arXiv:2302.07686v1 [math.AT] 15 Feb 2023

多边形谱与带系数的 TR

ACHIM KRAUSE、JONAS MCCANDLESS 和 THOMAS NIKOLAUS

Abstract. 我们引入了多边形谱这一概念，旨在公理化带系数的拓扑 Hochschild 同调 THH(R, M) 上的结构，其中系数取自一个 $\mathbb{E}_1$- 环 R 上的双模 R。对于每个多边形谱 X，我们将谱 TR(X) 定义为从多边形版本的球谱 $\mathbb{S}$到 X的映射谱。特别地，将其应用于 X = THH(R, M) 时，便得到 TR(R, M) 的概念性定义。

每个圆分谱都会产生一个多边形谱，我们证明在这种情况下，TR 与经典的 TR 定义一致。通过将 TR(X) 表示为拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的 $\mathbb{Z}$-不动点，我们在 TR(X) 上构造了 Frobenius 和 Verschiebung 映射。拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱这一概念是我们引入并讨论的新概念，其灵感来自 Kaledin 在 $\mathbb{Z}$ 上引入的类似概念。除了真谱通常具有的相容性之外，该概念还编码了 TR(X) 接受某些 Verschiebung 映射的无穷和这一事实。

Contents

1. 引言 2 1.1. 多边形谱与传递 2 1.2. Frobenius 与 Verschiebung 映射 5 1.3. 完备性 6 1.4. 带系数的拓扑 Hochschild 同调 8 2. 多边形谱 10 2.1. 截断集 10 2.2. 多边形谱的 ∞-范畴 10 2.3. 旋轮谱与多边形谱 14 3. 多边 TR 21 3.1. 多边 TR 的定义 21 3.2. 多边形 t-结构 25 4. Kaledin 之后的拟有限真 G-谱 26 4.1. 拟有限真 G-谱的定义 26 4.2. 幺半性质 33 4.3. 几何不动点 35 4.4. 拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱 42 5. 拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱与传递 46 5.1. 作为拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的传递 46 6. 多边形 THH 50 6.1. 循环双模算子 50 6.2. 迹理论 55

参考文献 60

1. Introduction

本文旨在引入并研究多边形谱的 ∞-范畴，将其作为 [26] 意义下旋轮谱的 ∞-范畴的类比。其关键在于，多边形谱的 ∞-范畴为研究带系数的 THH 和传递提供了自然框架。为阐释多边形谱的定义，回顾一下， $\mathbb{E}_1$-环 R 在 R-双模 M 中取系数的拓扑 Hochschild 同调 THH(R, M)，定义为一个单纯谱的几何实现，我们将其非正式地表示为

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; M \otimes R \otimes R \;\rightrightarrows\; M \otimes R \;\longrightarrow\; M.$$

例如，第一对映射分别由 R 对 M 的左作用和右作用给出。在特殊情形 $R = M$ 下，上述单纯谱具有额外结构，即循环群 C_n 在第（$n-1$）项上通过循环置换给出的作用。更精确地说，该单纯谱扩展为 Connes [7], 引入的循环谱；这意味着拓扑 Hochschild 同调 THH(R) = THH(R, R) 具有圆群 $\mathbb{T}$ 的作用。此外，还有一个具有 $\mathbb{T}$-作用的谱之间的映射

$$\varphi_p : \mathrm{THH}(R) \to \mathrm{THH}(R)^{\mathrm{t}C_p}$$

对每个素数 p，其中我们将循环群 C_p 视为单位根，而 Tate 构造带有剩余的 $\mathbb{T} \simeq \mathbb{T}/C_p$-作用。按照 [26], 的意义，这一结构使 THH(R) 成为一个圆分谱；正是这一圆分结构促成了如 [24, 26] 中所述的 TR 和 TC 的构造。对于任意 R-双模 M，定义 THH(R, M) 的单纯谱不再扩展为循环谱。本文的主要目标是提炼 THH(R, M) 的关键结构性质，从而使我们能够提取 TR 等进一步的不变量。

1.1. 多边形谱与 TR。

我们的主要见解是，虽然 THH(R, M) 不具有圆群作用，但它仍带有映射 φ_p 的一种变体，其形式为

$$\varphi_p : \mathrm{THH}(R, M) \to \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R p})^{\mathrm{t}C_p},$$

其中 $M^{\otimes_R p}$表示通过 p 次张量积 $M \otimes_R \cdots \otimes_R M$ 得到的 R-双模。THH($R, M^{\otimes_R p}$) 带有由张量因子的循环置换所诱导的循环群 C_p 作用，这一点相当令人惊讶，因为这些置换并非 R-双模的映射。本文将细致地构造这些结构。我们将证明，谱的族 $\{\mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})\}_n$ 带有多边形谱的结构，我们定义如下：

定义 1.1. 多边形谱由以下数据组成：

(1) 一族谱 $\{X_n\}_{n\geq 1}$，其中每个 X_n 都承认 C_n的作用。

(2) 对于每个素数 p 和 $n \geq 1$，一个 C_n-等变谱之间的映射数据

$$\varphi_{p,n} : X_n \to (X_{pn})^{\mathrm{t}C_p},$$

其中 Tate 构造带有剩余的 $C_{pn}/C_p \simeq C_n$ 作用。

令 PgcSp 表示多边形谱的 ∞-范畴（参见定义2.6）。

我们将多边形谱视为圆分谱的一种多对象变体，其指标集是 n-多边形，而非圆。事实上，圆分谱的概念由一个谱编码，该谱带有圆的保定向对称作用，而 Frobenius 映射则对应于圆的自覆盖。相比之下，我们将多边形谱视为一条规则：它为每个 n-多边形赋予一个带有 C_n-作用的谱，该作用由保定向对称作用于 n-多边形而得；多边 Frobenius 映射则对应于多边形的自覆盖。

例 1.2. 我们讨论一些多边形谱的例子。

(1) 每个圆分谱 X 都可以通过 $X_n = X$ 视为常值多边形谱；其中，对于每个 n，我们将 X 视为带有 C_n-作用的谱，该作用由限制得到。多边形结构映射 $\varphi_{p,n}$ 是通过将旋轮弗罗贝尼乌斯映射 $\varphi_p : X \to X^{\mathrm{t}C_p}$ 视为对每个 n 都等变的映射而得到的。作为一个特例，我们可以将配备平凡回旋结构的球谱视为多边形谱。更一般地，每个谱都可以视为带有平凡 $\mathbb{T}$-作用的圆分谱，因此也可以视为常值多边形谱，其中所有 C_n-作用都是平凡的。

(2) 带有 R-双模 M 系数的 $\mathbb{E}_1$-环 R 的拓扑 Hochschild 同调，具有如下多边形谱结构：

$$\mathrm{THH}(R, M)_n = \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})$$

对每个 $n \geq 1$ 都成立。这是多边形谱的一个启发性例子，本文相当一部分内容都致力于将 THH(R, M) 构造为多边形谱（参见第6节）。我们将在下文更详细地介绍实现这一目标的策略（参见第1.4节）。

(3) 对于每个多边形谱 X，我们都可以构造移位多边形谱 $\mathsf{sh}_n X$，其定义公式为 $(\mathsf{sh}_n X)_k = X_{kn}$（参见例 2.28）。构造 $X \mapsto \mathsf{sh}_n X$ 确定了一个函子 $\mathsf{sh}_n : \mathrm{PgcSp} \to \mathrm{PgcSp}$，它将在本文中发挥重要作用。例如，对每个 $n \geq 1$，我们都有 $\mathsf{sh}_n \mathrm{THH}(R, M) \simeq \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})$。

引入多边形谱的 ∞-范畴的意义在于，它允许通过如 [24] 中所述的适当余可表构造来构造 TR。

定义 1.3. 若 X 是一个多边形谱，则 TR(X) 定义为

$$\mathrm{TR}(X) = \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}}(\mathbb{S}, X),$$

其中，球谱 $\mathbb{S}$ 被视为一个常值多边形谱。等价地，谱 TR(X) 等价于下列谱图表的等化子

$$\prod_{n \geq 1} X_n^{\mathrm{h}C_n} \rightrightarrows \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{n \geq 1} (X_{pn}^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_n}$$

w这里的映射由各种 $\varphi_{p\,n}^{\mathrm{h}C_n}$,以及典范映射 $X_{pn}^{\mathrm{h}C_{pn}} \to (X_{pn}^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C}$诱导 ^{n}.

这个定义与第三位作者和 Scholze 在 [26], 中得到的 TC 构造相似：它是由球谱在 ∞-范畴的分圆谱上余表示的函子。映射谱与上述定义 1.3 中的等化子描述之间的等价，由 [26, 命题 II.1.5] 得出。

事实上，无法在 ∞多边形谱的范畴上定义 TC；因此，如果我们有兴趣研究带系数的拓扑 Hochschild 同调，那么 TR 才是应当考虑的正确构造。我们将带系数的 $\mathbb{E}_1$-环 R 的 TR 定义为：其中系数取值于一个 R-双模 M，定义如下：

$$\mathrm{TR}(R, M) = \mathrm{TR}(\mathrm{THH}(R, M)).$$

我们指出，Lindenstrauss–McCarthy 也利用点集构造，构造了带系数的带 smash 积的函子的 TR 版本，其中系数取值于一个双模（参见 [19]）。当 R 和 M 均为离散对象时，阿贝尔群 $\mathrm{TR}_0(R, M)$ 同构于 $W(R, M)$ 中介绍的带系数的 Witt 向量，相关结果将在 [8]中确立。

作为我们的主要结果之一，我们分析了 ∞旋轮谱的范畴与 ∞多边形谱的范畴之间的关系。令 $i : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}$ 表示如下函子：将每个旋轮谱视为常值多边形谱，具体如上文所述。在 §2.3 中，我们得到以下结果（参见定理 2.24 ）。

定理 A. 典范函子 $i : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}$ 有左右伴随函子

$$\mathrm{PgcSp} \underset{R}{\overset{L}{\underset{i}{\rightleftarrows}}} \mathrm{CycSp}$$

使得存在圆分谱之间的自然等价

$$Li(X) \simeq X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t])$$
$$Ri(X) \simeq \Omega X \widehat{\otimes} \widetilde{\mathrm{THH}}^{\mathrm{cont}}(\mathbb{S}[\![t]\!]) \coloneqq \Omega \varprojlim (X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]/t^n))$$

对每个圆分谱 X均成立。

关于上述定理 A 中所用记号的解释，请参见记号 2.22。注意， $Ri(X)$ 的描述中的极限是圆分谱的 ∞-范畴中的极限。由于这些极限并非在底层范畴中构造的，因此可能是相当复杂的对象。定理 A 的证明可由归纳函子和余诱导函子的显式公式直接推出。

尽管如此，定理 A 使我们能够用两种方式表示圆分谱 X 的 TR。首先，利用左伴随 $L : \mathrm{PgcSp} \to \mathrm{CycSp}$ 的公式，我们得到

$$\mathrm{TR}(X) = \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}}(i(\mathbb{S}), i(X)) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{CycSp}}(Li(\mathbb{S}), X) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{CycSp}}(\widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]), X)$$

这重现了 Blumberg–Mandell [6] 最先证明、后来由第二作者在 [24] 中重新讨论的一个结果（参见命题 3.8）。利用右伴随 R 的公式，我们得到

$$\mathrm{TR}(X) = \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}}(i(\mathbb{S}), i(X)) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{CycSp}}(\mathbb{S}, Ri(X)) \simeq \Omega \varprojlim_n \mathrm{TC}(X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]/t^n))$$

这恢复了第二作者在 [24], 中得到的结果，而该结果又推广了 Hesselholt [13] 和 Betley–Schlichtkrull [5] 的工作（参见定理 3.12）。我们进一步得到了这一结果的一个强化版本，为此需要对多边形谱的 ∞-范畴作轻微变体。

注 1.4。在 §2.2 中，对于任意截断集 $T \subseteq \mathbb{N}_{>0}$，我们将考虑多边形谱的 ∞-范畴的一个 T-典型变体。更确切地说，我们令 PgcSp_T 表示由满足以下条件的多边形谱 X 所张成的 PgcSp 全子范畴：当 $n \notin T$时， $X_n = 0$ 。每个多边形谱 X 都可通过令必要的X_n 为零，得到一个 T-典型多边形谱 $X_{|T}$。我们定义 TR 的一个 T-典型变体如下：

$$\mathrm{TR}_T(X) = \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}_T}(\mathbb{S}_{|T}, X)$$

对于每个 T-典型的多边形谱 X。

利用 T-典型的多边形谱以及定理 A 的一个 T-典型细化，我们将证明以下结果（参见定理 3.12）。

定理 B. 设 T 表示一个截断集。存在谱的自然等价

$$\mathrm{TR}_T(X) \simeq \Omega\,\mathrm{TC}\Big(\prod_{t\in T} X \otimes \Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_t)\Big).$$

对于每个圆分谱 X。

1.2. Frobenius 和 Verschiebung 映射。目前，对于每个 $\mathbb{E}_1$-环 R 和 R-双模 M，我们都构造了一个谱 $\mathrm{TR}(R,M)$。TR 与 Witt 向量之间的密切关系表明，$\mathrm{TR}(R,M)$ 应配备额外的结构，以编码 Verschiebung 映射和 Frobenius 映射。事实上，我们在 $\mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n})$ 上构造了 C_n 的作用以及一对映射

$$F_k : \mathrm{TR}(R,M) \to \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R k})$$
$$V_k : \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R k}) \to \mathrm{TR}(R,M)$$

它们满足某些相容性。例如，我们有 $F_n \bigcirc F_m \simeq F_{nm}$ 而$V_n \bigcirc V_m \simeq V_{nm}$，并且映射 F_n 和 V_n 可典范地细化为一对映射

$$F_k : \mathrm{TR}(R,M) \to \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R k})^{\mathrm{h}C_k}$$
$$V_k : \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R k})_{\mathrm{h}C_k} \to \mathrm{TR}(R,M)$$

最后，我们有 $F_n \bigcirc V_n$ 等价于 $\mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n})$ 的 C_n-范数映射；若 m 和 n 互素，则 $F_n \bigcirc V_m \simeq V_m \bigcirc F_n$。我们将使用真正等变同伦论的形式体系，更确切地说，使用有限真正 $\mathbb{Z}$-谱[1]的形式体系，将 $\mathrm{TR}(R,M)$ 上的这一附加结构形式化。我们将在定义 4.2 中简要介绍谱 Mackey 函子 [2] 的形式体系。

定理 C. 设 M 是一个 $\mathbb{E}_1$-环 R上的双模。存在一个有限真正 $\mathbb{Z}$-谱，记作 $\mathrm{TR}(R,M)$，其关于 $\mathbb{Z}$ 的子群 $n\mathbb{Z}$的不动点为

$$\underline{\mathrm{TR}}(R,M)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n}).$$

有限真 $\mathbb{Z}$-谱 $\mathrm{TR}(R,M)$ 以相容的方式编码了上述结构。具体来说，Frobenius 映射由这个有限真 $\mathbb{Z}$-谱的不动点的包含给出，而 Verschiebung 映射则由转移映射给出。事实上，对于每个多边形谱 X，我们将更一般地构造一个有限真 $\mathbb{Z}$-谱 $\mathrm{TR}(X)$。

[1]我们将那些具有 $\mathbb{Z}$-作用、且对余有限子群 $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ 存在真不动点的谱称为“有限生成真 $\mathbb{Z}$-谱”。按照经典术语，这称为余有限子群族的真 $\mathbb{Z}$-谱。用 [2, 例 B] 的语言来说，这些也等价于真 $\underline{\mathbb{Z}}$-谱。

1.3. 完备性。除了映射 V_k 和 F_k的存在之外，Witt 向量环$W(R) = \pi_0\mathrm{TR}(R,R)$ 还带有完备拓扑。现在我们的目标是说明 $\mathrm{TR}(R,M)$ 的相应情形。在 p-典型情形中， p-典型 Witt 向量上的拓扑是 V- 进拓扑，而完备性意味着

$$W_{\langle p^\infty\rangle}(R) = \varprojlim_n W_{\langle p^\infty\rangle}(R)/V^n$$

并且有 $W_{\langle p^\infty\rangle}(R)/V = R$。特别地，拓扑完全由代数运算 V 编码。Antieau 和第三位作者在 [1] 中证明了 p-典型 TR 也具有这些性质的类似结论。然而，在整系数情形下，整系数 TR 和整系数维特向量的正确完备性概念更为微妙，因为它必然涉及构造某些 Verschiebung 映射的无穷和。

例 1.5. 若 R 是一个交换环，则大维特向量环的底层可加群可描述如下

$$(W(R),+) = (1+tR[\![t]\!],\cdot),$$

其中， $W(R)$ 上的拓扑对应于右侧的 t-进拓扑。第 n 个 Verschiebung 由将幂级数 $p(t)$ 发送到级数 $p(t^n)$ 给出。关键在于，任何一族由正整数序列 $\{n_i\}_{i\geq 1}$ 索引的 Verschiebung 映射 $\{V_{n_i}\}_{i\geq 1}$，只要满足 $n_i \to \infty$ （对 $i \to \infty$），就是可求和的，也就是说，无穷和 $\sum_{i=1}^\infty V_{n_i}$ 收敛。将其转化为幂级数的无穷乘积后，即可容易看出该乘积在 t-进拓扑下收敛。更准确地说，下图中的虚线延拓 $V_{\{n_i\}}$ 存在

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\geq 1} W(R) & \xrightarrow{\sum_{i\geq 1} V_{n_i}} & W(R) \\ \downarrow & \nearrow_{V_{\{n_i\}}} & \\ \prod_{i\geq 1} W(R) & & \end{array}$$

对于上述每一个这样的序列 $\{n_i\}_{i\geq 1}$。此外，我们可以将 R 恢复为 $W(R)$ 对 $\sum_{i=2}^\infty V_i$ 的像取商所得。特别地，利用类似的求和，可以从映射 $\sum_{i=1}^\infty V_{n_i}$恢复 t-进拓扑。因此，我们不必将 $W(R)$ 视为拓扑阿贝尔群，也可以等价地将其视为配备了这些 Verschiebung 映射的无穷和，并满足若干公理（例如，确保所诱导的拓扑是完备的，且所有映射都是连续的）。

我们构造一个谱之间的映射

$$V_{\{n_i\}} : \prod_{i\geq 1} \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n_i}) \to \mathrm{TR}(R,M)$$

对于每个正整数序列 $\{n_i\}$，其中 $n_i \to \infty$ 满足 $i \to \infty$，且可纳入上述交换图。事实上，我们将在下文说明，如何通过对 $\mathrm{TR}(R,M)$ 上所有这些 Verschiebung 映射的无穷和取适当的余纤维，从 $\mathrm{TR}(R,M)$ 恢复 $\mathrm{THH}(R,M)$。这是 p-典型特征的整体类比：$\mathrm{TR}_{\langle p^\infty\rangle}(R)/V \simeq \mathrm{THH}(R)$（参见 [1, 引理 3.19]）。

为了形式化这些 TR 上 Verschiebung 映射无穷和的性质，我们将使用有限真 $\mathbb{Z}$-谱理论的推广，并证明一个略强于定理 C 的版本。更确切地说，我们将采用拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的形式体系；这一概念将基于 Kaledin [16][2]为链复形引入的类似概念来介绍。其思想是用 Dress–Siebeneicher [10]意义下的拟有限 $\mathbb{Z}$-集合范畴，替代有限 $\mathbb{Z}$-集合范畴。通过考虑后者上的某种谱 Mackey 函子，我们得到一个 ∞-范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$，其对象为拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱，并配备一个 ∞-范畴的遗忘函子

$$\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{fgen}},$$

其中，目标表示上文讨论的有限真 $\mathbb{Z}$-谱的 ∞-范畴。$\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$ 与 $\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{fgen}}$ 的主要区别在于，前者还纳入了某些转移映射的无穷和，因为轨道的无限余积

$$\coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$$

只要 $\{n_i\}_{i\geq 1}$ 是如上所述满足 $n_i \to \infty$ 的正整数 $i \to \infty$ 序列，它就作为一个拟有限 $\mathbb{Z}$-集合存在。上述函子只是遗忘这些收敛的转移映射之和，而其左伴随则形式上添加由上述序列索引的收敛转移映射之和。我们将在 §4.1 中对此作更详细的讨论。现在，我们陈述主要结果：

定理 C'。对于由一个 $\mathbb{E}_1$-环 R 和一个 R-双模 M 组成的每一对 (R, M)，都存在一个拟有限真 $\mathbb{Z}$- 谱，记作 $\mathrm{TR}(R, M)$，其不动点谱由下式给出

$$\underline{\mathrm{TR}}(R, M)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n})$$

对于每个余有限子群 $n\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$。此外，若 R 和 M 是连通的，则对于每个余有限子群 $n\mathbb{Z}$，几何不动点谱由 $\mathrm{TR}(R, M)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})$ 给出。

将 $\mathrm{TR}(R, M)$ 构造成拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱，回答了 Kaledin 在 [16]的引言中提出的问题。除了定理 C 的底层有限真 $\mathbb{Z}$-谱中已有的结构外，该结构还编码了 Verschiebung 映射的无穷和，以及这些映射与其他结构之间的相容性。非正式地说，定理 C' 的最后一部分断言：如果 R和 M都是连通的，那么可以通过消去所有真无穷和 Verschiebung 映射，从 $\mathrm{TR}(R, M)$ 中恢复 $\mathrm{THH}(R, M)$。这是以下结果的整体类比：$\mathrm{TR}^{(p^\infty)}(R)/V \simeq \mathrm{THH}(R)$，该结果由 Antieau 和第三位作者在 [1] 中确立。

我们证明定理 C' 的策略是将传递构造为函子的右伴随

$$\mathrm{L} : \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{PgcSp}$$

将拟有限真的 $\mathbb{Z}$-谱 X 送到具有 $(\mathrm{L}X)_n = X^{\Phi n\mathbb{Z}}$ 的多边形谱，其中 $X^{\Phi n\mathbb{Z}}$ 表示几何不动点，其带有余有限子群 $n\mathbb{Z}$ 的规范 C_n-作用。拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的 ∞-范畴有一个优点：Kaledin 指出，L 在一致有界对象上是保守的（参见 [16, 命题

[2]在 [16], Kaledin 的著作中，将与我们的拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱相对应的对象称为 $\mathbb{Z}$-Mackey 预函子。我们将在第 4 节中结合我们的语境概述这一形式体系。

3.5] 和命题 4.25）。因此，定理 C' 的证明归结为计算一致下有界多边形谱的传递的几何不动点，我们将在第 5 节中完成这一工作。事实上，我们将看到，伴随 L -TR 在下有界对象上诱导出一个等价。

注 1.6。在即将开展的工作中，我们将引入（整数）完备拓扑 Cartier 模的 ∞-范畴。我们将证明，利用本文的思想，该范畴与旋轮谱等价，并运用这一点确定旋轮谱的 ∞-范畴上 t-结构的心（将 Antieau 和第三位作者的工作 [1] 推广到整数情形）。

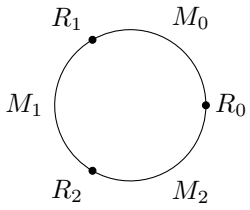
1.4. 带系数的拓扑 Hochschild 同调。我们回到带系数的拓扑 Hochschild 同调构造，将其构造成一个多边形谱，正如例 1.2 中简要说明的那样。更准确地说，我们证明如下结果（参见定理 6.31）。

定理 D。设 R 表示一个 $\mathbb{E}_1$-环，设 M 表示一个 R-双模。则拓扑 Hochschild 同调 THH(R, M) 具有多边形谱的结构，并且

$$\mathrm{THH}(R,M)_n = \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})$$

对于每个 $n \geq 1$，其中 $M^{\otimes_R n}$ 是由 $M^{\otimes_R n} = \underbrace{M \otimes_R \cdots \otimes_R M}_{n\ times}$ 定义的 R-双模.

