arXiv:2302.07719v1 [math.CV] 15 Feb 2023

某些有界双解析函数与双调和映射的朗道 型定理

Ming-Sheng Liu 和 Saminathan Ponnusamy

Abstract. 本文针对形如 $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$ 的有界双解析函数，建立了三个新的朗道 型定理版本，其中 G 和 H 在单位圆盘 $|z| < 1$ 中解析，且满足 $G(0) = H(0) = 0$ 以及 $H'(0) = 1$。其中，两个版本是尖锐的，另一个则推广或改进了 Abdulhadi 和 Hajj 的相应结果。作为推论，我们证明了有界双调和映射某些子类的几个新的尖锐版本的朗道 型定理。

1. Introduction and Preliminaries

经典复分析中的一个开放问题，是求出单位圆盘中解析函数的 Bloch常数的精确值。在 [5], Chen 等人以及 Guathier 研究了估计平面调和映射的 Bloch常数这一类似问题。另请参见 Chen 和 Guathier 关于平面调和映射与多重调和映射的工作 [6] 。受该领域工作的启发 [5], ，许多作者对这一课题进行了研究，并对此前已知的朗道 型定理作出了重大改进。这些成果将在本节稍后介绍。本文研究双解析映射和双调和映射，并为这两类映射建立若干新的尖锐版本的朗道 型定理。

1.1. 定义与记号。复值函数 f 在域 $D \subset \mathbb{C}$ 上是双解析函数（分别地，调和函数），当且仅当 f 二阶连续可微，并且在 D 中满足双解析方程 $f_{\bar{z}\bar{z}}(z) = 0$ （分别地，拉普拉斯方程 $f_{z\bar{z}}(z) = 0$）；其形式导数采用通常的记号:

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad \text{and} \quad f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y), \quad z = x + iy.$$

另请注意

$$\Delta f = 4f_{z\overline{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

众所周知，在单连通域 D 中，每个双解析函数 f 都可表示为（参见 [1]）

$$f(z) = \bar{z}g(z) + h(z),$$

File: arXiv-LiuSamy12_2022_-BiAnalytic.tex, printed: 16-2-2023, 1.38 2020年数学主题分类。主要分类号：30C99、31A05、31A30；次要分类号：30C62。关键词与短语：Landau 型定理；Bloch定理；双解析函数；调和映射；双调和映射；单叶。

其中， g 和 h 是定义在 D 上的复值解析函数。类似地，在单连通域 D 中，每个调和函数 f 都可写成 $f = h+\overline{g}$，其中 $f(0) = h(0)$，而 g 和 h 在 D 上解析（详情参见 [11]）。

复值函数 F 在域 $D \subset \mathbb{C}$ 上称为双调和函数，当且仅当 F 四次连续可微且满足双调和方程 $\Delta(\Delta f) = 0$ 于 D。众所周知（参见 [3]），单连通域 D 上的双调和映射 F 有如下表示:

$$F(z) = |z|^2 G(z) + H(z),$$

其中， G 和 H 在 D 上调和。

域 $D \subset \mathbb{C}$ 称为星形域，当且仅当连接原点 0 与任意其他点 $w \in D$ 的线段 $[0, w]$ 完全位于 D 内。

定义 1.（参见 [23, 24, 25]）若连续可微函数 F 在 D 上保向， $F(0) = 0$，且 $F(z) \neq 0$ 在 $D\backslash\{0\}$ 中，并且对于每个 $r \in (0, 1)$，曲线 $F(re^{it})$ 关于原点是星形的，则称其在 D 中全星形。最后一个条件等价于说

$$\frac{\partial \arg F(re^{it})}{\partial t} = \mathrm{Re}\left(\frac{zF_z(z) - \bar{z}F_{\bar{z}}(z)}{F(z)}\right) > 0$$

对所有 $z = r\,e^{it}$ 和 $r \in (0, 1)$。

对于复值函数 f 属于 D，其雅可比行列式 $J_f(z)$由 $J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2$给出。我们称调和映射 f 局部单叶且保向，当且仅当其雅可比行列式 $J_f(z) > 0$ 对 $z \in D$ 成立（参见 [16]）。对于连续可微函数 f，令

$$\Lambda_f(z) = |f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)| \quad \text{and} \quad \lambda_f(z) = \big||f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|\big|.$$

