arXiv:2302.07694v1 [math.CO] 15 Feb 2023

基本拟对称函数的拟晶体结构与晶体骨架

Florence Maas-Gariépy

2023年2月16日

摘要

我们利用杨表的晶体和下降组合来理解舒尔函数 s_λ 分解为 Gessel 基本拟对称函数 F_α的过程。我们证明，与 s_λ相关联的连通表晶体 $B(\lambda)$可划分为若干两两不交的连通诱导子图 $B(T_\alpha)$的并集，它们分别对应于 F_α。

我们证明，这些称为拟晶体的子图（作为图）同构于特定的杨表晶体。这使我们得以给出一个公式，用于计算形状为 λ 且最大条目为 n的杨表数量。我们还利用这一框架，给出一个关于科斯塔数 K_μ^λ的组合公式的构造性证明。我们研究拟晶体在晶体 $B(\lambda)$中的位置，并证明它们成对地处于对偶位置，且它们之间的晶体反自同构由 Schützenberger 疏散的一个推广给出。我们引入晶体 $B(\lambda)$的骨架这一概念：将每个子图 $B(T_\alpha)$替换为相应的形状为 λ的标准杨表。我们猜想，其图包含 Assaf 引入的关于 λ的对偶等价图，并且其中下降数固定的杨表所构成的子图具有特定结构。最后，我们描述其在复合中的应用，其中给出一种算法，可将任意基本拟对称函数的对称和表示为舒尔基中的元素；该算法的构造揭示了这两个基之间的关系。

引言

拟对称函数由 Gessel [Gessel, 1984], 在研究对称函数的背景下引入，是对称函数的推广。值得注意的是，两个舒尔函数的复合 $s_\mu[s_\lambda]$ 已被证明可以表示为基本拟对称函数[之和（Loehr 和 Warrington, 2012]）。将此类复合分解到舒尔基中的问题，自 Littlewood 最初提出以来，已有 80 多年仍未解决 [Littlewood, 1936]。因此，研究基本拟对称函数基与舒尔函数基，以及它们之间的关系，有望极大地加深我们对复合的理解。

我们在此提出通过晶体理论研究舒尔函数和基本拟对称函数。我们认为这项研究很有价值，因为复合和晶体理论都源自表示论。

晶体是群的一个表示的特征标的可视化表示，其形式是在组合对象上构成的带标记的有向图。不可约特征标对应于晶体的连通分支，而这些连通分支本身也都是晶体。关于晶体的优秀入门参考资料是《水晶入门》 [Shimozono, 2005]。如需深入理解，请参阅《晶体基》 [Bump 和 Schilling, 2017]。

我们将重点讨论类型为 A_{n-1} 的晶体，它们对应于 GL_n 的表示的特征标，而这些特征标本身由对称函数给出：对任意两个变量进行置换后仍保持不变的形式幂级数。上文提到的舒尔函数编码了 GL_n 的不可约特征标。将一个对称函数分解为舒尔函数基的问题，对应于将一个特征标（及其相关表示）分解为最小的组成部分：不可约特征标（或表示）。在晶体的语境中，我们关注的是理解晶体分解为连通分支 $B(\lambda)_n$ 的过程，而这些连通分支随后对应于舒尔函数$s_\lambda(x_1, \ldots\ldots, x_n)$。

此外，Gessel [Gessel, 2019]给出的下列公式告诉我们，这些连通分支还可以进一步分解为子分量，而这些子分量随后对应于基本拟对称函数。

$$s_\lambda = \sum_{T \in \mathrm{SYT}(\lambda)} F_{DesComp(T)}$$

理解晶体背景下的这一分解是本文的首要目标。第二个目标是理解拟对称函数在晶体结构中的附加结构及其相互之间的关系。我们证明如下结果。

定理 1： 形状为 λ 且最大条目为n 的杨表连通晶体 $B(\lambda)_n$ 被划分为互不相交的连通诱导子图 $B(T_\alpha)_n$ ，它们对应于拟对称函数 $F_\alpha(x_1, \ldots\ldots, x_n)$，其中，顶点子集是具有固定下降组合 α的杨表。这些子分量的源 T_α 具有填充以及类型为 α的最小解析。类型为 α 的子图数量等于形状为 λ 且下降组合为 α的标准杨表数量。

由以下定理可知，对于固定的组合 α，所有子分量 $B(T_\alpha)_n$ 作为带标记的有向图都是同构的（见推论 3.2）。此外，无论它们属于哪个晶体 $B(\lambda)_n$ ，这一结论都成立，因此与源点 T_α的形状无关。我们将这类子分量 $B(\alpha)_n$统称为拟晶体。接下来我们可以研究它们的图结构：

定理 2： 设 α 是由 m 的 s 个部分组成的组合。拟晶体 $B(\alpha)_n$ 与最大条目为 $n-s+1$的 $B(m)$同构（作为有向图）。特别地， $B(\alpha)_n$ 的有向图结构与满足 α 为下降组合的分拆 λ 无关。

以上两个定理以及命题 3.6 的一个应用是下面这个公式，它给出了形状为 λ 且最大条目为 n 的杨表的数量。

定理 3： 形状为 λ 且最大条目为 n 的杨表数量为

$$|SSYT(\lambda)_n| = \sum_{0\le d\le D} f_d^\lambda \cdot \begin{pmatrix} |\lambda|+n-d-1 \\ n-d-1 \end{pmatrix},$$

其中， f_d^λ 表示形状为 λ 且有 d 个下降的标准杨表的数量，而 D 是形状为 λ 的标准杨表中下降数的最大值。

多年来，是否存在用于计数杨表的“优美”公式一直是个悬而未决的问题。对于类似的问题——给出一个计算 Kostka 数的“优美”公式——这个问题也悬而未决多年；鉴于这些数值表现混乱，人们猜测不存在这样的“优美”公式 K_μ^λ [Stanley和Fomin， 1999] （参见 MathOverflow 上对此问题的讨论 [Morales， 2010], 浏览量达一千次，并有专家参与讨论）。

不过，下面有一个已知的组合公式，它利用下降来计数，但此前只有双射证明。拟晶体的框架使我们得以给出构造性证明。

命题 0.1（命题 3。12 [Sagan，2001，命题 5.3。6] ）： 统计形状为 λ 且组合权为 μ 的杨表数量的科斯塔数 K_μ^λ 由以下公式给出，其中当 μ 是 α 的细化时， $\alpha \preccurlyeq \mu$ 。

$$K_\mu^\lambda = |\{T \in SYT(\lambda) \mid DesComp(T) \preccurlyeq \mu\}|$$

在研究了拟晶体 B（α）的结构之后，我们回过头来研究晶体 B（λ）的结构。

定理 4： 子分量 B（T_α）和 B（$T_{\overleftarrow{\alpha}}$）必然成对出现在给定的晶体 B（λ）中。随后，它们彼此对偶（作为图），并且位于 B（λ）中的对偶位置，两者之间的晶体反自同构即为疏散映射。

将 $B(\lambda)_n$ 中的每个子分量 $B(T_\alpha)$替换为对应的标准杨表，并仅保留子分量之间指标最小的边，我们得到一个称为 $B(\lambda)_n$的骨架的对象，记作 $Skeleton(\lambda)_n$。

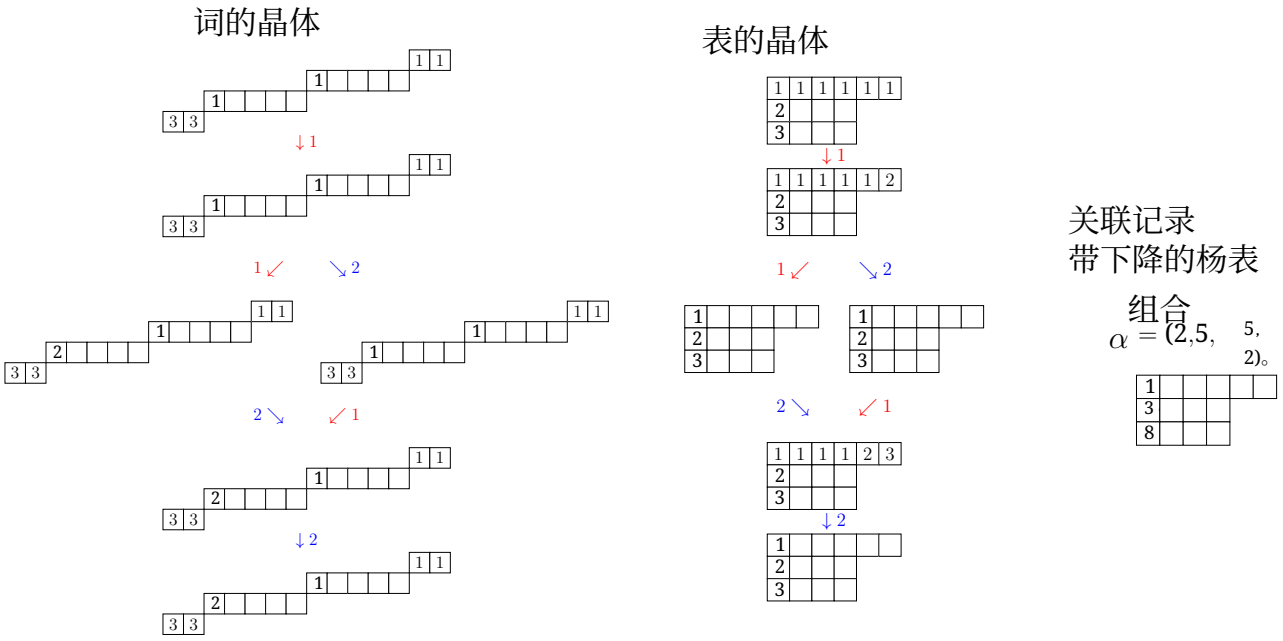
定理 5： 固定 $\lambda \vdash m$，令 S 为形状 λ的杨表的下降组合的最大长度。那么，对于所有 $n \geq S$，晶体 $B(\lambda)_n$ 的骨架 $Skeleton(\lambda)_n$ 都相同。对于 $1 \leq n \leq S$， $B(\lambda)_n$ 的骨架是 $Skeleton(\lambda)_S$的诱导子图，其中包含形状为 λ 且下降组合至多有 n 个部分的标准杨表。

于是便可确定所有 n 的骨架，并可将 $Skeleton(\lambda) = Skeleton(\lambda)_S$ 定义为 $B(\lambda)$ 的骨架，从而给出其底层结构。

我们猜想，骨架的（无向且无标记）图结构包含由 Assaf [Assaf, 2015] 为 λ 引入的对偶等价图的图结构（见猜想 5.3）。我们还猜想，骨架中由下降数固定的标准杨表所构成的诱导子图具有有趣的结构（见猜想 4.10）。

本文的第三个目标是将上述结果应用于复合运算（见第 6 节），尤其是计算复合运算 $s_\mu[s_\lambda]$ 中的单项式数量，并理解如何将拟晶体的（对称）和重新分组成与舒尔函数相关联的连通分支。为此，我们引入一种优雅的算法。该算法并不比目前使用的其他算法更高效，但其结构或许有助于更好地理解复合运算。

图 1 展示了 GL_n 在词和杨表上的晶体所对应的连通分支，其中词表现为斜形杨表，其行即为它们的极大弱递增因子。



Fig图 1：字与杨表上的晶体的同构连通分支 x

1 背景

1.1 晶体词

回顾一下，一个（长度为 k 、取自 n的）字是由字母表$[n]=\{1, 2, \ldots\ldots, n\}$上的 k 个字母 $w \in [n]^{\otimes k}$ 组成的序列。我们称字 w 的权为 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n)$，其中 β_i 统计字 w 中字母 i 出现的次数。

对于 $1 \leq i < n$，可以在词上定义晶体算子 e_i 和 f_i。一般来说， e_i 将一个字母 $i+1$ 变为 i，或者取空值；而 f_i 将一个字母 i 变为 $i+1$，或者取空值。如果 e_i、 f_i 都不为空，则 $e_i \circ f_i = f_i \circ e_i = Id$。 e_i 和 f_i 在词上的具体作用由以下括号规则描述:

1. 每个字母 i 对应一个右括号)，每个字母 $i+1$对应一个左括号 (。

2. 删除成对的括号，得到由未配对括号组成的序列 $)^{\phi_i}(^{\epsilon_i}$。

3. e_i 作用于对应最左侧未配对左括号 (的字母 $i+1$，而f_i 作用于对应最右侧未配对右括号) 的字母 i。

例 1.1: 设 $w=1331233312233$，且 $i=1$。

相应的括号序列为 $1\ 3\ 3\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ ))()(($，去掉配对的括号后可化简为 $1\ 3\ 3\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ ))(($。于是 $f_1(w)=1332233312233$ 和 $e_1(w)=1331223331233$。

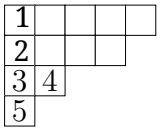
于是，字上的一个晶体 是一个以字为顶点的带标记有向图，其中边 $w \to w'$在 $f_i(w)=w'$ 时标记为 i。字上的晶体示例见图 1。

1.2 杨表上的晶体

1.2.1 杨表与舒尔函数

回顾一下，分拆 是弱递减的正整数向量 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_\ell)$。如果 λ 各部分之和为 m，那么我们称 λ 为 m的分拆，记作 $\lambda \vdash m$ 或$|\lambda|=m$，并用 $\ell(\lambda)=\ell$ 表示其部分数，即长度。我们将分拆与其杨图对应起来；杨图是顶端和左端对齐的方格数组，其中 i^{th}行有 λ_i 个方格。形状为 λ 的杨表是用整数填充 λ 的单元格。若杨表各行中的数从左向右弱递增，且各列中的数向下递增，则称其为半标准杨表。若一个杨表是半标准的，且 1 到 $|\lambda|$ 各出现恰好一次，则称其为标准杨表。除非另有说明，本文所说的杨表均指半标准杨表。

杨表的权（或填充）是组合 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots)$，其中 γ_i 统计其数值为 i 的项数。可以通过固定的读序为杨表关联一个字。我们采用行读序，记作 rw：从最后一行开始，逐行从左向右读取，直到第一行。

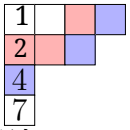
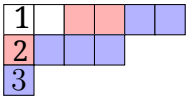
例 1.2： $t =$  是一个形状为 (5，4，2，1)、权为 (2，3，3，2，2) 的杨表。