最后，我们解释证明定理 D 的策略。受 Kaledin [17], 的工作启发，我们通过研究拓扑 Hochschild 同调作为适当 ∞-范畴上的一种迹理论来推进。具体而言，对每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，我们引入一个 ∞-范畴 $\mathrm{CycBMod}_n$，其对象是循环图，顶点标记为 $\mathbb{E}_1$-环 R_0、.....、R_{n-1}，边标记为 R_i-R_{i+1}-双模 M_i，对每个 i 均如此，并按 n 取模。我们将 $\mathrm{CycBMod}_3$ 的一个对象画作：

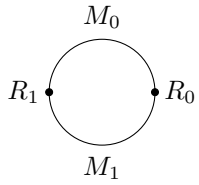


∞范畴 $\mathrm{CycBMod}_n$ 构造为某个适当 ∞运算子的代数；该运算子是一个显式定义的带色运算子的底层运算子，我们将在 §6.1 中讨论它。当我们让 n 变化[3], 时，这些 ∞范畴被整齐地组织成另一个 ∞范畴 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$，其对象是由自然数 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $\mathrm{CycBMod}_n$ 的对象 F 组成的二元组 (n, F)。这是第 三位作者在 [15], 中引入的 ∞范畴Λ^{st} 的一个变体，它以由稳定∞范畴和双函子标记的循环图为参数。对于每个 n，我们构造一个函子

$$\mathrm{THH} : \mathrm{CycBMod}_n \to \mathrm{Sp}$$

[3]更确切地说，∞-范畴 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 是余笛卡尔纤维化 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}} \to \Lambda^{\mathrm{op}}$ 的全空间，其中 Λ 表示循环范畴。这将使我们能够旋转循环图，这对于表述 THH 的循环不变性至关重要。

它被定义为与 CycBMod$_n$ 中一个对象相关联的循环巴构造的几何实现。例如，该函子将 CycBMod$_2$ 中如下图所示的对象



到如下非正式图示的单纯谱的几何实现

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; M_0 \otimes M_1 \otimes R_0 \otimes R_1 \otimes R_0 \otimes R_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; M_0 \otimes M_1 \otimes R_0 \otimes R_1 \;\longrightarrow\; M_0 \otimes M_1$$

例如，第一对映射分别由 $m_0 \otimes m_1 \otimes r_0 \otimes r_1 \mapsto m_0 r_1 \otimes m_1 r_0$ 和$m_0 \otimes m_1 \otimes r_0 \otimes r_1 \mapsto r_0 m_0 \otimes r_1 m_1$ 给出。基于这一点，我们证明如下结果，该结果即为定理 6.26。

定理 E. 构造 $(n, F) \mapsto$ THH(F) 可细化为一个 ∞-范畴函子

$$\mathrm{THH} : \Lambda^{\mathrm{CycBMod}} \to \mathrm{Sp}$$

该函子满足迹性质，也就是说，它将 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$中的余笛卡尔态射映为谱等价。

作为定理 E 的推论， $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$中有如下态射 Span

$$(R_0, M_0 \otimes_{R_1} M_1) \leftarrow (R_0, M_0; R_1, M_1) \to (R_1, M_1 \otimes_{R_0} M_0)$$

被映射为谱之间的一个等价

$$\mathrm{THH}(R_0, M_0 \otimes_{R_1} M_1) \simeq \mathrm{THH}(R_1, M_1 \otimes_{R_0} M_0)$$

这体现了带系数的拓扑 Hochschild 同调的循环不变性。此外，我们通过将 $(R, M;$ .....$;\ R, M)$ 作为 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 中的一个对象进行旋转，并利用迹性质，将 C_n-作用传递到，从而赋予 THH($R, M^{\otimes_R n}$) 一个 C_n- 作用

$$\mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n}) \simeq \mathrm{THH}(R, M; \ldots; R, M).$$

最后，我们利用 Tate 对角在线性有限 C_p-集合上的函子性（如 [26, §III.3] 中所述），在 THH(R, M) 上构造多边形结构映射。或者，也可以采用 Lawson [18] 的工作，在 THH(R, M) 上构造多边形结构。我们还提到， ∞-范畴 CycBMod$_n$ 与 Berman [4]的工作中出现的旁路范畴密切相关。

致谢。作者感谢 Dmitry Kaledin 提出这样一个观点：拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的形式主义编码了 TR 上完备性的正确概念。事实上，本文旨在理解 Kaledin 关于这一形式主义以及高阶代数背景下迹理论形式主义的奠基性工作。

作者受到德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号 427320536，SFB 1442；同时也获得德国卓越战略 EXC 2044 390685587 下“数学 M¨unster：动力学—几何—结构”项目的资助。第二

位作者感谢波恩的马克斯·普朗克数学研究所在其开展部分研究工作期间提供的款待和经费支持。

2. Polygonic spectra

本节的主要目标是定义多边形谱的概念，以及由此得到的多边形谱的∞-范畴。这套形式体系旨在刻画带有双模系数的拓扑 Hochschild 同调所具有的额外结构；我们将在第6节讨论这一内容。本节的主要结果是给出一个显式公式，描述将圆分谱视为常值多边形谱的函子的左伴随和右伴随（参见定理 2.24）。我们将在第3节利用这一公式，研究多边形谱的 ∞-范畴上的传递。

2.1. 截断集。

我们先回顾截断集的概念，并给出若干示例；这些示例将在全文中发挥重要作用。

定义 2.1。截断集是 $\mathbb{N}_{>0}$ 的一个子集，满足：若 $xy \in T$，则 $x \in T$ 且 $y \in T$。

令 Trunc 表示截断集范畴，其态射为截断集的包含。令 FinTrunc 表示 Trunc 中由有限截断集所张成的全子范畴。下面列出一些在全文中都很重要的截断集示例。

例 2.2. 以下是截断集的几个示例。

(1) 对每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 都是一个截断集。(2) 对每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，集合 $n = \{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid k|n\}$ 都是一个截断集。例如，若 p 是素数，则 $p^n = \{1, p, \dots, p^n\}$。令 p^∞ 表示由 $p^\infty = \{1, p, p^2, \dots\}$ 给出的截断集。(3) 若 T 是一个截断集，则对每个 n，$T/n = \{t \in T \mid nt \in T\}$ 也仍是一个截断集。

最后，为了确立记号，我们介绍以下术语。

记号2.3。令 ($\mathbb{N}_{>0}$,div) 表示正整数的集合，并将其视为一个范畴，其中的态射由整除关系给出。这意味着，当且仅当 n 整除 m 时，存在一个态射 $n \to m$ precisely。

2.2. 多边形谱的 ∞-范畴。

下文中，我们将令 T 表示定义2.1中的截断集。我们定义 T-典型多边形谱的概念，并讨论相应的 ∞-典型多边形谱 T-范畴的显著特征。

定义2.4。一个 T-典型多边形谱由以下数据组成：

(1) 一个由 T 索引的谱的集合 $\{X_t\}_{t \in T}$，其中每个 X_t 都是 Sp^{BC_t} 中的一个对象。

(2) 对于每个素数 p 和 $t \in T/p$，给出一个 C_t-等变的谱之间的映射

$$\varphi_{p,t} : X_t \to (X_{pt})^{tC_p},$$

其中 Tate 构造带有剩余的 $C_{pt}/C_p \simeq C_t$-作用[4]。

[4]我们利用 p 次根同构 $C_t \to C_{pt}/C_p$，将剩余的 C_{pt}/C_p 作用识别为 C_t 作用。

多边形谱的形式主义旨在捕捉第1节所讨论的带系数拓扑 Hochschild 同调中存在的附加结构。在第6节中，我们将证明：如果R是一个 $\mathbb{E}_1$-环，且 M是一个 R-双模，那么 R 以 M 为系数的拓扑 Hochschild 同调 THH(R, M) 可以规范地精化为一个多边形谱，并且

$$\mathrm{THH}(R,M)_n \simeq \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$。我们建议读者在接下来的讨论中始终牢记这个例子；因此，以下讨论将具有形式化的性质。我们通过松弛等化子的形式主义（参见 [26, §II.1]），定义伴随的 ∞-范畴，即 T-典型多边形谱的范畴。

构造 2.5. 对于每个素数 p，存在一个 ∞-范畴函子

$$\prod_{t\in T} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t} \xrightarrow{F_p} \prod_{t\in T/p} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}$$

对于每个 $t \in T/p$，该函子由以下 ∞-范畴函子诱导

$$\prod_{s\in T} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_s} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_{pt}} \xrightarrow{(-)^{\mathrm{t}C_p}} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}.$$

函子 F_p 由构造 $(X_s)_{s\in T} \mapsto (X_{pt})^{\mathrm{t}C_p}$ 确定，只要 $t \in T/p$，且 Tate 构造带有剩余的 $C_{pt}/C_p \simeq C_t$-作用。

定义2.6. T-典型多边形谱的 ∞-范畴定义为松弛等化子

$$\mathrm{PgcSp}_T \simeq \mathrm{LEq}\Big(\textstyle\prod_{t\in T} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t} \;\rightrightarrows\; \prod_p \prod_{t\in T/p} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t} \Big),$$

其中，这些函子的 p 次分量分别由恒等函子和函子 F_p 给出。

展开定义2.6可知，PgcSp_T 中的一个对象是定义2.4意义下的 T-典型多边形谱。下面来看一些有趣的例子。

例 2.7。考虑由 $S = 1$ 给出的截断集。在此情形下，典范函子

$$\mathrm{PgcSp}_{\langle 1\rangle} \to \mathrm{Sp}$$

是 ∞-范畴之间的等价。

例2.8。对于 $T = \mathbb{N}_{>0}$，我们用 PgcSp 表示 $\mathbb{N}_{>0}$-典型多边形谱的 ∞-范畴。根据定义2.6，一个多边形谱由一个谱 X_n （对每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 都带有 C_n-作用）以及一个 C_n-等变的谱之间的映射组成

$$\varphi_{p,n} : X_n \to (X_{pn})^{\mathrm{t}C_p}$$

f对于每个素数 p 和 n，其中 Tate 构造带有剩余的 $C_{pn}/C_p \simeq C_n$-作用 .

例 2.9. 设 p 为一个素数，并考虑 ∞-范畴 $\mathrm{PgcSp}^{\langle p\rangle}$。$\mathrm{PgcSp}^{\langle p\rangle}$ 的一个对象是由一个谱 X 、一个带有 C_p-作用 Y 的谱，以及一个谱之间的映射 $X \to Y^{\mathrm{t}C_p}$ 组成的一对，因此 ∞-范畴 $\mathrm{PgcSp}^{\langle p\rangle}$ 等价于以下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PgcSp}_{\langle p\rangle} & \longrightarrow & \mathrm{Sp}^{\Delta^1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_p} & \xrightarrow{(-)^{\mathrm{t}C_p}} & \mathrm{Sp} \end{array}$$

因此，存在一个等价 $\mathbf{PgcSp}_{(p)} \simeq \mathbf{Sp}^{C_p}$，其中 $\mathbf{Sp}^{C_p}$ 表示 genuine C_p-谱的 ∞-范畴（参见 [23, 定理 6.24]）。

我们概述了多边形谱的 ∞-范畴的主要特征，并给出了 $\mathbf{PgcSp}$ 中映射空间的等化子公式。这是 [26] 中所发展的松弛等化子形式体系的直接推论。

命题 2.10. 设 T 表示一个截断集。

(1) ∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}_T$ 是可呈现且稳定的，并且典范函子

$$\mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}$$

对每个 $t \in T$ 都是正合的，并保留小余极限。

(2) 对于 $\mathbf{PgcSp}_T$ 中的任意一对对象 X 和 Y，存在空间之间的自然等价

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}_T}(X,Y) \simeq \mathrm{Eq}\Big(\textstyle\prod_{t\in T} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_t,Y_t) \;\rightrightarrows\; \prod_p \prod_{t\in T/p} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_t, Y_{pt}^{\mathrm{t}C_p}) \Big).$$

若 p 是素数且 $t \in T/p$，则上方映射由以下复合诱导

$$\prod_{t\in T} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_t,Y_t) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_t,Y_t) \xrightarrow{(\varphi_{p,t})_*} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_t, Y_{pt}^{\mathrm{t}C_p}),$$

下方映射由以下复合诱导

$$\prod_{t\in T} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_t,Y_t) \xrightarrow{(-)^{\mathrm{t}C_p}\circ \mathrm{pr}} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_{pt}^{\mathrm{t}C_p}, Y_{pt}^{\mathrm{t}C_p}) \xrightarrow{(\varphi_{p,t})^*} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t}}(X_t, Y_{pt}^{\mathrm{t}C_p}).$$

证明。这由 [26，命题 II.1.5] 得出。 □

对于每个截断集 T，∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}_T$ 等价于 $\mathbf{PgcSp}$ 的全子范畴，该子范畴由满足以下条件的多边形谱 $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 张成：只要 n 不包含在 T 中，就有 $X_n = 0$。根据构造，存在一个 ∞-范畴的伴随

$$\mathrm{PgcSp} \underset{\hookleftarrow}{\xrightarrow{\mathrm{Res}_T}} \mathrm{PgcSp}_T$$

其中右伴随是全忠实的，因此 ∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}_T$（即 T-典型多边形谱的范畴）是通过将多边形谱的 ∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}$ 局部化得到的。我们利用这一点证明，∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}_T$ 关于截断集变量是函子性的，并由此推得构造 $T \mapsto \mathbf{PgcSp}_T$ 是从有限截断集右 Kan 延拓得到的。

构造 2.11. 如果 $T \subseteq T'$ 是截断集的包含，那么 $\mathbf{PgcSp}_T$ 是 $\mathbf{PgcSp}_{T'}$的一个满子范畴，并且存在一个 ∞-范畴的伴随

$$\mathrm{PgcSp}_{T'} \underset{\hookleftarrow}{\xrightarrow{\mathrm{Res}_T^{T'}}} \mathrm{PgcSp}_T$$

函子 $\mathrm{Res}^{T'}_{T} : \mathbf{PgcSp}_{T'} \to \mathbf{PgcSp}_T$由 $(\mathrm{Res}^{T'}_{T}\, X)_t = X_t$ 对每个 $X \in \mathbf{PgcSp}_{T'}$ 和 $t \in T$ 均可刻画。构造 $T \mapsto \mathbf{PgcSp}_T$ 确定了一个函子 $\mathbf{Trunc} \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{R}}$，其中这些函子由上述右伴随包含给出。函子性随之成立，因为我们可以将所有这些范畴 $\mathbf{PgcSp}_T$ 实现为 $\mathbf{PgcSp}$ 的满子范畴，因此只需写出一个映射

从偏序集到 PgcSp 中对象的同构类的子集所成偏序集的映射。因此我们得到一个 ∞-范畴函子

$$\mathrm{PgcSp}_{(-)} : \mathrm{Trunc}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$$

通过取左伴随函子，这些函子由限制函子 $\mathrm{Res}_T^{T'} : \mathbf{PgcSp}_{T'} \to \mathbf{PgcSp}_T$ 给出。特别地，由赋值 $n \mapsto n$ 给出的函子 $(\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div}) \to \mathbf{Trunc}$ 诱导出一个函子

$$\mathrm{PgcSp}_{\langle - \rangle} : (\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}.$$

我们需要以下基本结果：

引理 2.12。函子 $\mathbf{PgcSp}^{(-)} : \mathbf{Trunc}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是从其在 $\mathbf{FinTrunc}^{\mathrm{op}}$ 上的限制作右 Kan 延拓得到的。具体而言，对于每个截断集 T，典范函子是一个等价

$$\mathrm{PgcSp}_T \to \lim_{T \to S} \mathrm{PgcSp}_S,$$

其中极限取遍包含于 T 中的有限截断集范畴。

证明。首先回顾一下， ∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}_T$ 定义为松弛等化子

$$\mathrm{PgcSp}_T = \mathrm{LEq}\Big(\prod_{t \in T} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t} \rightrightarrows \prod_p \prod_{t \in T/p} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t} \Big),$$

其中，这些函子的 p 次分量分别由恒等函子和函子 F_p 给出。PgcSp 的定义中由 T 和 T/p 索引的积，均是从其在 $\mathbf{FinTrunc}^{\mathrm{op}}$ 上的限制经右 Kan 延拓得到的，因为由投影诱导的典范函子

$$\prod_{t \in T} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_t} \to \lim_{T \to S} \prod_{s \in S} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_s}$$

是 ∞-范畴之间的等价；由 T/p 索引的积也同样如此。投影函子与定义 PgcSp 的松弛等化子中的平行函子相容，因此由投影诱导的典范函子

$$\mathrm{PgcSp} \to \mathrm{LEq}\Big(\lim_{T \to S} \prod_{s \in S} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_s} \rightrightarrows \lim_{T \to S} \prod_p \prod_{s \in S/p} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_s} \Big) \simeq \lim_{T \to S} \mathrm{PgcSp}_S$$

是一个等价，因为根据定义，松弛等化子与极限可交换。 □

注 2.13. 作为引理 2.12 的推论，以下 ∞-范畴之间的典范函子

$$\mathrm{PgcSp} \to \lim_{n \in (\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}}} \mathrm{PgcSp}_{\langle n \rangle}$$

是一个等价，因为包含 $(\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{FinTrunc}^{\mathrm{op}}$ 是极限共终的。对多边形谱 ∞-范畴的这一描述将在第 5 节发挥核心作用。

我们将利用引理 2.12，将适用于由有限截断集索引的多边形谱的各种构造推广到任意截断集（例如，参见定义 2.23）。本节最后讨论多边形谱 ∞-范畴上的对称幺半结构。

构造 2.14. 多边形谱的 ∞-范畴 PgcSp 具有典范的对称幺半 ∞-范畴结构，这是因为 Tate 构造是松对称幺半的（参见 [26, 构造 IV.2.1]）。若 $X = \{X_n\}$ 和 $Y = \{Y_n\}$ 是多边形谱，则

$$X \otimes Y = \{X_n \otimes Y_n\},$$

多边形 Frobenius 映射由以下 C_n-等变复合定义

$$X_n \otimes Y_n \xrightarrow{\varphi_{p,n}\otimes \mathrm{id}} (X_{pn})^{tC_p} \otimes Y_n \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varphi_{p,n}} (X_{pn})^{tC_p} \otimes (Y_{pn})^{tC_p} \to (X_{pn}\otimes Y_{pn})^{tC_p}$$

对每个 n，利用 Tate 构造是松对称幺半的这一事实（[26, 定理 I.3.1]）。单位元由常值多边形谱 $\mathbb{S}$ 给出，其中对每个 $n \geq 1$都有 $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}$。对于每个截断集 T，全子范畴 PgcSp_T 继承 PgcSp 的对称幺半结构，其单位元由 T-典型多边形谱 $\mathbb{S}_T$ 给出，定义如下：

$$(\mathbb{S}_T)_n = \begin{cases} \mathbb{S} & \text{if } n \in T \\ 0 & \text{if } n \notin T \end{cases}$$

用这一术语来说，对于每个多边形谱 X，都有 $\mathbb{S}_T \otimes X \simeq \mathrm{Res}_T X$，且局部化 $\mathrm{PgcSp} \to \mathrm{PgcSp}_T$ 是保张量的。

2.3. 旋轮谱与多边形谱。我们讨论多边形谱与旋轮谱之间的关系。通俗地说，多边形谱的概念是以 n-边形而非圆为指标的旋轮谱的多对象变体。这正是定义 TR 所需的结构（参见 §3）。我们将使用以下记号：

记号 2.15。对于每个整数 $n \geq 1$，存在 ∞-范畴的两对伴随

$$\mathrm{Sp}^{BC_n} \underset{\mathrm{coind}_n}{\overset{\mathrm{ind}_n}{\underset{-\mathrm{res}_n}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}},$$

其中，res_n 是沿 $BC_n \to B\mathbb{T}$ 通过限制得到的函子。函子 ind_n 由左 Kan 延拓得到，而 coind_n 由右 Kan 延拓得到。明确地，我们有

$$\mathrm{ind}_n(X) \simeq X \otimes_{C_n} \mathbb{T}$$
$$\mathrm{coind}_n(X) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{Sp}^{BC_n}}(\mathbb{T}, X)$$

对于每个带有 C_n-作用的谱 X，其中 $\mathrm{ind}_n(X) \simeq X \otimes_{C_n} \mathbb{T}$ 承载右 $\mathbb{T}$-作用。注意，如果 X 是一个带有 $\mathbb{T}$-作用的谱，并通过限制将其视为带有 C_n-作用的谱，那么 $\mathrm{ind}_n X \simeq X \otimes \Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_n)$，其中 $X \otimes \Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_n)$ 承载对角 $\mathbb{T}$-作用。事实上，由于所涉及的函子保持余极限，我们可以假设 X 是一个带有 $\mathbb{T}$-作用的离散空间；此时，剪切映射 $X \times_{C_n} \mathbb{T} \to X \times \mathbb{T}/C_n$ 给定为 $[x, \lambda] \mapsto (\lambda x, [\lambda])$，相对于 $X \times_{C_n} \mathbb{T}$ 上的右 $\mathbb{T}$-作用和 $X \times \mathbb{T}/C_n$ 上的对角 $\mathbb{T}$-作用，它是一个 $\mathbb{T}$-等变等价。

我们注意到，每个圆分谱都可以视为一个常值多边形谱 .

构造 2.16. 对于每个圆分谱 X，记 $i(X)$ 为由 $i(X)_n = X$ 定义的多边形谱，其中我们通过限制将 X 视为带有 C_n- 作用的谱。类似地，我们通过限制将 $\mathbb{T}$- 等变圆分 Frobenius 映射 $\varphi_p : X \to X^{tC_p}$ 视为 C_n-等变映射。我们证明，构造 $X \mapsto i(X)$ 确定了一个 ∞-范畴函子

$$i : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}.$$

根据 CycSp 和 PgcSp 的构造，我们需要构造一个 ∞-范畴函子

$$\mathrm{LEq}\Big(\mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}} \underset{(-)^{tC_p}}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \prod_p \mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}} \Big) \to \mathrm{LEq}\Big(\prod_{n\geq 1} \mathrm{Sp}^{BC_n} \underset{F_p}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \prod_p \prod_{n\geq 1} \mathrm{Sp}^{BC_n} \Big).$$

对于每个素数 p，限制函子 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}} \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n}$ 诱导出一个 ∞-范畴函子

$$\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}} \to \prod_{n\geq 1} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n}$$

它与 PgcSp 的松弛等化子中的上方映射交换。对于下方函子，以下函子复合之间存在自然等价

$$\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}} \xrightarrow{(-)^{\mathrm{t}C_p}} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}} \xrightarrow{\mathrm{res}} \prod_{n\geq 1} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n}$$

以及以下函子复合

$$\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}} \xrightarrow{\mathrm{res}} \prod_{n\geq 1} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n} \xrightarrow{F_p} \prod_{n\geq 1} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n}$$

由函子 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}} \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n}$ 的自然等价 $\mathrm{res}_n \bigcirc (-)^{\mathrm{t}C_p} \to (-)^{\mathrm{t}C_p} \bigcirc \mathrm{res}_{pn}$ 诱导。等化子是松弛等化子的全子范畴，因此我们得到所需的函子 CycSp $\to$PgcSp。对于每个截断集 T，令 i_T 表示由以下公式定义的 ∞-范畴函子

$$\mathrm{CycSp} \xrightarrow{i} \mathrm{PgcSp} \xrightarrow{\mathrm{Res}_T} \mathrm{PgcSp}_T.$$

我们将 $i_T : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}_T$ 称为典范函子。

我们证明，典范函子 $i : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}$ 具有左右伴随，且它们可由显式公式描述（参见定理 2.24）。我们从以下引理开始:

引理 2.17. 设 X 表示一个带有 C_{ps} 作用的谱，其中 C_{ps} 是某个素数 p，且 $s \geq 1$。存在一个带有 $\mathbb{T}$ 作用的谱的自然等价

$$\mathrm{coind}_{ps}(X)^{\mathrm{t}C_p} \to \mathrm{coind}_s(X^{\mathrm{t}C_p}),$$

其中源带有剩余的 $\mathbb{T}/C_p$ 作用，而 $X^{\mathrm{t}C_p}$ 带有剩余的 C_{ps}/C_p 作用。

证明. 序列 $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow C_{ps} \hookrightarrow \mathbb{T}$（其中我们已将 $\mathbb{T} \simeq$ 识别为 B($ps\mathbb{Z}$)）诱导出一个伴随

$$\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}} \underset{(-)^{\mathrm{h}\mathbb{Z}}}{\overset{\mathrm{res}_{ps}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_{ps}}$$

表明 $(-)^{\mathrm{h}\mathbb{Z}}$ 是限制的右伴随。因此，我们得出函子 $(-)^{\mathrm{h}\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{coind}_{ps} : \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_{ps}} \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}}$ 之间存在自然等价。引理断言中所需的映射继而由函子的典范自然变换诱导

$$(-)^{\mathrm{t}C_p} \circ (-)^{\mathrm{h}\mathbb{Z}} \to (-)^{\mathrm{h}\mathbb{Z}} \circ (-)^{\mathrm{t}C_p} : \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_{ps}} \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}},$$

这是一个等价，因为 $(-)^{\mathrm{h}\mathbb{Z}}$ 是有限极限。 □

注 2.18. 类似地，我们得到一个带有 $\mathbb{T}$ 作用的谱的自然等价

$$\mathrm{ind}_{ps}(X)^{\mathrm{t}C_p} \to \mathrm{ind}_s(X)^{\mathrm{t}C_p}$$

如引理 2.17 中所述。或者，我们可以通过 $\mathbb{T}$-等变 Atiyah 对偶得到上述映射，该对偶给出了具有 $\mathbb{T}$-作用的谱之间的自然等价 $\mathrm{coind}_n \simeq \Omega\mathrm{ind}_n$ for $n \geq 1$。

我们将首先分析典范函子 $\mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}$ 的右伴随。该函子将圆分谱视为常值多边形谱。作为工具性预备，我们在假设 S 为有限截断集的情况下，明确构造 $i_S : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}_S$ 的右伴随。一般情形则通过利用引理 2.12 得到。

构造 2.19. 令 S 表示一个有限截断集，并令 $R^f_S : \mathrm{PgcSp}_S \to$谱范畴$^{\mathrm{B}\mathbb{T}}$ 表示由下列公式定义的 ∞-范畴函子

$$R^f_S(X) = \bigoplus_{s\in S} \mathrm{coind}_s(X_s) \simeq \bigoplus_{s\in S} \mathrm{map}_{\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_s}}(\mathbb{T}, X_s)$$

对每个 S-典型多边形谱 X 都成立。我们在带有 $\mathbb{T}$-作用的谱上构造一个分圆结构，其作用由 $R^f_S(X)$ 给出。若 p 是素数且 $s \in S/p$，那么 $R^f_S(X)$ 上的分圆结构由下列带有 $\mathbb{T}$-作用的谱之间的映射诱导

$$\mathrm{coind}_s(X_s) \xrightarrow{\mathrm{coind}_s(\varphi_{p,s})} \mathrm{coind}_s(X_{ps}^{\mathrm{t}C_p}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{coind}_{ps}(X_{ps})^{\mathrm{t}C_p},$$

其中最后一个等价由引理 2.17 诱导。若 $s \notin S/p$，则 $R^f_S(X)$ 上的分圆结构由 $\mathrm{coind}_s(X_s) \to 0$ 诱导。因此，构造 $X \mapsto R^f_S(X)$ 可典范地细化为 ∞-范畴之间的函子 $R^f_S : \mathrm{PgcSp}_S \to \mathrm{CycSp}$。我们无需通过构造分圆谱的 ∞-范畴来指定相容性。

通过类似的方法，我们给出 $\mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}_T$ 的左伴随的显式构造。在这种情况下，我们无需限制为有限截断集。

构造 2.20. 令 T 表示一个截断集，并令 $L_T : \mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}}$ 表示由下述公式定义的 ∞-范畴函子

$$L_T(X) = \bigoplus_{t\in T} \mathrm{ind}_t(X_t)$$

对于每个 T-典型多边形谱 X。我们在带有 $\mathbb{T}$-作用的谱上构造一个分圆结构，该结构由 $L_T(X)$ 给出。如果 p 是一个素数且 $t \in T/p$，那么 $L_T(X)$ 上的分圆结构由下面这个带有 $\mathbb{T}$- 作用的谱之间的映射诱导

$$\mathrm{ind}_t(X_t) \xrightarrow{\mathrm{ind}_t(\varphi_{p,t})} \mathrm{ind}_t(X_{pt}^{\mathrm{t}C_p}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{ind}_{pt}(X_{pt})^{\mathrm{t}C_p}$$

并且，如果 $t \notin T/p$，则由 $\mathrm{ind}_t(X_t) \to 0$ 给出。和之前一样，构造 $X \mapsto L_T(X)$ 可规范地提升为 ∞- 范畴函子 $L_T : \mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{CycSp}$。

不出所料，我们有以下结果：

命题 2.21。设 T 表示任意一个截断集。

(1) 若 $T = S$ 是有限集，则 $R^f_S : \mathrm{PgcSp}_S \to \mathrm{CycSp}$ 是 $i_S : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}_S$ 的右伴随。
(2) 函子 $L_T : \mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{CycSp}$ 是 $i_T : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}_T$ 的左伴随。

证明。我们先证明 (1)。我们证明存在一个空间的自然等价

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}_S}(i_S(X), Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CycSp}}(X, R^f_S(Y))$$

对于每个圆分谱 X 以及每个 S-典型多边形谱 Y。利用 [26, 命题 II.1.5], , 存在一个空间的自然等价

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CycSp}}(X, R_S^f(Y)) \simeq \mathrm{Eq}\Big(\mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}}(X, R_S^f(Y)) \rightrightarrows \prod_p \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}}(X, R_S^f(Y)^{tC_p}) \Big),$$

其中上方的映射由 X 的分圆结构诱导，下方的映射由构造 2.19 中描述的 $R_S^f(Y)$ 的分圆结构诱导。利用 S 是有限的这一点，此等化子又自然等价于以下等化子

$$\begin{aligned} &\mathrm{Eq}\Big(\prod_{s\in S} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}}(X, \mathrm{coind}_s(Y_s)) \rightrightarrows \prod_p \prod_{s\in S/p} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}}(X, \mathrm{coind}_{ps}(Y_{ps})^{tC_p}) \Big) \\ \simeq &\mathrm{Eq}\Big(\prod_{s\in S} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}}(X, \mathrm{coind}_s(Y_s)) \rightrightarrows \prod_p \prod_{s\in S/p} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}}(X, \mathrm{coind}_s((Y_{ps})^{tC_p})) \Big), \end{aligned}$$

因为 $R_S^f(Y)$ 的分圆结构由 $s \notin S/p$ 的零映射诱导，并且映射 $\mathrm{coind}_s((Y_{ps})^{tC_p}) \simeq \mathrm{coind}_{ps}(Y_{ps})^{tC_p}$ 是带有 $\mathbb{T}$ 作用的谱之间的等价。上方的映射由将 $f : X \to R_S^f(Y)$ 发送到以下带有 $\mathbb{T}$ 作用的谱之间的映射而诱导

$$X \xrightarrow{f_s} \mathrm{coind}_s(Y_s) \xrightarrow{\mathrm{coind}_s(\varphi_{p,s})} \mathrm{coind}_s((Y_{ps})^{tC_p}),$$