全文中： $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C}$ 表示以原点为中心的开圆盘，使得$\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$ 为单位圆盘。为方便读者，我们先固定一些基本记号。

- $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) = \{f :$ f 在 $\mathbb{D}\}$中解析
- $\mathcal{B}_M = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}):$ $|f(z)| \leq M$ 属于 $\mathbb{D}\}$
- $\mathcal{A}_0 = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}):$ $f(0) = 0\}$ 且 $\mathcal{A}_1 = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}):$ $f'(0) = 1\}$
- $\mathcal{A} = \{f \in$全纯$(\mathbb{D}):$ $f(0) = 0 = f'(0) - 1\} := \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_0$
- $\mathcal{H} = \{f :$ f 在 $\mathbb{D}\}$中是调和函数
- $\mathcal{H}_0 = \{f \in \mathcal{H} :$ $f(0) = 0\}$
- $\mathcal{BH}_M = \{f \in \mathcal{H} :$ $|f(z)| \leq M$ 在 $\mathbb{D}\}$
- $\mathcal{BH}_M^0 = \mathcal{BH}_M \cap \mathcal{H}_0$
- $\mathrm{Bi}\mathcal{H} = \{f :$ f 在 $\mathbb{D}\}$中是双调和函数
- $\mathrm{Bi}\mathcal{A}_0 = \{f :$ f 在 $\mathbb{D}$ 中是双解析的，且 $f(0) = 0\}$.

定义2. 若函数 f 属于某个族，并且它在$\mathbb{D}_r$ 中单叶，且值域 $f(\mathbb{D}_r)$ 包含一个单叶圆盘 $\mathbb{D}_R$，则称其属于 $\mathcal{S}(r; R)$。

1.2. 朗道和 Bloch 定理。朗道的经典定理指出，若$f \in \mathcal{B}_M \cap \mathcal{A}$对某个 $M > 1$成立，则 $f \in \mathcal{S}(r; R)$，其中 $r = 1/(M + \sqrt{M^2 - 1})$，且$R = Mr^2$。这一结果是尖锐的，其极值函数为 $f_0(z) = Mz\frac{1-Mz}{M-z}$。

Bloch定理断言，存在一个正数常数 b，使得若$f \in \mathcal{A}_1$，则 $f(\mathbb{D})$ 包含一个半径为 b 的单叶圆盘，也就是说，一个半径为 b 的圆盘，它是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的某个子区域的单叶像。所有这类常数 b 的上确界称为 Bloch常数（见 [5, 13]）。

2000 年，在适当的限制条件下，Chen 等人 [5] 首次建立了单位圆盘上有界调和映射的两个非尖锐版本的 Landau 型定理，现借助我们的记号回顾如下。

定理 A。（[5, 定理 3]）若 $f \in \mathcal{BH}_M^0$ 满足规范化条件 $f_{\bar{z}}(0) = 0$ 且 $f_z(0) = 1$，则 $f \in \mathcal{S}(r_1; r_1/2)$，其中

$$r_1 = \frac{\pi^2}{16mM} \approx \frac{1}{11.105M},$$

其中，$m \approx 6.85$ 是函数 $(3 - r^2)/(r(1 - r^2))$ 对于 $0 < r < 1$的最小值。

定理 B。（[5, 定理 4]）若 $f \in \mathcal{H}_0$ 满足 $\lambda_f(0) = 1$，且 $\Lambda_f(z) \leq \Lambda$ 对于 $z \in \mathbb{D}$，则 $f \in \mathcal{S}(r_2;\ r_2/2)$，其中 $r_2 = {}_4{}^{\pi}\!/_{(1+\Lambda)}$.

