NP 困难。我们猜想，只有一次变化时，该问题可以在多项式时间内求解。

除了这些关于计算复杂性的结果之外，我们还提供了一些结构性见解。对于静态流，人们通常不仅关心流值，还希望输出一个最大流或一个最小割。流的概念几乎可以直接推广到动态情形： [2], 如果容量或通行时间随时间变化，我们就需要考虑时变流和动态割。在这种情况下，每条边不再只有一个流值，而是有一个关于时间的函数。同样，在动态割中，顶点被分配到两个分区之一的情况会随时间变化。割流对偶性指出，最小割的容量等于最大流的流值；这一性质在此处及许多相关情形下同样成立 [5,8,11]。请注意，如果边上的流或割中顶点所属的分区频繁变化，输出复杂度可能会很高。对于静态图上的动态流（容量或通行时间没有变化），顶点一开始位于目标顶点所在的分区，并会在某个时刻转而属于源点分区，但绝不会反向变化 [10], ，这说明在这种情形下，割具有线性复杂度。

在容量或通行时间随时间变化的情况下，我们证明流和割的复杂性有时必须是指数级的。具体而言，对于所有我们证明具有弱 NP 难性的情形，我们还给出了这样的实例：其中每个最大流和最小割都具有指数级复杂性。因此，即使只有一条边的容量或通行时间发生一次变化，也可能使输出复杂性从线性跃升至指数级。此外，我们还给出了流复杂性为指数级而存在低复杂度割的示例，反之亦然。

我们注意到，具有时变容量的情形此前曾被声称是强 NP 完全的 [9] 。然而，我们怀疑该证明存在缺陷，因为可以看出，这种情形可以在伪多项式时间内求解。此外，上述关于解复杂性的结果使得该问题是否确实属于 NP 变得不明确。在附录 A 中，我们指出了我们认为关于强 NP 困难性的证明存在缺陷之处。

2 预备知识

我们考虑具有有向边以及指定源点和汇点的动态网络 $G = (V, E)$ $s, t \in V$。边 $e = (v, w) \in E$ 具有随时间变化的非负容量 $u_e : [0, T] \to \mathbb{R}_0^+$，用于规定每个时刻可经由 $e$via v 进入的流量。我们允许 u_e 在时间上非连续，但仅限于有限多个时刻。此外，每条边 $e = (v, w)$ 还具有非负通行时间 $\tau_e \in \mathbb{R}^+$，表示流从 v 移动到 w 并经过 e所需的时间。注意，容量定义在 $[0, T]$上，即时间从 0 开始，直至时间范围 T。

令 f 为一组可测函数 $f_e : [0, T - \tau_e] \to \mathbb{R}$，每条边 $e \in E$ 对应一个函数，用于为每条边分配一个随时间变化的流值。将其限制在区间 $[0, T - \tau_e]$ 内，意味着有效流不得在时间 0 之前发送，也不得在时间 T 之后到达。为简化记号，我们允许时间值超出 $[0, T - \tau_e]$，并隐式假设

$f_e(\Theta) = 0$，对于 $\Theta \notin [0, T - \tau_e]$。如果 f 满足动态流的容量约束 $f_e(\Theta) \leq u_e(\Theta)$，对所有 $e \in E$ 和 $\Theta \in [0, T - \tau_e]$均成立，并满足<strong流量守恒，我们就称 f 为动态流。我们将在下文定义强流量守恒。

顶点在时间 Θ时的超额流量$\mathrm{ex}_f(v, \Theta)$，是截至时间 Θ发送到 v 的流量与从 v 发送出的流量之差，即:

$$\mathrm{ex}_f(v, \Theta) \coloneqq \int_0^{\Theta} \sum_{e=(u,v)\in E} f_e(\zeta - \tau_e) - \sum_{e=(v,u)\in E} f_e(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

如果对所有 $v \in V \setminus \{s, t\}$ 和$\Theta \in [0, T]$，均有 $\mathrm{ex}_f(v, \Theta) = 0$，则满足强流量守恒。

f 的值定义为汇点在时间范围$|f|$末端的超额流量$=: \mathrm{ex}_f(t, T) = -\mathrm{ex}_f(s, T)$。带有时变容量的最大动态流问题旨在寻找值最大的流。我们将其输入称为动态流网络。

与静态最大流问题类似，最大动态流问题也满足割流对偶性，其割定义如下。动态割或随时间变化的割是在每个时间点对顶点 $(S, V \setminus S)$ 的一种划分，其中源点 s 始终属于 S，而汇点 t 从不属于 S。形式化地说，每个顶点 $v \in V$都有一个布尔函数$S_v\colon [0, T] \to \{0, 1\}$，当 $S_v(\Theta) = 1$时，该函数将 v分配给时间 Θ时的 S。与流类似，我们将 S_v扩展到 $[0, T]$之外，并对所有 $v \in V$（包括t），令 $S_v(\Theta) = 1$，其中 $\Theta > T$。动态割 S 的容量$\mathrm{cap}(S)$是指在考察时间区间 $[0, T]$内，能够沿着从 S到 $V \setminus S$的边发送的最大流量，即:

$$\mathrm{cap}(S) = \int_0^{T} \sum_{\substack{(v,w)\in E \\ S_v(\Theta)=1 \\ S_w(\Theta+\tau_e)=0}} u_{(v,w)}(\Theta)\,\mathrm{d}\Theta.$$

边 (v, w) 对割 S 在时间 Θ 的贡献，是指它对上述总和有贡献，因此 $S_v(\Theta) = 1 \wedge S_w(\Theta + \tau_e) = 0$。请注意，这与静态情形类似，但在动态变体中需要考虑通行时间的延迟。因此，对于边 $e = (v, w)$，我们考虑时间 Θ 时的 v 和时间 $\Theta + \tau_e$ 时的 w。此外，当 $\Theta > T$ 时，对所有顶点 v 令 $S_v(\Theta) = 1$，可确保时间范围之外的任何时刻都不会对 $\mathrm{cap}(S)$ 有贡献。

定理 1（最大流最小割定理 [8,11]）。对于最大流 f 和随时间变化的最小割 S，有 $|f| = cap(S)$。

证明。Philpott 的定理 [8, 定理 1] 比此处考虑的情形更一般。特别是，他们允许顶点具有时变存储容量。只需将其设为恒定的零，即可得到此处陈述的定理。Tjandra 的定理 [11, 定理 3.4] 更加一般，因此也涵盖了具有时变通行时间的情形。□

尽管一般定义允许容量函数是任意的，但对于我们的构造，使用分段常数容量就足够了。我们注意到

在这种情况下，始终存在一个同样为分段常数的最大流，它将流值分配给一组测度非零的区间。区间测度非零这一性质，使我们可以考虑时间中的一个点 Θ，并讨论边在时间 Θ 对割或流的贡献，因为可以保证 Θ 属于一个非空区间，且该区间具有相同的割或流。本文余下部分中，我们假设所有流都具有上述性质。

我们定义以下其他有用记号。我们用 $S(\Theta) := \{v \in V \mid S_v(\Theta) = 1\}$ 和 $S(\Theta) := \{v \in V \mid S_v(\Theta) = 0\}$ 表示时间 Θ处的割。此外，若对每个足够小的 $\varepsilon > 0$，顶点 v在时间 Θ改变其划分，即 $S_v(\Theta-\varepsilon) \neq S_v(\Theta+\varepsilon)$，则称该顶点在此时改变其划分。我们用 $S_v \xrightarrow{\Theta} \bar{S}_v$表示从 S 变为 $\bar{S}$，用 $\bar{S}_v \xrightarrow{\Theta} S_v$表示沿相反方向 从 $\bar{S}$ 变为 S。我们用 $\mathrm{ch}_v(S)$ 表示割 S 中顶点 v 的划分变化次数。此外， S 中的变化总次数即为割 S的复杂性 。对于流 f，我们以类似方式定义边上的变化以及 f 的复杂性。

在上述最大动态流问题的定义中，我们允许容量随时间变化，但假设通行时间保持不变。我们的大多数结果也适用于互补情形：通行时间随时间变化，而容量保持不变。在这种情形下， $\tau_e(\Theta)$表示流在 Θ时进入 e后所需的通行时间。与上述定义类似，我们允许 τ_e 在有限个时间点上非连续。