它的行读字为 $rw(t) = 534223511234$。

对于一个权为 t 的杨表 γ，还可以将单项式 $x^t = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \ldots$ 与之关联。这建立了杨表与舒尔函数之间的联系：与分拆 λ 关联的舒尔函数是 $s_\lambda = \sum_{t \in SSYT(\lambda)} x^t$，其中 $SSYT(\lambda)$ 是所有形状为 λ 的杨表的集合。

杨表中包含条目 i 的单元格构成一个水平带：每列至多包含一个条目 i，并且从左到右阅读杨表时，每个新加入的内容为 i 的单元格都必须位于此前单元格的东北方（NE）。我们称水平带中最东北的单元格为其头部，最西南的单元格为其尾部。若一个水平带（包含一定数量的条目，最多为 i 个）在添加“下一个”由条目 $i+1$ 构成的水平带后不再是水平带，则称其为极大水平带。

我们将杨表的极大水平带集合称为其最小解析，并称其具有类型 α，如果第 i^{th} 个极大水平带的长度由 α_i 给出。在具有固定的 α 类型最小解析的杨表中，存在唯一一个同时具有权 α 的杨表：对所有 i，用条目 i 填充第 i^{th} 个极大水平带。我们将这些杨表记为 T_α。

例 1.3： 令 $T =$  以及 $T' =$ ，其中极大水平带在这两个杨表中有所区别。

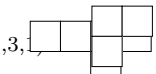
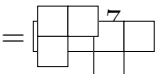
T的最小解析类型为 (2，3，3，1)，其水平带（由单个条目 i组成）并非全都是极大的。具有相同最小解析的杨表 $T_{(2,3,3,1)}$ 见例 1.5。另一方面，T'的最小解析类型为 (2，3，6)，其所有水平带都是极大的。因此，对于这种特定的最小解析类型 (2，3，6)，它等于 $T_{(2,3,6)}$。

表示杨表中极大水平带长度的整数向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_s)$，我们将其称为该杨表的下降组合。这对应于传统的（标准杨表中的）下降组合概念，如下所示。

使用最小解析可以让我们将杨表标准化：第一条极大水平带中的条目重新标记为 1 至 α_1，第二条中的条目重新标记为 α_1+1 至 $\alpha_1+\alpha_2$，依此类推。如下所示，这与通过杨表的读字进行标准化所得的结果相同。

对于标准杨表，我们可以考察其下降：满足 $i+1$ 出现在行索引更大的某一行中的条目 i。下降集与下降组合之间存在双射：若$\{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$ 是一个含有 m 个单元格的标准杨表的下降集，那么 $\alpha = (i_1, i_2 - i_1, i_3 - i_2, \ldots, m - i_k)$ 就是对应的下降组合。它是 m 的一个组合，给出了标准杨表中极大水平带的长度。因此，存在唯一一个权为 α、且与该标准杨表具有相同最小解析的半标准杨表。由此得到如下结论。

命题 1.4 : 具有类型和权 α 的最小解析的半标准杨表，与下降组合为 α 的标准杨表之间存在双射。

例 1.5 : 杨表 $T_{(2,3,3,1)}$  标准化后得到 $std(T_{(2,3,3,1)})$ = 
这个标准杨表的下降集为 {2, 5,8}，下降组合为 (2,3,3,1)。因此，下降组合给出了 $T_{(2,3,3,1)}$ 和 $std(T_{(2,3,3,1)})$ 中极大水平带的长度。注意，所有具有相同类型 (2, 3, 3, 1) 最小解析的杨表，例如例 1.3 中的杨表 T，标准化后都会得到 $std(T_{(2,3,3,1)})$。

我们将在第 1.3 节看到，下降组合用于定义基本拟对称函数，而这些函数是我们研究的核心。

一个字的下降 w 是满足条件 $w_i > w_{i+1}$的位置 i。一个字 w 的下降组合对应于其中 w的极大弱递增因子的长度。随后，可以通过一种保留下降的方式唯一地将字标准化：从左到右，将 w 中的条目 i 替换为从 $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{i-1} + 1$ 到 $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_i$的条目，其中 β_j 表示 w中 j 的字母数。杨表 T 可以通过标准化其读字 rw（T）来标准化，所得结果与上述方法相同。

1.2.2 杨表的晶体

杨表上的晶体算子定义为对其读字应用（字的）晶体算子，并更改杨表中相应的条目。以这种方式得到的杨表总是半标准的 [Bump 和 Schilling, 2017]。这些晶体算子在半标准杨表集合上定义了一种有向图结构：若 $T' = f_i(T)$，则存在一条从 T 指向 T'、标记为 i 的箭头。

由于只有条目会改变，而形状固定，连通分支将同一形状的所有杨表重新分组为 λ，记作 $B(\lambda)_n$，其中固定的最大条目为n。于是它对应于由舒尔函数$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$给出的 GL_n 的不可约特征标 χ^λ。更一般地，我们也可以考虑无限图 $B(\lambda)$，它对应于 s_λ。$B(\lambda)$（以及任意 $B(\lambda)_n$）的唯一源顶点是形状和填充为 λ的杨表，记作 1_λ。注意，它对应于 T_λ。

For example, $1_{(5,4,2)} = T_{(5,4,2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1\\\hline 2&2&2&2\\\cline{1-4} 3&3\\\cline{1-2}\end{array}$.

杨表的晶体尤其值得研究，因为任何类型为 A_{n-1} 的连通晶体都与一个杨表晶体同构：

定理 1.6（[Bump 和 Schilling, 2017]）： 对于任意一个关于 $GL_n(\mathbb{C})$（类型为 A_{n-1}）的连通 Stembridge 晶体 C，都存在唯一的源点。其权是一个分拆 λ，且 C 的 $B(\lambda)$。

词晶体和杨表晶体通过 Robinson–Schensted–Knuth（RSK）算法、jeu de taquin，以及 plactic 幺半群和 coplactic 幺半群紧密相连（见第 5 节）。

1.3 基本拟对称函数与下降组合

拟对称函数环 $QSym$ 由 Gessel 引入，是对称函数环 [Gessel, 1984] 的推广并包含后者。我们将考虑由基本拟对称函数给出的 $QSym$ 的基，这些函数以整数分拆为指标：

$$F_\alpha = \sum_{\alpha \preccurlyeq \beta} M_\beta, \text{ where } M_\beta = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1}^{\beta_1} x_{i_2}^{\beta_2} \ldots x_{i_k}^{\beta_k},$$

并且 $\alpha \preccurlyeq \beta$ 表示 β 是 α的细化：将 β 中的相邻部分相加即可得到 α。M_β 是单项式拟对称函数，同时也构成 $QSym$的一组基。

例如，$\beta_1 =$(2，1，3，2，4，1) 和 $\beta_2 =$(1，1，3，1，2，1，1，1，1，1，) 是 $\alpha =$(2，4，2，5) 的不同但不可比较的细化。因此，M_{β_1}和 M_{β_2}都出现在 F_α中。

舒尔函数（它们也是拟对称函数）随后可分解为基本拟对称函数基底上的线性组合。我们将使用下面的分解；Gessel 最近在一篇短文中证明了这一点 [Gessel, 2019]，其方法是利用标准杨表中的水平带（文中称为游程），以及作用于这些水平带上的一个对合。

$$s_\lambda = \sum_{T \in SYT(\lambda)} F_{DesComp(T)}. \qquad (*)$$

2 将晶体分解为对应于基本拟对称函数的子分量

现在我们来说明，上述公式（$*$）将 s_λ 表示为基本拟对称函数之和 F_α，如何导出表的晶体 B（λ）的分解。该分解的每个子分量都将与（$*$）中出现的某个 F_α 精确对应。

我们注意到，杨表上的晶体算子不一定保持下降组合。这是因为改变条目的数值可能会改变极大水平带以及杨表的权。然而，具有相同解析的杨表会被归入 $B(\lambda)$ 的连通子分量中:

命题 2.1： 形状为 λ、具有固定的 α 类型解析的杨表集合，是 $B(\lambda)$ 的一个连通诱导子图。其源点是填充为 T_α、且具有（相同的）α 类型最小解析的杨表，其顶点给出了 F_α 中出现的单项式。

分解示例见图 2。

证明。考虑 F_α 的定义。若 T_α 是一个填充为 α、并解析为 $x^{T_\alpha} = x^\alpha$ 类型水平带的杨表，那么 $M_\alpha \subseteq F_\alpha$ 会出现在 $\alpha \preccurlyeq \alpha$ 中，因为 $\alpha \preccurlyeq \beta$。现在，任意细化 γ 都会给出对相同极大水平带的（非）最小解析。通过（可能）添加零部分，从 β 得到的任意填充 M_β 都是对相同（非）极大水平带的有效填充，且相应的单项式会出现在 $\alpha \preccurlyeq \beta \preccurlyeq \gamma$ 中。特别地，λ。因此，形状为 α、具有固定的 $\alpha \preccurlyeq \gamma$ 类型最小解析（以及任意权 F_α）的杨表集合给出了 的所有单项式。

对于 $1 \le i \le n-1$，晶体算子 f_i 通过 $b_{i+1} - b_i$ 修改杨表的权，其中b_i 是除第 i 个位置外各处均为零的向量。如果一个权为 γ、最小解析类型为 α的杨表 T，则 $f_i(T)$ 具有相同的解析，当且仅当 $\alpha \preccurlyeq \gamma + (b_{i+1} - b_i)$。这由上述讨论可得。

具有相同最小解析、因而具有相同下降组合α的杨表集合，构成 $B(\lambda)$ 的顶点的一个子集。在这些杨表中，只有一个杨表的填充为α, T_α。下面我们将证明，该顶点子集中的每个杨表都可以通过从 T_α 应用某个晶体算子序列得到，从而证明该诱导子图是连通的，并且 T_α 是其源点。

设 T 是一个权为 γ、具有相同的类型 α 解析的杨表，则存在一组由 γ 中连续部分构成的集合，使得每个集合中的部分之和都是 α 的一个部分。令

$$\{\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k_1}\}, \{\gamma_{k_1+1}, \ldots, \gamma_{k_2}\}, \ldots, \{\gamma_{k_{s-1}+1}, \ldots, \gamma_{k_s}\}\}$$

be such a set of sets, with $k_1 < k_2 < \ldots < k_s = \ell(\gamma)$, so $\sum_{j=k_{r-1}+1}^{k_r} \gamma_j = \alpha_r$ for $1 \leq r \leq s = \ell(\alpha)$.

对 T_α 应用以下晶体算子序列，可得 T:

$$(f_1)^{\gamma_2} \circ (f_2 \circ f_1)^{\gamma_3} \circ (f_3 \circ f_2 \circ f_1)^{\gamma_4} \circ \ldots \circ (f_{k_1-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)^{\gamma_{k_1}} \circ \ldots \circ$$
$$(f_{k_{(j-1)}} \circ \ldots \circ f_{j+1} \circ f_j)^{\gamma_{k_{(j-1)}+1}} \circ \ldots \circ (f_{k_j-1} \circ \ldots \circ f_{j+1} \circ f_j)^{\gamma_{k_j}} \circ \ldots \circ$$
$$(f_{k_{(s-1)}} \circ \ldots \circ f_{s+1} \circ f_s)^{\gamma_{k_{(s-1)}+1}} \circ \ldots \circ (f_{k_s-1} \circ \ldots \circ f_{s+1} \circ f_s)^{\gamma_{k_s}} \quad (T_\alpha) \quad = \quad T.$$

该序列首先改变最后一个水平带中的条目，然后改变倒数第二个水平带中的条目，依此类推，直到第一个极大水平带中的条目被改变，所得杨表为 T。此外，很容易看出，每个中间杨表也具有相同的水平带最小解析。

最后，将具有相同类型α的最小解析的杨表所构成的带标记有向子图，其边的标记由保持最小解析的晶体算子的作用给出，从而得到 $B(\lambda)$ 的一个连通 诱导子图。这是因为保持最小解析的晶体算子仍然是晶体算子；如果子集中两个杨表之间存在一条边，那么作用于其上的晶体算子会保持最小解析。■

注 2.2: 这些诱导子图通常不是晶体。然而，正如我们将在第 3 节中看到的，在对顶点和有向边重新标记之后，它们作为有向图同构于晶体 $B(\mu)$。

我们将 $B(\lambda)$ 中具有类型 α 的最小解析的诱导子图记为 $B(T_\alpha)$，其中杨表 T_α 是源点。注意，与同一组合 α 相关联的子分量可能有多个，这意味着 F_α 在 s_λ 中出现不止一次。特别地，这仅仅是因为将 λ 分解为长度分别为 α_i 的极大水平带，有多种方式。我们将在下一节看到，与同一组合 α 相关联的所有子分量实际上都是同构的。

定理 1: 由形状为 λ 且最大条目为 n 的杨表构成的连通晶体 $B(\lambda)_n$，可分解为互不相交的连通诱导子图 $B(T_\alpha)$，它们对应于拟对称函数 $F_\alpha(x_1, \ldots\ldots, x_n)$；其中，顶点子集由具有固定下降组合 α 的杨表构成。这些子分量的源 T_α 具有类型为 α 的填充和最小解析。类型为 α 的子图数量 f_α^λ，等于形状为 λ 且下降组合为 α 的标准杨表数量。

例 2.3: 图 2 展示了将 $B(4, 3)_4$, 分解为与拟对称函数相关联的子分量。与下降组合 α 相关联的子分量，与与 $\overleftarrow{\alpha}$相关联的子分量采用相同的颜色。我们将在第 4 节展示，分别与下降组合 α 和 $\overleftarrow{\alpha}$ 相关联的成对子分量，在晶体中以对偶方式排列。