定理 A 和定理 B 并非尖锐。在 [12] 中给出了更好的估计，此后许多作者也研究了这一课题（参见[6, 9, 7, 10, 14, 15, 18, 20]）。2008 年，Abdulhadi 和 Muhanna 在 [2]中为某些有界双调和映射建立了两个版本的 Landau 型定理。关于这一课题的后续进展，参见[8, 9, 17, 19, 22, 26]。特别是，定理 B 的尖锐版本已在[15, 18, 20], 中建立，而归一化有界双调和映射的相应尖锐版本的 Landau 型定理也已在 [21]中建立。

定理 C。（[21, 定理3。1]）设 $\Lambda_1 \geq 0$ 且 $\Lambda_2 > 1$。令 $F \in \mathrm{Bi}\mathcal{H}$ 和$F（z）= |z|^2 G（z）+ H（z）$，其中 G、$H \in \mathcal{H}_0$、$\lambda_F（0）= 1$、$\Lambda_G（z）\leq \Lambda_1$且 $\Lambda_H（z）< \Lambda_2$对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立。则 $F \in \mathcal{S}（r_3; R_3）$，其中 r_3 是方程在（0，1）中的唯一根

$$\Lambda_2 \frac{1 - \Lambda_2 r}{\Lambda_2 - r} - 3\Lambda_1 r^2 = 0,$$

and

$$R_3 = \Lambda_2^2 r_3 + \left(\Lambda_2^3 - \Lambda_2\right) \ln\left(1 - \frac{r_3}{\Lambda_2}\right) - \Lambda_1 r_3^3.$$

这个结果是尖锐的。

定理 D.（[21, 定理3.3]）假设 $\Lambda \geq 0$。设 $F \in \mathrm{Bi}\mathcal{H}$ 和 $F(z) = |z|^2 G(z) + H(z)$，其中 G, $H \in \mathcal{H}_0$, $\lambda_F(0) = 1, \Lambda_G(z) \leq \Lambda$且 $\Lambda_H(z) \leq 1$对所有 $z \in \mathbb{D}$ 均成立。则 $F \in \mathcal{S}(r_4; R_4)$，其中

$$r_4 = \begin{cases} 1 & when\ 0 \leq \Lambda \leq \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3\Lambda}} & when\ \Lambda > \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

以及 $R_4 = r_4 - \Lambda r_4^3$。这一结果是尖锐的。

然而，对于归一化有界调和映射的尖锐版 Landau 型定理，或界为 $M > 1$ 时的定理 A，尚未建立。2022年，Abdulhadi 和 Hajj 为某些有界双解析函数建立了以下非尖锐的 Landau 型定理。

定理 E. [1] 令 $F \in$ 双$\mathcal{A}_0$且 $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$，其中 $G, H \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_M$对某个 $M > 0$ 成立。那么， $F \in \mathcal{S}(r_5; R_5)$，其中

$$r_5 = 1 - \sqrt{\frac{2M}{2M+1}} \quad and \quad R_5 = r_5 - r_5^2 - M\frac{r_5^2 + r_5^3}{1 - r_5}.$$

定理 E 也不是尖锐的。

1.3. 关于朗道型定理的两个自然问题。根据上述讨论，自然会产生几个问题。

问题 1. 我们能否为某些有界双解析函数建立一些尖锐版本的朗道型定理?

问题 2. 我们能否进一步推广和/或改进定理 E *?*

本文结构安排如下。第 2 节陈述四个定理，其中一个改进了定理 E。此外，我们还为某些有界双解析函数给出了若干个尖锐版本的朗道型定理，从而肯定地回答了问题 1 和问题 2。特别地，作为推论，我们还得到了某些有界双调和映射的四个尖锐版本的朗道型定理。第 3 节陈述了几个引理，它们是第 4 节证明主要结果所必需的。

2. Statement of Main Results and Remarks

我们首先为某类有界双解析函数的子类建立以下朗道型定理的尖锐版本。

定理 1. 假设 $\Lambda_1 \geq 0$和 $\Lambda_2 > 1$。令 $F \in$ Bi$\mathcal{A}_0$和 $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$，其中 $G \in \mathcal{A}_0$, $H \in \mathcal{A}$, $|G'(z)| \leq \Lambda_1$ 且 $|H'(z)| < \Lambda_2$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立。则 $F \in \mathcal{S}(\rho_1; \sigma_1)$，其中

$$\rho_1 = \frac{2\Lambda_2}{\Lambda_2(2\Lambda_1 + \Lambda_2) + \sqrt{\Lambda_2^2(2\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 - 8\Lambda_1\Lambda_2}}, \tag{2.1}$$

and

$$\sigma_1 = F_1(\rho_1), \quad F_1(z) = \Lambda_2^2 z - \Lambda_1|z|^2 + \left(\Lambda_2^3 - \Lambda_2\right)\ln\left(1 - \frac{z}{\Lambda_2}\right). \tag{2.2}$$

