arXiv:2302.07710v1 [math.AC] 15 Feb 2023

两个独立型亏损 Artin-Schreier 扩张之塔中强局部单项化的反例

STEVEN DALE CUTKOSKY

Abstract. 我们给出一个二维正则局部环扩张的例子，它位于两个独立型亏损 Artin-Schreier 扩张构成的塔中，而强局部单项化对该例不成立。

1. Introduction

在特征零的情形下，态射有一种非常优美的局部形式，称为局部单项化。这个结果比环面化可行这一假设直接推出的结论略强。如果 $R \to S$ 是局部环的扩张，且 S 的极大理想收缩到 R 的极大理想，那么我们称 S 支配 R。如果 S被赋值 ω 的赋值环 $\mathcal{O}_\omega$ 支配，那么我们称 ω 支配 S。

定理 1.1。（局部单项化）([2], [3]) 设 k 是一个特征为零的域，且 $R \to S$ 是正则局部环的扩张，其中 R 和 S 在 k 上本质有限型， ω 是 S 的分式域上的一个赋值，它支配 S ，且 S支配 R。那么存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \to & S_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \to & S \end{array}$$

使得 ω 支配 S_1， S_1 支配 R_1 ，且竖直箭头是单项变换的乘积；也就是说，这些箭头可由素理想爆破的局部环分解而成，其商环为正则局部环。特别地， R_1 和 S_1 是正则局部环。此外， $R_1 \to S_1$ 具有局部单项式形式；也就是说，存在 R_1 中的正则参数 u_1、.....、u_m 以及 S_1 中的正则参数 x_1、.....、x_n，一个具有整数系数的 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$，使得 rank$(A) = m$ ，以及单位 $\delta_i \in S_1$ ，使得

$$u_i = \delta_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}}$$

对于 $1 \leq i \leq m$。

证明中的困难在于获得 rank$(A) = m$ 这一条件。为此，有必要在 R 和 S 上方都进行膨胀。

当扩张 $R \to S$ 的分式域扩张 $K \to L$ 是有限扩张且 k 的特征为零时，可以找到一种局部单项化，使得系数矩阵的结构能够恢复

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 14B05；次要分类 14B25、13A18。
Key words and phrases. 赋值、正特征、缺陷、强单项式化。部分获得 NSF 资助项目 DMS-2054394 的支持。

$K \to L$ 中赋值扩张的经典不变量，并且这种形式沿着生成相应赋值环的适当双有理态射序列稳定成立。这种形式称为强局部一致化。对于 [2] 中的秩1赋值以及 [8] 中的一般赋值，这一结果均已得到证明。本文关注的是形式最简单的情形，即赋值的有理秩为1。此时，若 $R_1 \to S_1$ 是强局部单项化，则存在 R_1 中的正则参数 $u_1, \ldots, u_m$，以及 S_1 中的正则参数 $v_1, \ldots, v_m$，一个正整数 a 和一个单位 $\delta \in S_1$，使得

$$u_1 = \delta v_1^a, u_2 = v_2, \ldots, u_m = v_m. \tag{1}$$

正特征下维数为 ≥ 2 的映射，其稳定形式要复杂得多。例如，局部单项化并不总是成立。在 [5] 中给出了一个例子，其中 $R \to S$ 是代数闭域 k 上正特征 p 下非奇异代数曲面上点的局部环，并且 $k(X) \to k(Y)$ 是有限可分的。

局部单项化的障碍是缺陷。缺陷 $\delta(\omega/\nu)$ 是 $\mathcal{O}_\omega$ 的剩余特征 p 的幂，其定义及基本性质见 [21, 第六章第 11], [12], [8, 节第 7 节1]。第 2.1 小节讨论缺陷。我们有以下定理，表明对于曲面映射，缺陷是强局部单项化的唯一障碍。

定理 1.2。（[8, 定理 7.35]）设 $K \to L$ 是代数闭域 k 上特征为 $p > 0$ 的代数函数域的有限可分扩张，$R \to S$ 是局部整环的扩张，使得 R 和 S 本质有限生成于 k 之上，且 R 和 S 的分式域分别为 K 和 L，并且 S 支配 R。设 ω 是 L 的一个赋值，且支配 S。设 ν 是 ω 在 K 上的限制。假设该扩张无缺陷（$\delta(\omega/\nu) = 1$）。则定理 1.1 的结论成立。特别地，$R \to S$ 沿 ω 有局部单项化（以及强局部单项化）。

假设 $K \to L$ 是特征为 $p > 0$ 的域的伽罗瓦扩张，且 ω 是 L 上的赋值，ν 是 ω 在 K 上的限制。那么存在一个经典域塔（[10,, 第 171] 页）

$$K \to K^s \to K^i \to K^v \to L.$$

其中，K^s 是分裂域，K^i 是惯性域，K^v 是分歧域，且扩张 $K \to K^v$ 没有缺陷。因此，关键困难来自从 K^v 到 L 的扩张，它可能存在缺陷。扩张 $K^v \to L$ 是一个 Artin-Schreier 扩张塔，因此 Artin-Schreier 扩张在该理论中至关重要。

Kuhlmann 在 [13] 中对 Artin-Schreier 扩张中的缺陷进行了广泛研究。他将这些扩张分为依赖型和独立型亏损 Artin-Schreier 扩张。该定义在第2.4小节中重述。Kuhlmann 还定义了一个称为距离的不变量，用以区分 Artin-Schreier 扩张的性质。该定义见第2.3和2.4小节。

现在我们具体讨论如下情形：$K \to L$ 是代数闭域 k（其特征为 $p > 0$）上的二维代数函数域之间的有限可分扩张，并设 ω 是 L 的一个赋值，在 k 上平凡，且 ν 是 ω 在 K上的限制。若 L/K 有缺陷，则 ω 必为有理秩1且非离散。引言余下部分中，我们假设 ω 的有理秩为1且非离散。

在这些限制下，当 Artin-Schreier扩张具有缺陷时，该扩张的距离 δ。如果它是一个具有 $\delta = 0^-$ 的缺陷扩张，那么它就是一个独立缺陷

扩张。如果它是一个缺陷扩张且距离小于 0^-，那么该扩张就是一个依赖亏格扩张。

沿赋值进行的二次变换，是正则局部环的极大理想膨胀后赋值的中心。沿 ν 和 ω进行的二次变换序列

$$R \to R_1 \to R_2 \to \cdots \text{ and } S \to S_1 \to S_2 \to \cdots . \tag{2}$$

我们有 $\cup_{i=1}^{\infty} R_i = \mathcal{O}_\nu$，即 ν的赋值环，以及 $\cup_{i=1}^{\infty} S_i = \mathcal{O}_\omega$，即 ω的赋值环。这些序列可以分解为标准二次变换序列（定义见第 3 节）。文献 [8] 证明，给定正整数 r_0 和 s_0，存在 $r \geq r_0$和 $s \geq s_0$，使得 $R_r \to S_s$ 具有以下形式：

$$u = \delta x^a, v = x^b(y^d\gamma + x\Omega) \tag{3}$$

其中 u、v是 R_r中的正则参数，x、y是 S_s中的正则参数，γ和 τ是 S_s中的单位，$\Omega \in S_s$、a 和 d 是正整数，b 是非负整数。若我们选取足够大的r_0，则扩张 $R_r \to S_s$ 的复杂度 ad 为一个常数，该常数取决于赋值扩张，我们称之为式（2）的稳定复杂度。当 $R_r \to S_s$ 具有该稳定复杂度时，我们称式（3）的形式为稳定形式。