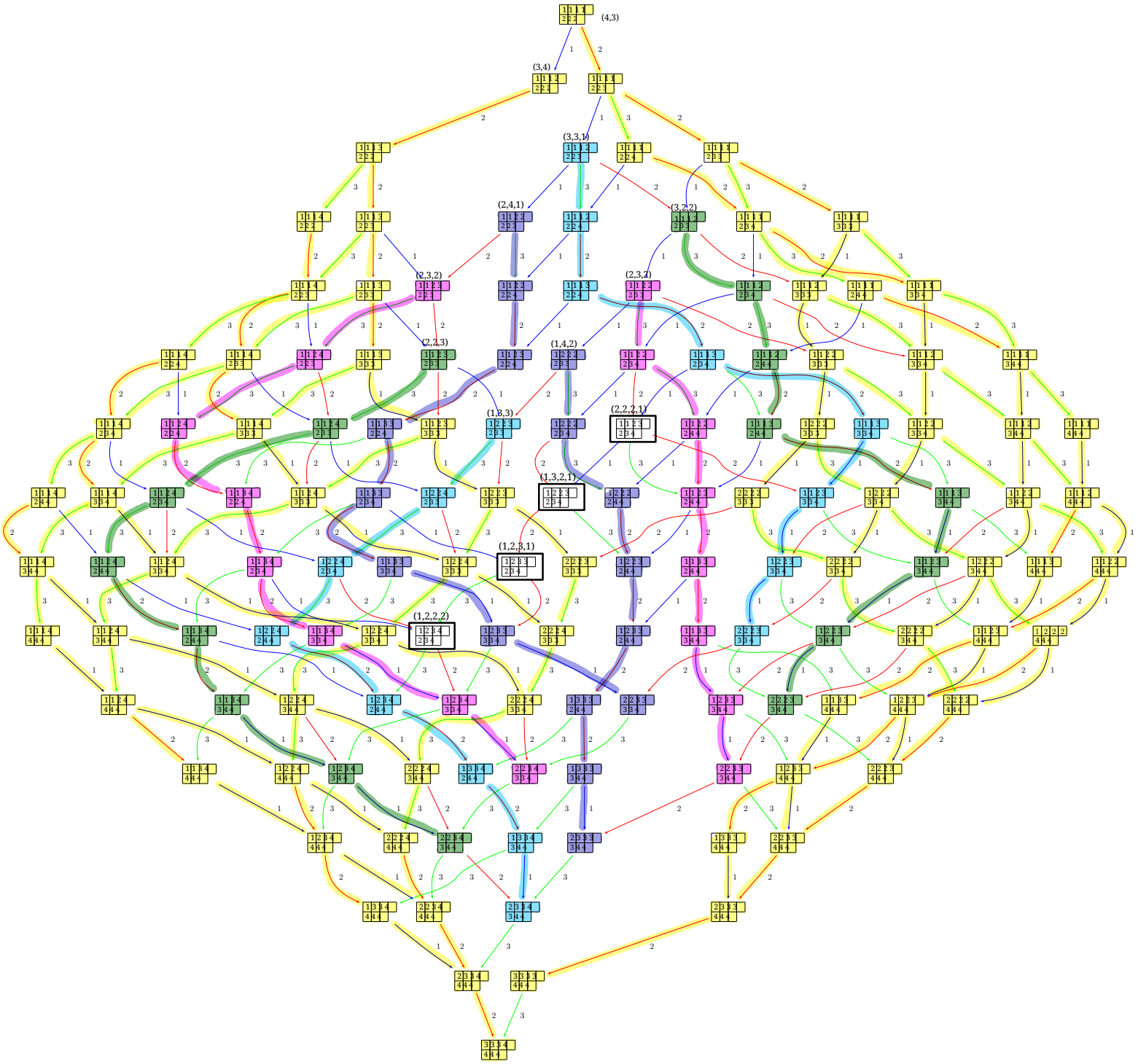


图 2：将 $B(4,3)_4$ 分解为与基本拟对称函数相关联的子分量 F_α：

$$s_{(4,3)} = F_{(4,3)} + F_{(3,4)} + F_{(3,3,1)} + F_{(2,4,1)} + F_{(3,2,2)} + 2 \cdot F_{(2,3,2)}$$
$$+F_{(2,3,3)} + F_{(2,2,3)} + F_{(1,4,2)} + F_{(1,3,3)} + F_{(2,2,2,1)} + F_{(1,3,2,1)} + F_{(1,2,3,1)} + F_{(1,2,2,2)}。$$

定理 *1* 的证明。 对于任意杨表，其最小解析都是唯一确定的，因此具有给定最小解析的杨表集合彼此不相交。如上所述，这些集合中的每一个都在 $B(\lambda)$ 中诱导出一个以 T_α 为源点的连通子图，并且与这些杨表相关联的单项式构成一个拟对称函数 F_α。最后，利用命题 1.4，将源 T_α 与具有相同最小解析、下降组合为 α 的标准杨表建立双射。根据 Gessel 的公式，这证实了在 $B(\lambda)$ 中，每个 F_α 对应的子分量数量正确。■

命题 2.4： 在 $B(\lambda)_n$ 中，对于 $\lambda = (\lambda_1、\ \lambda_2、\ \ldots \lambda_\ell) \vdash m$，作为杨表的下降组合出现的组合 $\alpha = (\alpha_1、\ \alpha_2、\ \ldots\ldots、\ \alpha_s)$ 具有以下性质。

1. $1 \leq \alpha_i \leq \lambda_1$，2. 对所有 j，
$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_j \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j$；3. $s \leq (\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_\ell) + 1$；4. $\ell \leq s \leq n$；5. $s \leq k$。

证明。 1. α_i描述了极大水平带的长度，并且每个水平带在 λ的每一列中至多有一个单元格。因此 $\alpha_i \leq \lambda_1$，因为 λ_1 是 λ所跨越的列数。此外，根据（极大）水平带的极大性，$\alpha_i \geq 1$。2. 为了成为极大水平带， i的水平带的尾部必须位于索引大于$(i+1)$的水平带头部所在行的某一行上。于是， j个最前面的水平带至多跨越 j 行及其单元格。3. 第一个水平带必然具有(α_1)的形状。这就给出了 $+1$。可能的水平带最大数量出现在这样的情况下：每个新的水平带在下一条未被完全填满的行上只有一个单元格，而其余单元格位于上方各行。4. 第一个不等式源于对第二个条件的讨论。第二个不等式源于以下事实：根据上述命题，组合 α 也给出了形状为 λ 的杨表 T_α 的权。因此 $s \leq n$，因为 n 是 $B(\lambda)_n$的杨表中所允许的最大条目，作为 GL_n的晶体，而 α_s 表示源点 T_α中的条目 s 的数量。5. 杨表的权中非零部分的数量不可能多于其中的单元格数量。■

注记 2.5： 对于固定的 $\lambda \vdash m$，并非所有满足上述性质的 m 的组合都是 λ 的下降组合。例如，对于 $\lambda = (3，3)$， $\alpha = (1，2，3)$ 具有上述所有性质，但不存在形状为 λ 且最小解析为 α 的半标准杨表。

猜想 2.6： 设 λ 是 α 各部分的弱递减重排。那么 F_α 出现在 s_λ 中。特别地， λ 的所有重排 α 都作为 λ 的下降组合出现，其中 F_α 属于 s_λ。

这一结论 已通过检验，对 m 的所有整数分拆，在 $m = 6$ 之前均成立 .

3 与基本拟对称函数相关的子分量的拟晶体结构 F_α

我们在定理 1 中看到，与基本拟对称函数 F_α 相关的子分量 $B(T_\alpha)$构成晶体的诱导子图。据我们所知，数学界尚未研究过晶体的这种诱导子图概念。

我们进一步研究这些子分量的结构。本节将证明，与一个组合 α 相关的所有子分量彼此同构，无论它们所在的晶体宿主是 $B(\lambda)_n$。我们用 $B(\alpha)_n$ 表示这类子分量，并称之为拟晶体。

拟晶体 $B(\alpha)_n$ 并非类型为 A_{n-1}的晶体，原因之一是它们通常不是自对偶的。不过，它们可能是其他群的柏原晶体。值得研究的是，哪些群（以及相关的表示）可能具有这样的晶体结构。

3.1 拟晶体 $B（\alpha）_n$的有向图结构

定理 2： 设 α 是一个由 s 个部分组成的 m 的组合。拟晶体 $B(\alpha)_n$ 与最大条目为 $n - s + 1$的 $B(m)$同构（作为有向图）。特别地， $B(\alpha)_n$ 的有向图结构与那些使 α 成为下降组合的分拆 λ 无关。

为了证明这个定理，我们需要介绍 Gessel [Gessel, 1984], 的拟对称函数原始定义，该定义是用子集 $I \subseteq \{1，2，\ldots\ldots，m-1\}$来表示的。为此，我们使用命题 1.4 之前定义的下降集 I 与下降组合 α 之间的双射：若 $\alpha = (\alpha_1，\ldots\ldots，\alpha_s)$，则相应的集合为 $I_\alpha = \{j_1，j_2，\ldots\ldots，j_{s-1}\}$，其中 $j_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_i$。那么

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = F_{I_\alpha}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{1 \le i_i \le i_2 \le \ldots \le i_m \le n \\ \text{with } i_j < i_{j+1} \text{ if } j \in I_\alpha}} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}.$$

文献中更普遍采用的定义，就是引言中给出的定义。

定理 2 的证明。任意晶体 $B(\lambda)_n$ 中的一个子分量 $B(T_\alpha)$，都对应于拟对称函数 $F_\alpha(x_1,\ldots,x_n)$，因为我们将范围限制在最大条目 n。晶体 $B(m)_{n-s+1}$ 中的杨表具有唯一的下降组合 $\alpha=(m)$。因此，整个晶体对应于拟对称函数 $F_{(m)}(x_1,\ldots,x_{n-s+1})$。下面先证明与上述两个拟对称函数相关联的单项式集合之间存在双射。为此，我们使用拟对称函数的原始定义。

注意，对于 $1\le s\le n$,

$$F_{(m)}(x_1,\ldots,x_{n-s+1})=F_{\varnothing}(x_1,\ldots,x_{n-s+1})=\sum_{1\le i_i\le i_2\le\ldots\le i_m\le n-s+1} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}.$$

为 $F_{\varnothing}(x_1,\ldots,x_{n-s+1})$ 的每个单项式编索引的整数弱递增序列，与为任意F_I（其中 $I=\{j_1,\ldots,j_{s-1}\}$）的单项式编索引的整数弱递增序列之间，存在如下双射。

$$\begin{array}{c} 1\le i_i\le i_2\le\ldots\le i_m\le n-s+1 \\ \downarrow \\ 1\le i_i\le\ldots\le i_{j_1}<i_{j_1+1}+1\le\ldots\le i_{j_2}+1<i_{j_2+1}+2\le\ldots\le i_{j_k}+(k-1)<i_{j_k+1}+k\le \\ \ldots\le i_{j_{s-1}}+(s-2)<i_{j_{s-1}+1}+(s-1)\le\ldots\le i_m+(s-1)\le(n-s+1)+(s-1)=n. \end{array}$$

通过这种方式可以得到 f_I 中的所有可能指标序列，并且会保留严格上升。将 i^{th} 与 $i+1^{\text{th}}$ 之间每一部分中的 i 去掉，即可找到初始序列。与之前类似，通过这种方式可以得到 $F_{\varnothing}$ 的所有序列。

现在固定 n，m、$1\le s\le n$，一个由 m 分成 s 部分的组合 α，以及任意一个形状 $\lambda\vdash m$，其中 α 作为下降组合出现。于是，上述指标序列给出了 λ中类型为 α 的极大水平带的填充：由 $1\le j\le j_1$ 索引的指标 i_j 填充第一条水平带，由 $j_1+1\le j\le j_2$ 索引的指标 i_j 填充第二条水平带，依此类推。

根据上述双射，用相应的杨表替换晶体 $B(m)_{n-s+1}$ 中的杨表。于是，第一个杨表的权和最小解析均为类型 α；也就是说，若按整数在序列中的位置为其编号，则得到

$$1\le 1_1\le\ldots\le 1_{j_1}<2_{j_1+1}\le\ldots\le 2_{j_2}<3_{j_2+1}\le\ldots\le k_{j_k}<(k+1)_{j_k+1}\le\ldots\le s_m\le n.$$

由于指标 i_j 对应杨表中的条目，我们可以考察晶体算子如何作用于这些条目。我们将讨论范围限制在保持解析不变的晶体算子，因此只有在保持上述弱序的前提下，才能将它们应用于指标 i_j。具体而言，能够作用于该序列而不破坏其弱序的晶体算子为 $f_{i_{j_k+\ell}+k}$，前提是 $f_{i_{j_k+\ell}}$ 可以应用于 $B(m)_{n-s+1}$中的对应杨表。于是，拟晶体 $B(\alpha)$的结构将与$B(m)_{n-s+1}$完全相同，只是有向边的标记有所不同。

最后，这与 λ无关，因为上述同构中重要的只有弱递增序列。■

推论 3.1： </style}**固定，** $m \in \mathbb{N}$，并考虑任意一个由 m 个部分组成的组合 α。那么，$F_\alpha(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 中首一单项式的数量，等于 $F_{(m)}(x_1, \ldots\ldots, x_{n-s+1})$ 中首一单项式的数量。

推论 3.2： </style}对于固定的 n 和固定的组合 α，所有子分量 $B(T_\alpha)_n$ 都同构为带标记的有向图，无论它们所属的晶体是 $B(\lambda)_n$。

证明。我们已经看到，$B(\alpha)$ 与 $B(m)_{n-s+1}$ 同构，其中 n 是 $B(\alpha)$ $m = |\alpha|$ 和 $s = \ell(\alpha)$ 的杨表中的固定最大条目。此外，上述证明中的同构不依赖于杨表的形状 λ，而标记的修改仅取决于 α。因此，无论不同的 $B(\alpha)$ 形状如何，都可以对其中给定位置的所有杨表应用晶体算子。■

换句话说，研究与拟对称函数 F_α 相关的图（或拟晶体）是合理的，因为对于任意固定的 n，其有向图结构都是确定的。我们也可以使用记号 $B(m,\ n,\ s)$，因为定义有向图结构时只有这些值重要：具有最大条目 $n-s+1$ 的晶体 $B(m)$ 的重新标记。特别是，对于 $s \leq n$ 个部分的 m 的任意组合，所有 $B(\alpha)_n$ 都具有相同的有向图结构：即 $B(m)_{n-s+1}$ 的有向图结构。

注 3.3： 我们可以考察晶体算子如何作用于这类弱递增序列。首先，只要不破坏递增性，晶体算子 f_i 就会作用于序列中最右侧的 i；为保持序列严格递增，条目 i 一次只能出现在一个水平带中，而最右侧的条目对应于杨表中的 NE 最大条目 i。这与括号规则一致。

3.2 拟晶体的高度、源点与汇点

推论 3.4 : 拟晶体 $B(\alpha)_n$ 的高度，即其最长子链的长度，为$m \cdot (n - s) + 1$，其中 n 是固定的最大条目，$s = \ell(\alpha)$ 且 $|\alpha| = m$。