该结果是尖锐的，其极值函数为 $F_1(z)$。

对于 $\Lambda_1 \geq 0$ 和 $\Lambda_2 = 1$的情形，我们将证明以下针对某类有界双解析函数子类的尖锐版朗道型定理。

定理 2. 假设 $\Lambda \geq 0$。令 $F \in \text{Bi}\mathcal{A}_0$ 和 $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$，其中$G \in \mathcal{A}_0$, $H \in \mathcal{A}$, $|G'(z)| \leq \Lambda$，且对所有 $z \in \mathbb{D}$， $|H(z)| < 1$ 或 $|H'(z)| \leq 1$ 。则$F \in \mathcal{S}(\rho_2; \sigma_2)$，其中

$$\rho_2 = \begin{cases} 1 & when\ 0 \leq \Lambda \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2\Lambda} & when\ \Lambda > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

以及 $\sigma_2 = \rho_2 - \Lambda\rho_2^2$。这一结果是尖锐的。

注 1. 注意到 $G \in \mathcal{A}_0$ 意味着 $G(z) = zG_1(z)$，其中 $G_1(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中解析。因此，双解析函数 $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$ 化为形式 $F(z) = |z|^2G_1(z)+H(z)$，显然这是一个双调和映射。由此，我们从定理 1 和定理 2 得到以下推论。

推论 1. 假设 $\Lambda_1 \geq 0$ 且 $\Lambda_2 > 1$。令 $F(z) = |z|^2G(z) + H(z)$ 属于 $\text{Bi}\mathcal{H}$，其中 $G \in$Hol($\mathbb{D}$) 且 $H \in \mathcal{A}$。

(1) 若 $|G(z) + zG'(z)| \leq \Lambda_1$，且对所有 $z \in \mathbb{D}$， $|H'(z)| < \Lambda_2$，则 $F \in \mathcal{S}(\rho_1; \sigma_1)$，其中$\rho_1$ 和 σ_1 分别由 (2.1) 和 (2.2) 给出。这一结果是尖锐的，其极值函数 $F_1(z)$ 由 (2.2) 给出。(2) 若 $|G(z) + zG'(z)| \leq \Lambda_1$，且对所有 $z \in \mathbb{D}$， $|H(z)| < 1$ 或 $|H'(z)| \leq 1$ ，则$F \in \mathcal{S}(\rho_2; \sigma_2)$，其中 ρ_2 和 σ_2 如定理 2 所述。这一结果是尖锐的，其极值函数为 $F_2(z) = \Lambda_1|z|^2 + z$。

如果在推论 1 中，将条件“$|G(z) + zG'(z)| \leq \Lambda_1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$”替换为条件“$G(0) = 0$ 且 $|G'(z)| \leq \Lambda_1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$”，那么根据定理 C 和定理 D，我们可得到有界双调和映射的特殊子类所对应的以下尖锐版本的 Landau 型定理。

推论 2. 假设 $\Lambda_1 \geq 0$ 且 $\Lambda_2 > 1$。令 $F(z) = |z|^2G(z) + H(z)$ 属于 $\text{Bi}\mathcal{H}$，其中 $G \in$Hol($\mathbb{D}$) 且 $H \in \mathcal{A}$。

(1) 如果 $|G'(z)| \leq \Lambda_1$，且对所有 $z \in \mathbb{D}$均有 $|H'(z)| < \Lambda_2$，那么 $F \in \mathcal{S}(r_3; R_3)$，其中 r_3 和 R_3 与定理 C 中的相同。该结果是尖锐的，其极值函数为

$$F_0(z) = \Lambda_2^2 z - \Lambda_1|z|^2 z + \left(\Lambda_2^3 - \Lambda_2\right) \ln\left(1 - \frac{z}{\Lambda_2}\right).$$

(2) 若对于所有 $z \in \mathbb{D}$， $|G'(z)| \leq \Lambda_1$，且 $|H(z)| < 1$ 或 $|H'(z)| \leq 1$，则 $F \in \mathcal{S}(r_4; R_4)$，其中 r_4 和 R_4 与定理 D 中的相同。该结果是尖锐的。该结果是尖锐的，其极值函数为 $F_2(z) = \Lambda_1|z|^2 + z$。