强单项式形式是指 $b = 0$ 和 $d = 1$；也就是说，在 y中进行变量替换后，

$$u = \delta x^a, v = y.$$

正如我们先前观察到的（定理 1.2），如果扩张 $K \to L$ 没有缺陷，那么稳定形式就是强单项式形式。如果存在缺陷，那么沿某个赋值的稳定形式中，a 和 d 可能变化极大，尽管它们的乘积 ad 由该扩张固定，如 [6, 定理 5.4]所示。

在 [8], 中构造了一个例子，展示了强局部单项化的失败。这是由两个带缺陷的Artin-Schreier扩张组成的塔，其中每个扩张都属于上文提到的 [6, 定理 5.4]所述类型。第一个扩张在偶数整数时为类型 1，在奇数整数时为类型 2。第二个扩张在偶数整数时为类型 2，在奇数整数时为类型 1。复合扩张给出一个正则局部环的扩张序列 $R_i \to S_i$，其中 R_i 具有正则参数 u_i、v_i，而 S_i具有正则参数 x_i、y_i，使得稳定形式为

$$u_i = \gamma x_i^p, v_i = y_i^p\tau + x_i\Omega \tag{4}$$

对所有 i 都成立。这两个 Artin-Schreier扩张都是依赖的。这一点在[11] 和 [6, 第 6] 节中进行了计算。秉持独立阿廷–施赖尔扩张比依赖扩张表现更好的理念，这便引出了一个问题：在独立阿廷–施赖尔扩张的塔中，强局部单项化是否成立？然而，本文的定理 4.1 表明事实并非如此。在该定理中，我们构造了一个由两个独立缺陷扩张组成的塔的例子，其中强局部单项化并不成立。

假设 $K \to L$ 是正特征域的有限扩张，且 ω 是 L 上的一个赋值，其在 K 上的限制为 ν。已知该扩张中不存在缺陷，当且仅当存在一个有限生成序列，使得 L 中的赋值 ω 在 K ([19],[16]) 上有此生成序列。计算被赋值支配的诺特局部环扩张的生成序列极其困难。对于二维正则局部环，这项工作已在 [18] 和 [9] 中完成；对于任意维正则局部环上的许多超曲面奇点，则已在 [7] 中完成。

在 S 上方的 R 扩张中，生成序列的性质决定了稳定形式中映射的性质。[4, 定理 1] 指出，若 $R \to S$ 是

二维优良正则局部环的扩张，其分式域构成有限扩张 $K \to L$，且 ω 是 L 的一个支配 S 的赋值，那么该扩张无缺陷，当且仅当存在沿 ν 的二次变换序列 $R \to R_1$ 和 $S \to S_1$，使得 ω 在 S_1 上具有有限生成序列 R_1。这表明，若不存在缺陷，我们可以期待得到良好的稳定形式（正如定理 1.2 所示）；否则则不然。

2. Preliminaries

2.1. 一些记号。设 K 是一个带有赋值 ν 的域。ν 的赋值环记为 $\mathcal{O}_\nu$，ν 的值群记为 νK，$\mathcal{O}_\nu$ 的剩余域记为 $K\nu$。

局部环 A 的极大理想记为 m_A。若 $A \to B$ 是局部环的一个扩张（包含）且 $m_B \cap A = m_A$，则称 B 支配 A。若赋值环 $\mathcal{O}_\nu$ 支配 A，则称赋值 ν 支配 A。

设 K 是域 k 上的代数函数域。K 的代数局部环 A 是一个局部整环，它是有限型 k-代数的局部化，且其分式域为 K。K 的一个 k-赋值是 K 的一个赋值，并且在 k 上平凡。

设 $K \to L$ 是域的一个有限代数扩张，K 上有赋值 ν，且 ν 上的赋值 ω 扩张到 L。则该扩张的约化分歧指数为 $e(\omega/\nu) = [\omega L : \nu K]$，其剩余次数为 $f(\omega/\nu) = [L\omega : K\nu]$。

缺陷 $\delta(\omega/\nu)$ 是 $\mathcal{O}_\omega$的剩余特征 p 的幂，其定义及基本性质在 [21, 第 VI 章第 11], [12] 节和 [8, 第 7 节1]中给出。在 L 是 K上的伽罗瓦扩张的情况下，我们有公式

$$[L : K] = e(\omega/\nu) f(\omega/\nu) \delta(\omega/\nu) g \tag{5}$$

其中，g 是将 ν 扩张到 L的扩张数。事实上，我们有方程（参见 [13] 或第 7 节1 [8]）

$$|G^s(\omega/\nu)| = e(\omega/\nu) f(\omega/\nu) \delta(\omega/\nu),$$

其中，$G^s(\omega/\nu)$ 是 L/K的分解群。

如果 $K \to L$ 是有限伽罗瓦扩张，则将 L/K 的伽罗瓦群记为 $\mathrm{Gal}(L/K)$。

2.2. 初始段、终止段与分割。我们根据 [13]回顾全序集中的一些关于分割的基本材料。设 $(S, <)$ 为一个全序集。S 的初始段是 S 的子集 Λ，满足：若 $\alpha \in \Lambda$ 且 $\beta < \alpha$，则 $\beta \in \Lambda$。S 的终止段是 S 的子集 Λ，满足：若 $\alpha \in \Lambda$ 且 $\beta > \alpha$，则 $\beta \in \Lambda$。S 中的一个分割是一对集合 (Λ^L, Λ^R)，满足 Λ^L 是 S 的初始段，且 Λ^R 是 S的终止段，并满足 $\Lambda^L \cup \Lambda^R = S$ 和 $\Lambda^L \cap \Lambda^R = \emptyset$。若 Λ_1 和 Λ_2 是 S中的两个分割，则当 $\Lambda_1^L \subsetneq \Lambda_2^L$时，记为 $\Lambda_1 < \Lambda_2$。设 $S \subset T$ 是有序集的保序包含，且 $\Lambda = (\Lambda^L, \Lambda^R)$ 是 S中的一个分割。于是，定义由 $\Lambda = (\Lambda^L, \Lambda^R)$ 在 T中诱导的分割为分割 $\Lambda \uparrow T = (\Lambda^L \uparrow T, T \setminus (\Lambda^L \uparrow T))$，其中 $\Lambda^L \uparrow T$是 T的最小初始段，使得 Λ^L 构成其共尾子集。

我们将 S 嵌入 S 的所有分割组成的集合中，映射 $s \in S$ 到

$$s^+ = (\{t \in S \mid t \le s\}, \{t \in S \mid t > s\}).$$

我们可以将 s 与分割 s^+等同。定义

$$s^- = (\{t \in S \mid t < s\}, \{t \in S \mid t \ge s\}).$$

给定分割 $\Lambda = (\Lambda^L, \Lambda^R)$，我们定义 $-\Lambda = (-\Lambda^R, -\Lambda^L)$，其中 $-\Lambda^L = \{-s \mid s \in \Lambda^L\}$ 且 $-\Lambda^R = \{-s \mid s \in \Lambda^R\}$。我们有：如果 Λ_1 和 Λ_2 是分割，那么当且仅当$-\Lambda_2 < -\Lambda_1$时，$\Lambda_1 < \Lambda_2$。

Observe that for $s \in S$, $-s = -(s^+) = (-s)^-$ and $-(s^-) = (-s)^+ = -s$.