证明。任意晶体 $B(\lambda)$中的子分量 $B(T_\alpha)$都包含由杨表组成的链，其变换为（$f_{n-s}^{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_2^{\alpha_1} \circ f_1^{\alpha_1}$）$\circ \ldots \circ$（$f_{n-2}^{\alpha_{s-1}} \circ \ldots \circ f_s^{\alpha_{s-1}} \circ f_{s-1}^{\alpha_{s-1}}$）$\circ$（$f_{n-1}^{\alpha_s} \circ \ldots \circ f_{s+1}^{\alpha_s} \circ f_s^{\alpha_s}$），每次最多修改一个水平带，从其头部到尾部：所有条目 s 先变为 $s+1$，再变为 $s+2$，依此类推，直到全部变为 n。

然后所有条目 $s-1$ 变为 s，再变为 $S+1$，依此类推，直到全部变为 $n-1$。这一过程持续进行，直到所有条目 **1** 都变为$n-s$，并且若不改变将水平带进行最小解析的方式，就无法再应用任何变换。

这一系列变换保留了对水平带的解析，因此我们始终处于同一个子分量 $B(T_\alpha)$ 中。此外，若不离开该子分量，就无法对链的最终杨表应用任何晶体算子。由此，我们得到了并描述了子分量 $B(T_\alpha)$ 的汇点：在保留与源点相同的最小解析的同时，条目 i 被替换为 $n-s+i$。该杨表的权为 $(0^{n-s},\ \alpha)$。

这一系列变换中有 $|\alpha|\cdot(n-s)$ 个晶体算子，它描述了一条长度为 $|\alpha|\cdot(n-s)+1$ 的链，该链存在于任意子分量 $B(T_\alpha)_n$ 中，其中还加入了晶体算子所作用的源点。由于这条链从源点出发并以汇点结束，因此它是极大的，因为 f_i 在 $B(\lambda)$ 的每一行中向下都只有唯一的像。于是，拟晶体 $B(\alpha)$ 中的任意极大链长度都相同：$|\alpha|\cdot(n-s)+1$。由于 $B(\alpha)$ 的有向图结构仅由 n，$m=|\alpha|$ 和 s决定，因此其高度$|\alpha|\cdot(n-s)+1=m\cdot(n-s)+1$也仅取决于 n，m，s。■

推论 3.5： 子分量 $B(T_\alpha)$ 的汇点，是将源点 T_α 中的条目 i 替换为 $n-s+i$ 得到的，其中 s 是 α 的长度。

3.3 形状为 λ 且最大条目为 n 的半标准杨表数量，以及科斯塔数

利用上述结果，我们给出一个公式，用于计算给定形状 λ 且最大可能条目为 n 的杨表数量。换言之，我们计算 $B(\lambda)_n$ 中杨表的数量，这等于 $s_\lambda(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$ 中首一单项式的数量。

我们已经看到 $s_\lambda=\sum_{T\in SYT(\lambda)}F_{DesComp(T)}$，并且每个拟对称函数 $F(\alpha)$ 都对应于晶体 $B(\lambda)_n$ 中的一个子分量 $B(T_\alpha)$，其顶点是所有形状为 λ 且最大条目为 n 的杨表。

众所周知，形状为 λ 的标准杨表数量可由钩长公式给出，通常也不难枚举。我们已经看到，对于具有相同部分数 $s\le n$ 的整数分拆 α，所有 $B(\alpha)_n$ 都与 $B(m)_{n-s+1}$ 同构，并且 $B(\lambda)_n$ 的这些子分量由具有 $d=s-1$ 个下降的标准杨表数量计数。因此，只需得到 $B(m)_{n-d}$ 中杨表数量的公式，以及形状为 λ 且有 d 个下降的标准杨表数量的公式，就能给出形状为 λ 的半标准杨表数量公式。

利用上述结果，我们可以做到这一点。

命题 3.6： $B(m)_k$ 中的杨表数量等于下方的多重集系数和二项式系数。

$$\left(\!\!\binom{m+1}{k-1}\!\!\right) = \binom{m+k-1}{k-1} = \frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+k-1)}{(k-1)!}.$$

证明。 对于所有形状为 (m) 的杨表，必须选定数组中不再含有 1 的位置，然后选定数组中不再含有 1 和 2 的位置，依此类推，直到数组末尾；在 $k-1^{\text{th}}$ 位置之后，数组中填满了 k。我们希望允许所选位置重复，因为我们希望允许某个数不出现，即被"夹除"。我们还希望允许只含 1 的杨表，它是 $B(m)_k$ 的源点，因此我们添加一个位于数组之外的位置。于是，如果这个外部位置被选中 j 次，对于 $1 \le j \le k-1$，数 $k-j+1$ 到 k 将不会出现在数组中。

因此，从 $m+1$ 个可能的位置中选取 $k-1$ 个位置作为整数之间的分隔点，允许重复，且不考虑所选位置的顺序。这恰好得到上面的多重集系数。■

例 3.7： 以下数组对应的断点位置多重集标注在数组下方，其中 $m = 10$ 且最大条目为 $k = 5$。

1	1	1	1	1	1	1	3	3	3

$\{8, 8, 11, 11\}$

1	2	2	2	2	2	4	4	4	4

$\{2, 7, 7, 11\}$

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

$\{1, 1, 1, 1\}$

推论 3.8： 对于任意由 m 个 s 部分组成的组合 α，拟晶体 $B(\alpha)_n$ 中最大条目为 n 的杨表数量为

$$\left(\!\!\binom{m+1}{n-s}\!\!\right) = \binom{m+n-s}{n-s} = \frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n-s)}{(n-s)!}.$$

推论 3.9： 对于任意由 s 个部分组成的组合 $\alpha \vDash m$，$F_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 中首一单项式的数量等于上面的二项式系数。

定理 3： 形状为 λ 且最大条目为 n 的杨表数量为

$$|SSYT(\lambda)_n| = \sum_{0 \le d \le D} f_d^\lambda \cdot \binom{|\lambda| + n - d - 1}{n - d - 1},$$

其中，f_d^λ 表示形状为 λ 且有 d 个下降的标准杨表数量，D 是形状为 λ的标准杨表中下降的最大数量。

例 3.10： 形状为 (4,3) 的标准杨表共有 14 个，均见图3。其中，两个有一个下降，八个有两个下降，四个有三个下降。

那么，对于任意 n，最大条目为 n 的形状为 (4，3) 的杨表数量等于$|SSYT((4,3))_n| = 2 \cdot \binom{7+n-1-1}{n-1-1} + 8 \cdot \binom{7+n-2-1}{n-2-1} + 4 \cdot \binom{7+n-3-1}{n-3-1}$。

可以验证，当 $n = 4$ 时，得到 140 个杨表，这就是图 2 中的杨表数量。$n = 5$，6，7（对于相同的形状 (4， 3)）对应的数值分别为 560，1764 和 4704 个杨表，这表明这些数字增长得有多快。因此，这个公式确实有助于枚举给定形状的杨表，尤其是当 n 很大时。

定理 *3* 的证明。回忆一下，具有 d 个下降的杨表对应一个由 $s = d+1$ 个部分组成的下降组合。设 D 为形状 λ的标准杨表中下降数的最大值， S 为对应下降组合的部分数最大值。

当 $n = D + 1 = S$ 时， $B(\lambda)_n$ 中存在所有连通分支。所有与下降组合 α in $s = d+1$ 个部分相关的连通分支都同构于晶体 $B(m)_k$，其顶点数是上面的多重集系数，其中 $k = n - s + 1 = n - d$ and$m = |\lambda| = |\alpha|$。 $B(\lambda)_n$ 中的拟晶体彼此不相交，并且由形状为 λ 的标准杨表计数。因此我们得到上面的公式。此外，该公式也涵盖了 $n < D+1 = S$ 的情形，因为求和中满足 $n < d+1 \leq D+1$ 的项将为零。■

推论 3.11： 对于分拆 $\lambda \vDash m$， $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ 中首一单项式的数量等于上面的和。

尽管非常有趣，但上述关于形状 λ 和最大条目 n 的杨表数量的公式，并未解决给出科斯塔数 K_μ^λ 的（闭式）公式这一更加有趣的问题；Stanley 强调了这一问题（[Stanley， 2012], 第 2 卷，第 7.10 节）。回顾一下，这些科斯塔数 K_μ^λ 统计了形状为 $\lambda \vdash m$ 且填充为 μ （ m 的一个固定组合）的杨表数量。

不过，下面给出了一条组合公式，但目前已知的只有双射证明。拟晶体的框架使我们能够给出一个构造性组合证明，下面将对此进行讨论。

命题 3.12（[Sagan，2001，命题 5.3.6]）： 令 $\lambda \vdash n$， $S = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\} \subseteq [n-1]$, 以及 $\mu = (n_1, n_2 - n_1, \ldots\ldots, n - n_k)$。则

$$|\{P : P \text{ a standard } \lambda\text{-tableau and } Des(P) \subseteq S\}| = K_\mu^\lambda.$$

命题 3.13： 给定的权 μ 在拟晶体 $B(\alpha)$ 中恰好出现一次，当且仅当 $\alpha \preccurlyeq \mu$。

证明。 我们已经看到，至多有 n 个部分的所有权重 $\alpha \preccurlyeq \mu$ 都出现在 $B(\alpha)_n$ 中，而 $B(\alpha)_n$ 中只出现这类权重。此外，对于给定形状 λ、类型为 α 的最小解析，$\alpha \preccurlyeq \mu$ 唯一确定了 $B(\lambda)_n$ 中相应子分量 $B(T_\alpha)_n$ 内形状为 λ 的一个杨表，其中 T_α 具有所需的最小解析。因此，在任意子分量 $B(T_\alpha)_n$ 中，至多有 n 个部分的所需权重 μ 恰好对应一个杨表。■

由上可知， $B(\lambda)$ 中每个满足 $\alpha \preccurlyeq \mu$ 的子分量 $B(T_\alpha)$ 都恰好包含一个填充为 μ 的杨表。这给出了命题 3.12 的如下另一种表述，并附有一个构造性证明。

推论 3.14： 计数形状为 λ 且组合权为 μ 的杨表的科斯塔数 K_μ^λ，等于 $B(\lambda)$ 中满足 $\alpha \preccurlyeq \mu$ 的子分量 $B(T_\alpha)$ 的数量；而这个数量又等于下降组合为 α 且满足 $\alpha \preccurlyeq \mu$ 的标准杨表的数量。因此

$$K_\mu^\lambda = |\{T \in SYT(\lambda) : DesComp(T) \preccurlyeq \mu\}|.$$

4 布局　晶体中子分量的布局 $B(T_\alpha)$ $B(\lambda$ $)$

根据前几节的内容，我们已将 $B(\lambda)$分解为诱导子图 $B(T_\alpha)$的不交并，这些子图对应于基本拟对称函数基底下 s_λ 的展开式中出现的 F_α。这些子分量将具有特定类型 α 的最小解析的杨表重新归组，并对应于具有相同最小解析的形状为 λ 的标准杨表。

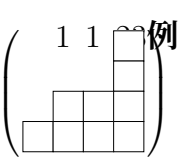
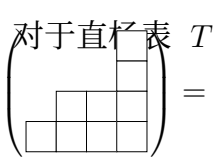
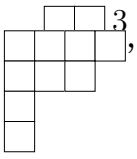
本节通过考察这些子分量彼此之间的相对位置，研究晶体 $B(\lambda)$如何分解为这些子分量。为了更好地理解它们的分布，我们需要在杨表上引入疏散对合 EVAC；我们将证明，它是 $B(\lambda)_n$ 上的晶体反自同构，能够反转下降组合并保持上述分解。

随后，疏散映射在与递减整数分拆 $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_s)$ 相关的子分量与其逆序组合 $\overleftarrow{\alpha} = (\alpha_s, \ldots\ldots, \alpha_1)$ 相关的子分量之间建立了对偶性。这些对偶子分量将在 $B(\lambda)$ 中处于对偶位置，并且作为图彼此对偶。我们还研究了 $B(\lambda)$ 的（固定）骨架结构：将每个子分量替换为相关的标准杨表，并将标准杨表上的这一底层图结构与 Assaf [Assaf, 2015] 引入的对偶等价图的图结构进行比较。

4.1 疏散作为晶体反自同构

疏散对合最初由 Schützenberger 引入，作为同一形状 λ [Schützenberger, 1963] 的杨表上的一个对合。Berenstein 和 Zelevinsky 证明，疏散的作用可以如下描述 [Berenstein 和 Zelevinsky, 1996]。

设 T 是任意形状的一个杨表。将其旋转 T 180°，把条目 i 改为 $n-i+1$，其中 n 是 T 中的最大条目，然后使用滑动变换整直化这个斜形杨表（有关整直化过程的回顾，请参见第 5 节）。我们将把这一结果定义为疏散：EVAC $= jdt \circ$ compl$\circ Rot_{180°}$，其中 $Rot_{180°}$、compl 和 jdt 是上述描述的三个中间操作。所得杨表 EVAC(T) 与 T 具有相同的形状，对其应用 EVAC 将恢复 T [Berenstein 和 Zelevinsky, 1996]。

例 4.1： 对于直杨表 T , $\text{compl} \circ Rot_{180°}(T) = jdt \circ \text{compl}$  $= jdt$ $=$  $=$ EVAC(T)。

可以验证，对 EVAC(T) 重复这一过程即可恢复 T。

Berenstein 和 Zelevinsky 证明了，EVAC 是晶体 $B(\lambda)_n$[Berenstein 和 Zelevinsky, 1996]上的反自同构。这意味着，如果杨表 T 是通过一系列晶体算子 $T = f_{i_k} \circ f_{i_{k-1}} \circ \ldots \circ f_{i_2} \circ f_{i_1}(1_\lambda)$从晶体的源点$1_\lambda$得到的，那么 EVAC($T$) $= e_{n-i_k} \circ e_{n-i_{k-1}} \circ \ldots \circ e_{n-i_2} \circ e_{n-i_1}(T_{min})$，其中 T_{min} 是晶体的汇点，因此它将是 EVAC(1_λ)。

Berenstein 和 Zelevinsky 的原始证明大量运用了晶体理论和表示论，因此我们在附录 A 中给出这一事实的另一种证明，或许更容易理解。我们也认为，我们的证明本身也值得关注，因为它运用了词上的晶体反自同构，该反自同构由 $Rot(w) = w_0 w w_0$ 定义，并且此前已在文献中得到研究。我们还证明了 EVAC 会反转下降组合。