下方的映射则由将 f 发送到以下带有 $\mathbb{T}$ 作用的谱之间的映射而诱导 n

$$X \xrightarrow{\varphi_{p,s}} X^{tC_p} \xrightarrow{(f_{ps})^{tC_p}} \mathrm{coind}_{ps}(Y_{ps})^{tC_p} \simeq \mathrm{coind}_s((Y_{ps})^{tC_p}).$$

由此可得空间之间存在自然等价

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CycSp}}(X, R_S^f(Y) \simeq \mathrm{Eq}\Big(\prod_{s\in S} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{BC_s}}(X, Y_s) \rightrightarrows \prod_p \prod_{s\in S} \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^{BC_s}}(X, (Y_{ps})^{tC_p}) \Big),$$

利用余诱导是限制函子的右伴随这一点，其中各映射如命题 2.10 所述。(2) 的证明完全类似，只需利用诱导函子是限制函子的左伴随这一点。□

在继续之前，我们先回顾一些贯穿全文将要使用的术语。

记号 2.22。令 $\mathbb{S}[t]$ 表示由下式定义的 $\mathbb{E}_\infty$-环

$$\mathbb{S}[t] = \Sigma_+^\infty \mathbb{N}.$$

需要提醒的是， $\mathbb{S}[t]$ 不是由一个生成元自由生成的 $\mathbb{E}_\infty$-环。然而，其底层的 $\mathbb{E}_1$-环是由一个生成元自由生成的 $\mathbb{E}_1$-环，因为 $\mathbb{N}$ 是在空间的 ∞-范畴中由单个生成元自由生成的 $\mathbb{E}_1$-幺半群。我们考虑以下构造:

（1）存在一个 $\mathbb{E}_\infty$-环的映射 $\mathbb{S}[t] \to \mathbb{S}$，它由唯一的 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群映射 $\mathbb{N} \to *$ 所诱导。由此得到一个旋轮谱的映射 $\mathrm{THH}(\mathbb{S}[t]) \to \mathbb{S}$，其中谱 $\mathbb{S}$ 配备了$\widetilde{\quad}$平凡回旋结构。令 $\widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t])$ 表示由下式定义的旋轮谱

$$\widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]) = \mathrm{fib}(\mathrm{THH}(\mathbb{S}[t]) \to \mathbb{S}).$$

事实上，存在一个旋轮谱的等价

$$\widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]) = \bigoplus_{n\geq 1} \Sigma_+^\infty (\mathbb{T}/C_n),$$

其中 $\mathbb{T}/C_n$ 表示商空间，其 $\mathbb{T}$-作用由 $[x] \mapsto [\lambda x]$ 给出，对每个 $\lambda \in \mathbb{T}$均如此；上述等价右侧的分圆结构由以下空间之间的 $\mathbb{T}$-等变映射诱导

$$\mathbb{T}/C_n \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[p]{x}} (\mathbb{T}/C_{pn})^{hC_p}$$

对每个素数 p。关于这一点的讨论，请参见 [24, §2] 。

(2) 对每个 $n \geq 1$，令 $\mathbb{S}[t]/t^n$ 表示由 $\mathbb{E}_\infty$-环的推出所定义的 $\mathbb{E}_\infty$-环

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}[t] & \xrightarrow{t \mapsto t^n} & \mathbb{S}[t] \\ \downarrow{\scriptstyle t \mapsto 0} & & \downarrow \\ \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{S}[t]/t^n \end{array}$$

令 $X \widehat{\otimes} \widetilde{\mathrm{THH}}^{\mathrm{cont}}(\mathbb{S}[\![t]\!])$ 表示由下式定义的旋轮谱

$$X \widehat{\otimes} \widetilde{\mathrm{THH}}^{\mathrm{cont}}(\mathbb{S}[\![t]\!]) = \varprojlim (X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]/t^n))$$

对每个圆分谱 X。右侧表示旋轮谱范畴中的极限，该极限沿由 $\mathbb{S}[t]/t^{n+1} \to \mathbb{S}[t]/t^n$ 诱导的映射构成（参见 [24, §4]）。

一般而言，对于任意截断集，我们通过 Kan 延拓过程定义 R_T。

定义 2.23. 令 $R_T : \mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{CycSp}$ 表示由 b 定义的 ∞-范畴函子

$$R_T(X) = \lim\big(\mathrm{Trunc}^{\mathrm{op}}_{T/} \times_{\mathrm{Trunc}^{\mathrm{op}}} \mathrm{FinTrunc}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{FinTrunc}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CycSp} \big)$$

对每个截断集 T 均如此。最后一个函子由构造 $S \mapsto R^f_S(\mathrm{Res}^T_S X)$ 确定。或者，函子 R_T 定义为函子 $S \mapsto R^f_S(\mathrm{Res}^T_S X)$ 沿包含 $i : \mathrm{FinTrunc} \hookrightarrow \mathrm{Trunc}$ 的右 Kan 延拓。我们通常记作

$$R_T(X) = \lim_{S \subseteq T} R^f_S(\mathrm{Res}^T_S X)$$

以简化记号。

我们证明本节的主要结果，该结果概述了联系多边形谱 ∞-范畴与旋轮谱 ∞-范畴的各种函子。这些描述将在 §3.1 中发挥重要作用。

定理 2.24. 设 T 为一个截断集。函子 i_T 同时存在左右伴随函子

$$\mathrm{PgcSp}_T \underset{R_T}{\overset{L_T}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\underset{i_T}{\longleftarrow}}}}} \mathrm{CycSp}.$$

若 X 是一个圆分谱且 $T = \mathbb{N}_{>0}$，则存在圆分谱之间的等价

$$Li(X) \simeq X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t])$$
$$Ri(X) \simeq X \widehat{\otimes} \Omega\widetilde{\mathrm{THH}}^{\mathrm{cont}}(\mathbb{S}[\![t]\!]),$$

其中 $\widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t])$ 和 $X \widehat{\otimes} \widetilde{\mathrm{THH}}^{\mathrm{cont}}(\mathbb{S}[\![t]\!])$ 均在记号 2.22 中定义。

证明。根据命题 2.21 的第 (2) 部分，函子 $L_T : \mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{CycSp}$ 是函子 $i_T : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}_T$ 的左伴随。若 $T = \mathbb{N}_{>0}$，则我们有以下旋轮谱的等价：

$$Li(X) \simeq \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{ind}_n(\mathrm{res}_n X) \simeq \bigoplus_{n\geq 1} X \otimes \Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_n) \simeq X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]),$$

利用 $\mathrm{ind}_n(Y) \simeq Y \otimes \Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_n)$，前提是 Y 是一个带有 C_n 作用的谱，且它由带有 $\mathbb{T}$ 作用的谱经限制得到。为得到所需的右伴随，注意函子 i_T 保留小余极限，因为这些余极限是在底层计算的。由此可知，i_T 有一个右伴随，因为 CycSp 和 PgcSp_T 都是可呈现的；当 S 有限时，该右伴随由 R^f_S 给出（参见命题 2.21）。接下来，我们给出一个自然等价

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}_T}(i_T(X), Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CycSp}}(X, R_T(Y))$$

对每个旋轮谱 X 和 T-典型多边形谱 Y，都有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathrm{CycSp}}(X, R_T(Y)) &\simeq \lim_{S\subseteq T} \mathrm{Map}_{\mathrm{CycSp}}(X, R^f_S(\mathrm{Res}^T_S Y)) \\
&\simeq \lim_{S\subseteq T} \mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}_S}(i_S(X), \mathrm{Res}^T_S Y) \\
&\simeq \lim_{S\subseteq T} \mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}_S}(\mathrm{Res}^T_S\, i_T(X), \mathrm{Res}^T_S Y) \\
&\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}_T}(i_T(X), Y),
\end{aligned}$$

其中，最后一个等价是引理 2.12 的一个特例。这证明了 i_T 的右伴随确实由 R_T 给出。若 $T = \mathbb{N}_{>0}$，则存在如下旋轮谱之间的等价

$$Ri(X) \simeq \varprojlim_n \bigoplus_{i=1}^n (X \otimes \Sigma^{\infty-1}_+(\mathbb{T}/C_i)) \simeq \prod_{n\geq 1} X \otimes \Sigma^{\infty-1}_+(\mathbb{T}/C_n) \simeq \varprojlim_n \Omega(X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]/t^n)),$$

其中，第一个极限是沿投影映射取的，这些映射是旋轮谱之间的映射。我们还使用了 $\mathbb{T}$-等变 Atiyah 对偶，将 $\mathrm{coind}_i(X) \simeq \Omega\mathrm{ind}_i(X)$ 识别起来，而最后的等价正是 [24, 命题 4.1.14] 的内容。这就证明了所需的结论。□

注 2.25. 在定理 2.24 的设定下，对于任意截断集 T（以此替代 $T = \mathbb{N}_{>0}$），我们也可以得到 $R_T i_T(X)$ 的表达式。存在一个旋轮谱之间的等价

$$L_T i_T(X) \simeq X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}_T(\mathbb{S}[t]),$$

其中 $\widetilde{\mathrm{THH}}_T(\mathbb{S}[t]) = \bigoplus_{t\in T} \Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_t)$。此外，存在一个旋轮谱之间的等价

$$R_T i_T(X) \simeq \prod_{t\in T} X \otimes \Sigma^{\infty-1}_+(\mathbb{T}/C_t),$$

其中右侧的乘积是在旋轮谱的 ∞-范畴中构造的。

需要提醒的是，∞-范畴的遗忘函子

$$\mathrm{CycSp} \to \mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}$$

一般而言，它不保极限。上文定理 2.24 的证明和注 2.25 中用于识别 $Ri(X)$ 的极限是在传递范畴 CycSp 中形成的，因此没有先验理由认为函子 $\mathrm{CycSp} \to \mathrm{Sp}^{B\mathbb{T}}$ 会保这些极限。尽管如此，我们简要讨论某些情况下这些极限是在底层形成的情形。

例 2.26. 设 T 是一个截断集，并假设 X 是一个一致下有界的 T-典型多边形谱。这意味着存在一个整数 N，使得每个 X_t 都是 N-连通的。在这种情况下，带有 $\mathbb{T}$-作用的谱之间的典范映射

$$\big(\prod_{t\in T}\mathrm{coind}_t(X_t)\big)^{\mathrm{t}C_p}\to\prod_{t\in T}\mathrm{coind}_t(X_t)^{\mathrm{t}C_p}$$

由 [1, 引理 2.11], 可知这是一个等价，因此该乘积

$$\prod_{t\in T}\mathrm{coind}_t(X_t)$$

在谱范畴$^{\mathrm{B}\mathbb{T}}$ 中构造，带有由以下 $\mathbb{T}$等变谱之间的映射诱导的分圆结构

$$\mathrm{coind}_t(X_t)\to\mathrm{coind}_{pt}(X_{pt})^{\mathrm{t}C_p}$$

在引理 2.17 中针对 $t\in T/p$ 得到，并由 $\mathsf{coind}_t(X_t)\to 0$ 针对 $t\notin T/p$ 得到。

推论 2.27. 设 T 表示任意截断集。若 X 是一个一致下有界的 T-典型多边形谱，则存在一个旋轮谱的自然等价

$$\prod_{t\in T}\mathrm{coind}_t(X_t)\to R_T(X),$$

其中，乘积上的分圆结构按例 2.26 定义。

证明。若 $S\subseteq T$ 是有限截断集的一个包含，则投影

$$\prod_{t\in T}\mathrm{coind}_t(X_t)\to R^f_S(\mathrm{Res}^T_S X)$$

确定了一个旋轮谱的映射，其中左侧赋予例 2.26 中的旋轮结构。我们得到一个旋轮谱的典范映射

$$\Phi:\prod_{t\in T}\mathrm{coind}_t(X_t)\to R_T(X)$$

我们将证明该映射是一个等价。只需证明 Φ 是带有 $\mathbb{T}$-作用的谱之间的一个等价，因为典范函子 $\mathsf{CycSp}\to\mathsf{Sp}^{\mathrm{B}\mathbb{T}}$ 保持这些极限，这是由于假设 X 一致下有界。在此情况下，包含

$$R^f_S(X)\hookrightarrow\prod_{t\in T}\mathrm{coind}_t(X_t)$$

确定了一个带有 $\mathbb{T}$-作用的谱的映射，并且这些映射汇集为一个映射 $R_T(X)\to\prod_{t\in T}\mathsf{coind}_t(X_t)$，它作为带有 $\mathbb{T}$-作用的谱的映射，为 Φ 提供了一个逆映射。□

我们将以记录一个在第 5 节中很重要的例子来结束本节。

例 2.28。令 $\mathsf{sh}_k X$ 表示由下式定义的多边形谱

$$(\mathrm{sh}_k X)_n=\mathrm{res}^{kn}_n(X_{kn}),$$

对于每个多边形谱 X，其中 $\mathsf{res}^{kn}_n:\mathsf{Sp}^{\mathrm{B}C_{kn}}\to\mathsf{Sp}^{\mathrm{B}C_n}$ 表示限制函子。构造 $X\mapsto\mathsf{sh}_k X$ 可细化为一个 ∞-范畴函子 $\mathsf{sh}_k:\mathsf{PgcSp}\to\mathsf{PgcSp}$。令 ℓX 表示满足 $(\ell_k X)_{kn}=\mathsf{ind}^{kn}_n(X_n)$ 且当 k 不整除 n 时满足 $(\ell_k X)_n=0$ 的多边形谱。由此得到的函子 $\ell_k:\mathsf{PgcSp}\to\mathsf{PgcSp}$ 是 sh_k 的左伴随。事实上，我们发现

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}}(\ell_k X,Y)\simeq\mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}}(X,\mathrm{sh}_k Y)$$

由命题 2.10 以及 ind_n^{kn} 对所有 k 和 n 都是 res_n^{kn} 的左伴随这一事实可知。注意，若 M 是一个 $\mathbb{E}_1$-环 R 上的双模，则存在多边形谱之间的一个等价

$$\mathrm{sh}_k \mathrm{THH}(R, M) \simeq \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R k}).$$

移位函子 $\mathrm{sh}_k(-)$ 也有一个右伴随，它可通过将上述归纳函子替换为余诱导得到。

注记 2.29. 在构造 5.7 中，我们通过构造$n \mapsto \mathrm{sh}_n$在 PgcSp 上定义了 $\mathbb{N}_{>0}$ 的作用。 ∞-范畴 $\mathrm{PgcSp}^{\mathrm{h}\mathbb{N}_{>0}}$ 等价于所谓的 ∞-范畴，即 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-旋轮谱范畴。

3. 多边形的传递

利用 §2 中建立的形式体系，我们通过余可表构造（如 [6, 24]中所述），将传递定义为多边形谱 ∞-范畴上的函子。在 §3.2 中，我们在多边形谱的∞-范畴上引入一种 t-结构，作为 Antieau 和第三位作者在 [1]中研究的旋轮谱 t-范畴上的旋轮 ∞-结构的类比。

3.1. 多边 TR 的定义。我们如下定义 T-典型多边 TR:

定义 3.1. 设 T 是一个截断集。若 X 是一个 T-典型多边形谱，则

$$\mathrm{TR}_T(X) = \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}_T}(\mathbb{S}_T, X).$$

构造 $X \mapsto \mathrm{TR}_T(X)$ 确定了一个从 ∞-范畴到 $_T : \mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{Sp}$ 的函子 TR。若$T = \mathbb{N}_{>0}$，则我们记 $\mathrm{TR}(X) := \mathrm{TR}_T(X)$。

注记 3.2. 根据定义 3.1，多边 TR 由多边形谱的 ∞-范畴 PgcSp 上的球谱余表示。这类似于如下结果：TC 由旋轮谱的 ∞-范畴上的球谱余表示（参见 [6, 26]）。然而，拓扑循环同调无法定义在多边形谱的 ∞-范畴上，因此在我们的语境中，TR 才是需要考虑的“正确”构造。

注记 3.3. 在 [19], Lindenstrauss 和 McCarthy 引入了一个带系数的 TR 版本。具体而言，他们定义了函子 F与楔积的 TR，其系数取值于一个 F-双模。他们的构造也利用了带系数的拓扑 Hochschild 同调上的多边形结构，不过采用的是一种不同的形式化体系。我们不对比我们对 TR 的构造与 Lindenstrauss–McCarthy 在 [19] 中得到的构造。我们当然预期这两个构造是一致的，这可通过比较各向异性分离序列并使用 Tate-轨道引理来说明。主要的技术障碍在于，需要提供一个框架，使其能够同时以同等地位编码使用带楔积的函子对 [19] 的点集构造，以及我们的构造。

在继续之前，我们先探讨几个例子，以便对该定义有一些直观感受。

例 3.4. 若 $S = 1$，则如例 2.7 所示，$\mathrm{PgcSp}^{\langle 1\rangle} \simeq \mathrm{Sp}$，因此 $\mathrm{TR}^{\langle 1\rangle}(X) \simeq X$。

例 3.5. 设 X 是一个圆分谱，其底层谱下有界，并将其视为任意素数 p 对应的常值 p-典型多边形谱。利用命题 2.10 中得到的等化子公式，我们得到

$$\mathrm{TR}_{\langle p\rangle}(X) \simeq \mathrm{Eq}\Big(X \times X^{\mathrm{h}C_p} \rightrightarrows X^{\mathrm{t}C_p} \Big)$$

其中，映射分别由 $X \times X^{\mathrm{h}C_p} \to X \xrightarrow{\varphi} X^{\mathrm{t}C_p}$ 和 $X \times X^{\mathrm{h}C_p} \to X^{\mathrm{h}C_p}$ 可以确定。因此，$\mathrm{TR}\langle p\rangle(X)$ 可以表示为以下谱的拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TR}_{\langle p\rangle}(X) & \longrightarrow & X^{\mathrm{h}C_p} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X^{\mathrm{t}C_p} \end{array}$$

这意味着 $\mathrm{TR}\langle p\rangle(X) \simeq X^{C_p}$，由 [26] 得出。

注 3.6. 对于每个截断集 T，函子 $\mathrm{TR}_T : \mathrm{PgcSp}_T \to \mathrm{Sp}$ 规范地提升为一个松对称幺半函子，因为它由单位元余表示。

更一般地，我们得到 T-典型多边形传递的一个显式等化子公式。

命题 3.7. 设 T 为一个截断集。若 X 是一个 T-典型多边形谱，则

$$\mathrm{TR}_T(X) \simeq \mathrm{Eq}\Big(\prod_{t\in T} X_t^{\mathrm{h}C_t} \rightrightarrows \prod_p \prod_{t\in T/p} (X_{pt}^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_t} \Big)$$

其中映射为 $X_{pt}^{\mathrm{h}C_{pt}} \simeq (X_{pt}^{\mathrm{h}C_p})^{\mathrm{h}C_t}$ 可以 $\to (X_{pt}^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_t}$ 以及 $X_t^{\mathrm{h}C_t} \xrightarrow{\varphi_p^{\mathrm{h}C_t}} (X_{pt}^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_t}$ 对于 $pt \in T$。

证明。由命题 2.10 可得此结论，因为对每个 $Y \in$ 谱范畴^{BC_t}，映射$\mathrm{Sp}^{BC_t}(\mathbb{S}, Y) \simeq Y^{\mathrm{h}C_t}$。 □

我们将传递的构造与 [24] 中得到的余可表构造进行比较。由 [24, 定理 3.3.12] 可知，对于底层谱下有界的圆分谱，我们的传递构造与经典的传递构造一致。[24] 中所得比较的全部意义在于，它是带有弗罗贝尼乌斯提升的谱之间的比较。

P命题 3.8. 若 X 是一个圆分谱，则存在谱之间的自然等价 *a*

$$\mathrm{TR}(X) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{CycSp}}(\widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]), X),$$

其中，上述等价右侧是由 [24] 构造 $\mathrm{TR}(X)$ 得到的。

$\widetilde{\ }$证明。根据定理 2.24，存在一个旋轮谱的等价 $L\mathbb{S} \simeq \mathrm{THH}(\mathbb{S}[t])$，这立即推出 $\mathrm{TR}(X) \simeq$ 映射$_{\mathrm{PgcSp}}(\mathbb{S}, i(X)) \simeq$ 映射$_{\mathrm{CycSp}}(\widetilde{\ }\mathrm{THH}(\mathbb{S}[t])\ X)$。□

我们在多边形谱的 ∞-范畴上构造多边形 TR 塔。

构造 3.9. 回想一下，构造 $T \mapsto \mathrm{PgcSp}_T$ 可细化为一个 ∞-范畴函子

$$\mathrm{PgcSp}_{(-)} : \mathrm{Trunc}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$$

其中，包含 $T \subseteq T'$ 对应于函子 $\mathrm{Res}_T^{T'} : \mathrm{PgcSp}_{T'} \to \mathrm{PgcSp}_T$（参见构造 2.11）。由此，我们得到一个 ∞-范畴函子

$$\mathrm{Trunc}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{PgcSp}, \mathrm{Sp})$$

由 $T \mapsto$ 映射$_{\mathrm{PgcSp}}(\mathbb{S}, \mathrm{Res}_T(-))$ 确定。对于一个多边形谱 X，我们将该函子称为

$$\mathrm{TR}_{(-)}(X) : \mathrm{Trunc}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sp}$$

由构造 $T \mapsto$ 映射$_{\mathrm{PgcSp}}(\mathbb{S}, \mathrm{Res}_T(X)) \simeq \mathrm{TR}_T(X)$ 给出，并称其为多边形 TR 塔。使用以下版本的多边形 TR 塔将会很方便

$$\mathrm{TR}_{\langle\star\rangle}(X) : (\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sp}$$

通过与函子 $(\mathbb{N}_{>0}$, 除法$) \to$ Trunc 进行前复合得到，该函子由 $n \mapsto n$ 给出。在此情况下，如果 (m, n) 是一对正整数，且 n 整除 m，那么我们将谱之间的映射称为

$$R^{\hexagon}_{m/n} : \mathrm{TR}_{\langle m\rangle}(X) \to \mathrm{TR}_{\langle n\rangle}(X)$$

多边形限制映射。

我们证明，多边形 TR 是多边形 TR 塔的极限。

引理 3.10。若 X 是一个多边形谱，则存在谱的等价

$$\mathrm{TR}(X) \simeq \lim_{n \in (\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}}} \mathrm{TR}_{\langle n\rangle}(X).$$

证明。根据注 2.13，存在 ∞-范畴的等价

$$\mathrm{PgcSp} \simeq \lim_{n \in (\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}}} \mathrm{PgcSp}_{\langle n\rangle}$$

由此可得 $\mathrm{TR}(X) \simeq \lim_{n \in (\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}}}$ 映射$_{\mathrm{PgcSp}_{\langle n\rangle}}(\mathbb{S}, X) \simeq \lim_{n \in (\mathbb{N}_{>0}, \mathrm{div})^{\mathrm{op}}}$ 传递$_{\langle n\rangle}(X)$。 □

注记 3.11。更一般地，存在谱的等价

$$\mathrm{TR}(X) \simeq \lim_{S \in \mathrm{FinTrunc}^{\mathrm{op}}} \mathrm{TR}_S(X).$$

对每个多边形谱 X，都可用引理 2.12 代替注 2.13 得到这一结果。

利用典范函子 $i_T : \mathrm{CycSp} \to \mathrm{PgcSp}_T$ 的右伴随的显式公式，我们得到定理 [24, 4.2.3] 对任意截断集的如下推广。与前文一样，我们强调，下文结果中的乘积是在旋轮谱的 ∞-范畴中形成的，并且 TC = 映射$_{\mathrm{CycSp}}(\mathbb{S}, -)$ 由 [26] 给出。

定理 3.12. 设 T 表示一个截断集。存在一个谱的自然等价

$$\mathrm{TR}_T(X) \simeq \Omega\,\mathrm{TC}\Big(\prod_{t \in T} X \otimes \Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_t)\Big).$$

对每个圆分谱 X。若 $T = \mathbb{N}_{>0}$，则存在一个谱的自然等价

$$\mathrm{TR}(X) \simeq \varprojlim \Omega\,\mathrm{TC}(X \otimes \widetilde{\mathrm{THH}}(\mathbb{S}[t]/t^n)).$$

证明。首先注意到，存在一个圆分谱的等价

$$R_T i_T(X) \simeq \prod_{t\in T} X \otimes \Sigma^{\infty-1}_+(\mathbb{T}/C_t)$$

由注 2.25 的第二部分可知，因此我们得出

$$\begin{aligned}\mathrm{TR}_T(X) &\simeq \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}_T}(i_T(\mathbb{S}), i_T(X))\\ &\simeq \mathrm{map}_{\mathrm{CycSp}}(\mathbb{S}, R_T i_T(X))\\ &\simeq \Omega\,\mathrm{TC}\Big(\prod_{t\in T} X\otimes\Sigma^\infty_+(\mathbb{T}/C_t)\Big)\end{aligned}$$

利用定理 2.24，以及 TC 在旋轮谱的 ∞-范畴上由球谱 $\mathbb{S}$ 核心表示这一事实。最后的断言是定理 2.24 最后一部分的推论。□

我们计算集中于单一度且下有界的多边形谱的传递。此计算将在第 5 节发挥关键作用。作为计算的输入，我们记录引理 II.4.1 和引理 II.4.2] 的以下有限群版本。

引理 3.13. 设 X 是一个带有 C_n-作用的谱，其中 $n\geq 2$ 为某个整数。若 X 下有界，则谱之间的典范映射

$$X^{\mathrm{t}C_n} \to \prod_{p|n}(X^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_{n/p}}$$

是一个等价，其中乘积以所有整除 n 的素数构成的集合为指标。

证明。首先，我们断言，对于每个整除 n 的素数 p，典范映射

$$X^{\mathrm{t}C_n} \to (X^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_{n/p}}$$

是一个 p-进等价，且目标是 p-完备的。后者由 [26, 引理 I.2.9], 得出，其中我们还使用了 p-完备谱的极限是 p-完备的这一事实。为证明该映射是 p-进等价，我们可以将 X 替换为 $X^\wedge_p$，即可以假设 X 是 p-完备的。于是 $X^{\mathrm{t}C_n} = (X^{\mathrm{t}C_{p^k}})^{\mathrm{h}C_{n/p^k}}$，其中 k 是 n的 p-进赋值。其成立是因为 Tate 构造是映射的余纤维

$$X_{\mathrm{h}C_n} \simeq (X_{\mathrm{h}C_{p^k}})_{\mathrm{h}C_{n/p^k}} \simeq (X_{\mathrm{h}C_{p^k}})^{\mathrm{h}C_{n/p^k}} \to X^{\mathrm{h}C_n} \simeq (X^{\mathrm{h}C_{p^k}})^{\mathrm{h}C_{n/p^k}}$$

其中我们使用了 X上的 n/p^k 可逆这一事实。最后，该断言由 [26, 引理 II.4.1] 得出。因此，所讨论的映射

$$X^{\mathrm{t}C_n} \to \prod_{p|n}(X^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_{n/p}}$$

是一个有限群等价，且目标是有限群完备的。因此，只需证明 $X^{\mathrm{t}C_n}$ 是有限群完备的。利用 [26, 引理 I.2.6] 以及有限群完备谱的极限仍然是有限群完备的这一事实，我们假设 X 是有界的。进一步地，我们可以将情形归约为 $X = \mathrm{H}M[i]$ 是一个集中在度 i的 Eilenberg–Mac Lane 谱。在此情形下，Tate 上同调 $\widehat{\mathrm{H}}^\star(C_n, M)$ 具有 n-挠，因此 $X^{\mathrm{t}C_n}$具有 n-挠，这意味着 $X^{\mathrm{t}C_n}$是有限群完备的。这证明了所需的结论。□