现在，我们通过建立以下结果来改进定理 A。

定理3。设 $F \in \text{Bi}\mathcal{A}_0$ and $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$，其中 $G \in \mathcal{B}_{M_1} \cap \mathcal{A}$ and $H \in \mathcal{B}_{M_2} \cap \mathcal{A}$，对某些 $M_1 > 0$ and $M_2 > 0$成立。那么 $F \in \mathcal{S}(\rho_3; \sigma_3)$，其中 ρ_3 是方程在 (0, 1) 内的唯一根

$$1 - \left(M_2 - \frac{1}{M_2}\right)\frac{2r - r^2}{(1-r)^2} - \left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right)\frac{(3-2r)r^2}{(1-r)^2} - 2r = 0, \tag{2.3}$$

and

$$\sigma_3 = \rho_3 - \rho_3^2 - \left(M_2 - \frac{1}{M_2}\right)\frac{\rho_3^2}{1-\rho_3} - \left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right)\frac{\rho_3^3}{1-\rho_3}.$$

注记2。若在定理3中令 $M_1 = M_2 = 1$ ，则由 Schwarz引理可知， $G(z) = z$ and$H(z) = z$ 。因此， $\rho_3 = \frac{1}{2}$ 和 $\sigma_3 = \frac{1}{4}$ 是尖锐的，其极值函数为 $F_3(z) = |z|^2 + z$。此外，若在定理3中令 $M_1 = M_2 = M$，则可以很容易地得到定理 E 的一个改进版本。

此外，与注 1 一样，我们可以很容易得到如下结论。

推论3. 设 $F(z) = |z|^2 G(z) + H(z)$ 属于 Bi$\mathcal{H}$，其中 $G \in \mathcal{B}_{M_1} \cap \mathcal{A}$ and$H \in \mathcal{B}_{M_2} \cap \mathcal{A}$ 对某些 $M_1 > 0$ 和 $M_2 > 0$ 成立。则 $F \in \mathcal{S}(\rho_3; \sigma_3)$，其中 ρ_3 和 σ_3 同定理3中所述。

注记3. 同样地，若 $M_1 = M_2 = 1$，则有 $\rho_3 = \frac{1}{2}$ and $\sigma_3 = \frac{1}{4}$，其极值函数为 $F_3(z) = |z|^2 + z$。

最后，通过建立以下定理，我们改进了定理3。

定理4. 设 $F \in$ Bi$\mathcal{A}_0$ and $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$，其中 $0 \not\equiv G \in \mathcal{B}_{M_1} \cap \mathcal{A}$ and$H \in \mathcal{B}_{M_2} \cap \mathcal{A}$ 对某些 $M_1 > 0$ 和 $M_2 > 0$ 成立。则 F 在圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_3}$ 中是保向、单叶且全星形的，其中 ρ_3 是方程 (2.3) 在 (0, 1) 中的唯一根。

3. 关键引理

为了证明我们的主要结果，我们需要以下引理；它们在建立第 4 节中的后续结果时起着关键作用。

引理 1. 设 $H \in \mathcal{A}_1$ 和 $|H'(z)| < \Lambda$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$ 成立，且对某个 $\Lambda > 1$成立。

(1) 对所有 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_r (0 < r < 1, z_1 \neq z_2)$，有

$$|H(z_1) - H(z_2)| = \left| \int_\gamma H'(z)\, dz \right| \geq \Lambda \frac{1 - \Lambda r}{\Lambda - r} |z_1 - z_2|,$$

其中， $\gamma = [z_1, z_2]$ 表示连接 z_1 和 z_2的闭线段。

(2) 对于满足 $w' = H(z') \in H(\partial\mathbb{D}_r)$ 且 $|w'| = \min\{|w| : w \in H(\partial\mathbb{D}_r)\}$ 的 $z' \in \partial\mathbb{D}_r$ ($0 < r < 1$)，令 $\gamma_0 = H^{-1}(\Gamma_0)$，并且 $\Gamma_0 = [0, w']$ 表示连接原点与 w'的闭线段。则有

$$|H(z')| \geq \Lambda \int_0^r \frac{\frac{1}{\Lambda} - t}{1 - \frac{t}{\Lambda}}\, dt = \Lambda^2 r + (\Lambda^3 - \Lambda) \ln\left(1 - \frac{r}{\Lambda}\right).$$