4.2 Do子分量 $B(T_\alpha)$ 与 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ 在 $B(\lambda$ 中的对偶性)

本节涉及两种对偶性的概念。一种对偶性来自图（或偏序集）理论：带标记的有向图的对偶图，是通过反转箭头、用 $n-i+1$ 重新标记，并将每个顶点替换为其“对偶像”而得到的图。另一种对偶性来自对合 EVAC：对于一组杨表 A，EVAC(A) 与 A 互为对偶。

对于晶体 $B(\lambda)_n$ 的子分量，我们将看到，这两种对偶性的概念是一致的，因为疏散在这些子分量之间建立了对偶性。对于每个子分量 $B(T_\alpha)$，都存在一个子分量 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$，使得它们在 EVAC 映射下互为互反像，并且互为对偶图；其中每个顶点的对偶像恰好就是其在 EVAC 映射下的像。

我们也称它们在 $B(\lambda)_n$ 中以对偶方式排列，因为 EVAC 是 $B(\lambda)_n$ 上晶体的反自同构。由此可得关于 $B(\lambda)$ 中与基本拟对称函数 F_α 相关的子分量的以下结果。

定理 4： 给定晶体 $B(\lambda)$ 中必然同时出现子分量 $B(T_\alpha)$ 和 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$；它们互为对偶，并且在 $B(\lambda)$ 中处于对偶位置。它们之间的晶体反自同构是疏散映射 EVAC。

证明。 我们已经看到，子分量 $B(T_\alpha)$ 的源点是杨表 T_α ，其形状为 λ，填充及下降组合为 α。考虑 $B(T_\alpha)$ 中的一组杨表 A 。由于 EVAC 会反转下降组合，因此 EVAC(A) 将是一组下降组合为 $\overleftarrow{\alpha}$ 的杨表。此外，由于它也是晶体反自同构，若杨表 $T \in A$ 可由 T_α 经一系列保持下降组合不变的晶体算子 f_i 得到，则 EVAC(T) 可由 EVAC(T_α) 经互补的一系列晶体算子 e_{n-i} 得到，因此集合 EVAC(A) 连通，并由具有相同下降组合的杨表组成。这是因为 f_i 会将权修改为 $b_{i+1} - b_i$，而 e_i 会将权修改为 $-b_{i+1} + b_i$，所以 f_i 对权 γ 的作用与 e_{n-i} 对 $\overleftarrow{\gamma}$ 的作用互为对偶。

接着，子分量 $B(T_\alpha)$ 被映射到子分量 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$，它们作为图彼此对偶，而每个顶点的对偶像由其在 EVAC 下的像给出。

最后，根据前面的论证，我们还可以得知，这两个子分量在 $B(\lambda)$ 中以对偶方式排列：若将一列晶体算子 $f_{i_k} \circ \ldots \circ f_{i_1}$ 作用于 $B(\lambda)_n$ 的源点 1_λ，得到 $B(T_\alpha)$ 中的一个顶点，那么将“对偶”序列 $e_{n-i_k+1} \circ \ldots \circ e_{n-i_1+1}$ 作用于 $B(\lambda)_n$ 的汇点 EVAC(1_λ)，就会得到其在 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ 中的对偶像 EVAC(T_α)。
■

这表明，疏散映射本身保留了 $B(\lambda)$ 分解为子分量 $B(T_\alpha)$ 的结构。

推论 4.2： 子分量 $B(T_\alpha)$ 的源点 T_α 经 EVAC 映射后成为相应对偶子分量 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ 的汇点，反之亦然。

例 4.3： 图 2 展示了子分量 $B(T_\alpha)$ 与 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ 的位置的对偶性（及对称性）。请注意，与 (2，3，2) 相关的两个子分量互为对偶，并且在晶体的相同行开始和结束。

命题 4.4： 当 α 对称时，即 $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$，拟晶体 $B(\alpha)$ 作为带标记的有向图是自对偶的。

注记 4.5： 这种自对偶性在拟晶体 $B(\alpha)$ 的结构（作为图）上成立。然而，如例 4.3 所示，在 EVAC 映射下，子分量 $B(T_\alpha)$ 不一定映到其自身。

命题 *4.4* 的证明。 EVAC 是一个反自同构，它将一个子分量 $B(T_\alpha)$ 映到一个子分量 $B(T_{\overleftarrow{\alpha}}) = B(T'_\alpha)$。因此，这两个子分量同构且对偶；又由于 $B(\alpha)$ 中的所有子分量都同构，所以当 $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$ 时， $B(\alpha)$ 作为带标记的有向图是自对偶的。■

推论 4.6： 对于固定的组合 α，所有子分量 $B(T_\alpha)$ 的源点都位于 $B(\lambda)$ 的同一行 $j+1$，其中 j 是对 λ 应用变换 $+(b_{i+1} - b_i) = +(0, \ldots\ldots, 0, -1, 1, 0, \ldots\ldots, 0)$ 以得到 α 的次数，或者等价地，是对 1_λ 应用晶体算子 f_i 以得到 T_α 的次数。

证明。 我们已经看到，晶体算子 f_i 对杨表的权产生了 $+(b_i - b_{i-1})$ 的作用。因此， $B(\lambda)$ 的第 $j+1$ 行包含了通过应用 j 晶体算子 f_i于 1_λ 所得到的所有杨表。如果某个晶体算子序列 f_{i_1}， f_{i_2}、……、 f_{i_j} 修改 λ 得到 α，那么所有权为 α 的杨表都可以通过对这些晶体算子进行某种重新排序后应用而得到。于是，所有权为 α 的杨表都位于同一行 $j+1$。其中，具有权 α 且类型为最小解析的所有杨表都位于 $B(\lambda)$ 的该行 $j+1$ 上。由于这些杨表是 $B(\alpha)$ 的子分量的源点，因此我们得到了所需结果。■

注记 4.7： 在晶体 $B(\lambda)$ 中，所有下降组合 α 都作为杨表的权出现，因此它们都可以通过对 λ 应用修改 $b_{i+1} - b_i$，从 λ 到 $\overleftarrow{\lambda}$。此外，所有下降组合 α 彼此之间都不是细化关系，且不包含零部分（根据其定义，它们是最小解析中水平带长度的计数）。

4.3 晶体骨架

如果将 $B(\lambda)_n$ 的每个子分量替换为与之关联的形状为 λ 的标准杨表，并且在相连的子分量之间只保留一条有向边，同时保留所有至少出现一次的标记各一份，就得到一个以标准杨表为顶点的带标记有向图。注意，这可能会产生环。我们将看到，可以通过在每条有向边上只保留最小标记，进一步简化该图。我们将所得图称为 $B(\lambda)_n$ 的骨架。

骨架这一概念尤其有趣，因为它能紧凑直观地表示任意 n 的 $B(\lambda)_n$，也能表示 $B(\lambda)$，正如我们将看到的。

对图 2 进行这样的处理，就得到图3中形状为 (4，3) 的标准杨表上的带标记的有向图。根据推论 3.2，我们知道这些子分量的有向图结构，因此可以将它们展开，基本上重构出完整的图，只是子分量之间缺少一些边。请注意， $B(\lambda)$ 的自对偶性带来了对称性。

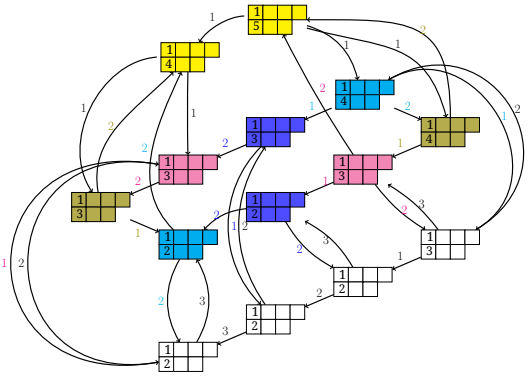


图3： $B(4，3)_4$, 的骨架，其中子分量被其对应的标准杨表所替代。带标有向边 i 表示变换 f_i 从一个子分量移向另一个子分量，而 i 是最小的（按定义）。为清晰起见，标签根据其起源子分量着色。顶点的垂直位置由相关连通分支在 $B(4，3)_4$, 中的源点所在行决定，同时也根据下降数对标准杨表进行分隔。

在标准杨表上得到的带标记有向图不具有晶体结构，尤其是因为对于同一个变换，一个标准杨表可能有两个不同的像。例如，在图3中，顶部的标准杨表（有时称为超标准杨表）在变换1下有三个不同的像。我们将在下面的命题中看到，只保留子分量之间有向边的最小标签是合理的。

命题4.8： 固定 n 和 $\lambda = (\lambda_1，\ \lambda_2，\ \ldots\ldots，\ \lambda_\ell)$ 。设 $std\ (T_\alpha)$ 和 $std\ (T_\beta)$ 是形状为 λ 的标准杨表，其下降组合分别为 $\alpha = (\alpha_1，\ \ldots\ldots，\ \alpha_k)$ 和$\beta = (\beta_1，\ \ldots\ldots，\ \beta_s)$ 。设 i 是最小的指标，使得晶体算子 f_i 能够在 $B\ (\lambda)\ _n$ 中的相关子分量 $B\ (T_\alpha)$ 与 $B\ (T_\beta)$ 之间转换，其中 $1 \leq i \leq n-1$。那么晶体算子 $f_{i+1}，\ \ldots\ldots，\ f_{i+(n-s)}$ 也可以做到。

证明。 晶体算子作用于 $B(\lambda)_n$ 中杨表的权 γ 。如果一个杨表 T 属于 $B(T_\alpha)$，那么它也有 $\alpha \preccurlyeq wt(T) = \gamma$。如果 $f_i(T)$ 属于 $B(T_\beta)$，这意味着 $\beta \preccurlyeq wt(f_i(T)) = \gamma + (b_{i+1} - b_i)$。对于 $0 \leq k \leq n-s$，$(0^k，\ \gamma)$ 也同样如此，其中晶体

算子在权 f_{i+k} 上具有相应的作用。 ■

这意味着我们只需保留子分量之间有向边的最小标签 i 。随后，我们将得到的骨架称为 $Skeleton(\lambda)_n$。

定理 5： 对于固定的 $\lambda \vdash m$，并令 S 为 λ 的下降组合的最大长度。那么，对于所有 $n \geq S$，晶体 $B(\lambda)_n$ 的骨架 $Skeleton(\lambda)_n$ 都相同。对于 $1 \leq n \leq S$，$B(\lambda)_n$ 的骨架由 $Skeleton(\lambda)_S$ 的诱导子图构成，该子图包含形状为 λ 且下降组合至多有 n 个部分的标准杨表。

证明。首先考虑两个任意的子分量 $B(T_\alpha)$、$B(T_\beta)$，其中 T_α, T_β，它们形状相同 λ，权和最小解析的类型分别为 α 和 β，且对应的下降组合不可比较 α, β。当 $n \geq N = \max(\ell(\alpha)\ \ell(\beta))$ 时，这两个子分量都会出现在所有 $B(\lambda)_n$ 中。

假设存在一个最小值 $k \in \mathbb{N}$，使得在 $B(\lambda)_{N+k}$ 中存在一条标记为 i 的边，从 $B(T_\alpha)$ 指向 $B(T_\beta)$。于是存在两个杨表 $T_{\gamma^{(1)}} \in B(T_\alpha)$ 和 $T_{\gamma^{(2)}} \in B(T_\beta)$，使得 $\alpha \preccurlyeq \gamma^{(1)}$、$\beta \preccurlyeq \gamma^{(2)}$ 和 $f_i(T_{\gamma^{(1)}}) = T_{\gamma^{(2)}}$。

于是我们有

$$\alpha \preccurlyeq \gamma^{(1)} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i, \gamma_{i+1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_{N+k})$$
$$\beta \preccurlyeq \gamma^{(2)} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1, \gamma_{i+1} + 1, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_{N+k}).$$

晶体算子 f_i 恰好将一个条目 i 改为 $T_{\gamma^{(1)}}$中的条目 $i+1$，但改变了最小解析。因此，它必然恰好作用于 $T_{\gamma^{(1)}}$的两个极大水平带，修改包含该条目 i 的极大水平带，以及包含 $T_{\gamma^{(1)}}$中 $(i+1)$'s 的极大水平带。此外，条目 i 和 $i+1$ 不能属于同一个极大水平带，否则最小解析将不会改变。

回顾一下，我们可以将 $\gamma^{(1)}$ 和 $\gamma^{(2)}$ 分解为部分的子集，分别求和得到 α 和 β的部分，以分别表示 $T_{\gamma^{(1)}}$和 $T_{\gamma^{(2)}}$的最小解析。由于它们恰好在两个极大水平带上不同，因此 $\gamma^{(1)}$ 和 $\gamma^{(2)}$ 的分解中，除包含 i^{th} 和 $(i+1)^{\text{th}}$部分的子集外，所有子集都相同。于是，假设 $j_1 < j_2 < \ldots$ 给出每个子集的最后一部分的位置，这就得到以下分解，其中在 $\gamma^{(1)}$ 和/或 $\gamma^{(2)}$中，i^{th} 部分之前和/或 $(i+1)^{\text{th}}$ 部分之后可能还要添加一个分隔符 $|$。

$$\alpha \preccurlyeq \gamma^{(1)} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{j_1} | \gamma_{j_1+1}, \ldots, \gamma_{j_2} | \ldots | \gamma_{j_\ell+1}, \ldots, \gamma_i | \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_{\ell+1} | \ldots, \gamma_{N+k})$$
$$\beta \preccurlyeq \gamma^{(2)} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{j_1} | \gamma_{j_1+1}, \ldots, \gamma_{j_2} | \ldots | \gamma_{j_\ell+1}, \ldots, \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1, \ldots, \gamma_{\ell+1} | \ldots, \gamma_{N+k}).$$

现在，由于根据假设 k 是极小的，因此不可能存在包含多于一个部分的相等子集；否则，将分别存在两个杨表 $T_{\gamma^{(1)\prime}}$，$T_{\gamma^{(2)\prime}}$，它们分别属于 $B(T_\alpha)$ 和 $B(T_\beta)$，并且其权的长度小于通过对

相等子集的部分求和所得到的，其中 $T_{\gamma^{(1)\prime}} \xrightarrow{j} T_{\gamma^{(2)\prime}}$ 位于 $B(\lambda)_n$ 中，适用于 $n < N + k$ 和 $j \leq i$。