2.3. 距离。设 $K \to L$ 是域扩张，ω 是 L 上的赋值，其在 K 上的限制为 ν。设 νK 是 νK 的可除包。假设 $z \in L$。那么，z 到 K 的距离在 [13, 第 2.3] 节中定义为 νK 中的分割 $\mathrm{dist}(z, K)$，其中 $\mathrm{dist}(z, K)$ 的初始段是 νK 中使得 $\omega(z - K)$ 共终的最小初始段。也就是说，

$$\mathrm{dist}(z, K) = (\Lambda^L(z, K), \Lambda^R(z, K)) \uparrow \widetilde{\nu K}$$

其中

$$\Lambda^L(z, K) = \{\omega(z - c) \mid c \in K \text{ and } \omega(z - c) \in \nu K\}.$$

等价关系的以下概念在 [13, 第 2.3] 节中定义。若 $y, z \in L$，则当且仅当 $\omega(z - y) > \mathrm{dist}(z, K)$ 时，$z \sim_K y$。

2.4. Artin-Schreier 扩张。设 $K \to L$ 是特征为 $p > 0$ 的域的 Artin-Schreier 扩张，ω 是 L 上的赋值，其在 K 上的限制为 ν。域 L 是 K 上的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 $G \cong \mathbb{Z}_p$，其中 p 是 K 的特征。

设 $\Theta \in L$ 是 K 的一个 Artin-Schreier生成元；也就是说，存在一个表达式

$$\Theta^p - \Theta = a$$

对某个 $a \in K$ 成立。我们有

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}_p = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}\},$$

其中 $\sigma_i(\Theta) = \Theta + i$。

由于 L 在 K 上是伽罗瓦扩张，我们有 $ge(\omega/\nu)f(\omega/\nu)\delta(\omega/\nu) = p$，其中 g 是 ν 到 L 的扩张数。因此，我们要么有 $g = 1$，要么有 $g = p$。若 $g = 1$，则 ω 是 ν 到 L 的唯一扩张，并且要么 $e(\omega/\nu) = p$ 且 $\delta(\omega/\nu) = 1$，要么 $e(\omega/\nu) = 1$ 且$\delta(\omega/\nu) = p$。特别地，当且仅当是一个立即扩张（$e = f = 1$）且 ω 是 ν 到 L 的唯一扩张时，该扩张才是缺陷扩张。

从现在起，在本小节中，假设 L 是 K 的一个缺陷扩张。根据 [13,引理 4.1],，距离 $\delta = \mathrm{dist}(\Theta, K)$ 不取决于 Artin-Schreier生成元 Θ 的选择，因此 δ 可称为该 Artin-Schreier扩张的距离。由于 L/K 是一个立即扩张，集合 $\omega(\Theta - K)$ 是 νK 中的一个初始段，根据 [13,定理 2.19]，它没有最大元。

由于该扩张是缺陷扩张，我们有

$$\delta = \mathrm{dist}(\Theta, K) \leq 0^- \tag{6}$$

根据 [13,推论 2.30]。

在 [13, 第 4] 节中，若存在一个次数为 p 的即时纯不可分扩张 $K(\eta)$，其满足 $\eta \sim_K \Theta$，则将缺陷 Artin-Schreier扩张 L 定义为相依缺陷阿廷-施赖尔扩张。否则，将 L/K 定义为独立缺陷阿廷-施赖尔缺陷扩张。根据 [13,命题 4.2]，对于一个缺陷 Artin-Schreier扩张，我们有

(7) L/K 当且仅当距离 $\delta = \mathrm{dist}(\Theta, K)$ 满足 $\delta = p\delta$ 时，才是独立的。

2.5. Artin-Schreier扩张中的秩1赋值扩张。在本小节中，我们假设 L 是域 K 的Artin-Schreier扩张，其中 K 的特征为 p，ω 是 L 上的秩1赋值，而 ν 是 ω 在 K 上的限制。我们假设 L 是 K 的缺陷扩张。为简化记号，假设存在一个将 νL 嵌入 $\mathbb{R}$ 的嵌入。由于 L 在 K 上具有缺陷，且 L 在 K 上是可分的，根据 [20]，第287页的推论，νL 是非离散的，从而 νL 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。

我们通过将Θ中的分割 dist(Θ, K)扩展为 $\mathbb{R}$ 中的分割来定义一个分割 $\widetilde{\nu K}$ 中的 $\mathbb{R}$分割，方法是将扩展分割的初始段取为 $\mathbb{R}$ 的最小初始段，使得分割 dist(Θ, K)在其中共尾。该分割随后为 dist$(\Theta, K) \uparrow \mathbb{R}$。对于某个$s \in \mathbb{R}$，该分割要么是 s，要么是 s^-。如果 L 是 K 的缺陷扩张，则由 [13, 定理 2.19] 和 [13, 推论 2.30]，有 dist$(\Theta, K) \uparrow \mathbb{R} = s^-$，其中 s 是一个非正实数。我们将 dist(ω/ν)设为该实数 s，从而

$$\operatorname{dist}(\Theta, K) \uparrow \mathbb{R} = s^- = (\operatorname{dist}(\omega/\nu))^-.$$

实数 dist(ω/ν) 是良定义的，因为根据引理 4.1 [13]，它与 L/K 的 Artin-Schreier生成元的选择无关。

在本小节的假设下，根据 (6) 和 (7)，Artin-Schreier扩张的距离 $\delta =$ dist(Θ, K)在该扩张具有缺陷时为 $\leq 0^-$。如果它是距离等于 0^- 的缺陷扩张，则它是独立缺陷扩张。如果它是缺陷扩张且距离小于 0^-，则该扩张是依赖亏格扩张。因此，如果 L/K 是缺陷扩张，则有 dist$(\omega/\nu) \leq 0$，并且缺陷扩张 L/K 是独立的，当且仅当 dist$(\omega/\nu) = 0$。

3. Calculations in two dimensional Artin-Schreier Extensions

设 M 是代数闭域 k 上的二维代数函数域，其特征为 $p > 0$，且 μ 是 M 上的非离散有理秩1赋值。设 A 是 M 的代数正则局部环，且被 μ 支配。A 的二次变换是一个扩张 $A \to A_1$，其中 A_1 是 A 的极大理想的爆破中的局部环，满足 A_1 支配 A，且 A_1 的维数为二。若二次变换 $A \to A_1$ 被 μ 支配，则称其沿赋值 μ 进行。

Let

$$A = A_0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots$$

是沿 μ 进行的二次变换序列。于是赋值环 $\mathcal{O}_\mu = \cup A_i$ （根据 [1, 引理 12]）。

设 $K \to L$ 是二维代数函数域的有限扩张，R 是 K 的代数正则局部环，且被 L 上的正则代数局部环 S 支配，并满足 dim $R =$ dim $S = 2$。设 x、y 是 S 的正则参数，u、v 是 R 的正则参数。于是我们可以构造雅可比理想

$$J(S/R) = (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}).$$

这个理想与正则参数的选择无关。

以下命题已在 [17] 中证明。

命题 3.1. 设 $K \to L$ 是特征为 $p > 0$的代数闭域 k 上的二维代数函数域的 Artin-Schreier扩张，ω 是 L 上的有理秩1非离散赋值，其限制为 $\nu = \omega|K$。进一步假设