此外，我们还考察考虑无限时间（$\Theta \in (-\infty, \infty)$）而非仅考虑 $[0,T]$内时间的情形。这样可以消除由考察时间区间边界引起的结构效应。直观而言，由于我们处理的是仅有有限个不连续点的分段常数函数，因此存在一个足够晚的时间点 Θ，从此之后，容量变化不再产生影响。从该时间点起，可以假设最大流和最小割均为常数。足够早的时间点也同样如此。因此，要比较流值，只需考察一个有限区间 I。形式上，如果 f 在 I 之外为常数，且在 I上为最大流，那么它就是具有无限考虑时间的最大动态流；并且对于任意更大的区间 $J \supset I$，都存在一个足够大的区间 $K \supset J$，使得考察时间区间为 K 的最大流能够在 J 期间取为 f。无限考虑时间下的最小割也以类似方式定义。这样的最大流和最小割总是存在，因为时间重复流为动态流提供了最优解，并且我们只允许容量或遍历时间发生有限次变化。

我们需要所有不超过 k 的整数集合，并将其记作 $[k] := \{i \in \mathbb{N}^+ | i \leq k\}$。

3 计算复杂性

本节研究时变容量或时变通行时间下动态流问题的计算复杂性。我们考虑有限和无限时间。除无限考虑时间下单次容量变化的情形外，我们证明这些情形均为 NP-困难。

首先，我们证明在时变容量的情形下，即只有一条边发生一次容量变化时，问题仍然是困难的。我们的构造可直接推广到无限考虑时间下有一条边发生两次容量变化的情形。对于时变通行时间的情形，我们证明即使在无限考虑时间下，发生一次变化时问题也是困难的。这也意味着，在有限时间范围内发生一次变化时，问题同样是困难的。

我们将其归约到划分问题，该问题定义如下：给定一个正整数集合 $S = \{b_1, \ldots, b_k\}$，其中 $\sum_{i=1}^{k} b_i = 2L$，是否存在一个子集$S' \subset S$，使得 $\sum_{a \in S'} a = L$?

定理 2. 时变容量动态流问题是弱 *NP* 困难的，即使对于仅有一次容量变化的无环图也是如此。

证明。 给定一个划分问题实例，我们构造 $G = (V, E)$，如图 1 所示，并证明划分问题的一个解等价于 G 中流值为 1 的流。

每个 $b_i \in S$ 对应一个顶点 x_i，该顶点可通过一条通行时间为 b_i 的边和一条通行时间为零的旁路边从 x_{i-1} 到达。最后一个这样的顶点 x_k 通过一条边与汇点 t 相连，该边仅允许在 $[L+1, L+2]$ 期间通过流；其下界由 (x_k, t) 的容量变化保证，上界则由时间范围 $T = L + 3$ 给定。源点 s 通过一条容量较低的边 $\frac{1}{L+1}$ 与 x_0 相连，因此，在 $[0, T-2]$ 期间进入这条边的唯一一个流量单位可以在一个时间单位内通过 (x_k, t)。

由于划分问题的一个解等价于一条通行时间为 L、穿过 x_i 的路径，因此我们还提供通行时间为 0、1、.....、$L-1$ 的路径，它们通过 y_i 绕过 b_i 边，从而当且仅当值为 1 的流能够到达 t 时，划分问题才有解。为了提供这些旁路路径，我们设置 $\ell \in \mathbb{N}_0$，使得 $L = 2^{\ell+1} + r$、 $r \in \mathbb{N}_0$、 $r < 2^{\ell+1}$，并定义顶点 y_i、 $i \in \mathbb{N}_0$、 $i \leq \ell$。它们构成一条通行时间为 $L-1$ 的路径，其中各边的通行时间是 2 的幂，另有一条通行时间为 r 的边，并且所有边都可以通过一条通行时间为零的边绕过。这样便可以实现所有小于 $L-1$ 的整数通行时间。除 $(s$、 $x_0)$ 外，所有边在激活时的容量均为单位容量。

给定划分问题的一个解 S'，当且仅当相应的 b_i 属于 S' 时，我们才能将 s 在 $[0, 1]$ 离开的流沿着 x_i 通过非零通行时间边进行路由。在 $[1, L+1]$ 离开 s 的流可以使用旁路路径轻易地在 $[L+1, L+2]$ 内到达 x_k，从而得到值为 1 的最大流。

考虑到时间范围$T = L + 3$ 以及(x_k, t)的通行时间，在 $L+2$之前，最多只有一单位流能到达 x_0，因此流的值至多为 1。给定一个向 t发送一单位流的流，我们可以看出，所有能够在 $[0, L+1]$ 期间通过(s, x_0)的流都必须路由至 t。由于通行时间具有整数性，在 $[0, 1]$ 期间离开 s 的流，从 x_0 到 x_k恰好需要 L 的时间。经由 y_0 的旁路路径太短，无法满足这一点。因此，该时间是从划分问题实例中选取的边的通行时间与旁路边的零通行时间之和；而且，存在一个划分问题的解 S'，其元素对应于该流所经过的非零通行时间边。□

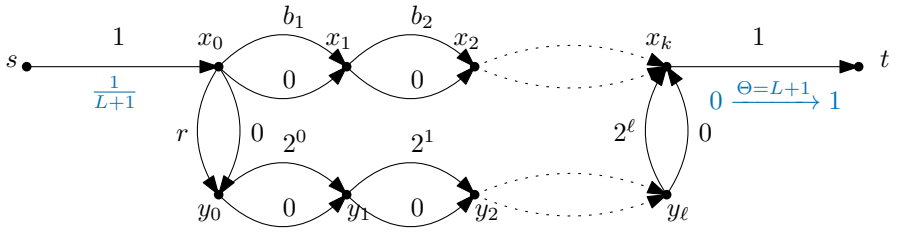


图 1：为将划分问题归约为具有时变容量的动态流而构造的图。在时间零离开 s 的流只有在从 x_0 到 x_k 的通行时间恰好为 L 时，才能到达 t，从而实现一次划分。黑色数字表示通行时间，蓝色数字表示容量，所有未指定的容量均为 1，时间范围为 $T = L + 3$。

推论 *1*。 *</style}*具有时变容量且考察时间无限的动态流问题是弱 *NP* 困难，即使对于仅有两次容量变化的无环图也是如此。

证明。 在定理 2 的证明中，我们将从 x_k 到 t 的边上的流限制为仅在时间 $[L + 1, L + 2]$ 具有非零容量。对于定理 2，我们通过一次容量变化实现了下界，并通过时间范围实现了上界。在这里，我们可以使用相同的构造，但通过第二次容量变化实现上界。□

对于时变通行时间的情况，我们采用类似的归约。我们从无限考察时间的情况开始。

定理 3。 具有无限考察时间和时间依赖型通行时间的动态流问题是弱 *NP*-困难的，即使对于仅发生一次通行时间变化的无环图也是如此。

证明。 与定理 2 的证明类似，我们对划分问题进行归约。构造出的图如图 2 所示。我们希望将存在一条通行时间为 L 的路径，与每个时间单位从 s 发送 1 个流量单位的最大流联系起来。为此，我们从一条边 (s, x_0) 开始构造图，该边的通行时间在时间 $\Theta = 0$ 从 1 降至 0。这样一来，在时间 $\Theta = 0$ 到达 x_0 的流量单位有 2 个，而只有 1 个流量单位能够经过 (x_0, t)。这意味着 1 个流量单位必须经过 x_i 和 y_i。经过 x_i 的路径以及经过 y_i 的旁路路径，其作用与定理 2 的证明中相同；但在这里，旁路边还提供了通行时间从 $L + 1$ 到 $2L$ 的路径。由于边 (x_k, t) 的容量为 $u_{(x_k,t)} = \frac{1}{2L+1}$，经由 x_k 路由的流必须通过至少 $2L + 1$ 条通行时间各不相同的路径到达 x_k。从 x_0 到 x_k 的路径具有介于 0 和 $2L$ 之间的整数通行时间，因此，要路由在时间 $\Theta = 0$ 到达 x_0 的额外流量单位，就需要让流经过通行时间分别为 0 到 $2L$ 之间每个整数的一条路径。旁路路径不提供一条