基于同样的理由，在包含 $\gamma^{(1)}$ 和 $\gamma^{(2)}$ 中的i^{th} 以及（$i+1$）th 部分的子集中，部分数不能超过两个。

于是，上述分解更粗；同样，在 $\gamma^{(1)}$ 和/或 $\gamma^{(2)}$ 中，i^{th} 部分之前和/或（$i+1$）th 部分之后可能还会多出一道分隔 | :

$$\alpha \preccurlyeq \gamma^{(1)} = (\gamma_1|\gamma_2|\dots|\gamma_{i-1},\gamma_i|\gamma_{i+1},\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k})$$
$$\beta \preccurlyeq \gamma^{(2)} = (\gamma_1|\gamma_2|\dots|\gamma_{i-1},\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1,\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}).$$

下面给出了 $\gamma^{(1)}$ 中位置 $i-1$ 到 $i+1$ 的各部分划分为子集的不同分解；$\gamma^{(2)}$ 中的分解与之等价。

$$\gamma_{i-1}|\gamma_i|\gamma_{i+1}|\gamma_{i+2} \quad \gamma_{i-1},\gamma_i|\gamma_{i+1},\gamma_{i+2} \quad \gamma_{i-1},\gamma_i|\gamma_{i+1}|\gamma_{i+2} \quad \gamma_{i-1}|\gamma_i|\gamma_{i+1},\gamma_{i+2}.$$

因此，$k \leq 2$。

现在，我们来研究不同的可能情况，这些情况取决于经 f_i 修改的单元格 i 相对于包含条目$i-1$，i，$i+1$和 $i+2$ 的（非极大）水平带的位置。

如我们所见，条目 i 和 $i+1$ 必须位于不同的极大水平带中，否则最小解析会由 f_i 保持不变。于是，i出现在各自极大水平带的末尾，而（$i+1$）则出现在各自极大水平带的开头。我们将 $T_{\gamma^{(1)}}$ 中经 f_i 修改的特定条目i 称为修改后的条目 i。所有考虑的条目都在 $T_{\gamma^{(1)}}$中。我们考察对一个条目 i 的修改如何改变 $\gamma^{(1)}$ 的分隔方式，使其划分为子集后得到 $\gamma^{(2)}$。

回顾一下，非极大水平带的头部是其最东北端的单元格，尾部是其最西南端的单元格。

<u>情况 1:</u> 如果修改后的项 i 所在行的行指标严格小于 $i+1$ 的水平带尾部所在行的行指标，且不小于 $i+1$ 的水平带头部所在行的行指标，那么对应权重 $\gamma^{(1)}$ 和 $\gamma^{(2)}$ 中的分割位置相同，因此我们称这些分割得以保留。这是因为对单个项 i 的修改不会影响项 $i-1$ 或 $i+2$。

<u>情况 2:</u> 如果修改后的项 i 所在行的行指标不小于 $i+1$ 的水平带尾部所在行的行指标，那么需要考虑三种情况。

- 如果修改后的项 i 不是项 i 所在水平带的尾部，那么这些分割得以保留。

- 若修改后的条目 i 是条目水平带 i的尾部，且水平带的下一个条目i 位于各 $i-1$ 的水平带头部的西南方，则分隔保持不变。

- 若修改后的条目 i 是条目水平带 i的尾部，且水平带的下一个条目i 位于各$i-1$的水平带头部的东北方（可在正北或正东方向），那么，如果在 $\gamma_{(1)}$ 中第（$i-1$）$\uparrow$部分和第 $i\uparrow$部分之间有分隔，则该分隔会在 $\gamma_{(2)}$ 中被移除。其他所有分隔均保持不变。

情况 3: 如果修改后的条目 i 位于 $i+1$ 的水平带头部的东北侧或正东侧，那么同样需要考虑三种情况。

- 如果修改后的条目 i 不是条目 i 的水平带头部，那么分隔保持不变。

- 如果修改后的条目 i 是条目 i 的水平带头部，且 $i+2$ 的水平带尾部位于其西北侧，那么分隔保持不变。
- 如果修改后的条目 i 是条目 i 的水平带头部，且 $i+2$ 的水平带尾部位于其西南侧或正西侧，那么如果 $\gamma_{(1)}$ 中第 $(i+1)_{\text{th}}$ 部分与第 $(i+2)_{\text{th}}$ 部分之间没有分隔，则在 $\gamma_{(2)}$ 中添加该分隔。所有其他分隔均保持不变。

因此，只有极少数情况下会添加或移除分隔，否则分隔都保持不变。接下来我们来考察从 $\gamma^{(1)}$ 的可能构型出发可以发生哪些转变。

我们先从构型（$\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}|\gamma_i|\gamma_{i+1}|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}$）开始。要么保留分割，要么去掉（$i-1$）th 与 i^{th} 部分之间的分隔，从而得到 $\gamma^{(2)}$中的以下构型之一。

$$(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}|\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}) \text{ OR } (\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1},\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}).$$

现在考虑构型（$\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}$， $\gamma_i|\gamma_{i+1}$， $\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}$）。要么保留分割，要么在（$i+1$）th 与（$i+2$）th 部分之间添加分隔，从而得到 $\gamma^{(2)}$中的以下构型之一。

（$\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}$， $\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1$， $\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}$）或（$\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}$， $\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}$）。然而，在这两种情况下，$(i-1)^{\text{th}}$ 和 i^{th} 部分可以相加（在 $\gamma^{(1)}$ 和 $\gamma^{(2)}$中），从而得到长度更短的有效权重，因此必须将其排除。

现在我们来考虑构型 $(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}$， $\gamma_i|\gamma_{i+1}|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k})$。这里只能保留分割，从而得到 $\gamma^{(2)}$中的下述构型。

$$(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1},\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}).$$

与前一种构型类似，$(i-1)^{\text{th}}$ 和 i^{th} 部分可以相加（在$\gamma^{(1)}$ 和 $\gamma^{(2)}$中），从而得到长度更短的权重，因此必须将其排除。

最后考虑构型 $(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}|\gamma_i|\gamma_{i+1},\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k})$。要么保留分隔，要么添加 $(i+1)^{\text{th}}$ 与 $(i+2)^{\text{th}}$ 部分之间的分隔，从而得到 $\gamma^{(2)}$ 中的以下构型之一。

$(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}|\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1,\ \gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k})$ 或 $(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}|\gamma_i-1|\gamma_{i+1}+1|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k})$。

在上面的第一个构型中，可以将（$i+1$）th 和（$1+2$）th 部分添加进去（在 $\gamma^{(1)}$和 $\gamma^{(2)}$中），以恢复长度更小的权，因此必须舍弃该构型。第二个构型是有效的。

于是，对于$\gamma^{(1)} \xrightarrow{i} \gamma^{(2)}$中的分割，只有三种可能的构型，使得 k 是最小的，并且最小解析通过 f_i 从 $T_{\gamma^{(1)}}$ 变为 $T_{\gamma^{(2)}}$。对我们来说，这里最重要的是注意到它们强制得到 $k=0$，以及 $|\ell(\alpha)-\ell(\beta)|\in\{0,1\}$。

请注意，在 $\gamma_i=1$的情况下需要考虑一种特殊情形，其中 $\gamma_{i+1}\geq 1$ 或$\gamma_{i+1}=0$。第二种情况很容易，因为此时极大水平带保持不变。在第一种情况下，唯一可能的构型如下。

$$(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}|1|\gamma_{i+1},\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}) \xrightarrow{i} (\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1},0|\gamma_{i+1}+1|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}) \text{ OR}$$
$$(\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1}|1|\gamma_{i+1}|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}) \xrightarrow{i} (\gamma_1|\dots|\gamma_{i-1},0|\gamma_{i+1}+1|\gamma_{i+2}|\dots|\gamma_{N+k}).$$

在第二种构型中，我们仍然得到 $k=0$。在第一种构型中，只有当唯一的条目 i 位于水平带中 $i+1$ 的头部和 $i+2$ 的尾部两者的东北方向时，这些构型才可能出现（这样才能打断它们的极大水平带）。然而，f_i 无法改变这一条目，因为相应的括号序列（用于括号规则）将给出 $(\dots()$，其中至少有一个左括号 (要与条目 i 的右括号) 配对，因此 f_i 必须为空，第一种构型不可能出现。于是，在所有情况下，$k=0$。

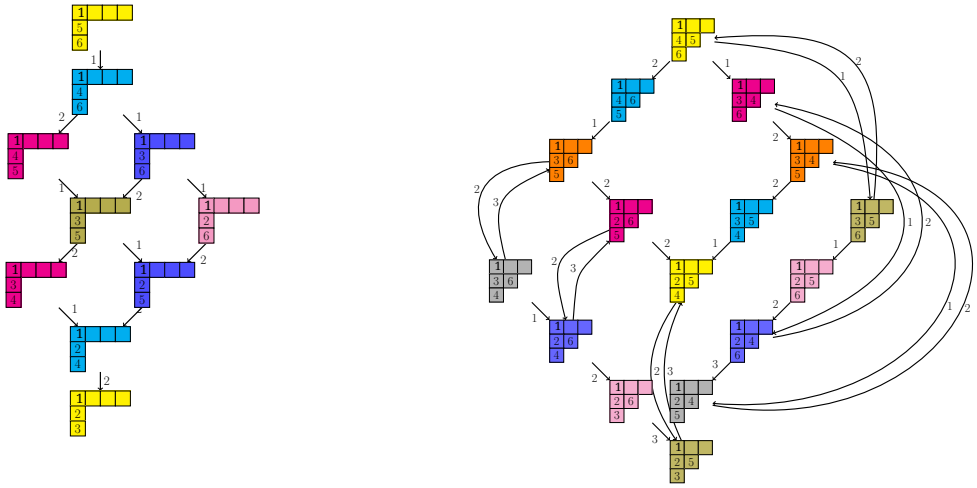
因此，如果两个子分量 $B(T_\alpha)$ 和 $B(T_\beta)$ 之间存在一条标记为 i 的极小边，那么当 $N=$ 为 $\max(\ell(\alpha)\ \ell(\beta))$ 时，它出现在 $B(\lambda)_N$ 中；当 $n\geq N$ 时，它出现在所有 $B(\lambda)_n$ 中。此外，边只出现在与下降组合相关联的子分量之间，且这些下降组合的长度相等，或长度相差 1。

现在，$B(\lambda)_S$ 包含所有形状为 λ、填充不超过 S的杨表。由于 S 是 λ的下降组合中部分数的最大值，因此，与拟对称函数 F_α 相关的所有子分量都会出现在 $B(\lambda)_S$中，且至少包含一个杨表（如果 $\ell(\alpha)=S$）。根据上述结果，所有极小边也都会出现在 $B(\lambda)_S$中。

对于所有 $n\geq S$，所有子分量都会出现，且可能包含更多杨表。对于 $n<S$，则会缺少一些子分量，但根据前面的结果，出现的子分量之间的极小边也会出现，因此得到的骨架是 $Skeleton(\lambda)_S$ 的诱导子图，其中以下降组合长度不超过 n 的标准杨表为顶点。这就得到了所需结果。

■

我们可以定义 $Skeleton(\lambda)=Skeleton(\lambda)_S$，其中 S 是 λ 的下降组合的最大长度。那么 $Skeleton(\lambda)$ 也是 $B(\lambda)$的底层结构。这是证明的一个推论：



(a) $Skeleton(4,\ 1,\ 1)$，其中所有杨表都有两个下降，并构成偶环的不交并，另有额外顶点作为源点和汇点
(b) $Skeleton(3,\ 2,\ 1)$，其中具有两个下降的标准杨表构成一个偶环，而具有三个下降的标准杨表构成链的不交并

图 4： $Skeleton(\lambda)$ 的诱导子图结构，其顶点为具有固定下降数的标准杨表

推论 4.9： $Skeleton(\lambda)$ 中只有标准杨表之间存在边，且它们的下降数量之差至多为 1。

猜想 4.10： 设 H_S 是 $Skeleton(\lambda)$ 的诱导子图，其顶点为下降组合具有 s 个部分的标准杨表。那么 H_s 要么是一个

- 单点的不相交并，或者
- 链的不相交并，或者
- 偶数长度环的不相交并，可带或不带两个额外连接的顶点，分别作为源点和汇点。

重边仅出现在与不同下降组合长度相关联的这类诱导子图之间 s。

对于所有分拆 $\lambda \vdash m$ 且满足 $m \leq 6$ 的情况，这一点均已得到验证。图 4 展示了该猜想的不同情形。

进一步研究晶体骨架这一概念将会很有意思。特别是，Danilov、Karzanov 和 Koshevoy 曾研究过这一概念，也研究了子晶体的概念[Danilov 等人， 2008], 以及晶体的 A_{n-1} 替代交叉模型。他们引入了作为晶体顶点的另一类组合对象，并利用可行函数在这些对象上定义了晶体算子，还证明这确实为

A_{n-1} 晶体提供了一种基于 Stembridge 公理的替代模型。有些结果或许与本文所述的结果相关，但由于两者的背景迥异，很难进行比较。不过，进一步研究这些结果之间的联系将会非常有意思。

5 晶体骨架与对偶等价图：作为 plactic 幺半群和 coplactic 幺半群之间的关系

本节将探讨骨架与 Assaf [Assaf 引入的对偶等价图之间的关系；后者是标准杨表上的另一种有向图结构。我们将看到，基本拟对称函数可以用来描述 plactic 幺半群与 coplactic 幺半群之间的关系，而它们之间的关系则编码了对偶 RSK 等价。先来回顾一些定义。

5.1 晶体中的 RSK 算法、滑动变换、plactic 幺半群与 coplactic 幺半群

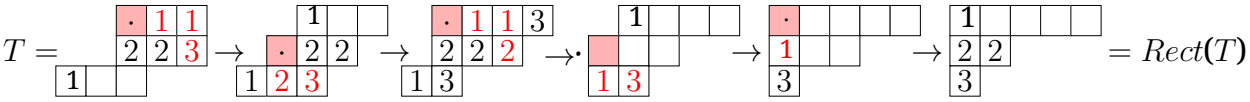
回顾一下，RSK 算法将任意一个字 w 对应到一对杨表 ($P(w)$ $Q(w)$)。关于该算法的完整说明，参见 [Fulton、 1996] 或 [Sagan 2001] 。杨表 $P(w)$ 称为 w 的插入杨表，其权与 w 相同。杨表 $Q(w)$ 称为 w 的记录 tableau，在此语境下它是标准杨表。