A 是 K 的代数局部环，且 B 是 L 的代数局部环，并由ω 支配，使得 B 支配 A。那么存在一个由同态构成的交换图表

$$\begin{array}{ccc} R & \to & S \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \to & B \end{array}$$

使得 R 是 K 的一个正则代数局部环，其正则参数为 u、v、 S； L 的一个正则代数局部环，其正则参数为 x、y；且 S 被ω支配， S 支配 R， $R \to S$ 是拟有限的，对于某个非负整数 $\overline{c}$，有 $J(S/R) = (x^{\overline{c}})$，并且以下三种情形之一成立：

0) $u = x$、 $v = y$ （$R \to S$ 是非分歧的）。1) $u = x$、 $v = y^p\gamma + x\Sigma$，其中 γ 是 S 中的一个单位，且 $\Sigma \in S$。2) $u = \gamma x^p$、 $v = y$，其中 γ 是 S中的一个单位。

设 $K \to L$ 是代数闭域 k 上特征为 $p > 0$的二维代数函数域的一个Artin-Schreier扩张。设 $R \to S$ 是从 K 的一个正则代数局部环到 L 的一个正则代数局部环的扩张，且 S支配 R。

设 u, v 是 R 中的正则参数，且 x, y 是 S 中的正则参数。若满足

$$\text{Type 0:}\quad u = \gamma x, v = y\tau + x\Omega$$

其中 γ, τ 是 S 和 $\Omega \in S$ 中的单位，因此 $R \to S$ 是非分歧的。若满足

$$\text{Type 1:}\quad u = \gamma x, v = y^p\tau + x\Omega$$

其中 γ, τ 是 S 和 $\Omega \in S$ 中的单位。若满足

$$\text{Type 2:}\quad u = \gamma x^p, v = y\tau + x\Omega$$

其中 γ, τ 是 S 和 $\Omega \in S$ 中的单位。

这些定义使得：若上述某一种类型成立，且 $\overline{u}, \overline{v}$ 是 R 中的正则参数， $\overline{x}, \overline{y}$ 是 S 中的正则参数，并且 $\overline{u}$ 是 R 中某个 u 的单位倍， $\overline{x}$ 是 S 中某个 x 的单位倍，那么对于新的参数 $\overline{u}, \overline{v}$ 和 $\overline{x}, \overline{y}$， $R \to S$ 仍属于相同类型。

在构造我们的例子（定理 4.1）时，我们将用到 [6] 中的一些结果。

定理 3.2。（[6, 定理 4.1]）假设 $R \to S$ 相对于 S 中的正则参数 x, y 以及 R 中的 u, v 为类型 1，且 $J(S/R) = (x^{\overline{c}})$。令 $\overline{x} = u, \overline{y} = y - g(\overline{x})$，其中 $g(\overline{x}) \in k[\overline{x}]$ 是常数项为零的多项式，因此 $\overline{x}, \overline{y}$ 是 S 中的正则参数。计算雅可比行列式 $J(S/R)$，可得

$$u = \overline{x}, v = \overline{y}^p\gamma + \overline{x}^{\overline{c}}\overline{y}\tau + f(\overline{x})$$

其中 γ, τ 是 $\hat{}S$ 中的单位级数，且 $f(\overline{x}) = \sum e_i\overline{x}^i \in k[[\overline{x}]]$。进行变量替换 $\overline{v} = v - \sum e_i u^i$，其中求和遍历满足 $i \leq \frac{pq}{m}$ 的 i，因此 $u, \overline{v}$ 是 R 中的正则参数。

设 m、q 是满足 $m > 1$ 且最大公因数为 $= 1$ 的正整数。令 α 为 k 的一个非零元素。考虑二次变换序列 $S \to S_1$，使得 S_1 有正则参数 x_1、y_1，定义如下：

$$\overline{x} = x_1^m(y_1 + \alpha)^{a'}, \overline{y} = x_1^q(y_1 + \alpha)^{b'}$$

其中 a'、$b' \in \mathbb{N}$ 满足 $mb' - qa' = 1$。

我们有，$R \to S$ 相对于正则参数 $\overline{x}$、$\overline{y}$ 和 u、v 是类型 1。令 $\sigma =$ 为 m、pq 的最大公因数，它是 1 或 p。

存在唯一的二次变换序列 $R \to R_1$，使得 R_1 具有正则参数 u_1、v_1，其定义为

$$u = u_1^{\overline{m}}(v_1 + \beta)^{c'}, \overline{v} = u_1^{\overline{q}}(v_1 + \beta)^{d'}$$

其中 $0 \neq \beta \in k$ 给出一个同态的交换图

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \to & S_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \to & S \end{array}$$

使得 $R_1 \to S_1$ 是拟有限的。对于某个正整数 c_1，有 $J(S_1/R_1) = (x_1^{c_1})$，且 $R_1 \to S_1$ 是拟有限的。此外:

0) 如果 $\frac{q}{m} \geq \frac{\overline{c}}{p-1}$，那么 $R_1 \to S_1$ 是类型 0。1) 如果 $\frac{q}{m} < \frac{\overline{c}}{p-1}$ 且 $\sigma = 1$，那么 $R_1 \to S_1$ 是类型 1，且

$$\left(\frac{c_1}{p-1}\right) = \left(\frac{\overline{c}}{p-1}\right) m - q.$$

2) 如果 $\frac{q}{m} < \frac{\overline{c}}{p-1}$ 且 $\sigma = p$，那么 $R_1 \to S_1$ 是类型 2，且

$$\left(\frac{c_1}{p-1}\right) = \left(\frac{\overline{c}}{p-1}\right) m - q + 1.$$

在情形 1) 和 2) 中，$m = \sigma\overline{m}$、$pq = \sigma\overline{q}$ 和 $\overline{m}c' - \overline{q}d' = 1$。

定理 3.3。（[6, 定理 4.3]）设 $R \to S$ 相对于 S 中的正则参数 x、y 以及 R 中的正则参数 u、v 为类型 2，并且 $J(S/R) = (x^{\overline{c}})$。令 $g(u) \in k[u]$ 为一个常数项为零的多项式。进行变量替换，令 $\overline{v} = v - g(u)$ 且 $\overline{y} = \overline{v}$，使得 S 中的 x、$\overline{y}$ 为正则参数，且 R 中的 u、$\overline{v}$ 为正则参数。

设 m、q 为满足最大公因数$(m, q) = 1$ 的正整数。令 α 为k的一个非零元素。考虑二次变换序列 $S \to S_1$，使得 S_1 具有由下式定义的正则参数x_1、y_1

$$x = x_1^m(y_1 + \alpha)^{a'}, \overline{y} = x_1^q(y_1 + \alpha)^{b'}$$

其中 a'、$b' \in \mathbb{N}$ 满足 $mb' - qa' = 1$。

设 $\sigma = \gcd(pm, q)$，其值为 1 或 p。存在唯一的二次变换序列 $R \to R_1$，使得 R_1 具有正则参数 u_1、v_1，定义如下:

$$u = u_1^{\overline{m}}(v_1 + \beta)^{c'}, \overline{v} = u_1^{\overline{q}}(v_1 + \beta)^{d'}$$