引理 3.14. 设 X 是一个集中在度 n 上的多边形谱，其中 $n\geq 1$。如果 X 下有界，则存在谱的自然等价 $\mathrm{TR}(X) \simeq X_{\mathrm{h}C_n}$。

证明. 如果 $n=1$，则根据例 3.4，$\mathrm{TR}(X)\simeq X$。如果 $n\geq 2$，那么我们得出 t

$$\mathrm{TR}(X)\simeq \mathrm{Eq}\Big(\ X^{\mathrm{h}C_n}\ \underset{0}{\overset{\mathrm{can}}{\rightrightarrows}}\ \prod_{p|n}(X^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_{\frac{n}{p}}}\ \Big),$$

因为 X 集中在度 n，其中顶映射由以下复合给出

$$X^{\mathrm{h}C_n}\simeq (X^{\mathrm{h}C_p})^{\mathrm{h}C_{\frac{n}{p}}}\xrightarrow{\mathrm{can}}(X^{\mathrm{t}C_p})^{\mathrm{h}C_{\frac{n}{p}}}$$

若 p 整除 n。利用引理 3.13，我们得出 $\mathrm{TR}(X)\simeq \mathrm{fib}(X^{\mathrm{h}C_n}\xrightarrow{\text{可以}} X^{\mathrm{t}C_n})\simeq X_{\mathrm{h}C_n}$。 □

3.2. 多边形的 t-结构。我们在多边形谱的 ∞范畴上构造一个 t-结构，这完全类似于 [1, §2.1] 中在圆分谱的 ∞范畴上构造 t-结构。我们的表述逐字遵循 [1] 中的表述。

定义 3.15。令 $\mathbf{PgcSp}_{\geq 0}$ 表示 PgcSp 的全子范畴，其对象为满足以下条件的多边形谱 $\{X_n\}_{n\geq 1}$：对每个 $n\geq 1$，X_n 的底层谱都是连通的。

若 $X\in\mathbf{PgcSp}_{\geq 0}$ 是一个连通多边形谱，则多边 Frobenius 映射

$$\varphi_{p,n}: X_n\to (X_{pn})^{\mathrm{t}C_p}$$

对每个 $n\geq 1$ 和每个素数 p，都可典范地经由连通覆盖 $\tau_{\geq 0}(X_{pn})^{\mathrm{t}C_p}$ 分解。特别地，构造 2.5 中的函子 F_p 可典范地细化为一个函子

$$\tau_{\geq 0}F_p:\prod_{n\geq 1}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n})_{\geq 0}\to\prod_{n\geq 1}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n})_{\geq 0}.$$

利用这一点，我们证明了多边形谱的 ∞-范畴 PgcSp 具有 [1, 定理 2.1] 的类似结论。证明直接改编自 Antieau 和第三位作者给出的论证。

命题 3.16。∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}_{\geq 0}$ 构成 PgcSp 上一个可达的 t-结构的连通部分，该结构是左完备的，且与 PgcSp 上的对称幺半结构相容。

证明。根据 [21, 命题 1.4.4.11]，只需证明 $\mathbf{PgcSp}_{\geq 0}$ 是一个可呈现的 ∞-范畴，并且在扩张和小余极限下封闭。注意，按构造，$\mathbf{PgcSp}_{\geq 0}$ 在扩张下封闭。与 [1, 引理 2.10], 中一样， ∞-范畴 $\mathbf{PgcSp}_{\geq 0}$ 等价于松弛等化子

$$\mathrm{PgcSp}_{\geq 0}\simeq \mathrm{LEq}\Big(\prod_{n\geq 1}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n})_{\geq 0}\ \Longrightarrow\ \prod_{p\in\mathbb{P}}\prod_{n\geq 1}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_n})_{\geq 0}\ \Big),$$

其中上方的映射是恒等函子，下方的映射是 $\{\tau_{\geq 0}F_p\}$；所需的映射从右向左，并由自然变换 $\tau_{\geq 0}F_p\to F_p$ 诱导。这意味着，正如 [1, 引理 2.10] 中所解释的，$\mathbf{PgcSp}_{\geq 0}$ 是可呈现的，并且在小余极限下闭。类似地，通过直接改编 [1, 定理 2.1] 的证明， t结构是左完备的。由于单位元 $\mathbb{S}$ 是连通的，且连通的多边形谱的张量积也是连通的， t结构与 PgcSp 上的对称幺半结构相容。□

我们将这一 t-结构称为多边形谱的 ∞-范畴 PgcSp 上的多边形 t-结构。多边形 t-结构的余连通部分由其连通部分决定，具体来说，多边形谱 Y 属于 $\mathbf{PgcSp}_{\leq 0}$ 当且仅当

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{PgcSp}}(X,Y[-1])\simeq 0$$

对于每个连通多边形谱 X 都成立。例如，若 $X \in \mathrm{PgcSp}^{\leq 0}$，则对于每个 $i > 0$，都有 $\pi_i \mathrm{TR}(X) \simeq 0$，因为 $\mathrm{TR}(X) = \mathrm{map}^{\mathrm{PgcSp}}(\mathbb{S}, X)$ 由 $\mathbb{S}$ 核表示；根据构造，它在多边形 t- 结构中是连通的。

注 3.17。多边形谱的 ∞-范畴上的多边形 t-结构的构造是形式上的。与 [1], 一样，困难之处在于确定多边形 t-结构的心。事实上，这个心等价于所谓完备多边形 Cartier 模所成的阿贝尔范畴。我们将在后续工作中进一步讨论这一点；此外，我们还将运用本文的思想，以（整数）完备 Cartier 模来刻画旋轮谱的 ∞-范畴上的 t-结构之心，从而将 Antieau 和第三位作者在 [1]中的工作推广到整数情形。

4. Quasifinitely genuine G-spectra after Kaledin

本节中，我们介绍任意群 G 的拟有限真 G-谱的 ∞-范畴；这一概念最初由 Kaledin 在 [16] 中以其 $\mathbb{Z}$-线性版本提出，称为 G- Mackey 预函子。在 §4.1 和 §4.2 中，我们将讨论拟有限真 G-谱的 ∞-范畴的结构特征，包括幺半群结构和几何不动点。在 §4.4 中，我们聚焦于 $G = \mathbb{Z}$的特殊情形，并建立一些仅适用于 $G = \mathbb{Z}$情形的几何不动点函子的结构性结果。本节为我们在第 5 节中将多边形谱的传递视为拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱进行讨论提供必要的背景。

4.1. 拟有限真 G-谱的定义。

本节的目标是遵循 Kaledin [16]，为任意群 G 引入拟有限真 G-谱的 ∞-范畴。拟有限真谱的形式体系，为无限离散群（例如整数群）提供了一种合理的真正等变同伦论；整数群将是我们主要关注的例子。回顾一下，若 G 是有限群，则真正 G-谱的 ∞-范畴定义为有限 G-集合范畴上的谱 Mackey 函子所构成的 ∞-范畴（参见 [2, 12]）。这一界定对任意群都有意义，但通常无法构造出具备真正 G-谱的 ∞-范畴所需特性的形式体系。为避免混淆我们所讨论的等变同伦论是哪一种变体，先回顾如下定义：

定义 4.1. 对任意群 G，令 Fin_G 表示有限 G-集合的范畴，也就是带有 G-作用的有限集。

Fin S 中的每个对象都可以写成形如 G/H 的轨道的有限余积，其中 H 是 G 的余有限子群。事实上，存在一个典范包含 $\mathrm{Orb}_G \hookrightarrow \mathrm{Fin}_G$，它从 G 的余有限轨道范畴出发，将后者呈现为 Orb_G 的有限余积完备化。注意，Fin_G 存在拉回，因此我们可以构造 $\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G)$ 这一 Span ∞-范畴；它的直和由有限 G-集合的余积给出（参见 [2, 命题 4.2]）。

D定义 4.2. 设 G 是一个群。有限真 G-谱的 ∞-范畴定义为 s

$$\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{fgen}} = \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G), \mathrm{Sp}),$$

由保持有限乘积（等价地，有限余积）的函子 $\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G) \to \mathrm{Sp}$ 所张成的全子范畴。

我们提醒读者，在等变同伦论中，下标通常指能够作为稳定子出现的子群族。从这一角度看，将这个 ∞-范畴记作 $\mathrm{Sp}^{G}_{\mathrm{cofin}}$ 会更加合乎逻辑，以表明对于有限 G-集合，稳定子是余有限的。

若 G 是有限群，则谱范畴 $\mathcal{S}\mathrm{p}^{G}_{\mathrm{fgen}}$ 等价于由正交谱定义的真正 G-谱的 ∞-范畴（参见 [22]）。我们指出，当 G 是有限群时，定义 4.2 也给出一种合理的形式体系（参见 [2, 25]）。Kaledin 的主要思想 [16] 是将上述有限 G-集合范畴替换为 Dress–Siebeneicher 意义下的拟有限 G-集合范畴 [10]:

Defi义 4.3. 设 G 是一个群。拟有限 G-集合是满足以下条件的一个 G-集合 S：

(1) 对每个元素 $s \in S$，稳定子 G_s 都是 G的余有限子群。

(2) 对 G的每个余有限子群 H，不动点集 S^H 都是有限的。

L令 QFin_G 表示 Set_G 的全子范畴，其对象为拟有限的那些 G-集合 .

注意，每个有限的 G-集合都是一个拟有限 G-集合，并且存在一个全忠实函子 $i : \mathrm{Fin}_G \hookrightarrow \mathrm{QFin}_G$。我们将范畴 QFin_G 视为 Fin_G 与 Orb_G的完全余积完备化之间的中间对象，因为我们可以构造某些无限余积的 G-轨道：若 $S \in \mathrm{QFin}_G$ 带有商映射 $\pi : S \to S/G$，那么典范映射

$$\coprod_{\bar{x} \in S/G} \pi^{-1}(\bar{x}) \to S$$

是拟有限 G-集合之间的一个同构，并且为 s of $\bar{s} \in S/G$ 选择一个提升，就确定了一个同构$\pi^{-1}(\bar{s}) \simeq G/G_s$。更非正式地说，若我们将 G-集合 S 写成轨道的余积

$$S = \coprod_{s \in S/G} G/H_s,$$

那么，当每个 H_s 都是 G 的余有限子群，且 G 的每个余有限子群 H 都只包含于有限多个 H_s 中时， S 就是拟有限的。下面给出一个有启发性的例子:

例4.4. 我们声称， $S = \coprod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是一个拟有限 $\mathbb{Z}$-集合。第一个条件显然成立，因为当 n 遍历 $\mathbb{N}_{>0}$时，稳定子群由 $n\mathbb{Z}$ 给出。此外，如果 $k \geq 1$，那么

$$S^{k\mathbb{Z}} = \coprod_{n \in \langle k \rangle} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

其为有限集合，这表明第二个条件得以满足。一般而言，任何不包含在函子 $i : \mathrm{Fin}_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$ 的本质像中的拟有限 $\mathbb{Z}$-集合都具有如下形式

$$T = \coprod_{i \in I} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$$

对于每个 $i \in I$，由整数 $m_i \geq 1$ 构成的序列$\{m_i\}_{i \in I}$ 满足：当 $i \to \infty$时， $m_i \to \infty$。如果 T' 是$\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$ 中的另一个对象，由如上序列$\{n_j\}_{j \in J}$ 指定，那么$\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$ 中的一个态射$T \to T'$ 由满足以下条件的函数 $f : I \to J$ 确定：对于每个 $i \in I$， $n_{f(i)}$ 整除 m_i。我们将在§4.4和第 5 节中反复使用这些观察结果。

我们断言，拟有限 G-集范畴 QFin_G 有拉回。事实上，拉回是在 G-集范畴中构造的，并且容易验证它们仍然是拟有限的：元素的稳定子是各稳定子群的交，因此仍然是余有限的。拉回的不动点是各不动点的拉回，因此仍然是有限的。现在，由于 QFin_G 有拉回，我们可以构造

∞-范畴 Span(QFin$_G$)。注意，这个范畴不是 Span 的 (∞,2)-范畴，而是 ∞-范畴（又称 (∞,1)-范畴）。也就是说，跨度之间的一个 2-态射由所涉及态射对象之间的一个等价构成。

以下定义归功于 Kaledin [16, 定义 3.2]。

定义 4.5。对于一个群 G，拟有限真 G-谱的 ∞-范畴定义为

$$\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} = \mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}),$$

其中，Fun^{vadd}(Span(QFin$_G$),谱范畴) 表示 Fun(Span(QFin$_G$),谱范畴) 的全子范畴，其对象为满足极可加条件的函子 X；也就是说，谱之间的典范映射

$$X(S) \to \prod_{\bar{s}\in S/G} X(\pi^{-1}(\bar{x}))$$

对于每个拟有限 G-集合 S 及其商映射 $\pi : S \to S/G$，都是一个等价。

全忠实函子 $i : \mathrm{Fin}_G \hookrightarrow \mathrm{QFin}_G$ 诱导出一个范畴的限制函子 ∞

$$i^\star : \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{fgen}}$$

从而我们可以将每个拟有限真 G-谱 X 视为一个有限真 G-谱。特别地，我们发现 X 具有通常的限制和转移函子性：若 H 是 G的余有限子群，则终端映射 $G/H \to G/G$ 诱导一个限制映射

$$F_H : X^G \to X^H$$

利用反变函子性，该映射关于目标上的韦尔群 $W_G(H) = N_G(H)/H$ 作用是等变的。协变函子性则诱导一个转移映射

$$V_H : X^H \to X^G$$

该映射关于韦尔群 $W_G(H)$ 在 X^H上的作用是等变的。拟有限真 G-结构赋予 X 的额外结构是，存在某些转移映射的无穷和，而目前底层的有限真 G-谱 $i^\star X$ 尚不具备这一结构。若 $S = \coprod_{i\in I} G/H_i$ 是一个拟有限 G-集合，则终端映射 $S \to G/G$ 诱导一个映射

$$V_{\{H_i\}} : \prod_{i\in I} X^{H_i} \to X^G$$

使得谱之间的复合映射

$$X^{H_{i_0}} \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} X^{H_i} \to \prod_{i\in I} X^{H_i} \xrightarrow{V_{\{H_i\}}} X^G,$$

对于每个 $i_0 \in I$，都自然等价于转移映射 $V_{H_{i_0}} : X^{H_{i_0}} \to X^G$。非正式地说，这可以概括为：映射 $V_{\{H_i\}}$ 由无穷和给出

$$V_{\{H_i\}} = \sum_{i\in I} V_{H_i}.$$

更不拘形式地说，我们将拟有限真的 G-谱视为一种谱，它配备了相对于 G 的余有限子群的限制与转移函子性，并指定哪些转移映射的无穷和是收敛的。这是 Kaledin [16] 的精妙洞见。我们先确立关于 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 的一些基本事实。需要强调的是，G 是任意群。

引理 4.6。 ∞-范畴 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 是可呈现的，且包含

$$\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$$

存在一个左伴随 $(-)_{\mathrm{vadd}}$。

证明。 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$ 是可呈现的，并且我们断言 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 是某个可呈现 Bousfield 局部化的局部对象。事实上，只需验证强可加函子恰好是相对于一组映射的局部对象（也就是说，Bousfield 局部化由一组映射生成）。为此，我们取以下映射的所有移位：

$$\bigoplus_{i\in I} \Sigma^\infty_+ \underline{S_i} \to \Sigma^\infty_+ \Big(\underline{\coprod_{i\in I} S_i}\Big)$$

对于 QFin_G 中的每个对象 $S = \coprod S_i$（的一个代表元），这确实构成一个集合，因为 QFin_G 本质上是小的。这里，下划线表示余可表示函子，我们将它们视为跨度范畴中的对象。该映射由包含 $S_i \to S$ 诱导（将其视为跨度范畴中的反向态射）。□

警告 4.7。$\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 中的极限由 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G),\mathrm{Sp})$中的底层图表的极限构成，但余极限并非在底层构成。相反，余极限是通过将函子 $(-)_{\mathrm{vadd}}$ 应用于 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G),\mathrm{Sp})$ 中构成的底层余极限而得到的。

注 4.8。注意， $i^\star : \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{fgen}}$ 保留极限和 κ-滤余极限（当 κ 足够大[5],时），因此它有一个左伴随 $(-)_{\mathrm{qfgen}}$。

存在一个 ∞-范畴的函子 $\Omega^\infty : \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} \to \mathcal{S}^G$，由以下复合给出

$$\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{fgen}} \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathrm{Fun}^\times(\mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G), \mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}^\times(\mathrm{Fin}^{\mathrm{op}}_G, \mathcal{S}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Orb}^{\mathrm{op}}_G, \mathcal{S}),$$

根据引理 4.6，它保留极限且是可达的，因此它有一个左伴随 $\Sigma^\infty_+ : \mathcal{S}^G \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$。左伴随 Σ^∞_+也可以通过其在轨道上的取值来描述（轨道自由生成 $\mathcal{S}^G$）。下一条陈述正是这一点的内容：

引理 4.9. 设 G 为一个群。对于 G的每个余有限子群 H， ∞-范畴的函子

$$(-)^H : \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^{BW_G(H)}$$

由赋予右 $W_G(H)$-作用的 $\Sigma^\infty_+(G/H)$余表示。

证明。对于每个拟有限真 G-谱 X，我们发现

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}}(\Sigma^\infty_+(G/H), X) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{S}^G}(G/H, \Omega^\infty X) \simeq \Omega^\infty X(G/H)$$

由米田引理可知，因为 G/H 是由 G/H 表示的 G-空间上的预层。这证明了所需的结论，因为 $X \mapsto X^H$ 和 $X \mapsto \mathrm{map}^{\mathrm{Sp}^G{}_{\mathrm{qfgen}}}(\Sigma^\infty_+(G/H)\ X)$ 都是精确函子，并且在应用 Ω^∞ 后相同。□

[5]确切地说，我们需要拟有限真 G-谱定义中出现的积与 κ-滤子余极限交换。为此，我们需要选择 κ，使其共尾性大于 G的余有限子群的共轭类数

警告 4.10。引理 4.9 表明，由 G 的余有限子群所索引的集合 $\{\Sigma^\infty_+(G/H)\}_H$ 构成 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 的一组生成元，但这些生成元并不紧，因为余极限并非在底层形成。这标志着 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 与 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{fgen}}$ 之间的主要差异之一。

例 4.11. 若 G 是有限群，则函子 $i^\star : \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{fgen}}$ 是 ∞-范畴的等价，这是因为包含函子 $i : \mathrm{Fin}_G \hookrightarrow \mathrm{QFin}_G$ 是等价。

我们在拟有限真 ∞-谱的 t-范畴上构造一个 G-结构。重要特征是，这个 t-结构是逐点的；与之相反，在 §3.2 中构造的多边形谱的 ∞-范畴上的 t-结构并非如此。

命题 4.12. 以下这对子范畴

$$(\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}})_{\geq 0} = \mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}_{\geq 0})$$
$$(\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}})_{\leq 0} = \mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}_{\leq 0})$$

确定了 t-范畴 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ with $\mathrm{Sp}^{G,\heartsuit}_{\mathrm{qfgen}} \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{hSpan}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Ab})$ 上的一个 ∞-结构。

换言之，拟有限真 G-谱 X 是连通的，当且仅当该谱 X^S 对每个拟有限 G-集 S 都是连通的；而 X 是余连通的，当且仅当 X^S 对每个 S 都是余连通的。我们指出，命题 4.12 的证明与以下证明相同：轨道 ∞-范畴上的谱 Mackey 函子的 ∞-范畴具有一个 t-结构（参见 [3, 命题 6.1]）。

证明。考虑由以下复合定义的 F 的 ∞-范畴函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}) \xrightarrow{\tau_{\leq -1}(-)_{\mathrm{vadd}}} \mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$$

并注意到 F 是一个局部化，因为 $\tau_{\leq -1}$ 和 $(-)_{\mathrm{vadd}}$ 都是局部化。利用 $\mathrm{Sp}_{\leq -1}$ 在任意积下封闭这一点，我们得出 F 的本质像等价于

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}_{\leq -1})$$

由于 $\mathrm{Sp}_{\leq -1}$ 在扩张下封闭，且 $\mathrm{Sp}_{\leq -1}$ 中的积是在 Sp 中计算的，而 Sp 中的积是正合的，因此该本质像在扩张下封闭。所需断言现由 [21, 命题 1.2.1.16] 得出。□

我们将使用以下术语（另见注 4.24）。

定义 4.13。若谱 $\{X^S\}_{S \in \mathrm{QFin}_G}$ 的集合一致下有界，则称拟有限真 G-谱 X 一致下有界。

在 [24, 命题 3.2.11], 中，第二作者为轨道 ∞-范畴的有限余积完备化上的谱 Mackey 函子，建立了经典 tom Dieck 分裂的一种变体。更准确地说，tom Dieck 分裂可视为给出了轨道 ∞-范畴上某个谱预层的自由谱 Mackey 函子的公式。我们希望能为拟有限真 G-谱得到类似的公式。目前，我们还不知道该如何做到这一点（参见备注 4.14）。不过，在 §4.3 关于几何不动点的讨论中，我们需要这种分裂的一个较弱版本。本节余下内容将阐述这一版本。读者初读时或许可以跳过此处，直接阅读 §4.2。

备注 4.14. 我们可以猜想，对于任意 G-空间 X，相应的拟有限真G-谱 $\Sigma^\infty_+ X$ 满足公式

$$(\Sigma^\infty_+ X)^G \simeq \prod_{(K)} (X^K)_{hW_K}$$

其中，积取遍 K G 的余有限子群的共轭类。我们尚未能证明这一点。主要障碍在于，我们无法确定 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群的群完备化是否与无限乘积可交换。

不过，我们将在稍大的可加函子范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$ 中得到 tom Dieck 分裂的一个类似结果。这一结论对于我们在 §4.3 讨论谱范畴 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 上的几何不动点函子时给出的证明至关重要。首先考虑函子

$$i_! : \mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathcal{S})$$

通过沿函子 $i : \mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G)$ 作左 Kan 延拓得到。

引理 4.15。若 $E \in \mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathrm{S})$，则左 Kan 延拓 $i_!(E)$ 由构造所确定的函子 $\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \to \mathrm{S}$ 给出

$$S \mapsto \left((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S}}\right)^{\simeq} \subseteq \mathrm{Map}_{\mathrm{Span}(\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}))}(E, \underline{S}).$$

术语 $((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S}})^{\simeq}$ 是 Yoneda 嵌入 $\mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathrm{S})$ 在 $E\times \underline{S}$ 上的逗号范畴。它被视为映射空间 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Span}(\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}))}(E, S)$ 的全子空间，其中包含中间项属于 QFin_G 的那些跨度。后一种描述也使函子的变异性显而易见。

证明。将 E 映至上述函子 $\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \to \mathrm{S}$ 的赋值，在 E 中典范地构成一个协变函子（例如，可通过跨度描述，或通过切片的直化构造得到）。此外，由于 QFin_G 的对象在 $\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathrm{S})$ 中是绝对紧致的，因此该赋值保持余极限[6]，，故它由以下复合唯一确定

$$\mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathcal{S}).$$

这个复合显然与左 Kan 延拓对应的复合一致，因为 Kan 延拓将可表函子映至可表函子（这里由于我们在 $\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G)$ 上处理余预层，因此是余可表函子）。□

接下来，我们希望描述这个函子的左伴随

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}),$$

记作 $\widetilde{\Sigma}^\infty_+$。这里，右侧表示 $\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathrm{S})^{\sim}$ 中由保持有限乘积的函子张成的全子范畴。我们为 Σ^∞_+ 建立一个公式。

---

[6]若对象 $c \in \mathcal{C}$ 满足 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{S}$ 保持所有余极限，则称其为绝对紧致。接下来，这个赋值

$$\mathcal{C} \to \mathcal{S} \qquad d \mapsto \left((\mathcal{C}^{\mathrm{ac}})_{/d}\right)^{\simeq}$$

pr保余极限，其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{ac}} \subseteq \mathcal{C}$ 是由绝对紧致对象构成的全子范畴。事实上，注意到

$$\left((\mathcal{C}^{\mathrm{ac}})_{/d}\right)^{\simeq} \simeq \mathrm{colim}_{c\in(\mathcal{C}^{\mathrm{ac}})^{\simeq}} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c, d)$$

它与 d 中的余极限相交换。

引理 4.16. 若 $E \in \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$，则 $i_! E$ 保有限乘积。因此，函子 $i_! E$可自然地精化为一个 ∞-范畴的函子

$$\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \to \mathrm{Mon}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{S})$$

由 $S \mapsto ((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S}})^{\simeq} \subseteq \mathrm{Map}_{\mathrm{Span}(\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}))}(E, \underline{S})$ 确定，而 $\Sigma^\infty_+ E$ 则由该加性函子的逐点群完备化给出。

证明。我们希望证明，若 E 保积，则由引理 4.15 中的公式给出的左 Kan 延拓 $i_! E$ 保有限乘积。为此，我们注意到，$\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G)$ 中的有限乘积由准有限 G-集的不交并给出。为了检验函子$E' : \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \to \mathcal{S}$ 是否保积，我们可以沿着

$$\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \to \mathcal{S}$$

并检验它是否保有限乘积。在所关注的情形中，这个限制由下式给出

$$S \mapsto \left((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S}}\right)^{\simeq}$$

wi通过“拉回”函子性。对于两个准有限 G-集 S 和 T，接下来我们需要验证 at

$$\left((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S\sqcup T}}\right)^{\simeq} \to \left((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S}}\right)^{\simeq} \times \left((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{T}}\right)^{\simeq}$$

是一个等价。要使这一点成立，只需有 $\underline{S \sqcup T} = \underline{S} \sqcup \underline{T}$，但遗憾的是，在 $\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中这并不成立。相反，我们可以在满子范畴中工作

$$\mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

该满子范畴包含 QFin_G 的 Yoneda 像以及函子 E，这是由于假设 E 保持有限乘积。现在我们将其解释为

$$\left((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S}}\right)^{\simeq}$$

关于函子的逗号范畴

$$\mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

并注意到这个包含保持余积。换言之，在 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中，我们有 $\underline{S \sqcup T} = \underline{S} \sqcup \underline{T}$。因此我们得到

$$\left((\mathrm{QFin}_G)_{/E\times \underline{S\sqcup T}}\right)^{\simeq} \simeq \left((\mathrm{QFin}_G)_{/(E\times \underline{S})\sqcup(E\times \underline{T})}\right)^{\simeq}$$

并且由于 $\mathcal{X} = \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 是一个 ∞-topos，我们有典范映射 $\mathcal{X}_{/x\sqcup y} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{X}_{/x} \times \mathcal{X}_{/y}$ 是一个等价，其逆由取余积给出。在我们的情形中，这个等价限制为由那些全空间属于 $\mathrm{QFin}_G \subseteq \mathcal{X}$ 的对象所张成的满子范畴之间的等价。由此完成了 $i_!(E)$ 保持二元积这一论证。它保持终对象这一事实证明方法类似，但更容易，留给读者。

因此，限制函子的左伴随

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

由 $i_!$ 的公式描述，且遗忘函子 $\mathrm{Mon}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Mon}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{S})) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathcal{S})$$

since Span(QFin$_G$) 是半可加的（参见 [11, 推论 2.5]）。我们注意到，遗忘函子 r

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Mon}_{\mathbb{E}_\infty}(\mathcal{S}))$$