通行时间为 L 的路径，因此，与定理 2 的证明类似，当且仅当划分问题有解时，这个流量单位才能完全通过网络进行路由。□

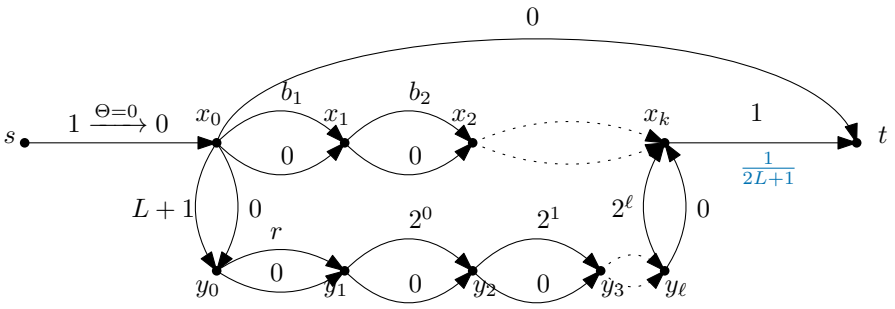


图 2：将划分问题归约为具有无限考虑时间和时变通行时间的动态流问题时所构造的图。若在 -1 和零时刻离开 s 的流量单位要到达 t ，则只能沿直接边（x_0、 t）行进，并通过通行时间不同的 $2L+1$ 条路径到达 x_k。黑色数字表示通行时间，蓝色数字表示容量，所有未标明的容量均为 1。

要将这一结果推广到有限时间范围的情形，注意到我们可以采用上述构造，并选择足够大的时间范围，从而得到以下推论。

推论 2. 具有时变通行时间的动态流问题是弱 *NP* 困难的，即使对于仅发生一次通行时间变化的无环图也是如此。

证明。 利用定理 3 证明中的构造，我们可以将时间限制在区间 $[-1, 2L+1]$内；此时，划分问题有解等价于存在值为 $2L+2$的流。为了得到从零到某个时间范围的考察时间区间，我们将（s、 x_0）的通行时间变化改为在时间$\Theta = 1$ 发生，并设置 $T = 2L+2$。□

这还剩下一种情况：无限考虑时间且仅发生一次容量变化。对于这种情况，我们可以证明，始终存在一个最小动态割，其中每个顶点至多改变一次分区，且所有划分变化的方向都相同。此外，对于变化前后的给定分区，只要没有顶点改变分区超过一次，且所有划分变化的方向都相同，就可以使用线性规划求出最优转换。这引出了以下猜想。

猜想 *1.* 在仅有一次容量变化且考察时间无限的动态流网络中，最小割问题可以在多项式时间内求解。

4 最大流和最小割的复杂性

我们首先构造一个动态流网络，使得所有最大流和最小割都具有指数复杂度。随后，我们证明，也存在一些实例，需要指数复杂度的流，但允许线性规模的割，反之亦然。我们先证明这些结果适用于容量仅变化一次的情况，然后证明它们在通行时间随时间变化的情形下同样成立，而且通行时间也只需变化一次。

4.1 指数复杂流与割

我们先关注割的复杂性，之后才会说明这一结论如何延伸到流。在开始构造之前，请注意，图 3 中的例子展示了，两个顶点 a 和 b 的划分变化如何迫使单个顶点 v 来回改变其所属划分。这种对 v 划分变化的强制作用是我们构造的核心。

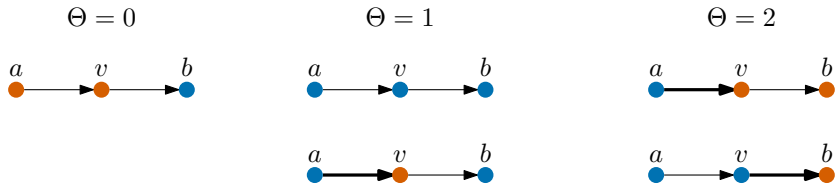


图 3：示例，其中 a 在时间 1 从 S（红色）变为 S（蓝色），而 b 在时间 2 从 S 变为 S。只有从 S 到 S 的边会计入割（粗体边）。假设 v 一开始位于 S，那么 $u_{(a,v)} < u_{(v,b)}$ 以及 $\tau_{(a,v)} = \tau_{(v,b)} = 0$、$v$ 必须在时间 1 变为 S，并在时间 2 于最小割中变回 S（上排）。下排展示了 v 的另一种（代价更高的）行为。

更具体地说，我们首先给出一种结构，借助它可以迫使顶点模拟其他顶点的划分变化，并且可能带有固定的时间延迟。

该模拟装置 通过边 $(a,\ b)$、$(b,\ t)$ 将两个非终端顶点 a、$b \in V \setminus \{s,t\}$ 连接起来，边的容量为 $u_{(a,b)} = \alpha$，$u_{(b,t)} = \beta$。下面的引理说明 α 和 β 需要具备哪些性质，才能使模拟装置名副其实，也就是说，使 b 以延迟 $\tau_{(a,b)}$模拟 a 。图 4 展示了模拟装置的示意图。

引理 1. 设 G 是一个包含该模拟装置作为子图的图，满足

$$\alpha > \sum_{w|(b,w)\in E} u_{(b,w)} \quad and \quad \beta > \sum_{w|(w,b)\in E\setminus(a,b)} u_{(w,b)}.$$

那么，对于每个最小割 S 以及时间 $\Theta \in (\tau_{(a,b)}, T-\tau_{(b,t)})$，$S_b(\Theta) = S_a(\Theta-\tau_{(a,b)})$。

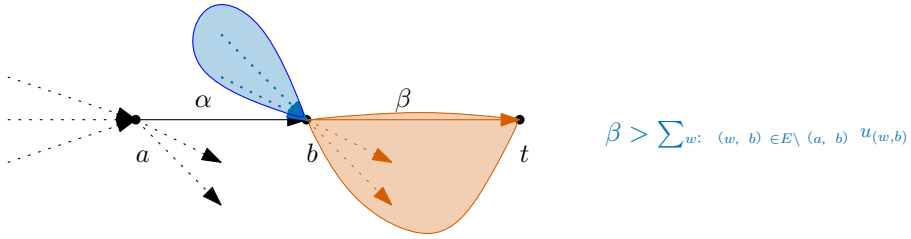


图 4：连接两个顶点 a 和 b 的分区的构造装置，使 b 以延迟 $\tau_{(a,b)}$ 模仿 a； α, β 是容量。

证明。我们首先证明 $a \in S(\Theta - \tau_{(a,b)}) \implies b \in S(\Theta)$。固定$a$ 的划分后，我们考察在时间Θ与 b 相连的边对 S 可能产生的贡献。对于 $b \in S(\Theta)$，贡献至少为 α，因为 $\Theta \in (\tau_{(a,b)}, T - \tau_{(b,t)})$ 保证 (a, b) 可以对 S 作出贡献。对于 $b \in S(\Theta)$，贡献至多为$\sum_{w|(b,w)\in E} u_{(b,w)} < \alpha$。由于 S 是一个最小割，我们得到 $b \in S(\Theta)$。反方向 $a \in S(\Theta - \tau_{(a,b)}) \implies b \in S(\Theta)$ 也基于类似理由成立。对于 $b \in S(\Theta)$，贡献至少为 β。对于 $b \in S(\Theta)$，贡献至多为$\sum_{w|(w,b)\in E} u_{(w,b)} < \beta$。□

注意，引理 1 并未限制与 a 相连的边。因此，我们可以相当灵活地利用它，将一个顶点的划分变化传递到另一个顶点。

为了实现指数级数量的划分变化，接下来我们给出一种构造装置，它可以使一个顶点的划分变化次数翻倍。为此，我们假设，对于每个整数 $i \in [k]$，我们已经可以使用具有周期$p_i := 2^i$ 的顶点 a_i，也就是说， a_i 每隔 p_i 个时间单位就改变一次划分。注意， a_1 是变化次数最多的顶点。基于此，我们构造所谓的二进制计数装置，它会生成一个周期为 $p_0 = 1$ 的顶点 v，因此其划分变化次数是 a_1 的两倍。粗略地说，图 6 所示的二进制计数装置由上述顶点 a_i 以及额外的顶点 b_i 组成，使得 b_i 模仿 a_i。 a_i 和 b_i 之间是中心顶点 v，其边来自顶点 a_i，并连向 b_i。经过精心选择的容量以及 a_i 和 b_i 之间的同步，使得 v 每一步都改变划分。