其中 $pm = \sigma\overline{m}$、$q = \sigma\overline{q}$、$\overline{m}d' - c'\overline{q} = 1$ 和 $0 \neq \beta \in k$，从而得到由同态构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \to & S_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \to & S \end{array}$$

使得 $R_1 \to S_1$ 是拟有限的。对于某个正整数 c_1，有 $J(S_1/R_1) = (x_1^{c_1})$。此外:

1) 若 $\sigma = 1$，则 $R_1 \to S_1$ 属于类型 1，且

$$\left(\frac{c_1}{p-1}\right) = \left(\frac{\overline{c}}{p-1}\right) m - m.$$

2) 若 $\sigma = p$，则 $R_1 \to S_1$ 属于类型 2，且

$$\left(\frac{c_1}{p-1}\right) = \left(\frac{\overline{c}}{p-1}\right) m - m + 1.$$

以下命题的证明见 [6, 命题 7.9]。更一般的结果证明见 [15]。

命题 3.4。（Kuhlmann 和 Piltant, [14]）设 K 和 L 是代数闭域 k 上的二维代数函数域，且 k 的特征为 $p > 0$, $K \to L$ 是一个 Artin-Schreier扩张。设 ω 是 L 上的有理秩一非离散赋值，且 ν 是 ω 在 K上的限制。假设 L 是 K的一个缺陷扩张。

设 R 是 K 的一个正则代数局部环, S 是 L 的一个正则代数局部环，且 ω 支配 S, S 支配 R，并且 $R \to S$ 为类型 1 或 2。通过归纳应用定理 3.2 和定理 3.3，我们构造一个图表，其中水平序列是正则局部环的双有理扩张

$$\begin{array}{ccccccc} S = S_0 & \to & S_1 & \to & S_2 & \to & \cdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ R = R_0 & \to & R_1 & \to & R_2 & \to & \cdots \end{array} \tag{8}$$

其中 $\cup_{i=1}^{\infty} S_i = \mathcal{O}_\omega$。进一步假设，对于每个映射 $R_i \to S_i$，存在正则参数 u、v（在 R_i 中）以及 x、y（在 S_i 中），使得以下形式之一成立：

$$u = x, v = f \tag{9}$$

其中 $\dim_k S_i/(x, f) = p$，或者

$$u = \delta x^p, v = y \tag{10}$$

其中 δ 是 S_i 中的一个单位，并且在两种情况下, $x = 0$ 都是 Spec(S_i) $\to$ Spec(R_i) 的临界轨迹的局部方程。令

$$J_i = J(S_i/R_i) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

为映射 $R_i \to S_i$ 的雅可比理想。

则距离 dist(ω/ν) 由以下公式计算：

$$-\mathrm{dist}(\omega/\nu) = \frac{1}{p-1} \inf_i \{\omega(J(S_i/R_i))\}$$

其中下确界取遍序列（8）中的 $R_i \to S_i$。

4. An example of a tower of independent defect extensions in which strong local monomialization doesn't hold

定理 4.1. 存在一座由赋值二维代数函数域的独立型亏损 Artin-Schreier 扩张构成的塔 (K, ν) $\to$ (L, ω) $\to$ (M, μ)，其基域为特征 $p > 0$ 的代数闭域 k，并且存在分别属于 K 和 M 的代数正则局部环 A 与 C，使得 μ 支配 C，且 C 支配 A，但沿 μ 的强局部单项化在 $A \to C$ 之上并不成立。

注记 4.2. 令 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个固定比值。假设 $R \to S$ 属于类型 1。通过在定理 3.2 中取足够大的 m 和 q，使得 $R_1 \to S_1$ 属于类型 2，我们可以得到 $v_1 = \lambda y_1 + g(x_1)$，其中 λ 是 S_1 中的一个单位，并且 $g(x_1)$ 的阶可以任意大。假设 $R \to S$ 属于类型 2。通过在定理 3.3 中取足够大的 m 和 q

使得 $R_1 \to S_1$ 属于类型 1，我们可以得到 $v_1 = y_1^p\gamma + x_1^{c_1}y_1\tau + f(x_1)$，其中 γ 和 τ 是 S_1 中的单位级数，并且 $f(x_1)$ 的阶可以任意大。在这两种情况下，我们都可以选择 m 和 q，使得 $\frac{q}{m}$ 任意接近 δ。

注 4.3. 在定理 3.3 中，我们有表达式 $\overline{v} = \tau y + f(x)$，其中 τ 是 S 中的一个单位。设 m 和 q 为正整数，且 $\gcd(m, q) = 1$，并满足 $\operatorname{ord} f(x) > \frac{q}{m}$。那么，定理 3.3 的证明可以扩展，从而表明定理 3.3 的结论仍然成立，只需将 $\overline{y}$ 替换为 y。

现在给出定理 4.1 的证明。

证明。设 K 是代数闭域上的二维代数函数域，设 R_{-2} 是 K 的二维代数正规局部环。设 u_{-2}、v_{-2} 是 R_{-2} 中的正则参数。

设 e 为正整数。令 $c_{-2} = (p-1)e$。设 Θ 是 Artin-Schreier 多项式 $X^p - X - v_{-2}u_{-2}^{-pe}$ 的一个根。令 $L = K(\Theta)$。置 $x_{-2} = u_{-2}$、$y_{-2} = u_{-2}^e\Theta$。令 $S_{-2} = R_{-2}[y_{-2}]_{(x_{-2},y_{-2})}$，它是 L 的一个代数正规局部环，并且支配 R_{-2}。S_{-2} 中的正则参数 x_{-2}、y_{-2} 满足 $u_{-2} = x_{-2}$、$v_{-2} = y_{-2}^p - x_{-2}^{e(p-1)}y_{-2}$，因此扩张 $R_{-2} \to S_{-2}$ 属于类型 1。我们有 $J(S_{-2}/R_{-2}) = (x_{-2}^{c_{-2}})$，其中 $\frac{c_{-2}}{p-1} > 0$。

我们首先构造一个交换图表 m

$$\begin{array}{ccc} S_{-2} & \to & S_{-1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R_{-2} & \to & R_{-1} \end{array}$$

利用定理 3.2，使得 $R_{-1} \to S_{-1}$ 为类型 2。设 Σ 为 Artin-Schreier 多项式 $X^p - X - y_{-1}x_{-1}^{-pe}$ 的一个根。令 $M = L(\Sigma)$。设 $z_{-1} = x_{-1}$, $w_{-1} = x_{-1}^e\Sigma$。令 $T_{-1} = S_{-1}[w_{-1}]_{(z_{-1},w_{-1})}$，这是一个 M 的代数正则局部环，且支配 S_{-1}。T_{-1} 中的正则参数 z_{-1}, w_{-1} 满足 $x_{-1} = z_{-1}, y_{-1} = w_{-1}^p - z_{-1}^{e(p-1)}w_{-1}$，因此扩张 $S_{-1} \to T_{-1}$ 为类型 1。我们有 $J(T_{-1}/S_{-1}) = (z_{-1}^{c'_{-1}})$，其中 $\frac{c'_{-1}}{p-1} > 0$。

根据定理 3.2 和定理 3.3，我们构造出

$$\begin{array}{ccc} T_{-1} & \to & T_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_{-1} & \to & S_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ R_{-1} & \to & R_0 \end{array}$$