其左伴随由逐点群完备化给出（由于群完备化与有限乘积可交换，它也是可加的）。结合这些断言即可证明所需结论。□

4.2. 幺半性质。本节将为 ∞-范畴 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 上拟有限真的 G-谱赋予对称幺半结构，使得函子

$$\Sigma^\infty_+ : \mathcal{S}^G \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$$

是对称幺半的，并且对每个 $S \in$QFin$_G$，对象 $\Sigma^\infty_+(S)$ 都是自对偶的。

备注 4.17。我们还为更大的 ∞-范畴赋予对称幺半结构

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$$

使得 ∞-范畴之间的左伴随函子

$$\mathcal{S}^G \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$$

是对称幺半的。我们指出，目前尚不清楚 ∞-范畴 Fun^{add}(Span(QFin$_G$), Sp) 的内在／几何含义是什么，但在某些论证中，在其中工作在技术上会更方便，因为我们无需考虑无限乘积（参见备注 4.14）。

拟有限 G-集合范畴 QFin$_G$ 具有笛卡尔积，因为它有拉回，且由单点空间给出的平凡 G-集合是拟有限的。因此，我们可以将范畴 QFin$_G$ 视为带有笛卡尔对称幺半结构的范畴。下面，我们构造 Span(QFin$_G$) 上诱导出的对称幺半结构，其对象上的定义是在 QFin$_G$ 中取笛卡尔积。这也在 [3] 中完成过。

构造 4.18。构造 Span(–) 定义了一个函子 $\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{LEx}}_\infty \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$，其中源范畴表示具有有限极限的 ∞-范畴及保持有限极限的函子所成的 ∞-范畴[7]。函子 Span 保持积，即典范态射

$$\mathrm{Span}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \to \mathrm{Span}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Span}(\mathcal{D})$$

对于每一对具有有限极限的 ∞-范畴而言，这是一个等价。

具有有限乘积的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 会导出一个笛卡尔对称幺半 ∞-范畴，它经直化后成为 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 中的一个 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群，也就是说，一个 ∞-范畴之间的函子

$$\mathrm{Fin}_* \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$$

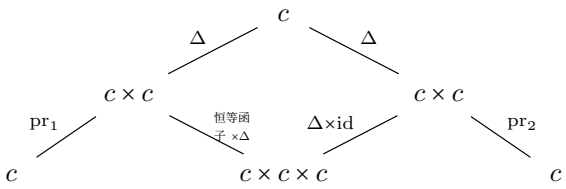
满足 Segal 条件。若 $\mathcal{C}$ 具有所有有限极限，则此函子可经由 $\mathcal{C}$在$^{\mathrm{LEx}}_\infty$ →$\mathcal{C}$在$_\infty$处分解，因为积与有限极限可交换。将此函子与函子 Span 作后复合，即可在 $\mathcal{C}$在$_\infty$中得到 Span($\mathcal{C}$) 上所需的 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群结构。

[7]事实上，拉回就足够了，但这里我们不需要如此一般的情形。

对称幺半 ∞-范畴 Span($\mathcal{C}$) 具有这样的性质：当把每个对象 c 的 $\mathcal{C}$ 视为 Span($\mathcal{C}$) 中的对象时，它都是典范自对偶的。为此，只需给出由该 Span 确定的对偶的求值与余求值

$$c \times c \xleftarrow{\Delta} c \to \mathrm{pt}$$

先从左向右读一遍，再反向读一遍。由于复合



是恒等映射。

Span(QFin$_G$) 上的对称幺半结构在 ∞-范畴 Fun(Span(QFin$_G$),谱范畴) 上诱导出具有以下性质的 Day 卷积对称幺半结构：

(1) Fun(Span(QFin$_G$),谱范畴) 上的对称幺半结构是闭的，且内部 Hom 可由以下公式描述

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)(S) \simeq \int_{T \in \mathrm{QFin}_G} \mathrm{map}_{\mathrm{Sp}}(X(T), Y(T \times S))$$

对于每一对函子 $X, Y : \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \to$ 谱范畴，以及每个准有限 G-集 S。

（2） ∞-范畴的反变 Yoneda 函子

$$\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$$

由指派 $S \mapsto \underline{S}$with $\underline{S}(T) = \Sigma^\infty_+ \mathrm{Map}_{\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G)}(S,T)$ 给出，它规范地细化为一个对称幺半函子。

特别地，上述第二个性质意味着，对于每个准有限 G-集 S，函子$\underline{S}$作为对称幺半 ∞-范畴 Fun(Span(QFin$_G$),谱范畴) 中的一个对象，规范地是自对偶的。此外，以下复合函子

$$\mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$$

细化为一个对称幺半函子，因此其保余极限扩张也如此

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}),$$

其中源范畴带有笛卡尔对称幺半结构（它与相对于 QFin$_G$ 上笛卡尔积的 Day 卷积对称幺半结构一致）。

命题 4.19。 ∞-范畴 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 和 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}$(Span(QFin$_G$), Sp) 都是 Fun(Span(QFin$_G$), Sp) 的对称幺半局部化。

证明。我们证明，拟有限真 G-谱的 ∞-范畴是 Fun(Span(QFin$_G$),Sp) 的对称幺半局部化。设 X 和 Y表示一对函子 Span(QFin$_G$) $\to$ Sp

并假设 Y 是极可加的。我们验证内部 Hom $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ 是极可加的。事实上，对于每个拟有限 G- 集合 $S = \coprod_{i\in I} S_i$，我们有

$$Y\Big(T \times \coprod_{i\in I} S_i\Big) \simeq Y\big(\coprod_{i\in I} T \times S_i\big) \simeq \prod_{i\in I} Y(T \times S_i),$$

利用积在 QFin_G 中对任意余积可分配，以及我们的假设 Y 是极可加。结合上文的内部 Hom 公式，我们得到

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)(S) \simeq \int_{T\in \mathrm{QFin}_G} \mathrm{map}_{\mathrm{Sp}}\Big(X(T), \prod_{i\in I} Y(T\times S_i)\Big) \simeq \prod_{i\in I} \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)(S_i)$$

这就证明了所需的结论。最后，将上述论证中的“极可加”替换为“可加”，即可得到 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G),\mathrm{Sp})$ 的类似断言。□

由命题 4.19 可知，以下函子

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}},\mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G),\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G),\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$$

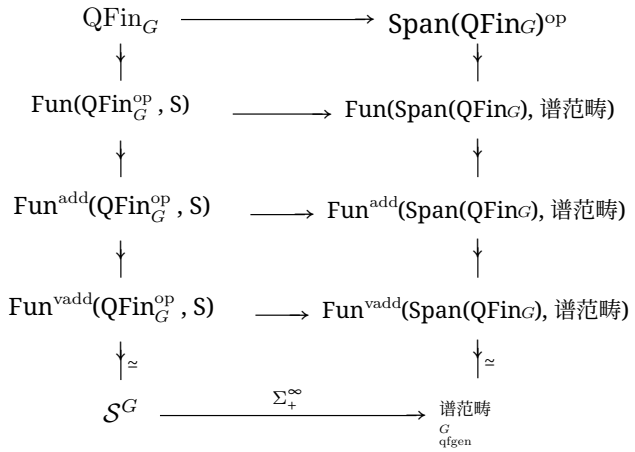
是对称幺半的。上面的复合函子通过对称幺半局部化

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}},\mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}},\mathcal{S}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Orb}_G^{\mathrm{op}},\mathcal{S})$$

并且，诱导出的函子由函子 $\Sigma^\infty_+ : \mathrm{Fun}(\mathrm{Orb}_G^{\mathrm{op}},\mathrm{S}) \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 给出，这可通过比较伴随函子得出。特别地，我们得出函子 Σ^∞_+ 具有典范的对称幺半结构。同样，我们有复合函子

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}},\mathcal{S}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G),\mathrm{Sp})$$

仍可分解为一个对称幺半函子 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}},\mathrm{S}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G),$谱范畴$)$。总而言之，我们有如下对称幺半函子图：



4.3. 几何不动点。拟有限真 G-谱的 ∞-范畴支持几何不动点函子，下面将对此进行讨论。

构造 4.20。令 G 表示任意群。对于 G 的每个余有限子群 H，根据定义，不动点集 S^H 是有限的，因此构造 $S \mapsto S^H$ 确定了一个函子

$$(-)^H : \mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Fin}_{W_G(H)}.$$

函子 $(-)^H$ 保持拉回，而沿 $\mathrm{Span}(-)^H$ 的限制函子将加性函子映射为强可加函子，因此可典范地细化为一个 ∞-范畴的函子

$$\mathrm{infl}_H : \mathrm{Sp}^{W_G(H)}_{\mathrm{fgen}} \to \mathrm{Sp}^{G}_{\mathrm{qfgen}}$$

称为膨胀函子。该函子保持极限和对足够大的 κ的 κ-滤子余极限，因为这些极限和余极限是在源端与目标端的底层对象上形成的，因此膨胀函子具有一个左伴随函子

$$(-)^{\Phi H} : \mathrm{Sp}^{G}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^{W_G(H)}_{\mathrm{fgen}}$$

称为 H的几何不动点函子。如果 $H \subseteq H' \subseteq G$ 是 G的一对余有限正规子群，则存在有限真 G/H'-谱之间的自然等价

$$(X^{\Phi H})^{\Phi H'/H} \simeq X^{\Phi H'}$$

对于每个拟有限真 G-谱 X。事实上，以下复合

$$\mathrm{QFin}_G \xrightarrow{(-)^H} \mathrm{Fin}_{G/H} \xrightarrow{(-)^{H'/H}} \mathrm{Fin}_{G/H'}$$

is 同构于函子$(-)^{H'} : \mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Fin}^{G/H'}$，从而诱导出函子的自然等价 rs

$$\mathrm{infl}_{H'/H} \circ \mathrm{infl}_H \simeq \mathrm{infl}_{H'}$$

通过取左伴随函子，这给出了所需的等价$(-)^{\Phi H'}{}_{/H} \bigcirc (-)^{\Phi H} \simeq (-)^{\Phi H'}$。

作为本节的主要结果，我们为每个余有限子群 H of G 的几何不动点 $X^{\Phi H}$ 的底层谱给出一个显式公式（这是有意义的，因为韦尔群是有限的）。我们也将不拘形式地把这个谱记作 $X^{\Phi H}$。该公式的灵感来自有限群的等变稳定同伦论中几何不动点的通常公式（参见注记 4.23）以及 Kaledin 的结果（参见 [16, 命题 3.5]）。

记号 4.21。我们称拟有限 G-集合之间的态射 $f : S_0 \to S_1$ 为真态射，如果对每个连通分支 $G/H \subseteq S_1$，都有 $f^{-1}(G/H)^H = \varnothing$。等价地，这意味着对每个 $x \in S_0$， $f(x)$ 的各向同性群都严格大于 x 的各向同性群。对于拟有限 G-集合 S，令 $(\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{prop}}{}_{/S}$ 表示 S 上的真切片，即其对象为配备真态射 $S' \to S$ 的拟有限 G-集合 S' 所构成的范畴。若 $S = G/G$，则将此范畴记为 $\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_G$ 。

对于每个拟有限真的 G-谱 X，存在一个典范函子

$$(\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)} \to \mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \xrightarrow{X} \mathrm{Sp}$$

它将 S 映至 X^S，并将态射 $S \to S'$ 映至转移映射 $X^S \to X^{S'}$（参见 [2]）。本节的目标是证明以下结果：

定理 4.22. 设 G 是一个群， H 是 G的一个余有限子群。对于每个拟有限真的 G-谱 X，存在一个谱的余纤维序列

$$\operatorname*{colim}_{S \in (\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)}} X^S \to X^H \to X^{\Phi H},$$

其中，第一个映射由转移 $X^S \to X^H$ for $S \in (\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{prop}}{}_{/(G/H)}$诱导。

我们将把这一陈述的证明作为本节的主要结果，但首先让我们得出一些结论。

注 4.23. 设 G 是一个有限群。如果 X 是一个有限真 G-谱，那么几何不动点谱 $X^{\Phi G}$ 可通过以下余纤维序列计算得到

$$\operatorname*{colim}_{G/H\in \mathrm{Orb}_G^{\mathrm{prop}}} X^H \to X^G \to X^{\Phi G},$$

其中，余极限是沿着 Orb_G 中由满足 H 是 G的真子群的轨道 G/H 所张成的全子范畴取的。包含 $\mathrm{Orb}_G \hookrightarrow \mathrm{Fin}_G$ 展示了有限G-集合范畴是 Orb_G 的有限余积完备化。有限G 上真 G-谱 X 的限制，是其在 Orb_G 上的限制的左 Kan 延拓，因此上文出现的余极限等价于沿 $\mathrm{Fin}_G^{\mathrm{prop}}$ 取的余极限。从这个角度看，定理 4.22 断言，拟有限真 G-谱的几何不动点可通过通常的余纤维序列计算，只需将 Fin_G 替换为 QFin_G。

注 4.24. 若 X 是连通的拟有限真 G-谱，即所有不动点都连通，则根据定理 4.22，对每个 G 的余有限子群 H，谱 $X^{\Phi H}$ 都是连通的。若 X 一致下有界，则集合 $\{X^{\Phi H}\}$ 一致下有界，其中 H 遍历 G的余有限子群。

若 G 是有限群，则几何不动点函子是联合保守的；证明方法是利用各向异性分离序列，按 G 的阶进行归纳（参见 [27, 定理 7.2]）。对于无限群 G （例如有限群），这种技巧并不适用；事实上，在 finitely genuine G-谱的 ∞-范畴上，几何不动点函子并非联合保守。Kaledin [16, 命题 3.5] 指出，转到拟有限真 G-谱的 ∞-范畴即可解决这一问题，也就是说，在适当的有界性假设下，几何不动点函子是联合保守的。我们强调，下文命题 4.25 的证明完全归功于 Kaledin；为确保完备性，我们在自己的设定中重现他的论证。

命题 4.25. 若 X 是一致下有界的拟有限真 G-谱，则 $X \simeq 0$ 当且仅当对每个余有限子群 H，G 的谱之间有 $X^{\Phi H} \simeq 0$。

证明. 假设对每个余有限子群都有 $X^{\Phi H} \simeq 0$，但 $X \not\simeq 0$。通过平移，我们可以假设 X 是连通的，并且对某个 S_0，有 $\pi_0(X^{S_0}) \neq 0$。这些映射

$$\mathrm{colim}_{S\in(\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)}} \pi_0(X^S) \to \pi_0(\mathrm{colim}_{S\in(\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)}} X^S) \to \pi_0(X^{G/H})$$

是满射，其中左侧的余极限是在集合范畴中取的。事实上，第一个映射甚至是同构，这可由以下事实推出：所有 X^S 都是连通的，$(\mathrm{QFin}_G)^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)}$由于具有有限余积而是筛的，并且连通谱的 π_0 与筛余极限可交换。根据定理 4.22，第二个映射是满射。因此，对于任意 $x \in \pi_0(X^{G/H})$，我们都能找到一个真映射 $f : S' \to G/H$ 和 $y \in X^{S'}$，使得 $f_*(y) = x$。更一般地，这意味着对于任意拟有限 G-集合 S 以及任意 $x \in \pi_0(X^S)$，我们都能找到一个真映射 $f : S' \to S$ 和 $y \in \pi_0(X^S)$，使得 $f_*(y) = x$。对于 $x_0 \neq 0 \in \pi_0(X^{S_0})$，我们现在归纳地找到真映射

$$\ldots \to S_2 \to S_1 \to S_0$$

and $x_i \in \pi_0(X^{S_i})$，使得 $x_i \mapsto x_{i-1}$ 在转移映射下成立。这些映射的真性确保了 t

$$S = \coprod_{i\geq 1} S_i$$

又是一个拟有限 G-集合。令 $p : S \amalg S_0 \to S_0$ 表示汇集各映射 $S_i \to S_0$ 的典范映射，并令 $i : S \hookrightarrow S \amalg S_0$ 表示典范包含。令 $f : S \to S \amalg S_0$ 表示对 $i \geq 1$ 的映射 $f_i : S_i \to S_{i-1}$ 取余积所得的映射，并注意到 $p \bigcirc f = p \bigcirc i$。最后，考虑元素 $x = (x_i)_{i\geq 0} \in \pi_0(X^{S\amalg S_0}) \cong \prod_{i\geq 0} \pi_0(X^{S_i})$，并注意到

$$x_0 = p_*((x_0, 0, 0, \ldots)) = p_* f_*((x_i)_{i\geq 1}) - p_* i_*((x_i)_{i\geq 1}) = (p \circ f)_*((x_i)_{i\geq 1}) - (p \circ i)_*((x_i)_{i\geq 1}) = 0,$$

这里用到了如上所述的 $p \bigcirc f = p \bigcirc i$。这与假设 $x_0 \neq 0$ 矛盾，从而完成证明。□

接下来证明定理 4.22。令 EP 表示由下式确定的 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中的对象

$$(\mathrm{E}\mathcal{P})^S \simeq \begin{cases} * & \text{if } S^G = \varnothing \\ \varnothing & \text{if } S^G \neq \varnothing \end{cases}$$

类似地，对于任何在子共轭下封闭的 G 子群族 F，都可以定义 EF。上述记号表明，我们考虑的是由真子群组成的族。

构造 4.26。令 $\widetilde{\mathrm{EP}} \in \mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}_*)$ 表示映射的余纤维

$$\mathrm{E}\mathcal{P}_+ \to S^0 = \underline{G/G}_+$$

该映射由将函子 $(-)_+$ 应用于映射 $\mathrm{EP} \to *$ 得到。

注意，函子 $\widetilde{\mathrm{EP}}$ 不一定是极可加的，因为它是在 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}_*)$ 中定义为一个余纤维。我们将反复用到以下结果：

引理 4.27。函子 EP 等价于以下图表的余极限

$$\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{prop}} \hookrightarrow \mathrm{QFin}_G \to \mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}),$$

其中，后一个函子表示米田嵌入 $S \mapsto \underline{S}$。此外，如果 S 是具有真各向同性的拟有限 G-集合，那么 $\mathrm{EP} \wedge S_+ \simeq *$。

证明。第一个断言成立，因为每个预层都可以写成可表预层的余极限。事实上，预层之间存在典范等价

$$\mathrm{E}\mathcal{P} \simeq \operatorname*{colim}_{S\in \mathrm{QFin}_G, \underline{S} \to \mathrm{E}\mathcal{P}} \underline{S} \simeq \operatorname*{colim}_{S\in \mathrm{QFin}_G^{\mathrm{prop}}} \underline{S},$$

其中，最后一个等价成立，是因为这些余极限的指标范畴等价，而这可由 EP 的定义推出。对于最后一个断言，注意到由余纤维序列 $\mathrm{EP}_+ \to S^0 \to \widetilde{\mathrm{EP}}$，我们需要证明，对于仅具有真各向同性的 S，态射

$$\mathrm{E}\mathcal{P} \times \underline{S} \to \underline{S}$$

这是 $\mathrm{Fun}(\mathrm{QFin}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中的一个等价。这可以逐点检查，也就是说，在对某个 $T \in \mathrm{QFin}_G$ 求值之后检查。事实上，如果 T 只有真各向同性，我们就得到 $\mathrm{EP}^T = *$；否则两边均为空。□

现在，我们考虑 ∞-范畴的函子

$$- \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}} : \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$$

$\widetilde{\ }$通过与 Fun(Span(QFin$_G$), Sp) 中 EP 的像取张量积得到。该张量积是 Fun(Span(QFin$_G$), Sp) 上的 Day 卷积积，而不是任何可加函子或强可加函子子范畴上的 Day 卷积积！这个函子等价地由构造 $X \mapsto \mathrm{cofib}(X \otimes \Sigma^\infty_+ \mathrm{EP} \to X)$ 给出。

引理 4.28。 ∞-范畴的函子

$$- \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}} : \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G), \mathrm{Sp})$$

是局部化到 Fun(Span(QFin$_G$), Sp) 的全子范畴上的函子，该全子范畴由满足以下条件的函子X构成：对于每个具有真各向同性的拟有限 G-集合 S，都有 $X^S \simeq 0$。

$\widetilde{\ }$证明。我们首先证明，对于 ∞-范畴 Fun(Span(QFin$_G$), Sp) 的每个对象 X， $X \otimes \Sigma^\infty$ EP 都属于所要求的全子范畴。如果 S 是一个具有真各向同性的拟有限 G-集合，那么

$$\begin{aligned}(X \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}})^S &\simeq \mathrm{map}(\Sigma^\infty_+ \underline{S}, X \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}}) \\ &\simeq \mathrm{map}(\mathbb{I}, X \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}} \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S}) \\ &\simeq \mathrm{map}(\mathbb{I}, X \otimes \Sigma^\infty (\widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}} \wedge \underline{S}_+)) \simeq 0,\end{aligned}$$

利用 $\Sigma^\infty_+ \underline{S}$ 是典范自对偶的这一事实（参见 §4.2）以及引理 4.27。由定义映射 $S^0 \to \widetilde{\ }$EP 诱导出函子 id $\to (- \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\ }\mathrm{EP})$ 的一个自然变换。如果 X 属于我们所需的全子范畴，那么我们断言所诱导的映射

$$X \to X \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}}$$

是一个等价，并且根据构造，这等价于证明 $X \otimes \Sigma^\infty_+ \mathrm{EP} \simeq 0$。为此，根据引理 4.27，我们可以将 EP 写成一个余极限，进而得到

$$X \otimes \Sigma^\infty_+ \mathrm{E}\mathcal{P} \simeq \operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{QFin}_G^{\mathrm{prop}}} X \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S},$$

因此，只需证明对于每个 $S \in \mathrm{QFin}_G^{\mathrm{prop}}$，都有 $X \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S} \simeq 0$。同样，这一点成立是因为

$$\begin{aligned}(X \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S})^T &\simeq \mathrm{map}(\Sigma^\infty_+ T, X \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S}) \\ &\simeq \mathrm{map}(\Sigma^\infty_+ T \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S}, X) \\ &\simeq X^{T \times S} \simeq 0\end{aligned}$$

这里我们使用了 $T \times S$ 具有真各向同性，以及 X 属于我们所需的全子范畴这一假设。最后，为了得出结论，我们需要论证两个自然变换$\widetilde{\ } \to \widetilde{\ }\Sigma^\infty\mathrm{EP} \to \Sigma^\infty\mathrm{EP} \otimes \Sigma^\infty\mathrm{EP}$ 都是等价。这是因为它们都（差一个对称性）$\widetilde{\ }$是先前讨论中针对 $X = \Sigma^\infty\mathrm{EP}$ 的自然变换。根据 [20, 命题 5.2.7.4]，这就证明了所需的结论。□

$\widetilde{\ }$我们有局部化函子 $- \otimes \Sigma^\infty\mathrm{EP}$ 的以下具体公式：

Lemma 4.29。设 X 是 Fun(Span(QFin$_G$), Sp) 中的一个对象。存在一个谱范畴的等价 ra

$$(X \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}})^T \simeq \mathrm{cofib}\Big(\operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{QFin}_G^{\mathrm{prop}}} X^{S\times T} \to X^T\Big)$$

对每个拟有限 G-集合 T。

证明。将 EP 写成余极限，并利用 $(-)^T$ 保持余极限，我们得到

$$\begin{aligned}(X \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}})^T &\simeq \mathrm{cofib}\Big(\operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{QFin}_G^{\mathrm{prop}}} (X \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S})^T \to X^T\Big)\\ &\simeq \mathrm{cofib}\Big(\operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{QFin}_G^{\mathrm{prop}}} X^{S\times T} \to X^T\Big),\end{aligned}$$

其中我们再次利用了 $(X \otimes \Sigma^\infty_+ \underline{S})^T \simeq X^{S\times T}$，正如引理 4.28 的证明中所述。 □

~~推论 4.30~~。若 $X : \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_G) \to \mathrm{Sp}$ 是一个加性函子，则函子 $X \otimes \Sigma^\infty$EP 是极可加的。

~~证明~~。注意，根据引理 4.29，并由假设 $X \otimes \Sigma^\infty$EP 是加性的，且 X 保持拟有限 G-集合的余积。此外，引理 4.28 保证 $\sim X \otimes \Sigma^\infty$EP 在具有真各向同性的拟有限 G-集合上为零。对于任意拟有限 G-集合 $S = \coprod_i S_i$，除有限多个 S_i 外，都满足 $S_i^G = \varnothing$，因此可知 $X \otimes$ ~~EP 是极可加的，因为它已经是加性的。□

~~~~~~特别地，这表明 Σ^∞EP =$(\Sigma^\infty\mathrm{EP})_{\mathrm{add}}$ =$(\Sigma^\infty\mathrm{EP})_{\mathrm{vadd}}$，并且将 $\mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$ 局部化到其由不动点在真~~ ~~子群上消失的强可加函子构成的全子范畴的局部化，先验上由 $X \mapsto (X \otimes \Sigma^\infty\mathrm{EP})_{\mathrm{vadd}}$给出，实际上仍然只由 $- \otimes \Sigma^\infty$EP 给出。

引理 4.31。膨胀函子

$$\mathrm{infl}_G : \mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$$

是全忠实的，其本质像是满足以下条件的拟有限真 G-谱：对所有带有真稳定子群的拟有限 G- 集合 S，都有 $X^S \simeq 0$。其逆由取 G- 不动点给出。

证明。首先注意，任何谱的膨胀在所有真轨道上的不动点均消失，因此函子 infl_G 落入全子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Sp}^G_{\mathrm{qfgen}}$，该全子范畴由不动点在真子群上消失的拟有限真 G- 谱构成。这等价于以下全子范畴：由满足对每个带有真各向同性的拟有限 G-集合 S 都有 $X^S \simeq 0$ 的拟有限真 G-谱 X 构成。我们希望证明所诱导的函子

$$\mathrm{infl}_G : \mathrm{Sp} \to \mathcal{C}$$

是 ∞-范畴的等价。首先，我们断言此函子保持余极限。这是因为 $\mathcal{C}$ 中的余极限是逐点构造的；而这又是因为对象的逐点余极限在真各向同性的拟有限 G-集合上消失。由于它也是可加的（作为稳定 ∞-范畴中可加函子的余极限），因此实际上它已经是极可加的，正如推论 4.30 的证明中所述。

接下来，考虑由构造 $\mathrm{infl}_G(\mathbb{S})$ 给出的拟有限真 G-谱。注意到 $\mathrm{infl}_G(\mathbb{S})^G \simeq \mathbb{S}$，因此我们特别得到一个拟有限真 G-谱之间的典范映射

$$\mathbb{S} = \Sigma^\infty_+ \underline{G/G} \to \mathrm{infl}_G(\mathbb{S})$$
~~~~~~

它通过伴随给出一个映射

$$\Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}} \to \mathrm{infl}_G(\mathbb{S})$$

我们声称这是一个等价。由于源和目标在所有真子群上的不动点均消失，只需在取 G-不动点后证明该结论；而这又归结为证明映射

$$\mathrm{cofib}((\Sigma^\infty_+ \mathrm{E}\mathcal{P})^G \to \mathbb{S}^G) \to \mathbb{S}$$