为了将此过程迭代下去，并使用 v 作为下一级二进制计数构造装置的顶点，我们需要确保该功能在额外连接的模拟装置边的作用下仍然有效。

图 6 所示的二进制计数装置 H_k 正式定义如下。它包含上述顶点 a_i, b_i，其中 $i \in [k]$ 以及顶点v。此外，它还包含源点 s 和汇点 t。在这个顶点集合上，我们定义了五类边。除非另有明确说明，所有边的通行时间均为 1。前两类边分别为 (a_i, b_i) 和 (b_i, t)，其中 $i \in [k]$，它们构成一个模拟装置。我们设定 $\tau_{(a_i,b_i)} = p_i + 1$，使得 b_i 以延迟 $p_i + 1$模拟 a_i 的变化。此外，我们设定 $u_{(a_i,b_i)} = \alpha_i := 2^{i-1} + 2\varepsilon$ 以及 $u_{(b_i,t)} = \beta_i := 2^{i-1} + \varepsilon$。我们将看到，这些 α_i 和 β_i 满足模拟装置的要求

，如引理 1 所述。第三类和第四类边分别为 (a_i, v) 和 (v, b_i)，其中 $i \in [k]$，其容量为 $u_{(a_i,v)} = u_{(v,b_i)} = 2^{i-1}$。这些边用于强制改变 v的划分，这与图 3 中的简单示例类似。最后，我们有一条边 (s, v)，其容量为 $u_{(s,v)} = 1-\varepsilon$。它用于固定 v 的初始划分，并引入一定的不对称性，以确保即使在 v连接附加边时也能正常工作。

我们的计划是通过对 k 进行归纳，证明二进制计数装置 H_k 能够按预期工作。我们首先定义所需的性质，作为归纳假设。

定义1。设 G 是一个图。如果 H_k 是 G 中的一个有效二进制计数装置，且 H_k 是 G 的子图，并且每个最小割 S 都具有以下性质，我们就称之为有效二进制计数装置。

$-$对于 $i \in [k-1]$，顶点 a_i 的周期为 p_i。它会改变划分 2^{k-i} 次$^-$，从时间 0 时从 S 变为 S 开始，到时间 $2^k - 2^i$ 时的变化结束。$^-$对于 $i = k$，a_k 在时间 0 时从 S 变为 S，并且还会在时间 2^k 时变回 S。

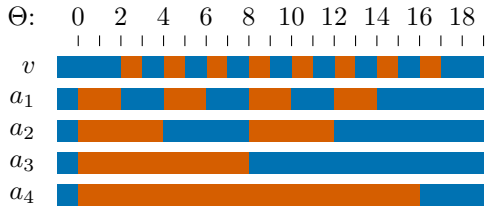


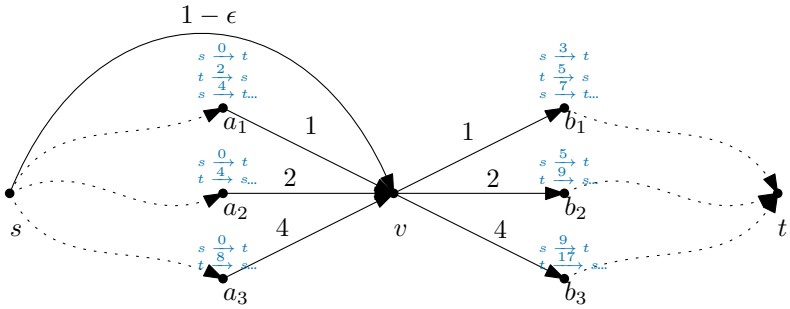
图5：有效二进制计数装置 H_4 的划分变化模式示意图。蓝色部分表示顶点位于 S 中，红色部分表示其位于 S 中。

注意，在有效的二进制计数装置中，将 $\bar{S}$ 视为 0、将 S 视为 1 时，a_i 和 v 会构成一个从 0 计数到 $2^k - 1$ 的二进制计数器，其中 v 是最低有效位（向后移两个时间步）；见图5。

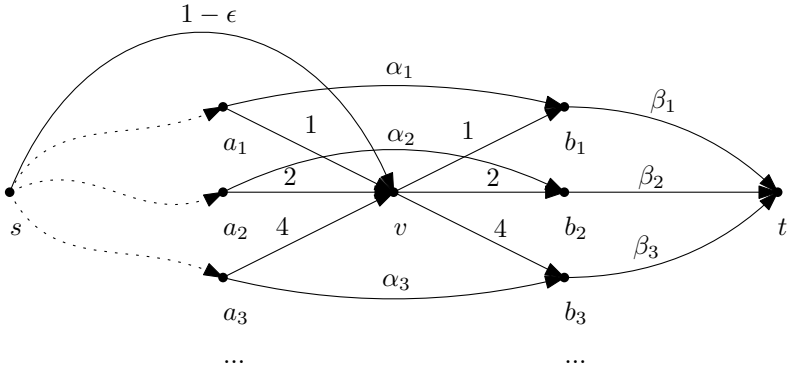
引理 2. 设 G 是一个包含有效二进制计数装置 H_k的图，且中心顶点 v 没有附加入边，v 的附加出边容量之和小于 $1-\varepsilon$，并且没有附加边与 b_i关联。那么，对于每个最小割 S，中心顶点v 的周期为 $p_0 = 1$，并变化 2^k 次：它在时间 2 从 S 变为 $\bar{S}$，并在时间 $2^k + 1$发生最后一次变化。

证明。 首先注意，模拟装置允许使 b_i呈现反向计数器行为，从而使 v 比相应的 a_i早一个时间步受到影响。对于$\Theta \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$，$a_i$的变化

$$S_{a_i} \xrightarrow{\Theta \equiv 0 \bmod 2^{i+1}} \bar{S}_{a_i} \bar{S}_{a_i} \xrightarrow{\Theta \equiv 2^i \bmod 2^{i+1}} S_{a_i} \bar{S}_{a_k} \xrightarrow{2^k} S_{a_k}.$$



(a) 更直观的示例可视化，展示了 a_i、b_i 的划分变化（蓝色），省略了模拟装置。为提高可读性，分区以其终端表示，即 s 表示 S，t 表示 $\bar{S}$。



(b) 包含所有边（包括模拟装置）的完整可视化。

图 6：二进制计数装置的可视化，它能使单个顶点的划分变化次数加倍；在顶点 a_i、$i < k$ 各自改变划分 $\mathsf{ch}_{a_i} = 2^{k-i}$ 次，且 $\mathsf{ch}_{a_k} = 2$ 并具有正确时序的情况下，确保顶点 v 发生 2^k 次变化；黑色数字表示容量。

将 $p_i + 1$ 反转计数器的延迟设定为该值，是因为 a_i 和 b_i 的激活状态相反，即 $S_{a_i}(\Theta - \tau_{(a_i,v)}) = 1$ 允许 $u_{(a_i,v)}$的贡献，而 $S_{b_i}(\Theta + \tau_{(v,b_i)}) = 0$ 允许 $u_{(v,b_i)}$ 的贡献。在时间 1 将所有 b_i 更改为 S 的重置步骤可以省略，因为所有顶点都从 S开始。因此， a_i与 b_i之间所需的延迟为 $2^i + 1$。所以，所需的变化模式为

$$\bar{S}_{b_i} \xrightarrow{\Theta \equiv 1 \bmod 2^{i+1}} S_{b_i}\bar{S}_{b_k} \xrightarrow{2^{k+1}+1} S_{b_k}S_{b_i} \xrightarrow{\Theta \equiv 2^i+1 \bmod 2^{i+1}} \bar{S}_{b_i}$$

对于 $\Theta \in \{3, \ldots, 2^k + 1\}$。该模式通过引理 1 中所示模拟装置的功能，以及 G 不能在任何 b_i上关联附加边这一事实实现。