Proof. 设 $\omega(z) = H'(z)/\Lambda$, $z \in \mathbb{D}$。则 $\omega \in \mathcal{B}_1$ 满足 $\alpha := \omega(0) = {}^{H'}\!\left(0 \underset{\Lambda}{=\!=} \frac{1}{\Lambda}.\right)$ 利用施瓦茨-皮克引理，我们有

$$\frac{\frac{1}{\Lambda} - r}{1 - \frac{r}{\Lambda}} = \frac{\alpha - r}{1 - \alpha r} \leq \operatorname{Re}\omega(z) \leq |\omega(z)| \leq \frac{\alpha + r}{1 + \alpha r}, \quad z \in \mathbb{D}_r.$$

(1) 固定 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_r\,(0<r<1)$ 满足 $z_1 \neq z_2$，设 $\theta_0 = \arg(z_2 - z_1)$。则

$$\begin{aligned} |H(z_1) - H(z_2)| &= \left| \int_{\overline{\gamma}} H'(z)\, dz \right| = \left| \int_{\gamma} \Lambda\, \omega(z) e^{i\theta_0}\, |dz| \right| \\ &\geq \Lambda \int_{\gamma} \mathrm{Re}\, \omega(z) |dz| \\ &\geq \Lambda \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{\Lambda} - r}{1 - \frac{r}{\Lambda}}\, |dz| = \Lambda\, \frac{1 - \Lambda r}{\Lambda - r}\, |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

(2) 对于 $z' \in \partial\mathbb{D}_r\,(0<r<1)$，其中 $w' = H(z') \in H(\partial\mathbb{D}_r)$，令 $|w'| = \min\{|w| : w \in F(\partial\mathbb{D}_r)\}$和 $\Gamma_0 = [0, w]$，设 $\gamma_0 = H^{-1}(\Gamma_0)$ 使得

$$\begin{aligned} |H(z')| &= |w'| = \int_{\gamma_0} |H'(\zeta)|\, |d\zeta| = \Lambda \int_{\gamma_0} |\omega(\zeta)|\, |d\zeta| \\ &\geq \Lambda \int_0^r \frac{\frac{1}{\Lambda} - t}{1 - \frac{t}{\Lambda}} dt = \Lambda^2 r + (\Lambda^3 - \Lambda) \ln\left(1 - \frac{r}{\Lambda}\right) \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 2.（Carlson 引理，[4]）若 $F \in \mathcal{B}_1$ 和 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则下列不等式成立：

（a） $|a_{2n+1}| \leq 1 - |a_0|^2 - \cdots - |a_n|^2$, $n = 0, 1, \ldots$.（b）
$|a_{2n}| \leq 1 - |a_0|^2 - \cdots - |a_{n-1}|^2 - \frac{|a_n|^2}{1+|a_0|}$, $n = 1, 2, \ldots$.

这些不等式是尖锐的。

引理3. 若 $f \in \mathcal{B}_M \cap \mathcal{A}_0$，对某个 $M > 0$ 和 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$，则

(a) $|a_{2n}| \leq M \left[1 - \left(\frac{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}{M^2}\right)\right]$, $n = 1, 2, \ldots$.

(b) $|a_{2n+1}| \leq M \left[1 - \left(\frac{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}{M^2}\right) - \frac{|a_{n+1}|^2}{M(M + |a_1|)}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$

特别地，若 $|a_1| = 1$，即若 $f \in \mathcal{B}_M \cap \mathcal{A}$，则 $M \geq 1$，且

$$|a_n| \leq M - \frac{1}{M} \quad for\ n = 2, 3, \ldots.$$

这些不等式是尖锐的，其极值函数为 $f_n(z)$，其中

$$f_1(z) = z, \quad f_n(z) = Mz \frac{1 - Mz^{n-1}}{M - z^{n-1}} = z - \left(M - \frac{1}{M}\right) z^n - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{M^2 - 1}{M^{k-1}} z^{(n-1)(k-1)+1}$$

对于 $n = 2$、3、.....。

Proof. 令 $g(z) = {}^{f(z)}\overline{Mz}$，其中 $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$，且 $g(0) = \frac{a_1}{M}$，可得 $g \in \mathcal{B}_1$，且