是一个等价。为了计算源，我们首先断言， Σ^∞_+EP $\to \mathbb{S}$ 的余纤维可以在 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}$(Span(QFin$_G$), Sp) 中计算，而不必在 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}$(Span(QFin$_G$), Sp) 中计算；在后者中，我们将悬挂谱替换为它们的可加版本 $\widetilde{\Sigma}^\infty_+$EP 和 $\widetilde{\Sigma}^\infty_+ G/G$，其中$\widetilde{\ }\Sigma^\infty_+$表示在引理 4.16之前的讨论中引入的函子。这是因为，在可加函子中形成的余纤维自动是极可加的，因为如推论 4.30所述，它在真子群上的不动-$\widetilde{\ }$点消失。特别地， Σ^∞EP 的 G-不动点由谱之间的映射的余纤维给出

$$(\widetilde{\Sigma}^\infty_+ \mathrm{E}\mathcal{P})^G \to (\widetilde{\Sigma}^\infty_+ \underline{G/G})^G.$$

为了计算这个余纤维，我们采用引理 4.16 中建立的 tom Dieck 分裂版本。据此，我们有

$$(\widetilde{\Sigma}^\infty_+ \mathrm{E}\mathcal{P})^G \simeq \left((\mathrm{QFin}_G)_{/\mathrm{E}\mathcal{P}}\right)^{\simeq,\mathrm{grp}} \simeq (\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_G)^{\simeq,\mathrm{grp}}$$

而 $(\widetilde{\Sigma}^\infty_+ G/G)^G \simeq$(QFin$_G$)$^{\simeq,\ \mathrm{grp}}$。接下来注意到，存在一个 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群的等价

$$\mathrm{QFin}^{\simeq}_G \simeq (\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_G)^{\simeq} \times \mathrm{Fin}^{\simeq},$$

因此我们需要计算由下列映射给出的余纤维

$$(\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_G)^{\simeq,\mathrm{grp}} \to (\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_G)^{\simeq,\mathrm{grp}} \times \mathrm{Fin}^{\simeq,\mathrm{grp}},$$

该映射由包含 $\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_G \hookrightarrow \mathrm{QFin}_G$ 诱导，而根据 Barratt–Priddy–Quillen 定理，这个余纤维由 $\mathrm{Fin}^{\simeq,\ \mathrm{grp}} \simeq \mathbb{S}$ 给出。由 tom Dieck 分裂的自然性可知，这证明所需的映射 cofib$((\Sigma^\infty_+\mathrm{EP})^G \to \mathbb{S}^G) \to \mathbb{S}$ 是一个等价，从而证得该断言。

继续，由于膨胀函子 infl_G : 谱范畴 $\to \mathcal{C}$ 保持余极限，其伴随函子由从 $\mathrm{infl}_G(\mathbb{S}) \simeq \Sigma^\infty$EP 映出的映射给出。由于 $-\otimes\Sigma^\infty$EP 是到 $\mathcal{C}$ 的局部化，我们有

$$(-)^G \simeq \mathrm{map}(\mathbb{S}, -) \simeq \mathrm{map}(\Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}}, -)$$

在 $\mathcal{C}$ 上。因此，$\mathrm{infl}_G : \mathrm{Sp} \to \mathcal{C}$ 的右伴随就是取 G-不动点。这个函子在 $\mathcal{C}$ 上是保守的，因此只需证明，对于任意谱 X，伴随的余单位

$$X \to (\mathrm{infl}_G X)^G$$

是一个等价，这由膨胀的定义显然可知。 □

最后，让我们总结已经证明的内容。由引理 4.31 可知，若 X 是拟有限真 G-谱，则存在一个谱之间的等价

$$X^{\Phi G} \simeq (X \otimes \Sigma^\infty \widetilde{\mathrm{E}\mathcal{P}})^G$$

借助引理 4.29，即可得到定理 4.22 中所需的余纤维序列。

一般而言，如果 H 是 G的余有限子群，那么 $(-)^{\Phi H}$: 谱范畴$^{G}_{\mathrm{qfgen}}$ → 谱范畴由复合给出 te

$$\mathrm{Sp}^{G}_{\mathrm{qfgen}} \xrightarrow{\mathrm{Res}^{G}_{H}} \mathrm{Sp}^{H}_{\mathrm{qfgen}} \xrightarrow{(-)^{\Phi H}} \mathrm{Sp},$$

其中 Res^{G}_{H} 由函子 $\mathrm{QFin}_{H} \to \mathrm{QFin}_{G}$ 诱导，该函子由赋值 $S \mapsto G\times_{H} S$确定。考察伴随函子即可看出这一点。根据上文的讨论，我们得到谱的自然等价

$$X^{\Phi H} \simeq \mathrm{cofib}\Big(\operatorname*{colim}_{T\in \mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{H}} (\mathrm{Res}^{G}_{H}X)^{T} \to (\mathrm{Res}^{G}_{H}X)^{H}\Big)$$

对每个拟有限真 G-谱 X。注意，函子 $\mathrm{QFin}_{H} \to (\mathrm{QFin}_{G})_{/(G/H)}$由构造 $T \mapsto (G\times_{H} T \to G\times_{H} * = G/H)$给出，它是范畴等价，并且进一步限制为等价 $\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{H} \to (\mathrm{QFin}_{G})^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)}$。因此，我们发现

$$X^{\Phi H} \simeq \mathrm{cofib}\Big(\operatorname*{colim}_{S\in (\mathrm{QFin}_{G})^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)}} X^{S} \to X^{H}\Big),$$

这就证明了定理 4.22 中 $(-)^{\Phi H}$ 的所需公式，其中我们还用到了对每个拟有限 H-集合 T，$(\mathrm{Res}^{G}_{H}X)^{T} = X^{G\times_{H}T}$成立。

注 4.32. 设 X 表示一个拟有限真 G-谱，且 H 是 G的余有限子群。根据构造 4.20，几何不动点 $X^{\Phi H}$ 承载韦尔群$W_{G}(H)$的作用。我们指出，谱等价

$$X^{\Phi H} \simeq \mathrm{cofib}\Big(\operatorname*{colim}_{S\in (\mathrm{QFin}_{G})^{\mathrm{prop}}_{/(G/H)}} X^{S} \to X^{H}\Big)$$

可以提升为一个 $W_{G}(H)$-等变等价。然而，在下文中，只需知道，根据构造 4.20，几何不动点谱 $X^{\Phi H}$ 承载 $W_{G}(H)$的作用，并利用本节建立的公式，验证某些映射由于函子性的

$$\mathrm{Sp}^{G}_{\mathrm{qfgen}} \xrightarrow{(-)^{\Phi H}} \mathrm{Sp}^{W_{G}(H)}_{\mathrm{fgen}} \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}W_{G}(H)}$$

确实是等价，只需检查其底层谱映射是等价。

4.4. 拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱。在第 4.1 节中，我们遵循 Kaledin 的思想，为任意群 G 引入了拟有限真 G-谱的 ∞-范畴。本节讨论当 $G = \mathbb{Z}$时这一构造的一些进一步特征；在第 5 节讨论其与 TR 的关系时，这些特征将发挥重要作用。回顾一下，拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱是一个函子

$$X : \mathrm{Span}(\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Sp}$$

满足 $i^{*}X$ 是一个有限 genuine $\mathbb{Z}$-谱，且典范映射

$$X\big(\coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/n_{i}\mathbb{Z}\big) \to \prod_{i\geq 1} X^{n_{i}\mathbb{Z}}$$

对于满足 $n_{i} \to \infty$ 且 $i \to \infty$ 的每个正整数序列 $\{n_{i}\}_{i\geq 1}$，它都是一个等价。我们简要讨论拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱所蕴含的结构。首先，

一个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱 X 配备了相容的包含映射和转移映射。事实上，对于每个 $n \geq 1$，$\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$ 中的终端映射 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 会诱导出一对映射

$$X^{\mathbb{Z}} \to X^{n\mathbb{Z}}$$
$$X^{n\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$$

分别称为包含和转移映射。包含映射关于源上的平凡 C_n-作用和目标上的剩余 C_n-作用是等变的，而转移关于源上的剩余 C_n-作用和目标上的平凡 C_n-作用是等变的。特别地，这些映射可典范地细化为映射 $X^{\mathbb{Z}} \to (X^{n\mathbb{Z}})^{hC_n}$ 和 $(X^{n\mathbb{Z}})_{hC_n} \to X^{\mathbb{Z}}$。包含映射和转移映射以相容的方式彼此兼容。这些结构已由 X 的底层有限真 $\mathbb{Z}$-谱编码，而拟有限真结构编码的附加结构是完备性。事实上，对于每个由正整数构成的序列 $\{n_i\}_{i\geq 1}$，其中 $n_i \to \infty$ 对于上述 $i \to \infty$ 均成立，无限余积 $\coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ 是一个拟有限 $\mathbb{Z}$-集合，而终端映射诱导出一个映射

$$V_{\{n_i\}} : \prod_{i\geq 1} X^{n_i\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$$

使得 $V_{\{n_i\}} \bigcirc \mathrm{incl}_k : X^{n_k\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$ 对每个 $k \geq 1$ 都典范等价于转移映射 $V_{n_k} : X^{n_k\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$。这可以概括为：映射 $V_{\{n_i\}}$ 由以下公式给出

$$V_{\{n_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} V_{n_i}.$$

换言之，我们认为，拟有限真 $\mathbb{Z}$-结构规定了某些转移映射的无穷和在 X 中收敛。这还意味着，我们的完备性概念被编码为一种结构，而非一种性质。这是 Kaledin 在 [16] 中提出的核心见解。

继续之前，我们先回顾一下存在一个 ∞-范畴的伴随

$$\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \underset{\mathrm{infl}_{n\mathbb{Z}}}{\overset{(-)^{\Phi n\mathbb{Z}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_{\mathrm{fgen}}$$

其中左伴随是几何不动点函子 $(-)^{\Phi n\mathbb{Z}}$（参见构造 4.20）。几何不动点函子可以通过一个余纤维序列计算，我们在此回顾该序列。与 §4.1 一样，为方便起见，我们回顾以下术语。

记号 4.33. 令 $(\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}})^{\mathrm{prop}}_{/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$ 表示如下范畴：其对象是拟有限 $\mathbb{Z}$-集合 S，带有一个映射 $S \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，且其各向同性群是 $n\mathbb{Z}$ 的真子群。对于 $n = 1$，我们将此范畴简单记为 $\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}$。

展开定义可知，$(\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}})^{\mathrm{prop}}_{/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$ 的每个对象 S 都具有如下形式

$$S = \coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$$

对于某个序列 $\{m_i\}_{i\geq 1}$，它满足：对于 $i \to \infty$，$n_i \to \infty$；并且对于 $i \geq 1$，n 是 m_i 的真因数。若 X 是一个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱，则 $X^{\Phi n\mathbb{Z}}$ 属于一个余纤维序列

$$\operatorname*{colim}_{S\in(\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}})^{\mathrm{prop}}_{/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}} X^S \to X^{n\mathbb{Z}} \to X^{\Phi n\mathbb{Z}}$$

由转移映射 $X^S \to X^{n\mathbb{Z}}$ 诱导（参见定理 4.22）。回顾一下，函子 $(-)^{\Phi n\mathbb{Z}}$ 在 $\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$ 中由一致下有界对象张成的全子范畴上联合保守（参见命题 4.25）。对于有限真 $\widehat{\mathbb{Z}}$-谱的 ∞-范畴，这一结果的类似结论并不成立，这是在 $\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$ 中工作的另一项优势。本节余下部分将讨论几何不动点函子的一些其他结构特征。借助以下构造，我们可以将关于余有限子群 $n\mathbb{Z}$ 的不动点问题，化为关于全群 $\mathbb{Z}$ 的不动点问题：

构造 4.34. 对于 $n \geq 1$，令 $i_n : \mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$ 表示由 $i_n(S) = nS$定义的函子，其中 nS 表示与 S 底层集合相同的拟有限 $\mathbb{Z}$-集合，但其 $\mathbb{Z}$-作用是将 S 上的 $\mathbb{Z}$-作用沿自同态 $n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$限制而得。例如，若 $S = \coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ 表示 $\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$ 中的一个对象，则 $i_n(S) \simeq \coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/nm_i\mathbb{Z}$。

令 $i_n^\star : \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$ 表示沿 i_n 限制得到的函子。注意，若 X是一个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱，则 $i_n^\star X$ 是一个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱，且

$$(i_n^\star X)^{k\mathbb{Z}} \simeq X^{kn\mathbb{Z}}$$

对于每个 $k \geq 1$。我们注意到，这个等价可延拓至几何不动点：

引理 4.35。设 $n \geq 1$。谱之间的典范映射

$$(i_n^\star X)^{\Phi\mathbb{Z}} \to X^{\Phi n\mathbb{Z}}$$

对于每个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱 X都是等价。

证明。这由以下观察得出：构造 $S \mapsto nS$ 确定了一个函子

$$\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}} \to (\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}})^{\mathrm{prop}}_{/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$$

该函子是等价，因为它具有由构造 $S' \mapsto \frac{1}{n}S'$确定的逆。 □

利用引理 4.35，我们可以将关于余有限群 $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ 的几何不动点谱的问题，化为关于全群 $\mathbb{Z}$的几何不动点的问题。我们将在第 5 节中反复使用这一观察。事实上，我们将函子 $i_n^\star$ 视为多边形谱的 ∞-范畴上的移位函子的类比。因此，为了分析几何不动点，我们只需分析由构造确定的函子

$$X \mapsto \operatorname*{colim}_{S\in \mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}} X^S.$$

为此，我们建立如下结果：

命题 4.36. 对于每个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱 X，存在一个自然等价

$$\operatorname*{colim}_{S\in \mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}} X^S \simeq \Big| \cdots \;\rightrightarrows \prod_{p,q\in\mathbb{P}} (X^{\gcd(p,q)\mathbb{Z}})_{\mathrm{h}C_{\gcd(p,q)}} \;\Longrightarrow \prod_{p\in\mathbb{P}} (X^{p\mathbb{Z}})_{\mathrm{h}C_p} \Big|,$$

其中水平映射由转移映射诱导。特别地，函子

$$X \mapsto \operatorname*{colim}_{S\in \mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}} X^S$$

保留一致下有界的滤子拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的逆极限。

命题 4.36 的证明是一个共尾性陈述的推论。为表述这一点，首先注意到，如果 $\mathcal{I}$ 是一个具有二元积和弱终对象 Y 的范畴，那么存在一个单纯对象 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{I}$，由构造 $[n] \mapsto Y^{\times n+1}$ 给出。形式上，它被定义为函子 $\{[0]\} \to \mathcal{I}$ 沿包含 $\{[0]\} \hookrightarrow \Delta^{\mathrm{op}}$ 的左 Kan 延拓，其中该函子由 $[0] \mapsto Y$ 给出；根据 $\mathcal{I}$ 具有二元积这一假设，该延拓存在。

引理 4.37。设 $\mathcal{I}$ 是一个具有弱终对象 Y 和如上所述二元积的范畴。则由构造 $[n] \mapsto Y^{\times n+1}$ 确定的单纯对象 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{I}$ 是共尾的。特别地，关于 $\mathcal{I}$ 的余极限保持谱的一致下有界极限。

证明。第一部分参见 [23, 命题 6.28]。第二部分随后由 Postnikov 塔论证得到，因为对于逐层连通的 $X_\bullet$，我们有谱的等价

$$\tau_{\leq n}(\operatorname{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} X_\bullet) \simeq \tau_{\leq n}(\operatorname{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}_{\leq n+1}} X_\bullet),$$

对每个 n 都成立，而后者是一个有限几何实现（参见 [21, 引理 1.2.4.17]）。因此，当所有项都是连通的时，它与谱的极限交换。□

命题 4.36 的证明。我们断言，$\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}$ 具有一个弱终对象，其形式为

$$S_{\mathrm{wt}} = \coprod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

其中，乘积取遍素数 $\mathbb{P}$ 的集合。若 $S = \coprod_{i \geq 1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ 是 $\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}$ 的任意对象，也就是说，$n_i \geq 2$ 且对 $i \to \infty$ 有 $n_i \to \infty$，那么每个 n_i 都能被某个素数整除，而这又确定了所需的映射 $S \to S_{\mathrm{wt}}$。应用引理 4.37，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}} X^S &\simeq \Big| \cdots \;\; \substack{\rightrightarrows \\ \rightrightarrows} \;\; X(S_{\mathrm{wt}} \times S_{\mathrm{wt}}) \;\; \rightrightarrows \;\; X(S_{\mathrm{wt}}) \Big| \\
&\simeq \Big| \cdots \;\; \substack{\rightrightarrows \\ \rightrightarrows} \;\; X\big(\textstyle\coprod_{p,q \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/\gcd(p,q)\mathbb{Z}\big) \;\; \rightrightarrows \;\; X\big(\textstyle\coprod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big) \Big| \\
&\simeq \Big| \cdots \;\; \substack{\rightrightarrows \\ \rightrightarrows} \;\; \textstyle\prod_{p,q \in \mathbb{P}} X^{\gcd(p,q)\mathbb{Z}} \;\; \rightrightarrows \;\; \prod_{p \in \mathbb{P}} X^{p\mathbb{Z}} \Big|,
\end{aligned}$$

其中的映射由转移映射诱导，最后一个等价则源于我们的假设：X 是一个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱。最后，回想一下，正如本节开头所述，转移具有适当的等变性，因此我们可以按所述方式写出几何实现。最后一个断言由引理 4.37 的最后一个断言得出。□

由此，我们得到以下结果，它将在第 5 节中发挥重要作用。

推论 4.38. 对每个 $n \geq 1$，几何不动点函子

$$(-)^{\Phi n\mathbb{Z}} : \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{Sp}$$

保持一致下有界滤过拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的逆极限 *a.*

证明。假设 $n = 1$。不动点函子保持任意极限，而谱中形成的余纤维是正合的，因此只需证明该构造

$$X \mapsto \operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{Fin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}} X^S$$

保持一致下有界、滤过的拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的逆极限，这正是命题 4.36 的内容。由引理 4.35 可知，这推出了一般情形，因为函子$i_n^\star$ 保持极限。□

5. Quasifinitely genuine $\mathbb{Z}$-spectra and TR

在本节中，我们运用第4节建立的形式体系，证明多边形谱的传递自然地精化为拟有限真的 $\mathbb{Z}$- 谱，从而回答 Kaledin 在 [16] 引言中提出的问题。这揭示了传递上的相容 Verschiebung 映射和 Frobenius 映射，并且还表明，传递相对于所有 Verschiebung 映射所诱导的滤过是完备的，正如第1节所讨论的。作为主要结果，我们证明传递给出从一致下有界多边形谱的 ∞ 范畴到一致下有界拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的 ∞ 范畴的一个等价（参见定理 5.4）。这是整系数情形下 [1, 定理 3.21] 的类比。

5.1. 将 TR 视为拟有限真的 $\mathbb{Z}$-谱。我们首先说明如何将 TR 表示为拟有限真的 $\mathbb{Z}$-谱。其思路是：拟有限真的 $\mathbb{Z}$-谱由其对 $\mathbb{Z}$ 的所有余有限子群的几何不动点 $X^{\Phi n\mathbb{Z}}$ 集合决定，而这一几何不动点集合自然带有多边形谱的结构：

构造 5.1. 对每个拟有限真的 $\mathbb{Z}$-谱 X，定义 LX ∈PgcSp 如下：

$$(\mathrm{L}X)_n = X^{\Phi n\mathbb{Z}}$$

for $n \geq 1$，视为带有 C_n-作用的谱。多边形结构映射定义为

$$X^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq (X^{\Phi pn\mathbb{Z}})^{\Phi C_p} \to (X^{\Phi pn\mathbb{Z}})^{\mathrm{t}C_p}$$

对每个素数 p 均成立（构造 4.20）。构造 $X \mapsto \mathrm{L}X$ 定义了一个函子 $\mathrm{L} : \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{PgcSp}$。

我们将 $\mathrm{L} : \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{PgcSp}$ 视为典型情形下模 V 函子的类似物。我们指出，与 [24] 中模 V 函子的类似物相比，这个函子的构造要透明得多。我们证明以下结果：

命题 5.2. 函子 $\mathrm{L} : \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{PgcSp}$ 存在一个右伴随

$$\underline{\mathrm{TR}} : \mathrm{PgcSp} \to \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$$

使得满足以下断言：

(1) 若 $X \in \mathrm{PgcSp}$，则对每个 $n \geq 1$，都有一个谱的等价 $\underline{\mathrm{TR}}(X)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(\mathrm{sh}_n X)$。(2) 函子 $\mathrm{L} : \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}} \to \mathrm{PgcSp}$ 是右 t-正合的。(3) 函子 $\mathrm{TR} : \mathrm{PgcSp} \to \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$ 是 t-正合的。

证明。函子 L 保持余极限，因为对于每个 $n \geq 1$，几何不动点函子 $(-)^{\Phi n\mathbb{Z}}$ 都保持余极限。因此，L 存在右伴随 $\mathrm{TR} : \mathrm{PgcSp} \to \mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$，因为 PgcSp 和 $\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$ 都是可呈现的。对于每个多边形谱 X 和 $n \geq 1$，我们确定余有限子群 $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ 在 TR(X) 上的不动点。根据引理 4.9，我们有

$$\underline{\mathrm{TR}}(X)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}}(\Sigma^\infty_+(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \underline{\mathrm{TR}}(X)) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}}(\mathrm{L}\Sigma^\infty_+(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), X)$$

因为 TR 是 L 的右伴随。展开定义可得

$$(\mathrm{L}\Sigma_+^\infty(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))_k = \Sigma_+^\infty(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\Phi k\mathbb{Z}} \simeq \Sigma_+^\infty((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{k\mathbb{Z}}) \simeq \begin{cases}\mathrm{ind}_{k/n}^k(\mathbb{S}) & \text{if } n \text{ divides } k\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

so $\mathrm{L}\Sigma_+^\infty(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \ell_n(\mathbb{S})$，其中 ℓ_n 是 sh_n 的左伴随，由例 2.28 得出。我们得出结论 th at

$$\underline{\mathrm{TR}}(X)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}}(\ell_n(\mathbb{S}), X) \simeq \mathrm{map}_{\mathrm{PgcSp}}(\mathbb{S}, \mathrm{sh}_n X) \simeq \mathrm{TR}(\mathrm{sh}_n X)$$

这证明了 (1)。注意，由构造可知，L 是右 t-正合的，因此由伴随关系，TR 是左 t-正合的。剩下要证明 TR 也是右 t-正合的。令 X 表示一个连通多边形谱。我们要证明，对于每个 $n \geq 1$，$\mathrm{TR}(X)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(\mathrm{sh}_n X)$ 都是连通的。首先注意，我们可以假设 $n = 1$。利用引理 2.12，存在一个谱的等价

$$\mathrm{TR}(X) \simeq \varprojlim_k \mathrm{TR}(X_{[k]}),$$

其中 $X_{[k]}$ 是满足 $(X_{[k]})_i = X_i$ （当 $i \leq k$ 时）且满足 $(X_{[k]})_i = 0$ （当 $i > k$ 时）的多边形谱。因此，利用米尔诺尔序列，只需证明对于每个$k \geq 1$，$\mathrm{TR}(X_{[k]})$ 是连通的，并且上述投射系统中的映射都是满射。为此，我们注意到存在一个谱的纤维序列

$$\mathrm{TR}(X_k) \to \mathrm{TR}(X_{[k]}) \to \mathrm{TR}(X_{[k-1]}),$$

其中 X_k 表示一个集中在度 k 、取值为 X_k的多边形谱。由引理 3.14 可知 $\mathrm{TR}(X_k) \simeq X_{\mathrm{h}C_k}$，且同伦轨道函子保持连通性，因此该结论可通过归纳得到。这就证明了所需的结论。□

注 5.3. 命题 5.2 证明最后一部分中出现的纤维序列，是 Hesselholt–Madsen [14, 建立的 TR^n 的余纤维序列的一个类比 [14, 定理 1.2]。

总之，对于每个多边形谱 X，我们都构造了一个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱 $\mathrm{TR}(X)$。这以相干的方式编码了 TR 上的 Verschiebung 和 Frobenius 映射。例如，若 R是一个 $\mathbb{E}_1$-环，且 M是一个 R-双模，则 $\mathrm{TR}(R, M)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n})$，后者具有规范的 C_n-作用。利用命题 5.2，我们得到一对映射

$$F_n : \mathrm{TR}(R, M) \to \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n})^{\mathrm{h}C_n}$$
$$V_n : \mathrm{TR}(R, M^{\otimes_R n})_{\mathrm{h}C_n} \to \mathrm{TR}(R, M)$$

分别由包含映射和转移映射诱导。这些映射满足 §4.4 中所述的相容性。我们将 F_n 称为第 n 个 Frobenius 映射，将 V_n 称为第 n 个 Verschiebung 映射。如前所述，Verschiebung 映射和 Frobenius 映射已通过 TR 上底层有限真 $\mathbb{Z}$-结构编码，因此，拟有限真 $\mathbb{Z}$-结构所编码的额外数据是某些 Verschiebung 映射的无穷和存在。事实上，对于每个满足以下条件的整数序列 $\{n_i\}$ $n_i \geq 2$： 对 $i \to \infty$ 有 $n_i \to \infty$，我们可以考虑 $\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{prop}}$ 中的终端映射 $\coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$，它诱导出一个谱之间的映射

$$\sum_{i=1}^{\infty} V_{n_i} : \prod_{i\geq 1} \mathrm{TR}(\mathrm{sh}_{n_i} X) \to \mathrm{TR}(X)$$

它构成了 $\mathrm{TR}(X)$ 上 Verschiebung 映射族的无穷和 $\{V_{n_i}\}_{i\geq 1}$ 。记住这些 Verschiebung 映射的无穷和后，我们就能恢复多边形的

谱 X，前提是对 X 满足适当的有界性假设 X，从而建立 [1, 定理 3.21] 的整版本。更准确地说，我们证明以下结果：

定理 5.4. 伴随 L ⊣TR 限制为 ∞-范畴之间的等价

$$\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z},-}_{\mathrm{qfgen}} \underset{\underline{\mathrm{TR}}}{\overset{\mathrm{L}}{\rightleftarrows}} \mathrm{PgcSp}^{-}$$

对应于两侧一致下有界对象的满子范畴。

注意，伴随 L ⊣TR 确实如定理 5.4 所述进行了限制，因为根据命题 5.2，L 和 TR 都是右 t-正合的。此外，根据命题 4.25，左伴随 L 在一致下有界的拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱上是保守的，因此，要证明定理 5.4 的断言，只需证明该伴随的余单位

$$\mathrm{L}\underline{\mathrm{TR}}(X) \to X$$

对每个一致下有界的多边形谱 X 都是等价。等价地，在这种情形下，我们希望证明余单位 $\mathrm{TR}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \to X_n$ 对每个 $n \geq 1$ 都是等价。主要思路是归结到 X 集中在有限多个度上的情形；借助以下一对结果，我们可以理解这种情形：

引理 5.5. 设 X 表示一个多边形谱，它集中在度 $\leq k$，其中 $k \geq 1$是某个整数。若 $n \geq k$，则典范映射 $\mathrm{TR}(X)^{n\mathbb{Z}} \to \mathrm{TR}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}}$ 是一个等价，并且

$$\underline{\mathrm{TR}}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \begin{cases} X_k & \text{if } n = k \\ 0 & \text{if } n > k \end{cases}$$

*Pr*的证明。只需证明余纤维序列左侧出现的余极限

$$\operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}} (i_n^\star \underline{\mathrm{TR}}(X))^S \to \underline{\mathrm{TR}}(X)^{n\mathbb{Z}} \to \underline{\mathrm{TR}}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}}$$