为了说明对于任意最小割 S， v 的划分变化必须以所述方式发生，我们考察与 v关联的边。所有其他边对任意割的贡献都已确定。一条边 (a_i, v) 当且仅当 $a_i \in S(\Theta - 1)$ 且 $v \in S(\Theta)$ ($s \in S(\Theta)$始终成立，因此对于某个时间 Θ，(s, v)在 $v \in S(\Theta)$时贡献 $1 - \varepsilon$) 时，才会对 cap(S)贡献 2^i 。同样，(v, b_i) 对 cap(S) 作出贡献的唯一方式是对于某个时间 Θ满足 $v \in S(\Theta)$ 且 $b_i \in S(\Theta + 1)$。根据 a_i、b_i 给定的划分变化计算这些贡献，我们看到， b_i 贡献的计数器领先半个计数步——这相当于一个时间单位——而 a_i 贡献的计数器落后。对于 a_k的最后一次变化（在时间 $2^k + 1$影响 v ）， a_i 计数器变得大于 b_i 计数器，而不是与其相等。形式上，对于 $\Theta \in [1, 2^k + 1)$，(a_i, v)边和 (v, b_i)边的贡献为

$$\sum_{i|S_{a_i}(\Theta-1)=1} u_{(a_i,v)} = \lfloor \frac{\Theta - 1}{2} \rfloor \sum_{i|S_{b_i}(\Theta+1)=0} u_{(v,b_i)} = \lfloor \frac{\Theta}{2} \rfloor$$

以及对于 $\Theta \in [2^k + 1, 2^k + 2)$

$$\sum_{i|S_{a_i}(\Theta-1)=1} u_{(a_i,v)} = 2^k - 1 > 2^{k-1} = \sum_{i|S_{b_i}(\Theta+1)=0} u_{(v,b_i)}.$$

添加边 (s, v) 后，对割的贡献潜力较大的一侧每隔 $\Theta \in \{2, \ldots, 2^k + 1\}$ 就会发生变化，这迫使 v每次都改变其划分，以确保割最小。因此， v 的变化模式为

$$S_v \xrightarrow{\Theta \equiv 0 \bmod 2} \bar{S}_v\bar{S}_v \xrightarrow{\Theta \equiv 1 \bmod 2} S_v$$

对于 $\Theta \in \{2, \ldots, 2^k + 1\}$。

离开 v 的边只有在 $v \in S(\Theta)$ 时才能对 cap(S) 作出贡献，因此，每当¯构造装置已确保 $v \in S(\Theta)$ 时，添加出边就不会妨碍构造装置的行为。当 H_k 确保 $v \in S(\Theta)$ 时，我们有

$$\sum_{i|S_{a_i}(\Theta-1)=1} u_{(a_i,v)} \geq \sum_{i|S_{b_i}(\Theta+1)=0} u_{(v,b_i)}.$$

为了最小化 cap(S)，赋值 $v \in S(\Theta)$ 对于最小化 cap(S) 仍然是必要的，因为边 (s, v_k) 的容量为 $1 - \varepsilon$，大于所有新增边的容量总和。□

请注意，引理 2 为归纳步骤的第一部分提供了基础，即如何从一个有效的 H_k 构造出一个有效的 H_{k+1}。接下来，我们将说明如何缩放 a_i 的周期，使得来自 H_k 的 a_i 可以充当来自 H_{k+1}的 a_{i+1}，而 v 可以充当新的 a_1。之后还需证明两点。第一，可以引入附加边，以便实际从 H_k 构造出 H_{k+1}，且不失其有效性。第二，我们需要归纳法的初始步骤，即证明即使只有一次容量变化，也存在一个有效的 H_1。

如果且仅如果 S 是图 $G=(V,\ E)$ 上的最小割，其中通行时间为 τ_e、容量为 $u_e(\Theta)$，时间区间为 $[0,T]$，那么当 $S_v(r\cdot\Theta+T_0)\colon=\hat{}S_v(\Theta)\ \forall\Theta\in[0,T]$ 时，最小动态割 S 在时间缩放与平移下仍保持最优，且它是图 $G=(V,\ E)$ 上的最小割，其中通行时间为 $\hat{}\tau_e\coloneqq r\cdot\tau_e$、容量为 $\hat{}u_e(r\cdot\Theta+T_0)\colon=u_e(\Theta)$，时间区间为 $[T_0,r\cdot T+T_0]$，对任意$r\in\mathbb{R}^+,\ T_0\in\mathbb{R}$ 均成立。

引理 3。任意动态割在时间缩放与平移下都仍保持最优。容量缩放后也仍保持最优。

证明。平移时间不会影响割的容量。缩放时间会以相同的比例缩放任意割的容量。因此，不同割之间容量的相对差异不会因时间缩放与平移而改变。

按比例缩放容量会使每个割的容量都乘以相同的因子，因此各割容量之间的相对差异保持不变。□

这样，我们就可以组合不同规模的二进制计数装置，构造一个大型二进制计数装置 H_ℓ，同时只需进行一次容量变化。

引理4。对于每个 $\ell\in\mathbb{N}^+$，都存在一个规模为多项式级、仅有一次容量变化的无环动态流网络，其中包含一个有效的二进制计数装置 H_ℓ。

证明。为了为 H_ℓ的 a_i 构造所需的变化模式，我们将规模递增的二进制计数装置依次串联，从 H_2 开始直到 H_ℓ，从而构造出图 G_ℓ，如图7所示。总体思路是让所有$a_{k,\,i}$ 模拟正确的较小二进制计数装置的中心顶点 v_{k-i}，以确保其行为。

在时间尺度上，二进制计数装置 H_k 按 $\Delta_k\coloneqq 2^{-k}$ 缩放，并按$T_{0,k}\colon=2+3$平移$(1-2\Delta_k)+\Delta_k$。因此，H_k 中$a_{k,i}$ 的首次变化应在时间$T_{0,k}$ 从 S变为 S，而$a_{k,i}$ 两次连续变化之间的周期为$p_{k,i}\coloneqq\Delta_k\cdot 2^i=\Delta_{k-i}$，这也是 v_{k-i} 两次连续变化之间的周期。为了正确同步不同的 H_k，二进制计数装置之间用于模拟的延迟设为$\tau_{(v_{k-i},a_{k,i})}=3\cdot(\Delta_{k-i}-2\Delta_k)+\Delta_k$。这样选择是为了使$T_{0,k-i}+2\Delta_{k-i}+\tau_{(v_{k-i},a_{k,i})}=T_{0,k}$。我们将 H_k中(s,v_k)的容量设为 $\varepsilon\coloneqq\frac{1}{6}$。

为确保连接的模拟装置不超过从 v_k 离开 H_k 的允许容量，H_k 中所有边的容量均按因子 $\lambda_k\coloneqq\frac{1}{5^k}$ 缩放。根据这一缩放方式以及引理 1 的容量要求，连接 v_{k-i} 和$\overline{a_{k,\,i}}$ 的模拟装置的容量为 $u_{(v_{k-i},a_{k,i})}=\lambda_k\gamma_i$，其中 $\gamma_i\colon=2^i+4\varepsilon$，且 $u_{(a_{k,i},t)}=\lambda_k\varepsilon$。

如图 8 所示，可通过一条路径 s，v_0，t，仅进行一次容量变化来确保 v_0 的划分变化。H_{start} 的通行时间为 $\tau_{(s,v_0)} = 1$ 和 $\tau_{(v_0,t)} = T - 3$，容量为 $u_{(s,v_0)} = 2$ 和 $u_{(v_0,t)}(\Theta) = 1$，$\Theta < 2$，并变为 $u_{(v_0,t)}(\Theta) = 3$，$\Theta \geq 2$。时间范围设为 $T := 6$。

G_ℓ 显然相对于 ℓ 具有多项式规模，且只有一次容量变化。引理 2 中二进制计数装置以及引理 1 中模拟装置先前展示的功能，是证明其中包含的 H_ℓ 有效的基础。引理 3 表明，这些构造装置在用于构造 G_ℓ时所采用的平移和压缩时间下，也能发挥相同功能。为了证明所构造图的行为正确，需要证明模拟装置遵守先前确立的容量限制，并且将它们连接到更小的二进制计数装置不会妨碍这些计数装置的行为。