使得 $R_0 \to S_0$ 为类型 1，而 $S_0 \to T_0$ 为类型 2。具体来说，R_{-1}、R_0、S_{-1}、S_0、T_{-1}、T_0 分别具有正则参数（u_{-1}, v_{-1}）、（u_0, v_0）、（x_{-1}, y_{-1}）、（x_0, y_0）以及（z_{-1}, w_{-1}）、（z_0, w_0），这些参数满足方程

$$\begin{aligned} u_{-1} &= u_0^{pm_0}(v_0 + \beta_0)^{d'_0}, v_{-1} = u_0^{q_0}(v_0 + \beta_0)^{e'_0} \\ x_{-1} &= x_0^{m_0}(y_0 + \alpha_0)^{a'_0}, y_{-1} = x_0^{q_0}(w_0 + \alpha_0)^{g'_0} \\ z_{-1} &= z_0^{pm_0}(v_0 + \gamma_0)^{f'_0}, w_{-1} = z_0^{q_0}(w_0 + \gamma_0)^{g'_0} \end{aligned}$$

其中 $p \nmid q_0$ 和 $\frac{q_0}{pm_0} < \frac{c'_{-1}}{p-1}$ 其中 $J(T_{-1}/S_{-1}) = (z_{-1}^{c'_{-1}})$。

根据注记 4.2 和 4.3，我们可以构造 $R_0 \to S_0 \to T_0$，使得我们有如下表达式$y_0 = \lambda_0 w_0 + g_0(z_0)$, 其中 λ_0 是 T_0 中的单位，且 ord $g_0(z_0)$ 可以任意大；以及 $v_0 = \sigma_0 y_0^p + \tau_0 x_0^{c_0} y_0 + f_0(x_0)$，其中 σ_0, τ_0 是 S_0 中的单位，且 ord $f_0(x_0)$ 可以任意大。

我们将归纳地构造一个交换图，其中 $K \to L \to M$ 由二维正则代数局部环组成

$$\begin{array}{ccccccc} T_0 & \to & T_1 & \to & T_2 & \to & \cdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ S_0 & \to & S_1 & \to & S_2 & \to & \cdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ R_0 & \to & R_1 & \to & R_2 & \to & \cdots \end{array} \tag{11}$$

使得当 i 为偶数时，$R_i \to S_i$ 为类型 1；当 i 为奇数时，$R_i \to S_i$ 为类型 2；当 i 为偶数时，$S_i \to T_i$ 为类型 2；当 i 为奇数时，$S_i \to T_i$ 为类型 1。此外，由这些序列确定的相应函数域 K、L 和 M 上的赋值 ν、ω 和 μ 满足：$K \to L$ 和$L \to M$ 是独立缺陷扩张。我们将使 R_i 具有正则参数（u_i，v_i），S_i具有正则参数（x_i，y_i），且 T_i具有正则参数（z_i，w_i），使得

$$u_i = u_{i+1}^{\overline{m}_{i+1}}(v_{i+1}+\beta_{i+1})^{d'_{i+1}}, v_i = u_{i+1}^{\overline{q}_{i+1}}(v_{i+1}+\beta_{i+1})^{e'_{i+1}},$$

$$x_i = x_{i+1}^{m_{i+1}}(y_{i+1}+\alpha_{i+1})^{a'_{i+1}}, y_i = x_{i+1}^{q_{i+1}}(y_{i+1}+\alpha_{i+1})^{b'_{i+1}},$$

$$z_i = z_{i+1}^{m'_{i+1}}(w_{i+1}+\gamma_{i+1})^{f'_{i+1}}, w_i = z_{i+1}^{q'_{i+1}}(w_i+\gamma_{i+1})^{g'_{i+1}}$$

对所有 i，$\overline{m}_i$、m_i 和 m'_i 均大于 1。

令 $J(S_i/R_i) = (x_i^{c_i})$ 且 $J(T_i/S_i) = (z_i^{c'_i})$。

若 i为偶数，则 $m_{i+1} = p\overline{m}_{i+1}$、$m'_{i+1} = \overline{m}_{i+1}$、$q_{i+1} = \overline{q}_{i+1}$、$q'_{i+1} = q_{i+1}$ 以及

$$\frac{q_{i+1}}{m_{i+1}} < \frac{c_i}{p-1}.$$

如果 i为奇数，则 $\overline{m}_{i+1} = pm_{i+1}$、$m'_{i+1} = \overline{m}_{i+1}$、$q_{i+1} = \overline{q}_{i+1}$、$q'_{i+1} = q_{i+1}$ 以及

$$\frac{q'_{i+1}}{m'_{i+1}} < \frac{c'_i}{p-1}.$$

在我们的构造中，如果 r 为偶数，我们将有

$$y_r = \lambda_r w_r + g_r(z_r) \tag{12}$$

其中 λ_r 是 T_r 中的一个单位，且 ord $g_r(z_r)$ 可以任意大，并且

$$v_r = \sigma_r y_r^p + \tau_r x_r^{c_r} y_r + f_r(x_r) \tag{13}$$

其中 σ_r、τ_r 是 S_r 中的单位，且 ord $f_r(x_r)$ 可以任意大。如果 r 为偶数，我们将有 e

$$y_r = \sigma_r w_r^p + \tau_r z_r^{c'_r} w_r + f(z_r) \tag{14}$$

其中 σ_r、τ_r是 T_r中的单位，且 ord $f(z_r)$ 可以任意大，并且

$$v_r = \lambda_r y_r + g_r(x_r) \tag{15}$$

其中，λ_r 是 S_r 中的单位，且 ord $g_r(x_r)$ 可以任意大。

假设 r 是偶数，并且我们已经构造了 $R_r \to S_r \to T_r$。我们将构造

$$\begin{array}{ccccc} T_r & \to & T_{r+1} & \to & T_{r+2} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S_r & \to & S_{r+1} & \to & S_{r+2} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R_r & \to & R_{r+1} & \to & R_{r+2}. \end{array}$$

存在一个整数 $\lambda(r+1) > 1$ 和 $q_{r+1} \in \mathbb{Z}_+$，使得 $\gcd(q_{r+1}, p) = 1$ 且

$$\frac{c_r}{p-1} > \frac{q_{r+1}}{p^{\lambda(r+1)}} > \frac{c_r}{p-1} - \frac{1}{2^{r+1}} m_1 \cdots m_r. \tag{16}$$

事实上，我们可以找到任意大的满足该不等式的 $\lambda(r+1)$。令 $m_{r+1} = p^{\lambda(r+1)}$。我们有 $\frac{q_{r+1}}{m_{r+1}} < \frac{c_r}{p-1}$，且 $\gcd(m_{r+1}, pq_{r+1}) = p$。对 m_{r+1} 和 q_{r+1}的这一选择（连同对 $0 \neq \alpha_{r+1} \in k$的选择）确定了 $S_r \to S_{r+1}$。我们有一个表达式$v_r = \sigma_r y_r^p + \tau_r x_r^{c_r} y_r + f_r(x_r)$，其中 ord $f_r(x_r)$ 可以任意大。特别地，我们可以假设 ord $f_r(x_r) > \frac{pq_{r+1}}{m_{r+1}}$。于是，根据定理 3.2，$R_r \to R_{r+1}$ 按所需方式定义。由注记 4.2 可知，由于我们可以取任意大的 $\lambda(r+1)$，因此可以假设$v_{r+1} = \lambda_{r+1} y_{r+1} + g_{r+1}(x_{r+1})$，其中 ord $g_{r+1}(x_{r+1})$ 可以任意大。