于是，词在以连接为乘法、以 Knuth 关系为等价关系的情况下构成 plactic 幺半群 [Lascoux 和 Schützenberger, 1981]。plactic 幺半群中同一等价类里的所有词都会映射到同一个插入杨表 P，而其行读字 $rw(P)$ 可视为这个 Knuth 等价类的一个代表。我们将此作为词插入等价的定义。

滑动变换除了其他作用外，还能将 Knuth 关系（词上的 plactic 幺半群的关系）转化为杨表上的关系，并描述斜杨氏表上的晶体结构：形状为 λ/μ 的杨表，其中 μ 的单元格在 λ中为空白，其余单元格则按照通常的行和列条件填入。滑动变换对这些斜杨氏表的作用，因而对应于对相关读字应用 Knuth 关系。

从斜形杨表开始，空格会穿过非空单元格，同时始终保持行和列的条件。滑动变换总是从一个内角开始，该内角的右侧和下方都有非空单元格；空格依次与这些非空单元格交换，直到它落在 λ 的外形状上，无法再进行交换为止。递归地进行这一过程，就能将杨表“整直化”为分拆形状。这个杨表称为初始斜形杨表的整直化。整直化结果唯一，因此滑动的顺序无关紧要。

例如，下面的斜形杨表 T 的斜形状为 (5，5，3)/(2，2)，经过五次滑动挪格后完成整直化。滑动所用的内角以红色单元格标出，滑动过程中移动的元素则以红色显示:



每一步中，斜杨氏表都保持半标准且具有（斜）分拆形状。滑动挪格与晶体算子交换 [van Leeuwen， 2001], 因此，斜杨氏表的晶体与将所有斜杨氏表 rectified 后得到的晶体同构。特别地，如引言中所述，将读字解析为最大的递增因子，并使这些因子恰好对应杨表的各行后得到的斜杨氏表晶体，经 rectified 后得到的晶体，其杨表是通过 RSK 算法从这些字得到的。

The 以下结果给出了词上的晶体与杨表上的晶体之间的关系 x:

命题5.1（[Bump 和 Schilling，2017，定理8.6和8.7]）： 字长为 k 且字母取自 $[n]$的字上的晶体（记为 $[n]^{\otimes k}$）可分解为若干晶体的不交并，每个晶体都与某个 $B(\lambda)$同构，其中 λ 是 k 的分拆，且长度至多为 n。

令 $x, y \in [n]^{\otimes k}$，则

1. $P(f_i(x)) = f_i(P(x))$，其中 f_i 表示作用于字或杨表上的晶体算子，具体取决于其作用的对象。2. 若 λ 是 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的形状，则 x 属于一个与 $B(\lambda)$ 同构的晶体连通分支。3. 若 $P(x) = P(y)$，则 x, y 插入等价。4. 若 $Q(x) = Q(y)$，则 x, y 位于字晶体的同一连通分支中。

插入等价的词随后位于同构晶体中的相同位置，而不同的记录杨表 $Q(w)$ 使我们能够区分同构的连通分支。于是，我们可以将成对的 $(P(w)\ Q(w))$ 视为 tableaux 的晶体的顶点。一般而言，我们只考虑这一对中的第一个杨表，因为晶体算子只作用于它们。

值得注意的是，如引言中所示， RSK 保留记录杨表中字的下降，因此也保留其下降组合:

命题 5.2（[Loehr，2011，定理 10。117]）： 设 w 为一个字， $Q(w)$ 为通过 RSK 算法得到的关联记录杨表。那么

$$Des(Q(w)) = Des(w).$$

所有具有相同记录杨表 $Q(w)$ 的词都称为共 plactic 等价（在关联的 coplactic 幺半群中）。它们都落入同一个连通晶体中。特别地，根据上述命题，共 plactic 等价保持下降。

5.2 plactic 幺半群与 coplactic 幺半群之间的关系：骨架与对偶等价图

plactic 类与共 plactic 类之间的关系，可由一个众所周知的事实说明：如果 $RSK(w) = (P(w)\ Q(w))$，那么 $RSK(w^{-1}) = (Q(w)\ P(w))$（见[Loehr, 2011]的定理 10.112）。通过在双词上使用 RSK 映射，这种对应关系适用于任意词，而不只是排列，因为双词的逆很容易计算。在此背景下，记录 tableau $Q(w)$ 可以是半标准的。

这可以通过联系形状为 $\lambda \vdash m$ 的标准杨表（它们为 $[n]^{\otimes m}$ 中的连通晶体分支 $B(\lambda)$ 编号）以及 $B(\lambda)$ 的相应子分量来理解。它们可以视为 RSK 中该关系的原像：考虑 w^{-1} 时，P, Q-杨表会互换；在去标准化的作用下，标准杨表扩展为其相应的子分量，而子分量则收缩为其相应的标准杨表，二者分别通过所有保留最小解析的可能方式实现；标准化亦然。基本拟对称函数 F_α 及其对应的子分量，因而可以视为代表 plactic 类与共 plactic 类之间的关系。这种关系的新诠释还确立了张量 $B(1)^{\otimes m}$ 中连通分支 $B(\lambda)$ 之间的其他关系。

其他有趣的关系通常称为对偶 ***RSK*** 关系：这些关系是排列上的等价关系，根据字母 $i-1$、i 和 $i+1$ 在排列中的相对位置，对它们进行如下初等变换：

$$i\ \ i+1\ \ i-1 \overset{i}{\leftrightarrow} i-1\ \ i+1\ \ i$$
$$i\ \ i-1\ \ i+1 \overset{i}{\leftrightarrow} i+1\ \ i-1\ \ i$$

请注意，这些初等变换并不对应共 plactic 关系，尤其是因为它们会引入（或消除）下降。

Assaf 引入了对偶等价图，用来表示这些作用于排列上的对偶 RSK 关系：这些关系将标准杨表作为作用对象，而这些排列正是其读字[Assaf, 2015]。因此，它们是定义在标准杨表上的图，就像我们的晶体骨架一样。

尽管这两种定义方式截然不同，但这两种定义在标准杨表上的有向图结构却惊人地相似。根据 Assaf 的定义，与 $\lambda = (4, 3)$ 相关联的对偶图如图 5 所示。其图结构与图3相比，仅少了七条边。

Franco Saliola 提出，λ 的对偶等价图是 $Skeleton(\lambda)$ 的子图。我们进一步猜想

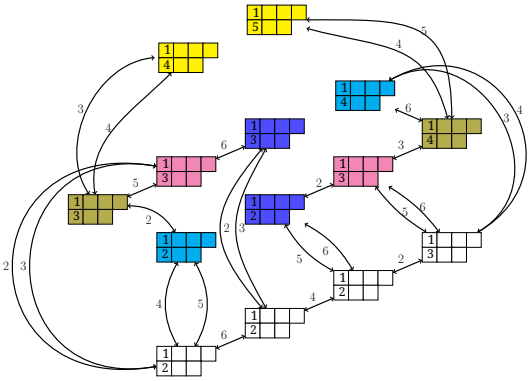


图 5：对偶等价图 对应于 Assaf 对 Assaf [的定义， 2015]。

猜想 5.3： λ 的对偶等价图是 $Skeleton(\lambda)$ 的子图，具体而言，忽略方向和标签，如果对偶等价图中两个标准杨表之间有 r 条双向箭头，那么在 $Skeleton(\lambda)$ 中相同的标准杨表之间也有 r 条边。

此外，如果 $Skeleton(\lambda)$ 在两个标准杨表之间有 $r > 1$ 条边，那么在 λ 的对偶等价图中，同一对标准杨表之间也有 r 条边。

对于所有满足 $m \leq 6$ 的分拆 $\lambda \vdash m$，这一猜想都已得到验证。我们还注意到，大多数情况下，这两种图结构是相同的。此时，骨架便编码了标准杨表上的对偶 RSK 等价（以及其他关系）。

请注意，所有具有相同最小解析的杨表，其读字标准化后都得到同一个排列，正如例 1.5 中所指出的。所有这些杨表都对应于子分量 $B(T_\alpha)$ 的顶点，并映射到骨架中的 $std(T_\alpha)$。因此，我们可以将骨架视为编码排列（标准杨表的读字）之间关系的结构。不过，这些关系通常是对偶 RSK 等价，这一点令人惊讶。

6 复合的应用

6.1 计算复合运算中的单项式 $s_\mu[s_\lambda]$

如引言中所述，两个舒尔函数的复合 $s_\mu[s_\lambda]$ 在基本拟对称函数基 [Loehr 和 Warrington, 2012]中具有分解：

$$s_\mu[s_\lambda] = \sum_{A \in S_{a,b}(\mu,\lambda)} F_{Asc(A)}.$$

在此公式中， $\mu \vdash a$, $\lambda \vdash b$, $S_{a,b}(\mu, \lambda)$ 是一组依赖于形状 μ 和 λ的“标准”矩阵，而 $Asc(A)$ 给出一个组合，用于表示在复杂读取顺序下从矩阵 A 中读出的字的上升。

这些矩阵由 Loehr 和 Warrington 所称的表格的表格构成：形状为 μ 的杨表，其条目是形状为 λ 的杨表。于是我们称它们的形状 为 λ^{μ}。固定杨表上的一个全序后，形状为 λ^{μ} 的表格的表格给出了 $s_{\mu}[s_{\lambda}]$ 的单项式（例如参见 [De Boeck 等人、 2021], [Loehr 和 Warrington、 2012],[Stanley和Fomin、 1999], 等人的著作）。

复合的一种定义是通过将 $x_1, x_2, \ldots$ 中的变量代换为 s_{μ} 的首一单项式来定义 s_{λ} （系数为 1 的单项式）。系数$c \in \mathbb{N}$ 大于 1 的单项式只需拆分为 c 首一单项式。由于复合中的两个函数都是舒尔函数（因而是对称的），所以单项式的顺序并不重要，而表格的表格这一概念也就完全合理。

利用上述结果，我们得到

推论 6.1 : 复合 $s_{\mu}[s_{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)]$ 中首一单项式的数量等于 $|SSYT(\mu)_{|SSYT(\lambda)_n|}|$。

证明。 只需考虑将舒尔函数 $s_{\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的首一单项式代入 s_{μ} 的复合替换。■

6.2 将拟对称函数的对称和分解为舒尔函数基

由于复合运算是对称的，且两个舒尔函数的复合可以表示为基本拟对称函数的对称和，因此，对从这一表达式到舒尔基表达式的转换进行组合描述，或许有助于推进复合问题的研究。

若 f 是一个对称函数，其在拟对称函数基下的分解为 $f = \sum d_{\alpha} F_{\alpha}$，我们可以将 F_{α} 替换为广义舒尔函数 s_{α}；这些函数通过对行列式使用 Jacobi-Trudi 定义来定义，且具有相同的系数 [Garsia 和 Remmel， 2018]。广义对称函数 s_{α} 等于 $\pm s_{\lambda}$，其中某个分拆为 λ。于是许多广义舒尔函数会相互抵消，因此这种方法远非高效。

对于对称的 $f = \sum d_{\alpha} F_{\alpha}$，用舒尔基表示它的另一种方法是通过多次基变换：从基本拟对称函数到单项式拟对称函数，再到单项式对称函数，最后到舒尔函数。这种方法在计算上更快，因此 SageMath 中实现的算法就是这种方法。然而，这并不能让我们深入了解真正令我们感兴趣的两个基之间的关系

真正令我们感兴趣的是这两个基之间的关系。

因此，我们可以利用上述结果，给出另一种将（用基本拟对称函数表示的）对称函数展开为舒尔函数基底的方法。

命题 6.2： 设 f 是一个对称函数，它可以分解为基本拟对称函数基底上的展开 $f = \sum_\beta c_\beta F_\beta$。设 α 是 f 的分解中按字典序最大的下降组合。那么 α 是一个分拆，$f - c_\alpha s_\alpha$ 是舒尔正的，且 F 正。

证明。由于 f 是对称的，它必然可以唯一地分解为舒尔函数基底上的展开。我们在命题 2.4 中已经看到，能够在 s_λ 中出现的分拆 λ 必须满足 F_α，因此特别有 $\lambda_1 \geq \alpha_1$。对于所有 j，还必须有 $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_j \geq \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_j$，因此 $\alpha \leq_{lex} \lambda$，其中 $\leq_{lex}$ 按字典序排列。

如果 s_λ 出现在 f中，那么 F_λ 必定出现在 f 按拟对称函数基展开的分解中。这是因为 $s_\lambda = \sum_{T\in SYT(\lambda)} F_{compDes(T)}$，而 λ是标准杨表的下降组合，该杨表通常称为超标准杨表，其去标准化（根据其最小解析）为 1_λ。

由于我们在 f的分解中出现的所有下降组合里，选取了字典序最大的 α，因此对于所有 $\gamma >_{lex} \alpha$，都有 $c_\gamma = 0$。于是我们必有 $\alpha = \lambda$ 是一个分拆，s_α 在 f 按舒尔函数基展开的分解中出现 c_α 次，因此 $f - c_\alpha s_\alpha$ 是对称的，并且其按基本拟对称函数基展开的分解只有正系数。■

推论 6.3 : 下面的算法给出了对称函数f从基本拟对称函数基到舒尔基的分解。

算法 6.4： 设 f 是一个对称函数，它在基本拟对称函数基 $f = \sum_\beta c_\beta F_\beta$ 中有一个表达式。令 $S = f$，并重置 $f = 0$。

1. 令 α 为首项支撑，即在 S 中出现的按字典序最大的下降组合。它必须是一个分拆。
2. Let $S = S - c_\alpha \left(\sum_{T\in SYT(\alpha)} F_{compDes(T)} \right)$ and $f = f + c_\alpha s_\alpha$.
3. 重复直至 $S = 0$。

然后， f 用舒尔函数基表示。

注释 6.5： 这个算法根据定义推导出来相当简单直接，因此其他人以前可能也用过。不过，它似乎未见于文献。其底层构造才是最重要的价值，因为它通常并不比 SageMath 中实现的算法更高效（在计算一个次数为 n 的拟对称函数随机对称和在舒尔基下的分解时）。或许复合与基本拟对称函数的关系比我们想象的更密切。

注释 6.6： 该算法或许能够解释 De Boeck、Paget 和 Wildon 的结果：他们指出，当且仅当 ν 在 μ的字典序下为最大时，舒尔函数 s_ν 才会以恰好等于权为 ν 的最大复合 tableaux 数目的重数出现在复合 $s_\mu[s_\lambda]$ 中，De Boeck 等人， 2021]。这里的“最大”是指，杨表条目中的任何一个条目c都无法替换为条目 $c-1$，同时又不破坏较大杨表的半标准性。