模拟装置的容量正确性显而易见。$a_{k,\,i}$ 没有来自模拟装置之外的入边，因此$u_{(a_{k,i},t)} > 0$满足（$a_{k,\,i}$，t）的要求。还有两条附加边从$a_{k,\,i}$引出，一条通向$b_{k,\,i}$，另一条通向 v_k。因此，$a_{k,\,i}$ 所有出边的总容量为 $\lambda_k(\alpha_i + 2^{i-1} + \varepsilon) = \lambda_k(2^i + 3\varepsilon) < \lambda_k\gamma_i$，所以满足（$v_{k-i}$，$a_{k,\,i}$）的限制。

为说明二进制计数装置的串接不会妨碍较小二进制计数装置的行为，请注意，离开 v_k 的边的容量经过设置，不会越过既定阈值：

$$\sum_{i\in\mathbb{N}^+, i\leq \ell-k} \lambda_{k+i}\gamma_i = \lambda_k \sum_{i\in\mathbb{N}^+, i\leq \ell-k} \left(\frac{2}{5}\right)^i + \frac{4}{6\cdot 5^i} < \lambda_k\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right) = \lambda_k(1-\varepsilon)$$

请注意，v_0 的行为也不会受到与二进制计数装置相连的影响。这既可由关于 $k = 0$ 的相同论证得出，也可由以下观察得出：忽略与二进制计数装置的连接时，v_0 的变化始终由至少为 λ_0 的容量差保证。

我们使用归纳法证明，对于任意最小割 S，二进制计数装置的 $a_{k,\,i}$ 会在所需时间发生变化。具体而言，我们证明

$$S_{v_k} \xrightarrow{\Theta \equiv T_{0,k} \bmod 2\Delta_k} \bar{S}_{v_k}\bar{S}_{v_k} \xrightarrow{\Theta \equiv T_{0,k}+\Delta_k \bmod 2\Delta_k} S_{v_k}$$

对所有 $\Theta \in \{T_{0,k} + 2\Delta_k, T_{0,k} + 3\Delta_k, \ldots, T_{0,k} + 1 + \Delta_k\}$ 均成立。

v_0 的正确启动行为需要两次划分变化。暂且忽略从连接点通往二进制计数装置的边，因为如上所述，它们不会影响行为。划分变化 $S \xrightarrow{2} \bar{S}$ 直接源于时间 $\Theta = 2$ 时 (v_0，t) 的容量变化，该变化使 $v_0 \in S$ 的势贡献增加 (2)。另一次划分变化 $\bar{S} \xrightarrow{3} S$ 则是因为时间范围 T 临近，从而使 $v_0 \in S$ 的势贡献 (3) 降为零。

现在假设，对于固定的 $k \in \mathbb{N}$，构造装置 H_{start} 到 H_{k-1} 均能正常工作，产生所需的变化。由于模拟装置的功能，

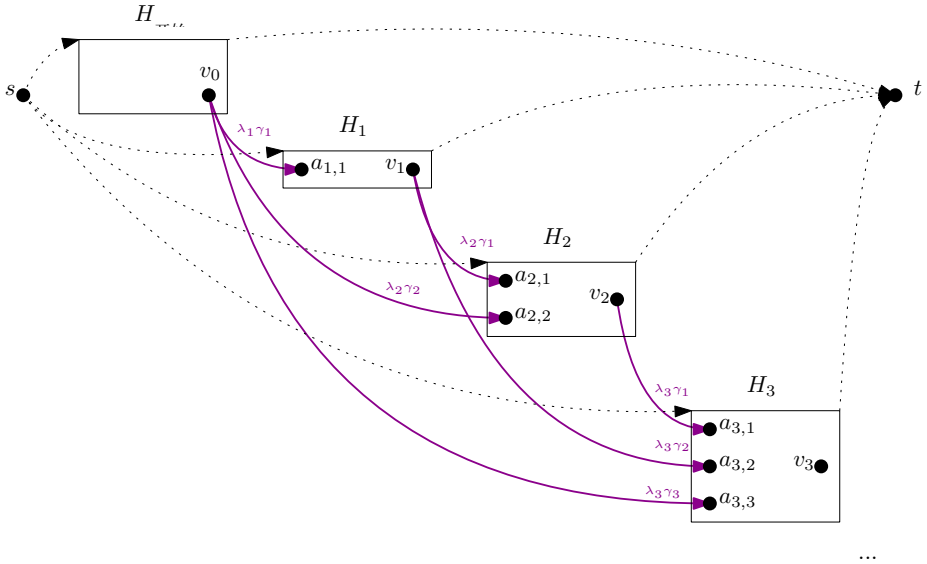


图 7：将二进制计数装置连接起来，以确保最小割在 v_ℓ 处发生 $\mathsf{ch}_{v_\ell} = 2^\ell$ 划分变化的构造；紫色边表示模拟装置，数字表示容量。

经过延迟$\tau_{(v_{k-i},a_{k,i})}$，根据归纳法 $a_{k,\,i}$ 在时刻经历变化 $S_{a_{k,\,i}} \xrightarrow{\Theta} \bar{S}_{a_{k_i}}$

$$\Theta \equiv T_{0,k-i} + \tau_{(v_{k-i},a_{k,i})} \bmod 2\Delta_{k-i} \equiv T_{0,k} \bmod 2\Delta_{k-i}$$

并在时间 $\bar{S}_{a_{k,i}} \xrightarrow{\Theta} S_{a_{k_i}}$ 发生变化

$$\Theta \equiv T_{0,k-i} + \Delta_{k-i} + \tau_{(v_{k-i},a_{k,i})} \bmod 2\Delta_{k-i} \equiv T_{0,k} + \Delta_{k-i} \bmod 2\Delta_{k-i}$$

从$\Theta = T_{0,k-i} + 2\Delta_{k-i} + \tau_{(v_{k-i},a_{k,i})} = T_{0,k}$ 开始，直到$\Theta = T_{0,k-i} +1 + \Delta_{k-i} + \tau_{(v_{k-i},a_{k,i})} = T_{0,k} + 1 - \Delta_{k-1}$。这意味着，从 $T_{0,k}$ 开始，$a_{k,i}$ 构成一个二进制计数器，每隔 $2\Delta_k$ 增加一次，并伴随额外的变化 $\bar{S}_{a_{k,i}} \xrightarrow{T_{0,\,k+1}} S_{a_{k,i}}$。现在，应用引理 2——将时间乘以因子 Δ_k，并加上初始偏移量 $T_{0,k}$ ——即可得到 v_k 所需的变化时刻。

$a_{\ell,\,i}$ 有效性所需的正确变化模式 H_ℓ，可由 v_k的更强归纳假设推出，正如上文归纳步骤中所示。□

为了利用最小割的复杂性来证明最大流的复杂性，我们需要以下引理。

引理 5. 对任意最大流而言，在某条最小割的容量包含某条边的期间，该边必须处于饱和状态

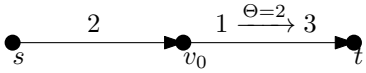


图 8： H_{start}的构造，给出了 v_0 所需的划分变化，以便在一次容量变化下实现 G_ℓ；数字表示容量，$\tau_{(v_0,t)} = T - 3$。

¯割。此外，对于某条最小割 S，若某条边 $e = (v, w)$ 满足 $v \in S(\Theta)$ 和 $w \in S(\Theta + \tau_e)$，则对任意最大流而言，该边在时间 Θ 可能不会输送流。

¯证明。对于任意最小割 S，流从 $s \in S$ 输送到 $t \in S$。这意味着，任何输送流的路径都必须至少包含一条边¯，使流能够从 S 流向 S。所有允许流从 S 流向_S 的边都会计入 cap(S)。因此，如果某条计入其中的边未被流 f饱和，那么流值 $|f|$ 就会小于 cap(S)。于是，定理 1 的割流对偶性表明， f 不可能是最大流。

给定一个最小割 S， f 的流沿边 $e = (v, w)$输送，而

_ _$v \in S(\Theta)$和 $w \in S(\Theta + \tau_e)$必须跨越从 S 到 S 的多条边才能到达t，其中一条在 e 之前，另一条在其之后。因此，即使 f 如上所述饱和了所有计入 cap(S)的边，到达 t的流量仍会小于 cap(S)。由此，定理 1 再次表明， f 不是最大流。□