根据注 4.3 和定理 3.3，$T_r \to T_{r+1}$ 按所需方式定义，并且有 $m'_{r+1} = \frac{m_{r+1}}{p}$、$q'_{r+1} = q_{r+1}$。由于可以使 $\lambda(r+1)$ 任意大，我们可以假设 $y_{r+1} = \sigma_{r+1} w_{r+1}^p + \tau_{r+1} z_{r+1}^{c'_{r+1}} w_r + f_{r+1}(z_{r+1})$，其中 ord $f_{r+1}(z_{r+1})$ 任意大。

我们定义了一个交换图

$$\begin{array}{ccc} T_r & \to & T_{r+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_r & \to & S_{r+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R_r & \to & R_{r+1} \end{array} \tag{17}$$

它具有所需的性质；特别地，$R_{r+1} \to S_{r+1}$ 属于类型 2，且

$$\frac{c_{r+1}}{p-1} = \left(\frac{c_r}{p-1}\right) m_{r+1} - q_{r+1} + 1$$

并且 $S_{r+1} \to T_{r+1}$ 属于类型 1，且

$$\frac{c'_{r+1}}{p-1} = \frac{c'_r}{p-1} m'_{r+1} - m'_{r+1}.$$

现在选取 q'_{r+2}、$m'_{r+2} = p^{\lambda(r+2)}$，使得 $p \nmid q'_{r+2}$，并且

$$\frac{c'_{r+1}}{p-1} > \frac{q'_{r+2}}{m'_{r+2}} > \frac{c'_{r+1}}{p-1} - \frac{1}{2^{r+2}} m'_1 \cdots m'_{r+1}. \tag{18}$$

我们可以令 $\lambda(r+2)$ 任意大。令 $m_{r+2} = \frac{m'_{r+2}}{p} = p^{\lambda(r+2)-1}$, $q_{r+2} = q'_{r+2}$。由 (18)，$\frac{q'_{r+2}}{m'_{r+2}} < \frac{c'_{r+1}}{p-1}$。

现在，按照 (17) 的构造，利用定理 3.2 和定理 3.3、注 4.3 以及 m_{r+2} and q_{r+2} 的这些取值进行构造，

$$\begin{array}{ccc} T_{r+1} & \to & T_{r+2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_{r+1} & \to & S_{r+2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R_{r+1} & \to & R_{r+2}, \end{array}$$

因此， $R_{r+2} \to S_{r+2}$ 属于类型 1，而 $S_{r+2} \to T_{r+2}$ 属于类型 2。根据注记 4.2，我们得到 $r+2$的表达式 (12) 和 (13)。

通过归纳法，我们构造出图表 (11)。

设 $A = R_0$ 和 $C = T_0$。我们将证明，沿着 μ，在 $A \to C$ 之上不成立强局部单项化。假设 $R' \to T'$ 在 $A \to C$之上具有强单项式形式。那么， R'具有正则参数 u'、v'，且 T'具有正则参数 z'、w'，使得 $u' = \lambda(z')^m$ 且 $v' = w'$，其中 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，并且 λ 是 T' 中的单位。我们将证明这不可能发生。存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} T_s & \to & T' & \to & T_{s+1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R_s & \to & R' & \to & R_{s+1} \end{array}$$

对于某个 s。环 T'具有正则参数 $\overline{z}$、$\overline{w}$，使得

$$z_s = \overline{z}^a \overline{w}^b, w_s = \overline{z}^c \overline{w}^d \tag{19}$$

对于某些 a、b、c、$d \in \mathbb{N}$，其中 $ad - bc = \pm 1$，且 R'具有正则参数 $\overline{u}$、$\overline{v}$，使得 $u_s = \overline{u}^{\overline{a}} \overline{v}^{\overline{b}}$、 $v_s = \overline{u}^{\overline{c}} \overline{v}^{\overline{d}}$，其中 $\overline{a}\overline{d} - \overline{b}\overline{c} = \pm 1$。我们有一个表达式

$$u_s = \alpha z_s^p, v_s = \beta w_s^p + \Omega \tag{20}$$

其中 α、β 是 T_s 中的单位，并且

$$\Omega = \varepsilon z_s^{pc_s} w_s + M \tag{21}$$

or

$$\Omega = \varepsilon z_s^{c'_s} w_s + M \tag{22}$$

其中 $\varepsilon \in T_s$ 是一个单位， M 是由 z_s、w_s 中关于 z_s的高阶单项式组成的和。此外，(21) 中的 $\mu(w_s^p) < \mu(z_s^{pc_s} w_s)$，以及 (22) 中的 $\mu(w_s^p) < \mu(z_s^{c'_s} w_s)$。

特别地， $R_s \to T_s$ 不是强单项式形式。

将 (19) 代入 (20) 中的 u_s 和 v_s，得到

$$u_s = \alpha \overline{z}^{ap} \overline{w}^{bp}, v_s = \beta \overline{z}^{cp} \overline{w}^{dp} + \Omega. \tag{23}$$

我们必然有 $u_s | v_s$ 或 $v_s | u_s$ 属于 T'。

首先，假设 $c \geq a$ 和 $d \geq b$。则有

$$u_s = \alpha \overline{z}^{ap} \overline{w}^{bp}, \frac{v_s}{u_s} = \beta \overline{z}^{(c-a)p} \overline{w}^{(d-b)p} + \frac{\Omega}{\alpha \overline{z}^{ap} \overline{w}^{bp}}$$

得到形式为 (23) 的表达式。我们将证明这不是强单项式形式。若它是强单项式形式，则必须有 $a = 0$ 或 $b = 0$，因此

$$z_s = \overline{w}, w_s = \overline{zw}^d \tag{24}$$

or

$$z_s = \overline{z}, w_s = \overline{z}^c \overline{w} \tag{25}$$

并且必须有 Ωu_s 是 T' 中正则参数系的一部分。代入 (21) 或 (22)，可知除非 (22) 成立且 $\frac{z_s^{c_s'} w_s}{u_s}$ 是 T' 中正则参数系的一部分，否则不可能出现这种情况。

假设 (22) 和 (24) 成立，且

$$\frac{z_s^{c_s'} w_s}{u_s} = \frac{\overline{w}^{c_s'+d}\overline{z}}{\alpha \overline{w}^p}$$

属于 T' 中的一个正则参数系。现在，在这种情况下，$\mu(w_s) > \mu(z_s)$ 且 $\mu(w_s^p) < \mu(z_s^{c_s'} w_s)$，所以 $p \leq c_s'$。因此，$\frac{\overline{w}^{c_s'+d}\overline{z}}{\alpha \overline{w}^p}$ 不能属于 T' 中的一个正则参数系。类似的论证表明，当 (22) 和 (25) 成立时，我们也无法得到强单项式形式。

假设 $c < a$ 和 $d < b$。那么我们有如下表达式

$$v_s = \gamma \overline{z}^{cp} \overline{w}^{dp}, \frac{u_s}{v_s} = \alpha \gamma^{-1} \overline{z}^{(a-c)p} \overline{w}^{(b-d)p}$$