消失。事实上，若 $S = \coprod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ 是 $\mathrm{QFin}^{\mathrm{prop}}_{\mathbb{Z}}$ 中的一个对象，也就是说，$\{m_i\}$是一个整数序列，满足对每个 $i \geq 1$ 都有 $m_i \geq 2$，且对 $i \to \infty$ 有 $m_i \to \infty$，那么

$$(i_n^\star \underline{\mathrm{TR}}(X))^S \simeq \prod_{i\geq 1} (i_n^\star \underline{\mathrm{TR}}(X))^{m_i\mathbb{Z}} \simeq \prod_{i\geq 1} \underline{\mathrm{TR}}(X)^{nm_i\mathbb{Z}} \simeq \prod_{i\geq 1} \mathrm{TR}(\mathrm{sh}_{nm_i} X) \simeq 0,$$

这是因为根据我们的假设，对每个 $i \geq 1$ 都有 $\mathrm{sh}_{nm_i} X = 0$， $n \geq k$ 且 $m_i \geq 2$。这就证明了引理的第一个断言，进而得到 $\mathrm{TR}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(X)^{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(\mathrm{sh}_n X)$，只要 $n \geq k$。这也证明了引理的最后一个断言，因为当$n > k$ 时 $\mathrm{sh}_n X = 0$，而 $\mathrm{sh}_k X$ 是集中在度一且取值为 X_k 的多边形谱，由例 3.4[8] 可知 $\mathrm{TR}(\mathrm{sh}_k X) \simeq X_k$。□

对于一个集中在 $\leq k$度的多边形谱 X，引理 5.5 在 $n \geq k$时确定了几何不动点 $\mathrm{TR}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}}$。以下结果还使我们能够确定 $n < k$的几何不动点，但这需要更加复杂的论证。

命题 5.6. 设 X 表示一个一致下有界的多边形谱，其度集中在 $\leq k$，其中 $k \geq 1$ 是某个整数。以下断言成立：

[8]我们引用例 3.4 而不是引理 3.14，因为当 X 集中在度 1 时，为了确定 $\mathrm{TR}(X) \simeq X$，无需施加下有界假设。

(1) 若 $n \in \{1, \dots, k\}$，则 $\underline{\mathrm{TR}}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq X_n$。
(2) 若 $n \geq k+1$，则 $\underline{\mathrm{TR}}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq 0$。

证明。根据引理 5.5，尚需证明 $\mathrm{TR}(\underline{X})^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq X_n$ 对于 $k \geq 2$ 和 $n \in \{1, \dots, k-1\}$。我们首先说明，这可以由以下断言推出：

$(\star)$ 对于一个集中在度 k（对应于 $k \geq 2$）的下有界多边形谱 Y，$\mathrm{TR}(Y)^{\Phi\mathbb{Z}} \simeq 0$。

事实上，存在一个谱的纤维序列

$$\underline{\mathrm{TR}}(X_k)^{\Phi n\mathbb{Z}} \to \underline{\mathrm{TR}}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \to \underline{\mathrm{TR}}(X_{[k-1]})^{\Phi n\mathbb{Z}},$$

其中，X_k 表示一个集中在度 k 且取值为 X_k 的多边形谱，而 $X_{[k-1]}$ 是一个截至度 $k-1$ 与 X 一致的多边形谱。我们断言 $\mathrm{TR}(X_k)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq 0$，由此即可证明所需结论，因为

$$\underline{\mathrm{TR}}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \underline{\mathrm{TR}}(X_{[k-1]})^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \cdots \simeq \underline{\mathrm{TR}}(X_{[n]})^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq X_n.$$

我们有 $\mathrm{TR}(X_k)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TR}(\mathrm{sh}_n X_k)^{\Phi\mathbb{Z}}$，因此若 n 整除 k，则 $\mathrm{sh}_n X_k$ 是一个集中在度 $k/n \geq 2$ 且取值为 X_k 的多边形谱，这意味着

$$\underline{\mathrm{TR}}(X_k)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \underline{\mathrm{TR}}(\mathrm{sh}_n X_k)^{\Phi\mathbb{Z}} \simeq 0$$

根据（$\star$）。如果 n 不能整除 k，那么 $\mathrm{sh}_n X_k = 0$，这也说明 $\mathrm{TR}(X_k)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq 0$。最后，我们通过证明典范映射 $\mathrm{colim}^{S \in \mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{prop}}} \mathrm{TR}(Y)^S \to \mathrm{TR}(Y)^{\mathbb{Z}}$ 是等价，来证明（$\star$）。我们首先注意到，对于每个整除 k的 n，转移映射

$$(\underline{\mathrm{TR}}(Y)^{n\mathbb{Z}})_{\mathrm{h}C_n} \to \underline{\mathrm{TR}}(Y)^{\mathbb{Z}}$$

是等价。事实上，由于 $\mathrm{sh}_n X$ 是集中在度 k/n、取值为 Y的多边形谱，根据引理 3.14，存在自然等价 $\mathrm{TR}(Y)^{n\mathbb{Z}} \simeq X_{\mathrm{h}C_{k/n}}$，且上述转移映射可识别为典范等价 $(Y_{\mathrm{h}C_{k/n}})_{\mathrm{h}C_n} \simeq X_{\mathrm{h}C_k} \simeq \mathrm{TR}(Y)$；最后一个等价同样是引理 3.14 的推论。结合命题 4.36，我们得出转移映射诱导出谱的等价

$$\operatorname*{colim}_{S \in \mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{prop}}} \underline{\mathrm{TR}}(Y)^S \simeq \Big| \cdots \rightrightarrows \prod_{p,q \in \langle n \rangle} (\underline{\mathrm{TR}}(Y)^{\gcd(p,q)\mathbb{Z}})_{\mathrm{h}C_{\gcd(p,q)}} \Longrightarrow \prod_{p \in \langle n \rangle} (\underline{\mathrm{TR}}(Y)^{p\mathbb{Z}})_{\mathrm{h}C_p} \Big|$$
$$\xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{TR}}(Y)^{\mathbb{Z}} \otimes \Sigma_+^\infty |S|,$$

其中 S 是单纯集合，其 i-单形由 $S_i = \{(p_1, \dots, p_i) \in \mathbb{P}^i \mid p_1, \dots, p_i \in n\}$ 给出。由于 $|S|$ 是可缩的，我们得出所需的映射是一个等价，因此 $\mathrm{TR}(Y)^{\Phi\mathbb{Z}} \simeq 0$，从而证明了 $(\star)$。至此证明结束。□

有了命题 5.6，我们接下来证明定理 5.4。

定理 5.4 的证明。我们先证明，对于每个一致下有界的多边形谱 X，余单位 $\mathrm{LTR}(X) \to X$ 是一个等价。具体而言，我们证明，对于每个 $n \geq 1$，余单位 $\mathrm{TR}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \to X_n$ 是一个等价。利用引理 2.12，我们可以写成

$$X \simeq \varprojlim_k X_{[k]},$$

其中， $X_{[k]}$ 是多边形谱，它在 $i \le k$ 上为 $(X_{[k]})_i = X_k$，在 $i > k$ 上为 $(X_{[k]})_i = 0$，如命题 5.2 的证明中所述。因此，我们有

$$\underline{\mathrm{TR}}(X)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \big(\varprojlim_k \underline{\mathrm{TR}}(X_{[k]})\big)^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq \varprojlim_k \underline{\mathrm{TR}}(X_{[k]})^{\Phi n\mathbb{Z}},$$

其中，第一个等价是因为传递是右伴随，而第二个等价则由推论 4.38 得出，因为根据命题 5.2，传递是 t-正合的。利用命题 5.6，我们得出塔 $\{\mathrm{TR}(X_{[k]})^{\Phi n\mathbb{Z}}\}_k$ 最终为常值，其值为 $\mathrm{TR}(X_{[n]})^{\Phi n\mathbb{Z}} \simeq X_n$。为完成证明，我们注意到，在一致下有界的假设下，伴随的单位元是一个等价，因为根据命题 4.25，L 是保守的。这就证明了所需结论。

□

最后，我们在拟有限真的 ∞-范畴 $\mathbb{Z}$-谱上构造乘法幺半群 $\mathbb{N}_{>0}$ 的作用，其中 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 通过构造 4.34 中的函子 $i_n^\star$ 起作用。由此，根据定理 5.4，得到 $\mathbb{N}_{>0}$ 在下有界的多边形谱 ∞-范畴上的作用。

构造 5.7。乘法幺半群 $\mathbb{N}_{>0}$ 作用于范畴 $\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$，其中 $n \in \mathbb{N}_{>0}$通过赋值 $S \mapsto nS$作用于 $\mathrm{QFin}_{\mathbb{Z}}$。这确定了一个 ∞-范畴函子

$$\mathrm{B}\mathbb{N}_{>0} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty^{\mathrm{lex,op}},$$

因为它在 $\mathcal{C}$处经由 $_1^{\mathrm{lex}}$分解。利用构造 $T \mapsto \mathrm{Fun}^{\mathrm{vadd}}(\mathrm{Span}(T), \mathrm{Sp})$ 的函子性，我们得到所需的 ∞-范畴函子 $\mathrm{B}\mathbb{N}_{>0} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$。这通过构造 4.34 中的函子 $i_n^\star$ 确定了 $\mathbb{N}_{>0}$ 在 ∞-范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{qfgen}}$ 上的作用。根据定理 5.4，我们得到 $\mathbb{N}_{>0}$ 在由一致下有界的多边形谱构成的 ∞-范畴 PgcSp^- 上的作用，其中 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 通过例 2.28 中的函子 $\mathrm{sh}_n : \mathrm{PgcSp}^- \to \mathrm{PgcSp}^-$ 作用。

6. Polygonic THH

本节中，我们将讨论如何按照 §2 的意义，将带系数的拓扑 Hochschild 同调构造为多边形谱。在 §6.1 中，我们引入一个 ∞-算子 $\mathrm{CycBMod}^{\otimes}_n$，其设计旨在使其代数恰好编码由环和双模标记的循环图，如第1节所述。在 §6.2 中，我们引入 ∞-范畴 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$，并证明拓扑 Hochschild 同调可精化为 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 上的迹理论（见定理 6.26）。这使我们能够在带系数的 THH 上构造所需的多边形结构（见定理 6.31）。

6.1. 循环双模算子。

我们引入一种组合形式化方法，用于在对称幺半 ∞-范畴中编码由环和双模标记的循环图。首先简要回顾循环范畴；关于更全面的论述，请参阅 [26, 附录 B]。循环范畴由 Connes [7]引入。

定义 6.1. 副单纯形是一个非空线性有序集 I，配备有群 $\mathbb{Z}$ 的作用，记作 $+ : I \times \mathbb{Z} \to I$，并满足以下两个条件：

(1) 对于 I 中的任意一对元素 x 和 x'，集合 $\{y \in I \mid x \le y \le x'\}$ 是有限的。
(2) 如果 x 是 I 的一个元素，那么 $x < x + 1$。

旁循环态射是集合 $f : I \to J$ 的一个态射，它是非递减且 $\mathbb{Z}$-等变的。旁循环范畴 Λ_∞ 是以旁单形为对象、以旁循环态射为态射的范畴。

或者，我们可以如下描述旁循环范畴：

例 6.2。令 $\mathbf{Lin}_{\mathbb{Z}}$ 表示具有 $\mathbb{Z}$作用的非空线性有序集所构成的范畴。旁循环范畴 Λ_∞ 同构于 $\mathbf{Lin}_{\mathbb{Z}}$ 的全子范畴，该子范畴由形如 $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ 的对象（其中 $n \geq 1$）张成。我们将 $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ 视为 $\mathbf{Lin}_{\mathbb{Z}}$ 中的一个对象，其带有通常的序关系以及由加法给出的 $\mathbb{Z}$作用。令 $[n]_\Lambda$ 表示集合 $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$，并将其视为 Λ_∞中的一个对象。

例 6.3。若 Q 是一个非空线性有序集，则乘积 $Q \times \mathbb{Z}$ 可视为 Λ_∞ 中的一个对象，带有反字典序以及由 $(q,m)+n = (q,m+n)$ 给出的 $\mathbb{Z}$作用。构造 $Q \mapsto Q \times \mathbb{Z}$ 定义了一个忠实函子 $\Delta \to \Lambda_\infty$；由于对任意 $n \geq 0$都有一个旁单形的同构 $[n] \times \mathbb{Z} \simeq [n+1]_\Lambda$，该函子也本质满。

循环范畴定义如下：

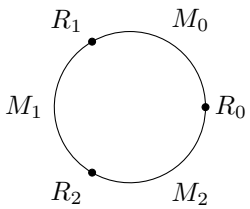
定义 6.4。循环范畴 Λ 是一个范畴，其对象与 Λ_∞相同，并且

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(I,J) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_\infty}(I,J)/\mathbb{Z},$$

where $\mathbb{Z}$ 通过公式 $(f+n)(x) = f(x) + n$作用于 Λ_∞ 中态射集合 $\mathbf{Hom}_{\Lambda_\infty}(I,J)$。

例 6.5。将 $[n]_\Lambda$ 视为 Λ_∞中的一个对象时，我们将其描绘为一个无限有向图，其顶点以 $[n]_\Lambda$的元素标记。对每个 $a \in \mathbb{Z}$，都有一条从 a/n 指向相邻元素 $a+1/n$ 的有向边。将 $[n]_\Lambda$ 视为 Λ中的一个对象时，我们将其描绘为一个循环图，其顶点以元素 a/n 标记，其中有n 个顶点，对每个 $0 \leq a \leq n-1$皆如此。对每个 $a \in \mathbb{Z}/n$，都有一条从 a/n指向相邻元素 $a+1/n$ 的有向边。换言之，对象 $[n]_\Lambda \in \Lambda$ 是将对象 $[n]_\Lambda \in \Lambda_\infty$ 绕自身卷绕而成，并将每个元素 a/n （其中 $a \in n\mathbb{Z}$）识别在一起。

现在来说明本节的目标。粗略地说，对于循环范畴中的每个对象，我们都希望用环和双模来标记与之关联的循环图。更准确地说，对于 Λ 中的每个对象 I，我们构造一个带色运算子 $\mathbf{CycBMod}_I$，其设计方式使得该运算子的代数恰好编码了由代数对象及其间的双模对象标记的循环图。例如，若 $I = [3]_\Lambda$，那么我们在对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中将运算子 $\mathbf{CycBMod}_{[3]_\Lambda}$ 的一个代数对象描绘为



其中 $R_i \in \mathbf{Alg}(\mathcal{C})$，且 M_i 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 R_i-R_{i+1}-双模对象。$\mathbf{CycBMod}_I$ 的颜色集合将由所有顶点以及由 I 确定的循环图上顶点之间所有可能的路径组成。下面我们将对此作出精确定义。

构造 6.6. 令 I 表示 Λ_∞ 的一个对象。 I 中路径的集合定义为

$$\mathrm{Path}(I) = \{(x,y) \in I \times I \mid x \le y \le x+1\}/\mathbb{Z},$$

其中， $\mathbb{Z}$作用由 $(x,y)+n=(x+n,y+n)$ 给出。赋值 $I \mapsto \mathrm{Path}(I)$ 确定了一个函子 $\Lambda_\infty \to$ 集合，因为 Λ_∞ 中的每个态射 $f: I \to J$ 都诱导出一个函数 $\mathrm{Path}(I) \to \mathrm{Path}(J)$，其定义为 $(x,y) \mapsto (f(x)\ f(y))$。函子 $\mathrm{Path} : \Lambda_\infty \to$ 集合经由 Λ 分解，因为 $\Lambda = \Lambda_\infty/\mathrm{B}\mathbb{Z}$。

记号 6.7。令 $I = [n]_\Lambda$ 表示 Λ 中的一个对象。我们将使用以下记号：

(1) 对每个 $0 \le a \le n-1$，令 v_a 表示路径 $(a/n, a/n) \in \mathrm{Path}(I)$。

(2) 对于 $0 \le a,b < n$，若 $a < b$，令 $e_{[a,b]}$ 表示路径 $(a/n, b/n)$；否则表示路径 $(a/n, b/n+1)$.

$v_a \in \mathrm{Path}(I)$中的元素对应于由 I给出的循环图的顶点。元素$e_{[a,b]} \in \mathrm{Path}(I)$对应于从 v_a 到 v_b 的路径，其中指标按模 n计数。

例 6.8。在以下示例中，路径的集合由下式给出

$$\mathrm{Path}([1]_\Lambda) = \{v_0, e_{[0,0]}\}.$$
$$\mathrm{Path}([2]_\Lambda) = \{v_0, v_1, e_{[0,1]}, e_{[1,0]}, e_{[0,0]}, e_{[1,1]}\}.$$
$$\mathrm{Path}([3]_\Lambda) = \{v_0, v_1, v_2, e_{[0,1]}, e_{[1,2]}, e_{[2,0]}, e_{[0,2]}, e_{[1,0]}, e_{[2,1]}, e_{[0,0]}, e_{[1,1]}, e_{[2,2]}\}.$$

为便于定义拟算子 $\mathrm{CycBMod}_I$，我们引入相对于指定路径的 $\mathrm{Path}(I)$ 中可容许序列这一辅助概念。令 I 表示 Λ的一个对象。

定义 6.9。设 $(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ 是 $\mathrm{Path}(I)$ 中的一个序列，且 γ是 $\mathrm{Path}(I)$ 的一个元素。若存在 I中的元组 $\{x_0 \le \dots \le x_n \le x_0+1\}$，使得对每个 $1 \le i \le n$都有 $\gamma = [(x_0, x_n)]$ 且 $\gamma_i = [(x_{i-1}, x_i)]$，则序列 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ 是 γ-可容许的。

例如，$(v_0, e_{[0,1]}, v_1, e_{[1,2]}, v_2)$ 和 $(v_0, e_{[0,2]}, v_2)$ 都是 $\mathrm{Path}([3]_\Lambda)$ 中的 $e_{[0,2]}$-可容许序列。基于此，我们定义运算子 $\mathrm{CycBMod}_I$ 如下：

定义 6.10. 令 I 表示 Λ 的一个对象。我们定义运算子 $\mathrm{CycBMod}_I$ 如下：

(1) $\mathrm{CycBMod}_I$ 的对象集合由 $\mathrm{Path}(I)$ 给出。

(2) 对于 $\mathrm{CycBMod}_I$ 中的每个有限路径序列 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$，运算集合

$$\mathrm{Mul}_{\mathbf{CycBMod}_I}((\gamma_1, \dots, \gamma_n); \gamma)$$

定义如下：若 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ 是 γ-可容许的，则

$$\mathrm{Mul}_{\mathbf{CycBMod}_I}((\gamma_1, \dots, \gamma_n); \gamma) = \{\sigma \in \Sigma_n \mid (\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(n)}) \text{ is } \gamma\text{-admissible}\},$$

否则，运算集合为空。

(3) $\mathrm{CycBMod}_I$ 上的复合法则由线性序的复合确定。我们将 $\mathrm{CycBMod}_I$ 称为 I的循环双模算子。令 $\mathrm{CycBMod}_I^\otimes$ 表示 $\mathrm{CycBMod}_I$的底层 ∞-算子，并将其称为 I的循环双模 ∞-算子。

注 6.11。假设 $I = [1]_\Lambda$。算子 $\mathrm{CycBMod}_1$ 是 BM 的一个带色子算子，其中 BM 表示在 [21, 定义 4.3.11] 中定义的带色双模算子。

使用 ∞-算子 $\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes}$ 的对称幺半包络会很方便。对于 Λ 中的每个对象 I，我们得到 $(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 的如下显式描述。

注释 6.12。对称幺半包络 $(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 描述如下：

(1) $(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 的对象是由 $\mathrm{Path}(I)$ 着色的有限集。(2) 从 X 到 Y 的态射是 $(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 中有限集的映射 $f : X \to Y$，并且对 $f^{-1}(y)$ 的每个元素都赋予一个线性序，其中 y 属于 Y；该映射满足：一个 γ 着色元素的原像由 γ-可容许序列着色。(3) 复合由 Fin 中的复合给出，并在原像上采用字典序。

$(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 上的对称幺半结构由有限集的不交并决定。对于每个 $e \in \mathrm{Path}(I)$，令 $*_e$ 表示一个元素按 e 着色的集合。

注意，$(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 是一个普通对称幺半范畴。事实上，读者不妨将注释 6.12 视为 $(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 的定义。

注释 6.13. 设 $\mathcal{C}$ 表示一个对称幺半 ∞-范畴，并假设

$$F : (\mathrm{CycBMod}_n^{\otimes})_{\mathrm{act}} \to \mathcal{C}$$

是一个 ∞-范畴之间的对称幺半函子。那么，对于每个 $0 \le a \le n-1$，$R_a = F(*_{v_a})$ 都具有 $\mathcal{C}$ 中代数对象的结构，其乘法由 $*_{v_a} \amalg *_{v_a} \to *_{v_a}$ 诱导。对于每个$0 \le a \le n-1$，$M_a = F(*_{e_{[a,a+1]}})$ 都具有 $\mathcal{C}$ 中 R_a-R_{a+1}-双模对象的结构，其结构映射由 $*_{v_a} \amalg *_{e_{[a,a+1]}} \amalg *_{v_{a+1}} \to *_{e_{[a,a+1]}}$ 诱导。

总之，对于每个整数 $n \ge 1$，我们都定义了一个 ∞-算子 $\mathrm{CycBMod}_n^{\otimes}$，使得 ∞-范畴的对称幺半函子 $(\mathrm{CycBMod}_n^{\otimes})_{\mathrm{act}} \to \mathcal{C}$ 的数据，恰好编码了如上非正式描述的、以代数及其间的双模为标记的循环图。此外，我们还需要编码函子在 $*_{e_{[a,a+2]}}$ 上的取值等价于由 $M_a \otimes_{R_{a+1}} M_{a+1}$ 给出的 R_a-R_{a+2}-双模。非正式地说，相对张量积 $M_a \otimes_{R_{a+1}} M_{a+1}$ 是作为由如下赋值给出的单纯对象 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 的几何实现得到的

$$Q \mapsto M_a \otimes (R_{a+1})^{\otimes Q} M_{a+1}.$$

我们将上述单纯对象的描述形式化如下。对于每个非空有限线性序集 Q，Q 中切割的集合定义为

$$\mathrm{Cut}(Q) = \{Q = Q_0 \amalg Q_1 \mid Q_0 < Q_1\}.$$

如果 $Q \to Q'$ 是非空有限线性序集之间的一个态射，则存在一个由将切割映至其原像所确定的诱导映射 $\mathrm{Cut}(Q') \to \mathrm{Cut}(Q)$。构造 $Q \mapsto \mathrm{Cut}(Q)$ 确定了一个函子 $\mathrm{Cut} : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fin}$。

构造 6.14. 设 I 表示 Λ 的一个对象，并设 $e_{[a,b]} \in \mathrm{Path}(I)$ 为一条长度为 2 的路径。上文所述的构造 $Q \mapsto \mathrm{Cut}(Q)$ 可细化为一个函子

$$c_{[a,b]} : \mathrm{Cut} : \Delta^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}},$$

其中，非平凡切割由 v_{a+1} 着色，而 $(Q, \varnothing)$ 由 $e_{[a,a+1]}$ 着色，且 $(\varnothing, Q)$ 由 $e_{[a+1,b]}$ 着色。如果 $f : Q \to Q'$ 是非空线性有序集之间的一个态射，且 (Q_0, Q_1)

是 Q 的切割，则 $\mathrm{Cut}(f)^{-1}(Q_0, Q_1)$ 通过规定 $(R_0, R_1) \leq (R_0', R_1')$ 当且仅当 $R_0 \subseteq R_0'$ 且 $R_1' \subseteq R_1$ 而成为全序集。

最后，我们终于来到了本节的主要定义。

定义 6.15. 设 $\mathcal{C}$ 表示一个具有筛余极限的对称幺半 ∞-范畴。对于 Λ 中的每个对象 I，令 $\mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$ 表示以下对象构成的全子范畴

$$\mathrm{Fun}^{\otimes}((\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}, \mathcal{C})$$

由满足典范映射条件的对称幺半函子 F 张成：

$$\mathrm{colim}(\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{c_{[a,b]}} (\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}} \xrightarrow{F} \mathcal{C}) \to F(*_{e_{[a,b]}})$$

对每条长度为 2 的路径 $e_{[a,b]} \in \mathrm{Path}(I)$，该映射都是一个等价。

展开定义可知，对称幺半函子 $F : (\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}} \to \mathcal{C}$ 恰好在典范映射满足以下条件时，才细化为 ∞-范畴 $\mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$ 的一个对象：

$$M_a \otimes_{R_{a+1}} M_{a+1} \to F(*_{e_{[a,b]}})$$

对每条长度为 2 的路径都是等价。这里我们指出，这一断言对任意长度的路径都成立（见引理 6.19）。本节最后讨论构造 $I \mapsto \mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$ 的函子性。

构造 6.16. 每个态射 $f : I \to J$ in Λ 都诱导一个对称幺半函子

$$f_* : (\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}} \to (\mathrm{CycBMod}_J^{\otimes})_{\mathrm{act}}$$

它由以下方式确定：通过后复合 $\mathrm{Path}(f) : \mathrm{Path}(I) \to \mathrm{Path}(J)$，将由 $\mathrm{Path}(I)$ 着色的有限集视为由 $\mathrm{Path}(J)$ 着色的有限集。因此，我们得到一个函子

$$\mathrm{Fun}^{\otimes}((\mathrm{CycBMod}_J^{\otimes})_{\mathrm{act}}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}^{\otimes}((\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}, \mathcal{C})$$

它限制为一个 ∞-范畴的函子 $\mathrm{CycBMod}_f(\mathcal{C}) : \mathrm{CycBMod}_J(\mathcal{C}) \to \mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$。令 $\mathrm{CycBMod} : \Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 表示由构造 $I \mapsto \mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$ 确定的函子。

例 6.17. 令 $\delta_1 : [1]_\Lambda \to [2]_\Lambda$ 表示由 $\delta_1 : [0] \to [1]$ in Δ 诱导的 Λ 中的态射。为将它们与 $\mathrm{Path}([1]_\Lambda)$ 区分开来，我们将 $\mathrm{Path}([2]_\Lambda)$ 的元素记作如下：

$$\mathrm{Path}([2]_\Lambda) = \{w_0, w_1, f_{[0,1]}, f_{[1,0]}, f_{[0,0]}, f_{[1,1]}\}.$$

映射 路径$([1]_\Lambda)$ → 路径$([2]_\Lambda)$ 由 $v_0 \mapsto w_0$ 和 $e_{[0,1]} \mapsto f_{[0,0]}$给出，而函子

$$\mathrm{CycBMod}_{\delta_1}(\mathcal{C}) : \mathrm{CycBMod}_2(\mathcal{C}) \to \mathrm{CycBMod}_1(\mathcal{C})$$

由构造 $(R_0, M_0;\ R_1, M_1) \mapsto (R_0, M_0 \otimes_{R_1} M_1)$ 给出。同样，函子

$$\mathrm{CycBMod}_{\delta_0}(\mathcal{C}) : \mathrm{CycBMod}_2(\mathcal{C}) \to \mathrm{CycBMod}_1(\mathcal{C})$$

由构造 $(R_0, M_0;\ R_1, M_1) \mapsto (R_1, M_1 \otimes_{R_0} M_0)$ 给出。

例 6.18。令 $\tau : [2]_\Lambda \to [2]_\Lambda$ 表示 Λ 中与 S^1 的自映射相对应的态射，该自映射由旋转 π 给出。在此情形下，映射 $\mathrm{Path}([2]_\Lambda) \to \mathrm{Path}([2]_\Lambda)$ 由下式给出

$$v_0 \mapsto w_1 \quad v_1 \mapsto w_0 \quad e_{[0,1]} \mapsto f_{[1,0]} \quad e_{[1,0]} \mapsto f_{[0,1]} \quad e_{[0,0]} \mapsto f_{[1,1]} \quad e_{[1,1]} \mapsto f_{[0,0]}$$