结论

我们现在对舒尔函数分解为拟对称函数的过程以及它们之间的关系有了更深入的理解。现在，我们可以利用这一点，更直接地将两个舒尔函数的复合表示为舒尔函数基底下的表达式。

致谢

感谢 Franco Salioa 在整个项目过程中给予我的支持。我也感谢 SageMath 的贡献者，Sage Math 帮助我们检验例子并生成图示；还要感谢 OEIS 的幕后工作者，他们帮助我们构思命题 3.6。FMG 获得了加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。

A 附录：EVAC 的证明

我们在此证明，第 4 节定义的疏散映射 EVAC 是晶体的反自同构。我们还证明了它会反转下降组合。Berenstein 和 Zelevinsky 在 [Berenstein and Zelevinsky, 1996], 中证明了前一个结论，但他们的证明运用了大量晶体理论和表示论工具。我们认为我们的证明值得关注，因为它更容易理解，而且还用到了文献中早已研究过的、作用于字上的晶体反自同构 Rot；对于 $w = w_1 w_2 \dots w_k \in [n]^{\otimes k}$,

$$Rot(w) = \mathrm{compl}(w_k \dots w_2 w_1) = \bar{w_k} \dots \bar{w_2} \bar{w_1},$$

其中 $\ell = compl(\ell) = n - \ell + 1$。

算子 Rot 由 Poirier 和 Reutenauer 在 [Poirier and Reutenauer, 1995] 中进行了研究。他们证明了 $Rot(w) = w_0 w w_0$，其中 $w_0 = k(k-1)\dots321$ 是对称群 S_k 的最长排列，k 为 w 的长度。 ww_0 是 w 的镜像，而 $w_0 w$将 $\overleftarrow{w}$ 的字母 i 更改为 $k - i + 1$。如果 w 不是排列，我们可以根据其权 β 从左到右对 w 进行标准化，然后根据 β从右到左对其进行去标准化。这样，我们在 w 上得到的效果与 Rot 相同。

于是我们有

命题 A.1： Rot 是词晶体的反自同构，它将下降组合取逆。

证明。 我们有 Rot 是一个对合，因此我们有一个自同构。我们需要证明，对于任意字 w, $Rot(f_i(w)) = e_{n-i}(Rot(w))$。

根据定义， $Rot(w) = \bar{w_k} \bar{w_{k-1}} \dots \bar{w_2} \bar{w_1}$，其中 $\bar{w_i} = n - w_i + 1$。假设条目 i 和 $i+1$ 给出某个未配对括号序列 $\phi_i(\epsilon_i$。那么，对于条目 $n-i$ 和 $n-i+1$， $Rot(w)$ 具有序列 $\epsilon_i(\psi_i$，其中条目 $n-i+1$ 由 w 中的字母 i 得到，而字母 $n-i$ 则由 w 中的字母 $i+1$ 得到。于是，在 w 中受 f_i 影响的字母 i，对应于在 $Rot(w)$ 中受 e_{n-i} 影响的字母 $n-i+1$。那么， $Rot(f_i(w)) = e_{n-i}(Rot(w))$。

现在，下降组合已被描述为将词 w 解析为弱递增因子时最小解析的长度。若一个字 w 的最小解析长度为 α，那么反转字母顺序会得到长度为 $\overleftarrow{\alpha}$ 的弱递增序列，而对字母取补则会得到长度为 $\overleftarrow{\alpha}$的弱递增序列。于是 Rot下降组合的逆。■

我们用 $B_\lambda(w)$表示一个（作用于词上的）晶体，其源点为 w，权为 λ。那么，根据命题 1.6， $B_\lambda(w) \simeq B(\lambda)_n$。

备注 A.2： 可以证明，晶体算子保持词 [Appleby 和 Whitehead 的下降组合， 2020], 因此， Rot 词的晶体的连通分支在映射Rot 下的像是词 $B_\lambda(w)^\#$的同构（对偶）连通分支晶体；该映射通过反转箭头方向、将箭头 i 重新标记为 $n-i+1$，并将顶点 v 重新标记为 $Rot(v)$，将词的下降组合取逆。

特别地，若 w 是一个 Yamanouchi 词（连通分支 $B_\lambda(w)$ 的源点），则 $Rot(w)$ 是一个反 Yamanouchi 词，且 $f_i(Rot(w)) = NULL\ \forall i$，而 $B_\lambda(w)^\#$ 的汇点。

这两个分支同构于同一个 $B(\lambda)$，因此两者的源点和汇点将分别映射到 1_λ 以及 $B(\lambda)$ 的汇点，而后者将是 EVAC(1_λ)。

现在，我们可以利用 Poirier 和 Reutenauer 给出的对应关系，来看看这个 Rot映射如何影响 RSK 插入。由于 $Rot(w) = w_0ww_0$，因此 $RSK(Rot(w)) = RSK(w_0ww_0)$。

命题 A.3（[Chmutov 等人， 2022]）： $RSK(w_0ww_0) = (\mathrm{EVAC}(P(w)),\ \mathrm{EVAC}(Q(w))$。

最后，我们可以证明 EVAC 是杨表晶体的反自同构，且只需使用上述结果。

命题 A.4： 当将顶点视为由 P, Q 构成的杨表对（其中 Q 通过 RSK得到标准杨表）时，EVAC 是杨表晶体的反自同构。

证明。 首先注意，EVAC(Q) 是一个标准杨表，它标记了一个与杨表晶体同构的连通分支。于是，对于第一连通分支中出现的所有 P，杨表对 (P,EVAC(Q)) 正是这个同构连通分支的顶点。

形状为 λ 的所有杨表 P 都出现在 $B(\lambda)_n$ 中。由于对合 EVAC 将形状为 λ 的杨表映射为另一个具有相同形状的杨表，因此它是 $B(\lambda)_n$ 上的自（同构）。

如果 w 是 Yamanouchi 词，则通过 RSK，它被映射为 ($1_\lambda, Q(w)$)；而 $Rot(w)$ 被映射为 (EVAC(1_λ),EVAC($Q(w)$))。根据上述说明，EVAC(1_λ) 随后成为 $B(\lambda)_n$ 的汇点。如果 $v = f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_\ell}(w)$，其中 w 是包含 v 的词的晶体之连通分支的源 Yamanouchi 词，那么

$$\begin{aligned} RSK(Rot(v)) &= RSK(Rot(f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_\ell}(w))) \\ &= RSK(e_{n-i_1}e_{n-i_2}\dots e_{n-i_\ell}(Rot(w)) \\ &= (e_{n-i_1}e_{n-i_2}\dots e_{n-i_\ell}(\mathrm{EVAC}(1_\lambda)), \mathrm{EVAC}(Q(w))), \end{aligned}$$

其中晶体算子根据其作用的对象不同，分别作用于字或杨表。 RSK 与晶体算子可交换这一事实，从

从第二个等式到第三个等式，依据命题5.1。

于是我们有 EVAC($f_i(P)$) $= e_{n-i}$(EVAC(P))，并且 EVAC 是一个晶体反自同构。■

命题 A.5： EVAC 互为逆运算的表的下降组合：若 $DesComp(T) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$，则 $DesComp$(EVAC(T)) $= \overleftarrow{\alpha} = (\alpha_s, \ldots, \alpha_2, \alpha_1)$。

证明。我们在第 5 节中已经看到，一个字 w 及其记录杨表 $Q(w)$ 具有相同的下降组合，并且 RSK (w^{-1}) $=$ ($P(w^{-1})$ $Q(w^{-1})$) $=$ ($Q(w)$ $P(w)$)。对于固定杨表 T，若 $rw(T) = w$，则 w^{-1} 与 $P(w) = T$ 具有相同的下降组合。

我们还看到 $RSK(Rot(w))$ $=$ (EVAC($P(w)$), EVAC($Q(w)$))，因此

$$\begin{aligned} RSK(Rot(w)^{-1}) &= (\mathrm{EVAC}(Q(w)), \mathrm{EVAC}(P(w))) \\ &= RSK(Rot(w^{-1})). \end{aligned}$$

那么 $Rot(w^{-1})$ 与 EVAC($P(w)$) $=$EVAC(T) 具有相同的下降组合。

最后，由于 Rot 词上的下降组合的逆运算，因此如果 w^{-1} 和 $P(w) = T$ 的下降组合是 α，那么 $Rot(w^{-1})$ 和 EVAC(T) 的下降组合就是 $\overleftarrow{\alpha}$。■

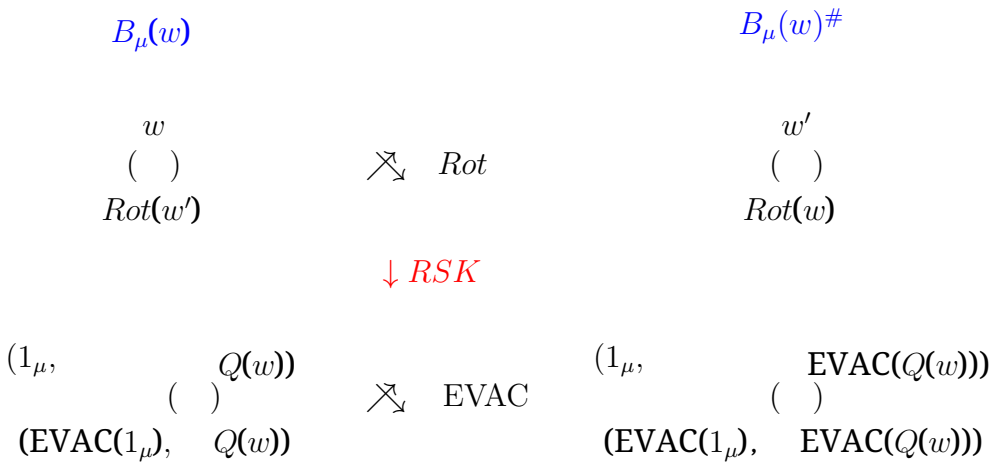


图 6：与 $B(\mu)$ 同构的连通分支之间的双射，这些连通分支由反自同构 Rot 和 EVAC 相连；以及晶体同构 RSK，其中 EVAC($Q(w)$) $= Q(w')$ 和 $w' = RSK^{-1}(1_\mu,$ EVAC($Q(w)$))。

参考文献

[Appleby 和 Whitehead， 2020] Appleby，G. D. 和 Whitehead，T.（2020）。穿孔杨表：类型 A_{n-1}中晶体图的组合模型。[Assaf， 2015] Assaf，S. H.（2015）。对偶等价图以及 LLT 和 Macdonald 正性的组合证明。[Berenstein 和 Zelevinsky， 1996] Berenstein，A. 和 Zelevinsky，A.（1996）。类型 A_r 量子群的典范基与分段线性组合学。《Duke 数学杂志》，82(3)：473–502。[Bump 和 Schilling， 2017] Bump，D. 和 Schilling，A.（2017）。《晶体基》。世界科技出版公司。[Chmutov 等人， 2022] Chmutov，M.、Frieden，G.、Kim，D.、Lewis，J. 和 Yudovina，E.（2022）。evacuation 的仿射推广。《数学精选》，28。[Danilov 等人， 2008] Danilov，V. I.、Karzanov，A. V. 和 Koshevoy，G. A.（2008）。正则 an-晶体的交叉模型。《代数杂志》，320(9)：3398–3424。[De Boeck 等人， 2021] De Boeck，M.、Paget，R. 和 Wildon，M.（2021）。对称函数的复合运算与最高权表示。《美国数学会汇刊》。[Fulton， 1996] Fulton，W.（1996）。《杨表：及其在表示论与几何学中的应用》。伦敦数学会学生教材。剑桥大学出版社。[Garsia 和 Remmel， 2018] Garsia，A. M. 和 Remmel，J. B.（2018）。关于从拟对称函数展开过渡到对称函数的舒尔函数展开的注记。arXiv：组合学。[Gessel， 1984] Gessel，I. M.（1984）。多部 P-分拆与斜舒尔函数的内积。载于《组合学与代数》（博尔德，科罗拉多州，1983），《当代数学》第34卷，第289–317页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[Gessel， 2019] Gessel，I. M.（2019）。关于对称拟对称函数的舒尔函数展开。《电子组合学杂志》，26：4。[Lascoux 和 Schützenberger， 1981] Lascoux，A. 和 Schützenberger，M.-P.（1981）。Le monoïde plaxique。载于《代数与几何组合学中的非交换结构》（那不勒斯，1978），《科学研究》丛书第109卷，第129–156页。CNR，罗马。[Littlewood， 1936] Littlewood，D. E.（1936年）。多项式协变量与不变矩阵。《伦敦数学会杂志》，s1-11(1)：49–55。

[Loehr, 2011] Loehr, N. (2011). 双射组合学。CRC出版社。[Loehr 和 Warrington, 2012] Loehr, N. A. and Warrington, G. S. (2012). 舒尔函数复合的拟对称展开。美国数学会会刊，140(4):1159–1171。[Morales, 2010] Morales, A. (2010). 是否有已知公式可以计算具有给定形状和分拆类型的半标准杨表数量? https://mathoverflow.net/questions/18597，访问日期：2023/02/13。[Poirier and Reutenauer, 1995] Poirier, S. and Reutenauer, C. (1995). 表的霍普夫代数。魁北克数学科学年刊，19(1):79–90。[Sagan, 2001] Sagan, B. (2001). 对称群：表示、组合算法与对称函数。数学研究生教材。施普林格。[Schützenberger, 1963] Schützenberger, M. P. (1963). 关于 Schensted 一种构造的几点评论。斯堪的纳维亚数学，12:117–128。[Shimozono, 2005] Shimozono, M. (2005). 《水晶入门》。关于 Kostka 多项式的讲义。[Stanley, 2012] Stanley, R. P. (2012). 枚举组合学，第*1*卷，剑桥高等数学研究第49卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版。[Stanley和Fomin, 1999] Stanley, R. P. and Fomin, S. (1999). 枚举组合学，剑桥高等数学研究第2卷。剑桥大学出版社。[van Leeuwen, 2001] van Leeuwen, M. A. A. (2001). Littlewood–Richardson规则及相关组合学。载于组合学与表示论的交互，日本数学会回忆录第11卷，第95–145页。日本数学会，东京。