其中 $\gamma \in T'$ 是一个单位，从而得到一个具有 (23) 形式的表达式，它不是强单项式形式。因此，我们归结到 $(c-a)(d-b) < 0$ 的情形。于是，由于 $u_s \nmid \overline{z}^{cp}\overline{w}^{dp}$，我们有 $u_s \nmid v_s$。假设 $v_s | u_s$。那么 $v_s = \lambda \overline{z}^{cp}\overline{w}^{dp}$，其中 λ 是 T' 中的一个单位。但这是不可能的，因为 $(c-a)(d-b) < 0$。因此，$R' \to T'$ 具有 (23) 的形式，其中 a、b、c、$d > 0$，所以它不能是强单项式形式。我们已经证明，沿着 μ 的强局部单项化在 $A \to C$ 上方不成立。

由定理 3.2 可得

$$\left(\frac{c_{r+1}}{p-1}\right)\frac{1}{m_1 \cdots m_{r+1}} = \left(\frac{c_r}{p-1}\right)\frac{1}{m_1 \cdots m_r} - \frac{q_{r+1}}{m_{r+1}}\left(\frac{1}{m_1 \cdots m_r}\right) + \frac{1}{m_1 \cdots m_{r+1}}. \tag{26}$$

于是由定理 3.3 可得

$$\frac{c_{r+2}}{p-1} = \left(\frac{c_{r+1}}{p-1}\right) m_{r+2} - m_{r+2},$$

因此

$$\left(\frac{c_{r+2}}{p-1}\right)\frac{1}{m_1 \cdots m_{r+2}} = \left(\frac{c_r}{p-1}\right)\frac{1}{m_1 \cdots m_r} - \frac{q_{r+1}}{m_1 \cdots m_{r+1}}. \tag{27}$$

由方程 (16) 可得

$$\frac{1}{2^{r+1}} > \left(\frac{c_r}{p-1}\right)\frac{1}{m_1 \cdots m_r} - \left(\frac{q_{r+1}}{m_{r+1}}\right)\frac{1}{m_1 \cdots m_r} > 0. \tag{28}$$

由定理 3.2,

$$\left(\frac{c_{r+2}'}{p-1}\right)\frac{1}{m_1' \cdots m_{r+2}'} = \left(\frac{c_{r+1}'}{p-1}\right)\frac{1}{m_1' \cdots m_{r+1}'} - \frac{q_{r+2}'}{m_1' \cdots m_{r+2}'} + \frac{1}{m_1' \cdots m_{r+2}'}$$

并且由定理 3.3,

$$\frac{c_{r+3}'}{p-1} = \left(\frac{c_{r+2}'}{p-1}\right) m_{r+3}' - m_{r+3}'.$$

因此，我们有

$$\left(\frac{c_{r+3}'}{p-1}\right)\frac{1}{m_1' \cdots m_{r+3}'} = \left(\frac{c_{r+1}'}{p-1}\right)\frac{1}{m_1' \cdots m_{r+1}'} - \frac{q_{r+2}'}{m_1' \cdots m_{r+2}'}. \tag{29}$$

方程（18）意味着

$$\frac{1}{2^{r+2}} > \left(\frac{c'_{r+1}}{p-1}\right)\frac{1}{m'_1\cdots m'_{r+1}} - \frac{q'_{r+2}}{m'_1\cdots m'_{r+2}} > 0. \tag{30}$$

现在 $J(S_i/R_i) = (x_i^{c_i})$，$x_0 = x_i^{m_1 \cdots m_i}$因此 $\omega(J(S_i/R_i)) = \frac{c_i}{m_1\cdots m_i}\omega(x_0)$，从而根据命题 3.4、(27) 和 (28)，我们有

$$-\mathrm{dist}(\omega/\nu) = \frac{1}{p-1}\inf_i\{\omega(J(S_i/R_i))\} = 0.$$

我们有 $J(T_i/S_i) = (z_i^{c'_i})$，$z_0 = z_i^{m'_1\cdots m'_i}$因此 $\omega(J(T_i/S_i)) = \frac{c'_i}{m'_1\cdots m'_i}\omega(z_0)$，从而根据命题 3.4、(29) 和 (30)，我们有

$$-\mathrm{dist}(\mu/\omega) = \frac{1}{p-1}\inf_i\{\omega(J(T_i/S_i))\} = 0.$$

□

References

[1] S. Abhyankar，关于以局部整环为中心的赋值，《美国数学杂志》78（1956年），321 - 348。[2] S.D. Cutkosky，局部分解与态射单项式化，Ast´erisque 260，1999年。[3] S.D. Cutkosky，《从三维簇到曲面的态射单项式化》，Springer 讲义，LNM 1786（2002年），235页。[4] S.D. Cutkosky，赋值下伴随分次环扩张的有限生成中缺陷与分裂的作用，《代数与数论》11（2017年），1461 - 1488。[5] S.D. Cutkosky，正特征下局部单项式化的反例，《数学年刊》362（2015年），321 -334。[6] S.D. Cutkosky，正特征下映射的异常双有理行为，即将在《数学新闻》发表，arXiv: 2111 12818 。S.D. Cutkosky、H. Mourtada 和 B. Teissier[7]，关于赋值及生成序列的构造，《代数几何》，《Compositio Mathematica》基金会，8（2021年），705 - 748。[8] S.D. Cutkosky 和 O. Piltant，赋值的分歧，《数学进展》183（2004年），1-79。[9] S.D. Cutkosky 和 Pham An Vinh，二维局部环的赋值半群，《伦敦数学会会刊》，2013年。[10] O. Endler，赋值理论，Springer 出版社，1972年。[11] S. El Hitti 和 L. Ghezzi，依赖的 Artin–Schreier 缺陷扩张与强单项式化，《纯粹与应用代数杂志》220（2016年），1331 -1342。[12] F.-V. Kuhlmann，《奇点消解——致敬 Oscar Zariski 的研究教材》中的局部一致化的赋值论及模型论方面。Herwig Hauser、Joseph Lipman、Frans Oort、Adolfo Quiros 编。《数学进展》第181卷，Birkhäuser 巴塞尔出版社（2000年），381 - 456。[13] F.-V. Kuhlmann，Artin–Schreier 缺陷扩张的分类及无缺陷域的刻画，《伊利诺伊数学杂志》54（2010年），397 - 448。[14] F-V. Kuhlmann 和 O. Piltant，Artin–Schreier 缺陷扩张的高阶分歧群，手稿，2012年。[15] F.V. Kuhlmann 和 A. Rzepka，深度分歧域的赋值理论及其与缺陷扩张的联系，即将在《美国数学会汇刊》发表。[16] J. Novacoski 和 M. Spivakovsky，关键多项式与伪收敛序列，《代数杂志》495（2018年），199 - 219。[17] O. Piltant，正特征下的 Jung 方法。纪念 Fr´ed´eric Pham 的国际会议论文集（尼斯，2002年）。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）53（2003年），第4期，1237 - 1258。

[18] M. Spivakovsky，曲面函数域中的赋值，《美国数学杂志》112（1990年），107 - 156。[19] M. Vaqui´e，赋值的可容许族与扩张的缺陷，《代数学杂志》331（2007年），859 - 876。[20] O. Zariski 和 P. Samuel，交换代数第一卷，Van Nostrand，1958年。[21] O. Zariski 和 P. Samuel，交换代数第二卷，Van Nostrand，1960年。

Steven Dale Cutkosky, Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia,MO 65211, USA*Email address*: cutkoskys@missouri.edu