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

其中，对于 $n \geq 0$，$b_n = a_{n+1}/M$。注意，$b_0 = a_1/M$。将引理 2 应用于 b_n 的系数 g，即可得到所需的不等式。

特别地，若 $|a_1| = 1$，则有 $M \geq 1$，由 (a) 和 (b) 可得

$$|a_n| \leq M\left(1 - \frac{|a_1|^2}{M^2}\right) = M - \frac{1}{M} \quad \text{for } n \geq 2$$

并且显然，对于所有 $n = 2$、3、.....，等号在函数

$$f_n(z) = Mz\frac{1 - Mz^{n-1}}{M - z^{n-1}} = z - \Big(M - \frac{1}{M}\Big)z^n - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{M^2 - 1}{M^{k-1}} z^{(n-1)(k-1)+1},$$

证明完毕。 □

引理 4. 设 $F(z) = \bar{z}G(z) + H(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的双解析函数，其中 $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \not\equiv 0$ 和 $H(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ 在 $\mathbb{D}$ 中解析，并满足条件

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|a_n|r^n \leq 1, \tag{3.1}$$

对于某个 $r \in (0, 1)$。那么， $F(z)$ 在圆盘 $\mathbb{D}_r$ 中是保向、单叶且全星形的。

Proof. 我们可以采用与 [23, 引理 1]证明中类似的论证。为便于阅读，现给出详细证明。经过初等计算可得

$$zF_z(z) - \bar{z}F_{\bar{z}}(z) - F(z) = \bar{z}\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)a_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n z^n. \tag{3.2}$$

显然， $J_F(0) = 1$。现在，我们固定 $r \in (0, 1]$，并发现

$$\begin{aligned} |F_z(z)| - |F_{\bar{z}}(z)| &= \Big|\bar{z}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n b_n z^{n-1}\Big| - \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\Big| \\ &> 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|a_n|r^n \geq 0, \end{aligned}$$

因此，对于 $|z| < r$， $J_F(z) = (|F_z(z)| + |F_{\bar{z}}(z)|)(|F_z(z)| - |F_{\bar{z}}(z)|) > 0$。

因此， F 在 $\mathbb{D}_r$ 中是保向的。最后，固定 $r_0 \in (0, r]$ ，并考虑圆 $\partial\mathbb{D}_{r_0} = \{z : |z| = r_0\}$。对于 $z \in \partial\mathbb{D}_{r_0}$，由 $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \not\equiv 0$、(3.1) 和 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}
|zF_z(z) - \bar{z}F_{\bar{z}}(z) - F(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |n-2|\,|a_n|\,|z|^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|b_n|\,|z|^n \\
&= |z|\Big(\sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|\,|z|^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|a_n|\,|z|^n\Big) \\
&\quad -|a_1|\,|z|^2 - 3\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty}|b_n|\,|z|^n \\
&< |z| - \sum_{n=2}^{\infty}|b_n|\,|z|^n - |\bar{z}|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|z|^n \\
&\leq |H(z)| - |\bar{z}G(z)| \leq |F(z)|,
\end{aligned}$$

这意味着

$$\left|\frac{zF_z(z) - \bar{z}F_{\bar{z}}(z)}{F(z)} - 1\right| < 1 \quad \text{for } |z| = r_0.$$

因此，我们得到 F 在 $\partial\mathbb{D}_{r_0}$上是单叶的，且将 $\partial\mathbb{D}_{r_0}$ 映射到一条星形曲线上。因此，根据保向性质和度原理，我们可知 F 在 $\mathbb{D}_{r_0}$中是单叶的。由于 $r_0 \in (0, r]$ 是任意的，我们得出结论： F 在 $\mathbb{D}_r$中是单叶且全星形的。证明完毕。□

4. Proofs of the main results

4.1. 定理 1 的证明。根据关于 $G \in \mathcal{A}_0$ 的假设，我们有

$$|G(z)| = \left|\int_{[0,z]} G'(z)\,dz\right| \leq \int_{[0,z]} |G'(z)|\,|dz| \leq \Lambda_1|z|, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.1}$$