要得到以下定理，只需注意，引理 4 的构造中最小割的结构，结合引理 5，也意味着最大流具有指数复杂度。另请注意，时间可以离散化。

定理 4. 存在仅发生一次容量变化的动态流网络，其中每个最小割和最大流都具有指数复杂度。即使对于无环网络和离散时间，这一结论也成立。

证明. 如引理 2 所示，一个有效的二进制计数装置 H_ℓ 包含一个中心顶点 v_ℓ，该顶点在任意最小割 S中会经历 2^k 次划分变化。由于引理 4 证明了存在一个规模为多项式、且包含有效 H_ℓ的无环动态流网络 G_ℓ，因此 G_ℓ 中的任意最小割都具有指数复杂度。 G_ℓ 的构造仅使用通行时间和变化时刻，且它们都是 Δ_ℓ的倍数，因此将时间离散化为长度为 Δ_ℓ 的单位，即可得到具有相同性质的离散时间动态流网络。

要看出这种具有指数多次变化的划分变化模式也意味着任何最大流都必须具有指数级复杂性，我们需要引理 5。该引理表明，最小割会对最大流施加限制。在 $a_{\ell,1}$ 的划分变化模式中，每 $2\Delta_\ell$ 和 v_ℓ 变化一次，每 Δ 在 S 中变化一次，导致 $(a_{\ell,1}, v_\ell)$ 以指数多次从一条连接 S 和 S 的边变为一条连接 S 和 S 的边。这意味着 G_ℓ 中的任何最大流 f 都会发生指数多次 $f_{(a_{\ell,1},v_\ell)}$ 变化。□

请注意，引理4中的构造需要特定的时间范围T。在无限考虑时间的情况下，只需进行两次容量变化即可获得相同的结果。

推论 3。 定理 *4*在无限考虑时间且发生两次容量变化的情况下同样成立。

证明。 图 8 所示的起始构造 H_{start} 可以通过在时间 $\Theta = 3$将（v_0, t）的容量额外改为零来修改，从而在无限考虑时间下强制出现这两次变化 $S \xrightarrow{2} \bar{S}$ 和 $\bar{S} \xrightarrow{3} S$ v_0 。引入无限考虑时间并不会改变定理 4 的其余证明。□

请注意，如果猜想 1 成立，那么在这种情况下，容量变化至少需要两次。

如引言中所述，上述复杂度结果可推广到采用时变通行时间而非时变容量的情形。推论 3 的结果甚至可以加强为只需一次通行时间变化。

推论 4。 在静态容量和仅发生一次变化的时变通行时间这一设定下，定理 *4* 也成立；无论是有限时间范围还是无限考虑时间，均如此。

证明。 对于无限考虑时间，我们给出图 9 中所示的起始构造 H_{start} 。对于任意最大流 f，(v_0, t) 始终处于饱和状态，但在 $[2, 3]$, 期间除外，因为通行时间增加 1 后，无法有流通过 (s, v_0)。相应的最小割 S 要求 v_0 始终处于 S^{-}中，但在 $[2, 3]$, 期间除外，此时 v_0 必须处于 S中。这些就是 H_{start}为定理 2 的证明提供归纳法起点所需的变化。

显然，仅考察 $[0, 6]$ 中的时间也同样可行，正如定理 2 的证明中所述。□

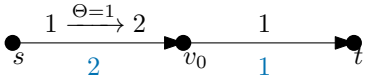


图 9： H_{start}的构造，为 G_{ℓ}提供所需的 v_0，其中通行时间发生一次变化；黑色数字表示通行时间，蓝色数字表示容量。

请注意，定理 4 的构造使得每个最小割和每个最大流都具有指数复杂度。接下来我们将证明，割或流可以独立地发生指数多次变化。具体而言，我们给出一些构造，它们要求流具有指数复杂度，却允许割的复杂度较低，反之亦然。

4.2 复杂流与简单割（反之亦然）

上述所有构造都要求所有最小割和 所有最大流都具有指数复杂度。这里我们将证明，流和割可以彼此独立，也就是说，它们所需的复杂度可能相差指数级（两个方向皆然）。

定理 5. 存在仅有一次容量变化的无环动态流网络，其中每个最大流都具有指数级复杂性，而存在一个复杂性为常数的最小割。对于静态容量和时变通行时间，结论也成立。

证明。 图 10 展示了具有这些性质的一个图。其实现方式是，只允许流在 $[0,1]$, 期间进入 v_0，但由于边（v_k, t）的容量在时间范围 $T \geq 2^k$内降低，流必须在 $[0, 2^k]$ 期间离开 v_k。除 v_k 外，所有 v_i 都通过一对边与下一个 v_{i+1} 相连，这些边的通行时间分别为 2^{k-i-1} 和零，且容量均为 1。因此，为了路由出最大流，必须使用所有经过该网络且通行时间各不相同的 2^k 路径。这些路径中每隔一条的通行时间都是偶数，所以流必须在每隔一个整数时间区间内，经过 v_{k-1} 和 v_k 之间通行时间为零的边，从而导致该边上的流发生指数多次变化。然而，若将所有 v_i 在所有时间都分配给 S，便构成一个没有划分变化的最小割。此结论可推广到时变通行时间：在时间 $\Theta = 1$，将边（s, v_0）的通行时间增加至 T，即可阻断该边。□

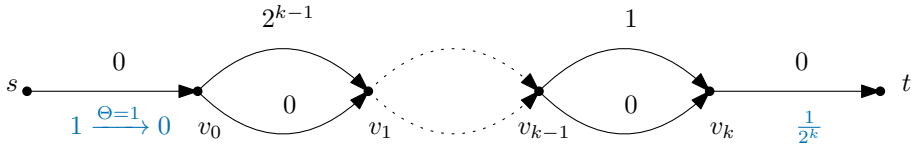


图 10：一个图的示例，其中任何最大流都包含指数多个变化，但存在一个没有变化的最小割；黑色数字表示通行时间，蓝色数字表示容量，未标明的容量均为 1。

定理 6。存在仅有一次容量变化的无环动态流网络，其中每个最小割的复杂性都是指数级的，而最大流的复杂性却可以是线性的。静态容量和时变通行时间的情形也同样如此。

证明。 图11展示了一个图，其中任何最小割都需要包含指数多个变化，但存在一个变化次数呈线性增长的最大流。这个构造的思路是，只有流可以在任何时间进入 s'，而流只能在 2^k 之后的一个整数区间内从 x_{2k} 流向 t，并且

在时间范围 $T = 2^k + 1$之前。所有其他边的容量均为 1。图中有一组旁路路径，使流可以在不晚于 $2^k - 1$的任意整数时间从 s' 流向x_{2k}：通过一对通行时间分别为 2^{k-i-1} 和 0 的边，将 y_i 与 y_{i+1} 连接起来。因此，流可以通过该图进行路由。需要指数多个割的部分由x_i组成。初始的 x_0 可以通过通行时间为 1 的路径从 s' 到达；内部每个x_i，$i < k$都通过一对通行时间分别为2^{i+1} 和 0 的边与下一个 $x_i + 1$ 相连。后续的 x_i，$i \geq k$ 则通过一对通行时间为 2^{2k-i} 和 0 的边与下一个 x_{i+1} 相连。

如果使用旁路路径，则由于 $(s,\ s')$ 的容量以及缺少一条经过 x_i 的通行时间为 2^k 的路径，不会有额外的流经由 x_i 通过上方路径。在任何时刻，除了 $(s,\ s')$ 之外，都不存在能使任何边饱和的最大流；因此，根据定理 1 的割流对偶性，只有这条边能够对最小割的容量作出贡献。由于从 s' 到 x_{2k} 存在通行时间不超过 $2^k - 1$ 的整数通行时间路径，我们知道，在 $[1, 2^k + 1)$ 期间，s' 必须位于 $\bar{S}$ 中，以防止其他边对割作出贡献。这已经使割的容量至少达到 $\frac{2^k}{2^k+1}$，因此，在 $[0, 1)$ 期间，s' 必须位于 S 中。为防止其他边对割的容量作出贡献，x_k 需要以指数级的频率改变划分。注意，从任意 s' 到 x_k 的任何路径的通行时间，加上 $(s',\ x_0)$ 的 1，标示出 x_j 必须处于 S 划分中的时刻。同样，从 x_k 到 x_{2k} 的路径的通行时间减去 2^k，标示出 x_k 必须处于 S 划分中的时刻。因此，在任何以奇数时刻开始、且位于 2^k 之前的整数区间内，x_k 必须位于 S；而在任何以偶数时刻开始的此类区间内，它必须位于 $\bar{S}$。