以及诱导的 ∞-范畴函子

$$\mathrm{CycBMod}_\tau(\mathcal{C}) : \mathrm{CycBMod}_2(\mathcal{C}) \to \mathrm{CycBMod}_2(\mathcal{C})$$

由构造 $(R_0, M_0;\ R_1, M_1) \mapsto (R_1, M_1;\ R_0, M_0)$ 给出。

如上所述，我们有如下结果：

引理 6.19。设 I 是 Λ 的一个对象，且设 $\mathcal{C}$ 为一个允许几何实现的对称幺半 ∞-范畴。如果 F 是 $\mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$ 的一个对象，则典范映射

$$M_a \otimes_{R_{a+1}} M_{a+1} \otimes_{R_{a+2}} \cdots \otimes_{R_{b-1}} M_{b-1} \to F(*_{e_{[a,b]}})$$

对于每条路径 $e_{[a,b]} \in \mathrm{Path}(I)$，都是一个等价。

证明。设对于 $n \geq 1$，有 $F \in \mathrm{CycBMod}_n(\mathcal{C})$。如果 $e_{[a,b]}$ 的长度为 ℓ，那么通过依次调用例 6.17，可在 Λ 中得到一个态射 $f : [n-\ell+1]_\Lambda \to [n]_\Lambda$，使得

$$F(*_{e_{[a,b]}}) \simeq \mathrm{CycBMod}_f(F)(*_{e_{[a,a+1]}}) \simeq M_a \otimes_{R_{a+1}} M_{a+1} \otimes_{R_{a+2}} \cdots \otimes_{R_{b-1}} M_{b-1},$$

其中，$\mathrm{CycBMod}_f(F) \in \mathrm{CycBMod}_{n-\ell+1}(\mathcal{C})$。 □

6.2. 迹理论。利用 §6.1 中建立的形式化方法，我们引入一个 ∞-范畴 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$，它将 ∞-范畴 $\mathrm{CycBMod}_I$ 的集合整齐地封装起来，其中 I 遍历 Λ。这是第三位作者在 [15] 中引入的 ∞-范畴 Λ^{st} 的一个变体；该范畴将标记有稳定 ∞-范畴和双函子的循环图分类。我们引入 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 上的迹理论这一概念，并证明霍赫希尔德同调可细化为 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 上的迹理论。利用这一点，我们在 $\mathrm{THH}(R, M)$ 上得到所需的多边形结构。最后，我们指出，将霍赫希尔德同调视为迹理论的思想归功于 Kaledin [17]。

定义 6.20. 令 $\mathcal{C}$ 表示一个容许筛余极限的对称幺半 ∞-范畴。

(1) 令 $p_{\mathcal{C}} : \Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}} \to \Lambda^{\mathrm{op}}$ 表示由以下函子分类的余笛卡尔纤维化

$$\mathrm{CycBMod} : \Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$$

该函子由构造 $I \mapsto \mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$ 确定，如构造 6.16 中所述。

(2) 取值于 $\mathcal{C}$ 的迹理论是一个 ∞-范畴的函子

$$T : \Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$$

它将 $p_{\mathcal{C}}$ 中的余笛卡尔态射映为 $\mathcal{C}$ 中的等价。

展开该构造，我们得到 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}}$ 的以下显式描述。

注释 6.21。全空间 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}}$ 的一个对象由一对 (I, F) 给出，其中 $I \in \Lambda$ and$F$ 是 ∞-范畴 $\mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C})$ 的一个对象。从 (I, F) 到 (J, G) 在 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}}$ 中的一个态射是一对 (f, α)，由 Λ 中的一个态射 $f : J \to I$ 以及一个自然变换组成

$$\alpha : \mathrm{CycBMod}_f(F) \to G$$

在 ∞-范畴 $\mathrm{CycBMod}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C})$ 中。$\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}}$ 的每个 $p_{\mathcal{C}}$-余笛卡尔态射都可以写成旋转、收缩和插入的复合，因为将 Λ^{op} 视为余笛卡尔纤维化 $\Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathbf{B}\mathbb{T}$ 的全空间时，这一点成立。

令 $T : \Lambda^{\mathrm{CycBMod}} \to \mathrm{Sp}$ 表示一个迹理论。引入 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 的主要目的是整理组合结构，以便清晰地表达迹理论 T 的循环不变性。例如，如果 M 是一个 R-S-双模，而 N 是一个 S-R-双模，那么映射

$$T(R, M \otimes_S N) \xleftarrow{\simeq} T([2]_\Lambda, (R, M; S, N)) \xrightarrow{\simeq} T([2]_\Lambda, (S, N; R, M)) \xrightarrow{\simeq} T(S, N \otimes_R M)$$

都是等价，因为第一个映射和最后一个映射由收缩诱导，而中间的映射由旋转诱导；这些映射全都是 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 的余笛卡尔边。正是这种循环不变性将为我们提供一个作用在 $\mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})$ 上的 C_n 作用，这是多边形结构的关键部分。目前，我们的目标是构造一个迹理论 $\mathrm{HH} : \Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$。对于每一对 (R, M)，其中包含一个代数 $R \in \mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 和一个 R-R-双模 M，霍赫希尔德同调 $\mathrm{HH}(R, M)$ 是由下述单纯对象 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 的几何实现给出的

$$Q \mapsto M \otimes R^{\otimes Q}.$$

更一般地，我们希望构造 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}}$ 中对象 (I, F) 的霍赫希尔德同调。为此，我们针对每个 $I \in \Lambda$，通过显式构造 $(\mathrm{CycBMod}^{\otimes}_I)_{\mathrm{act}}$ 中的一个单纯对象来实现。这是上文构造 6.14 中所考虑的函子 $\mathrm{Cut} : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fin}$ 的循环版本。首先回顾一下，旁循环范畴 Λ_∞ 与其对范畴等价。存在一个函子

$$(-)^\vee : \Lambda_\infty^{\mathrm{op}} \to \Lambda_\infty$$

它将 Λ_∞ 中的态射 $f : I \to J$ 映为由 $f^\vee(j) = \min\{i \in I \mid f(i) \geq j\}$ 定义的 $f^\vee : J \to I$。这个函子是一个 $\mathbf{B}\mathbb{Z}$-等变等价，因此它下降为一个等价 $(-)^\vee : \Lambda^{\mathrm{op}} \to \Lambda$。我们按如下方式构造 $\mathrm{Cut} : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fin}$ 函子的循环版本：

构造 6.22。赋值 $I \mapsto I/\mathbb{Z}$ 定义了一个函子 $\Lambda_\infty \to \mathrm{Fin}$，它可经由 Λ 分解。令 $\mathrm{Cut}_\Lambda : \Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fin}$ 表示由以下复合定义的函子

$$\Lambda^{\mathrm{op}} \xrightarrow{(-)^\vee} \Lambda \xrightarrow{(-)/\mathbb{Z}} \mathrm{Fin}.$$

若 Q 是非空有限线性序集，则 $\mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Cut}(Q)/\sim$，其中 $\sim$ 是将平凡切割 $(Q, \varnothing) \sim (\varnothing, Q)$ 识别起来的等价关系。对于 Λ 中的每个对象 I，存在一个函子

$$(-) \times I : \Delta \to \Lambda$$

由赋值 $Q \mapsto Q \times I$ 确定，其中乘积是带有反字典序和 $\mathbb{Z}$-作用的 Λ 中的一个对象，该作用由 $(q, m) + n = (q, m + n)$ 给出。总之，构造 $Q \mapsto \mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times I)$ 确定了一个函子 $\mathrm{Cut}_\Lambda(- \times I) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fin}$。

Le命题 6.23. 对于 Λ 中的每个对象 I，函子 $\mathrm{Cut}_\Lambda(- \times I) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fin}$ 可细化为一个函子 *or*

$$\mathrm{Cut}_\Lambda(- \times I) : \Delta^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{CycBMod}^{\otimes}_I)_{\mathrm{act}}.$$

证明。对于每个 $Q \in \Delta$，我们定义一个映射 $c_Q : Q \times I \to \{(x, y) \in I \times I \mid x \leq y \leq x + 1\}$，如下所示

$$c_Q(q, i) = \begin{cases} (i, \mathrm{cons}(i)) & \text{if } q = \min(Q) \\ (i, i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，由于上面的映射是 $\mathbb{Z}$-等变的，我们得到一个映射 $c_Q : \mathrm{Cut}_\Lambda(Q\times I) \to \mathrm{Path}(I)$。最后，注意， v_i-着色元素的原像由一个 v_i-可容许序列着色，而 $e_{[i,j]}$-着色元素的原像由一个 $e_{[i,j]}$-可容许序列着色。最后，如果 $f : Q \to Q'$ 是非空线性有序集之间的一个态射，那么我们必须为映射 $f \times \mathrm{id} : Q \times I/\mathbb{Z} \to Q' \times I/\mathbb{Z}$ 的原像赋予线性序。事实上，如果 $(q', [x])$ 是 $Q' \times I/\mathbb{Z}$ 中的一个元素，且其在 $Q' \times I$ 中的提升为 (q', x)，那么原像 $(f \times \mathrm{id})^{-1}(q', x)$ 作为 $Q \times I$ 的子集带有线性序，这就证明了所需结论。□

我们在 $I = [1]_\Lambda$ 和 $I = [2]_\Lambda$ 这两个基本情形下展开 $\mathrm{Cut}_\Lambda(- \times I)$ 的构造 .

Exam例 6.24。函子 $\mathrm{Cut}_\Lambda(- \times [1]_\Lambda)$ 是 $(\mathrm{CycBMod}_1^\otimes)_{\mathrm{act}}$ 中由下式给出的单纯对象

$$[n] \mapsto *_{e_{[0,0]}} \amalg \underbrace{*_{v_0} \amalg \cdots \amalg *_{v_0}}_{n \text{ times}}.$$

类似地，函子 $\mathrm{Cut}_\Lambda(- \times [2]_\Lambda)$ 是 $(\mathrm{CycBMod}_2^\otimes)_{\mathrm{act}}$ 中由下式给出的单纯对象

$$[n] \mapsto *_{e_{[0,1]}} \amalg *_{e_{[1,0]}} \amalg \underbrace{(*_{v_0} \amalg *_{v_1}) \amalg \cdots \amalg (*_{v_0} \amalg *_{v_1})}_{n \text{ times}}.$$

F对于 Λ 中的每个对象 I，我们将霍赫希尔德同调定义为 $\mathrm{CycBMod}_I$ 上的函子，如下所示:

定义 6.25。设 $\mathcal{C}$ 表示一个具有筛余极限的对称幺半 ∞-范畴。对于 Λ 中的每个对象 I，令 $\mathrm{HH}_I : \mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 表示由下式定义的函子

$$\mathrm{CycBMod}_I(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathrm{Fun}^\otimes((\mathrm{CycBMod}_I^\otimes)_{\mathrm{act}}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\mathrm{Cut}_\Lambda(-\times I)^*} \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \xrightarrow{|-|} \mathcal{C},$$

其中 $\mathrm{Cut}_\Lambda(- \times I)$ 表示引理 6.23 中的函子。

最后，我们证明本节的主要结果。

定理 6.26. 令 $\mathcal{C}$ 表示一个具有筛余极限的对称幺半 ∞-范畴。构造 $(I, F) \mapsto \mathrm{HH}_I(F)$ 确定了一个 ∞-范畴的函子

$$\mathrm{HH} : \Lambda_{\mathcal{C}}^{\mathrm{CycBMod}} \to \mathcal{C}$$

它满足迹性质。

证明. 我们先讨论构造 $(I, F) \mapsto \mathrm{HH}_I(F)$ 的函子性。设 (f, α) 是 $\Lambda_{\mathcal{C}}^{\mathrm{CycBMod}}$ 中从 (I, F) 到 (J, G) 的一个态射，这意味着 $f : J \to I$ 是 Λ 中的一个态射，并且 $\alpha : \mathrm{CycBMod}_f(F) \to G$ 是 $\mathrm{CycBMod}_J(\mathcal{C})$ 中的一个自然变换。对于每个 $Q \in \Delta$，映射 f 诱导出映射 $\mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times I) \to \mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times J)$，它细化为一个映射

$$\mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times I) \to f_* \mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times J)$$

在 $(\mathrm{CycBMod}_I^\otimes)_{\mathrm{act}}$ 中，其中 f_* 表示构造 6.16 中引入的函子。此外，如果 $Q \to Q'$ 是 Δ中的一个态射，那么我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cut}_\Lambda(Q' \times I) & \longrightarrow & f_* \mathrm{Cut}_\Lambda(Q' \times J) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times I) & \longrightarrow & f_* \mathrm{Cut}_\Lambda(Q \times J) \end{array}$$

在 $(\mathrm{CycBMod}_I^{\otimes})_{\mathrm{act}}$ 中。因此，态射 (f,α) 诱导出一个典范映射

$$\mathrm{HH}_I(F) \to \mathrm{HH}_J(\mathrm{CycBMod}_f(F)) \xrightarrow{\mathrm{HH}_J(\alpha)} \mathrm{HH}_J(G),$$

由自然性可知，它与复合相容，因此构造 $(I,F) \mapsto \mathrm{HH}_I(F)$ 可细化为 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}_{\mathcal{C}}$ 上的一个函子。我们验证 HH 满足迹性质。由于旋转在 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 中是等价，而插入是 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 中收缩的单侧逆，因此只需证明 $([2]_\Lambda, (R, M;\ S, N)) \to ([1]_\Lambda, (R, M \otimes_S N))$ 诱导一个等价

$$\mathrm{HH}_{[2]_\Lambda}(R, M; S, N) \to \mathrm{HH}_{[1]_\Lambda}(R, M \otimes_S N).$$

对象 $\mathrm{HH}(R, M \otimes_S N)$ 是双单纯对象 $\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 的余极限，该对象由以下方式给出

$$(Q, Q') \mapsto (M \otimes S^{\otimes Q} N) \otimes R^{\otimes Q'},$$

这里我们用到了 $M \otimes_S N$ 是由双边 bar 构造计算得到的这一事实，并且对角单纯对象 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 的余极限等价于 $\mathrm{HH}^{[2]_\Lambda}(R, M;\ S, N)$。这就证明了所需的结论，因为 Δ^{op} 的对角是共尾的，这是由于 Δ^{op} 是一个 sifted ∞-范畴。□

作为定理 6.26 的推论，我们得到以下结果：

推论 6.27. 设 (R, M) 表示由一个 $\mathbb{E}_1$-环 R 和一个 R-双模 M 组成的有序对。对每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，谱 $\mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n})$ 都带有一个典范的 C_n-作用。

证明. 根据迹性质，存在一个谱之间的等价

$$\mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n}) \simeq \mathrm{THH}(R, M; \dots; R, M),$$

而 $([n]_\Lambda, (R, M; \dots;\ R, M))$ 通过旋转带有一个 C_n-作用，将其视为 $\Lambda^{\mathrm{CycBMod}}$ 中的一个对象。□

因此，要完成将 $\mathrm{THH}(R, M)$ 构造为 PgcSp 这个 ∞-范畴中的对象，还需构造一个谱之间的 C_n- 等变映射

$$\varphi_{p,n} : \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R n}) \to \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R pn})^{\mathrm{t}C_p}$$

对每个素数 p 和 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，其中 Tate 构造带有剩余的 $C_{pn}/C_p \simeq C_n$-作用。主要工具是 p 重 Tate 对角在有限自由 C_p-集合范畴上的扩展函子性，详见 [26, §III.3]。

记号 6.28. 令 $\mathrm{Free}(C_p)$ 表示有限自由 C_p-集合及 C_p-等变映射所构成的范畴。赋值 $T \mapsto \overline{T} = T/C_p$ 定义了一个函子 $\mathrm{Free}(C_p) \to \mathrm{Fin}$。

我们首先回顾 Nikolaus–Scholze 关于 Tate 对角的函子性的一个结果。此结果由 [26, 命题 III.3.6] 与 [26, 引理 III.3.7 和推论 III.3.8]共同给出。

定理 6.29. 令 p 表示一个素数。

(1) 存在一个自然的 BC_p-等变对称幺半函子

$$I_p : \mathrm{Free}(C_p) \times_{\mathrm{Fin}} \mathrm{Sp}^{\otimes}_{\mathrm{act}} \to \mathrm{Sp}$$

由构造（T,$\{X_{\overline{t}}\}_{\overline{t} \in \overline{T}}$）$\mapsto \bigotimes_{\overline{t} \in \overline{T}} X_{\overline{t}}$ 确定。

(2) 存在一个自然的 BC_p-等变松对称幺半函子

$$\tilde{T}_p : \mathrm{Free}(C_p) \times_{\mathrm{Fin}} \mathrm{Sp}^{\otimes}_{\mathrm{act}} \to (\mathrm{Sp}^{\otimes}_{\mathrm{act}})^{\mathrm{B}C_p} \xrightarrow{\otimes} \mathrm{Sp}^{\mathrm{B}C_p} \xrightarrow{(-)^{\mathrm{t}C_p}} \mathrm{Sp},$$

其中，第一个函子由构造 $(T, \{X_{\overline{t}}\}_{\overline{t}\in\overline{T}}) \mapsto (T, \{X_{\overline{t}}\}_{t\in T})$[9] 确定。

(3) 存在本质唯一的 BC_p-等变松对称幺半自然变换

$$\tilde{\Delta}_p : I_p \to \tilde{T}_p,$$

其中，I_p 和 $\tilde{T}_p$ 均视为函子 $\mathbf{Free}(C_p) \times_{\mathrm{Fin}} \mathbf{Sp}^{\otimes}_{\mathrm{act}} \to \mathbf{Sp}$，如上所述。

使用定理 6.29 中的记号，p 重 Tate 对角由一个谱之间的映射给出

$$\bigotimes_{\overline{t}\in\overline{T}} X_{\overline{t}} \to \Big(\bigotimes_{t\in T} X_{\overline{t}}\Big)^{\mathrm{t}C_p}$$

对每个 $\overline{T}$-指标化的谱族 $\{X_{\overline{t}}\}_{\overline{t}\in\overline{T}}$ 都成立。其思路是将函子 $\mathbf{Cut}_\Lambda(- \times I)$ 精化为一个取值于 $\mathbf{Free}(C_p) \times_{\mathrm{Fin}} (\mathbf{CycBMod}^{\otimes}_I)_{\mathrm{act}}$ 的函子：

构造 6.30. 令 I 表示 Λ 的一个对象。令 pI 表示一个副单纯形，其底层线性有序集与 I 相同，但其 $\mathbb{Z}$-作用是沿着由乘以 p 给出的同态 $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，将 I 上的 $\mathbb{Z}$-作用限制得到的。例如，若 $I = [n]_\Lambda$，则$pI = [pn]_\Lambda$。注意，构造 $Q \mapsto \mathbf{Cut}_\Lambda(Q \times pI)$ 确定了一个函子

$$\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Free}(C_p),$$

其中，C_p-作用在 $\mathbf{Cut}_\Lambda(Q \times pI) \simeq Q \times \mathbf{Cut}_\Lambda(pI)$ 上由 Q 上的平凡 C_p-作用给出；而在 $\mathbf{Cut}_\Lambda(pI)$ 上，则通过将一个元素映到它的后继元素来定义。下图交换

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathrm{Cut}_\Lambda(-\times I)} & (\mathrm{CycBMod}^{\otimes}_I)_{\mathrm{act}} \\ {\scriptstyle \mathrm{Cut}_\Lambda(-\times pI)}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Free}(C_p) & \xrightarrow{-/C_p} & \mathrm{Fin} \end{array}$$

因此，我们得到一个 ∞-范畴之间的典范函子 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Free}(C_p) \times_{\mathrm{Fin}} (\mathbf{CycBMod}^{\otimes}_I)_{\mathrm{act}}$。

最后，我们证明本节的主要结果：

定理 6.31. 令 R 表示一个 $\mathbb{E}_1$-环。拓扑 Hochschild 同调函子

$$\mathrm{THH}(R, -) : \mathrm{BMod}_R \to \mathrm{Sp}$$

*dete*由构造 $M \mapsto \mathbf{THH}(R, M)$ 确定的对象典范地细化为一个 ∞-范畴的函子

$$\mathrm{THH}(R, -) : \mathrm{BMod}_R \to \mathrm{PgcSp}.$$

证明。回顾一下，根据推论 6.27，对于每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，$\mathbf{THH}(R, M^{\otimes_R n})$ 都具有一个 C_n-作用。为简单起见，我们说明一个谱之间的映射的构造

$$\mathrm{THH}(R, M) \to \mathrm{THH}(R, M^{\otimes_R p})^{\mathrm{t}C_p}.$$

将对 (R, M) 视为 $\mathbf{CycBMod}_{\mathbb{1}}(\mathbf{Sp})$ 中的一个对象，我们得到一个 ∞-范畴的函子

$$\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Free}(C_p) \times_{\mathrm{Fin}} (\mathrm{CycBMod}^{\otimes}_{\mathbb{1}})_{\mathrm{act}} \to \mathrm{Free}(C_p) \times_{\mathrm{Fin}} \mathrm{Sp}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$$

[9] 事实上，第一个函子是对称幺半的，而函子 $\otimes$ 和 $(-)^{\mathrm{t}C_p}$ 是松对称幺半的。

根据构造 6.30。定理 6.29 给出了一个从 THH(R,M) 到该单纯谱的几何实现的谱之间的映射，我们将其非正式地表示为

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; (M\otimes R\otimes R\otimes\cdots\otimes M\otimes R\otimes R)^{\mathrm{t}C_p} \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; (M\otimes R\otimes\cdots\otimes M\otimes R)^{\mathrm{t}C_p} \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; (M^{\otimes p})^{\mathrm{t}C_p}.$$

重新排列各项并利用 R 上的乘法，我们得到所需的谱映射

$$\mathrm{THH}(R,M)\to\mathrm{THH}(R,M^{\otimes_R p})^{\mathrm{t}C_p}$$

这就证明了所需的结论。 □

注记 6.32。THH(R,M) 上的多边形结构也可以通过 [18] 得到。

我们利用命题 5.2 和前述讨论，在传递上构造一个 Teichmüller 映射。构造 6.33。对于每个 $\mathbb{E}_1$-环 R 以及每个 R-R-双模 M，我们构造一个映射

$$\tau:\Sigma^\infty_+\underline{M}\to\underline{\mathrm{TR}}(R,M)$$

其中 $\underline{M}$ 是具有 $\underline{M}^{n\mathbb{Z}}\simeq\Omega^\infty(M^{\times n})$ 的拟有限真 $\mathbb{Z}$-空间。根据命题 5.2，这样一个拟有限真 $\mathbb{Z}$-谱的映射与一个多边形谱映射伴随

$$\mathrm{L}\Sigma^\infty_+\underline{M}\to\mathrm{THH}(R,M).$$

通过与上述类似的分析，可得到一个规范的 C_n-等变谱之间的映射

$$M^{\times n}\to\mathrm{THH}(R,M^{\otimes_R n}),$$

进而诱导出所需的 C_n-等变映射

$$(\mathrm{L}\Sigma^\infty_+\underline{M})_n=(\Sigma^\infty_+\underline{M})^{\Phi n\mathbb{Z}}\simeq\Sigma^\infty_+\Omega^\infty(M^{\times n})\to M^{\times n}\to\mathrm{THH}(R,M^{\otimes_R n}),$$

其中后一个映射是伴随 $\Sigma^\infty_+\dashv\Omega^\infty$ 的余单位。

References

[1] B. Antieau 和 T. Nikolaus。Cartier 模与旋轮谱。 *Journal of the American MathematicalSociety*, 34(1):1–78, 2021.[2] C. Barwick。谱 Mackey 函子与等变代数 K-理论（I）。 *Advances in Mathematics*, 304:646–727, 2017.[3] C. Barwick、S. Glasman 和 J. Shah。谱 Mackey 函子与等变代数 K-理论，II。 *Tunisian Journal of Mathematics*, 2(1):97–146, 2019.[4]J. Berman。THH 与富化范畴的迹。 *International Mathematics Research Notices*, 2022(4):3074–3105, 2022.[5] S. Betley 和 C. Schlichtkrull。圆分迹与 K-理论中的曲线。 *Topology*, 44(4):845–874, 2005.[6] A. Blumbergand M. Mandell。旋轮谱的同伦论。 *Geometry & Topology*, 19(6):3105– 3147, 2016.[7] A. Connes。循环上同调与函子 ext^n。 *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 296(23):953–958, 1983.[8] E. Dotto、A. Krause、T. Nikolaus 和 I. Patchkoria。带系数的 Witt 向量与范数的连通分支。准备中。[9] E. Dotto、A. Krause、T. Nikolaus 和 I. Patchkoria。带系数的 Witt 向量与非交换环上的特征多项式。 *arXiv:2002.01538*, 2020.[10] A. Dress 和 C. Siebeneicher。有限群的 Burnside 环与 Witt 向量构造。*Advances in Mathematics*, 70(1):87–132, 1988.[11] D. Gepner、M. Groth 和 T. Nikolaus。乘法无穷循环空间机器的泛性质。 *Algebraic& Geometric Topology*, 15(6):3107–3153, 2016.

[12] B. Guillou 和 J. May。将 G-谱建模为谱的预层。 *arXiv:1110.3571*, 2011.[13] L. Hesselholt。Quillen K-理论中的 p-典型曲线。 *Acta Mathematica*, 177(1):1–53, 1996.[14] L. Hesselholt 和 I. Madsen。完美域的 Witt 向量上有限代数的 K-理论。 *Topology*, 36(1):29–101, 1997.[15]L. Hesselholt 和 P. Scholze。专题研讨会：拓扑循环同调。 *Oberwolfach Reports*, 15(2):805–940, 2019.[16] D. Kaledin。Mackey 预函子。 *arXiv:1412.3248*, 2014.[17] D. Kaledin。迹理论与局部化。 *Stacks and categories in geometry, topology, and algebra*, 643:227– 262, 2015.[18] T. Lawson。展开相对 Tate 对角线。 *Journal of Topology*, 14(2):674–699, 2021.[19]A. Lindenstrauss 和 R. McCarthy。相对 K-理论的泰勒塔。 *Geometry & Topology*, 16(2):685–750, 2012.[20] J. Lurie。 *Higher topos theory*。普林斯顿大学出版社，2009.[21] J. Lurie。高阶代数。作者网站上可获取，2017.[22] M. Mandell 和 J. May。 *Equivariant orthogonal spectra and S-modules*。美国数学学会，2002.[23] A. Mathew、N. Naumann 和 J. Noel。等变稳定同伦论中的幂零性与下降。*Advances in Mathematics*, 305:994–1084, 2017.[24] J. McCandless。K-理论与传递中的曲线。 *arXiv:2102.08281*, 2021.[25] D. Nardin。参数化高阶范畴论与高阶代数：专题报告 iv——关于轨道 ∞-范畴的稳定性。 *arXiv:1608.07704*, 2016.[26] T. Nikolaus 和 P. Scholze。关于拓扑循环同调。 *Acta Mathematica*, 221(2):203–409, 2018.[27] S. Schwede。等变稳定同伦论讲义。作者网站上可获取。

Fachbereich Mathematik und Informatik, Universität Münster, Germany
Email address: krauseac@uni-muenster.de

Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany
Email address: mccandless@mpim-bonn.mpg.de

Fachbereich Mathematik und Informatik, Universität Münster, Germany
Email address: nikolaus@uni-muenster.de