该图中的流可以用线性时间轻松表示，并且每条边的流率最多只改变一次。按照上述方式使用旁路路径，不会有流经过任何 x_i。旁路边的排序可确保使用所有不同的路径通行时间来实现该最大流时，流在 $[2^k - 2^{k-i} + 1, 2^k + 1)$ 期间经过任何 y_i。这意味着，旁路边中从 y_i 到 y_{i+1} 的每条边，在通行时间为 2^{k-i-1} 的边对应的时段 $[2^k - 2^{k-i} + 1, 2^k - 2^{k-i-1} + 1)$ 内发送 $\frac{2^i}{2^k+1}$，并在通行时间为零的边对应的时段 $[2^k - 2^{k-i-1} + 1, 2^k + 1)$ 内发送流。其余边上的流也很容易表示；$(s,\ s')$ 在 $[1, T)$ 期间达到饱和，$(x_{2k},\ t)$ 在 $[2^k, T)$ 期间发送 $\frac{2^k}{2^k+1}$，而 $(s',\ y_0)$，$(y_k,\ x_{2k})$ 仅用于改善视觉呈现，它们上的流由 $(s,\ s')$，$(x_{2k},\ t)$ 给出。

这可以推广到时变通行时间：在时间 $\Theta = 2^k$，通过将边 $(x_{2k},\ t)$ 的通行时间从 T 降至 0，即可激活该边。

□

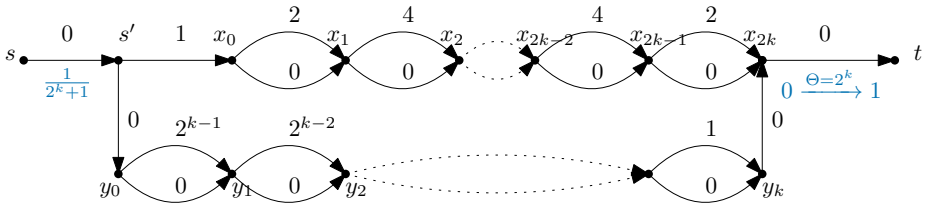


图 11：一个图的示例，其中任意最小割都包含指数多次变化，但存在一个仅有线性次变化的流；黑色数字表示通行时间，蓝色数字表示容量，未指定的容量为 1，时间范围为 $T = 2^k + 1$。

参考文献

1. Disser, Y., Skutella, M.: 单纯形算法具有 NP 强大能力。ACM算法汇刊 (TALG) **15**(1), 1–19 (2018) 2. Ford Jr, L.R., Fulkerson, D.R.: 从静态流构造最大动态流。运筹学 **6**(3), 419–433 (1958) 3. Hall, A., Hippler, S., Skutella, M.: 随时间变化的多商品流：高效算法与复杂性。理论计算机科学 **379**(3), 387–404 (2007) 4. Halpern, J.: 广义动态流问题。网络 **9**(2), 133–167 (1979) 5. Koch, R., Nasrabadi, E., Skutella, M.: 连续与离散的时变流。运筹学数学方法 **73**(3), 301 (2011) 6. K¨ohler, E., Skutella, M.: 具有负载相关通行时间的时变流。SIAM优化杂志 **15**(4), 1185–1202 (2005) 7. Langkau, K.: 具有依赖流量的通行时间的时变流 (2003) 8. Philpott, A.B.: 网络中的连续时间流。运筹学数学 **15**(4), 640–661 (1990) 9. Sha, D., Cai, X., Wong, C.: 时变网络中的最大流。载于：优化，第 437–456 页。施普林格 (2000) 10. Skutella, M.: 时变网络流导论。载于：组合优化研究趋势，第 451–482 页。施普林格 (2009) 11. Tjandra, S.A.: 应用于疏散问题的动态网络优化 (2003)

A 关于具有时变容量的动态流的强 NP 完全性

正如引言中所述，Sha Cai 和 Wong [9,定理 2]声称，具有时变容量的动态流问题具有强 NP 完全性的证明。我们在定理 4 中证明的指数复杂度，并不能否定最大动态流问题属于 NP，但它使得使用两种典范证据在多项式时间内验证解的做法失效。因此，关于最大动态流问题显然属于 NP 的主张值得怀疑。

从三维匹配问题进行的归约存在一个问题：流可以沿着一条路径从 s 到 t，而路径上的边属于 3DM 中不同的三元组。图 12 展示了一个这样的例子。3DM 问题有四个可能的三元组 $M = \{(w_1, x_1, y_1)$、(w_1, x_2, y_2)、(w_2, x_2, y_3)、$(w_3, x_3, y_3)\}$，要求恰好各命中集合 $\{w_1, w_2, w_3\}$、$\{x_1, x_2, x_3\}$、$\{y_1, y_2, y_3\}$中的三个元素一次。这是不可能的，因为命中 y_1 和 w_3 的要求必然要使用(w_1, x_1, y_1)、(w_3, x_3, y_3)，但剩余的三个元素 w_2、x_2、y_2 无法由 M中剩余的任一三元组覆盖。然而，诱导子图中存在三条边不相交路径(w_1, x_1, y_1)、(w_2, x_2, y_2)、(w_3, x_3, y_3)，使得流量为 3 的流能够从 s 流向 t，这本应对应于一个可解的 3DM 实例。

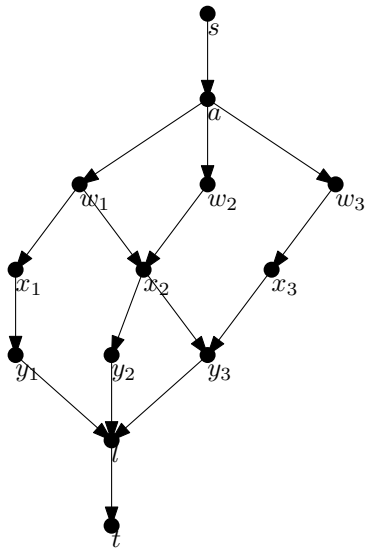


图 12：将 3DM 归约到最大动态流的反例示意图：3DM 实例无解，但由此构造的最大动态流实例却能达到所需的流量 3，这意味着 3DM 问题有解。

此外，对于容量为分段常数函数、容量变化发生在整数时刻且边的通行时间为整数的含时变容量动态流问题，它不太可能是强 NP 困难的。这种情况可以利用时间扩展图在伪多项式时间内求解；时间扩展图为每个整数时刻设置一个顶点，并连接时间差正确的顶点副本。在时间扩展图中，容量不再变化，因此可以通过时间重复流求解。有鉴于此，强 NP 难性证明将表明 P =NP。

B 简单流路径的强NP难性

在研究过程中，我们偶然发现了以下相关的 NP 难性归约。不过，这在某种程度上超出了本文的范围，因此这里只在附录中提及。

定理 7. 将（最大）动态流问题限制为简单流路径，并采用时变容量或时变通行时间时，该问题是强*NP*-困难的。

证明。 这可由 Hall、Hippler 和 Skutella [3, 定理 7] 给出的、针对具有简单流路径且无存储的多商品时间流问题的 NP-困难性证明推出。他们的构造需要一个交通信号灯构件，但除此之外只需一个流商品。交通信号灯构件允许将一条边的容量设为零，唯有在某个区间$[a, b)$ 内，该边才提供可用容量。由于此处考虑的情形允许根据时间调整边的容量，因此在时变容量的情况下，构造此类构件十分简单。对于时变通行时间，我们可以构造一个交通信号灯构件，使流仅能在 $[a, b)$ 期间通过 e：将 e 的通行时间在 $[0, a)$ 和 $[b, T)$ 期间设为 T 即可。□