我们首先证明 F 在圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_1}$ 中是单叶的。对所有 z_1，取 $z_2 \in \mathbb{D}_r (0 < r < \rho_1, z_1 \neq z_2)$，其中 ρ_1 由 (2.1) 定义。由于 $H'(0) = 1$，且对所有 $z \in \mathbb{D}$， $|G'(z)| \leq \Lambda_1$ 以及 $|H'(z)| < \Lambda_2$ ，由引理 1 可得

$$\begin{aligned}
|F(z_2) - F(z_1)| &= \left|\int_{[z_1,z_2]} F_z(z)\,dz + F_{\bar{z}}(z)\,d\bar{z}\right| = \left|\int_{[z_1,z_2]} (\bar{z}G'(z) + H'(z))\,dz + G(z)\,d\bar{z}\right| \\
&\geq \left|\int_{[z_1,z_2]} H'(z)\,dz\right| - \left|\int_{[z_1,z_2]} \bar{z}G'(z)\,dz + G(z)\,d\bar{z}\right| \\
&\geq |z_1 - z_2|\left(\Lambda_2\frac{1-\Lambda_2 r}{\Lambda_2 - r} - 2\Lambda_1 r\right) \\
&= |z_1 - z_2| \cdot \frac{2\Lambda_1 r^2 - \Lambda_2(2\Lambda_1 + \Lambda_2)r + \Lambda_2}{\Lambda_2 - r} \\
&= |z_1 - z_2|\frac{2\Lambda_1(r-\rho_1)(r-A)}{\Lambda_2 - r}
\end{aligned}$$

当 $r<\rho_1$ 时该式为正，其中

$$A=\frac{\Lambda_2(2\Lambda_1+\Lambda_2)+\sqrt{\Lambda_2^2(2\Lambda_1+\Lambda_2)^2-8\Lambda_1\Lambda_2}}{4\Lambda_1}.$$

这证明了 F 在圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_1}$ 中的单叶性。

接下来，我们证明 $F(\mathbb{D}_{\rho_1})\supseteq\mathbb{D}_{\sigma_1}$，其中 σ_1 由 (2.2) 定义。首先注意到，对于满足 $w'=F(z')\in F(\partial\mathbb{D}_{\rho_1})$ 且 $|w'|=\min\{|w|:\ w\in F(\partial\mathbb{D}_{\rho_1})\}$ 的 $z'\in\partial\mathbb{D}_{\rho_1}$，有 $F(0)=0$。由 (4.1) 和引理 1，我们得到

$$|w'| \ = \ \left|\bar{z'}G(z')+H(z')\right|\geq|H(z')|-\Lambda_1\rho_1^2\geq h_0(\rho_1)=\sigma_1,$$

这意味着 $F(\mathbb{D}_{\rho_1})\supseteq\mathbb{D}_{\sigma_1}$，其中

$$h_0(x)=\Lambda_2^2x-\Lambda_1x^2+\left(\Lambda_2^3-\Lambda_2\right)\ln\left(1-\frac{x}{\Lambda_2}\right),\quad x\in[0,1]. \tag{4.2}$$

现在，我们证明 ρ_1 和 σ_1 的尖锐性。为此，我们考虑由 (2.2) 给出的双解析函数 $F_1(z)$。容易验证，$F_1(z)$ 满足定理 1 的假设，因此，我们有 $F_1(z)$ 在 $\mathbb{D}_{\rho_1}$ 中是单叶的，且 $F_1(\mathbb{D}_{\rho_1})\supseteq\mathbb{D}_{\sigma_1}$。

为了证明半径 ρ_1 是尖锐的，我们需要证明对于每个 $r\in(\rho_1,1]$，$F_1(z)$ 在 $\mathbb{D}_r$中都不是单叶的。事实上，对于上文给出的实可微函数 $h_0(x)$，我们有

$$h_0'(x)=\frac{2\Lambda_1x^2-\Lambda_2(2\Lambda_1+\Lambda_2)x+\Lambda_2}{\Lambda_2-x}$$

它在 $[0,1]$ 上连续且严格递减，并且 $h_0'(\rho_1)=0$。由此可知，对于 $x\in[0,1]$，$h_0'(x)=0$ 当且仅当 $x=\rho_1$。因此，$h_0(x)$ 在 $[0,\rho_1)$ 上严格递增，在 $[\rho_1,1]$上严格递减。由于 $h_0(0)=0$，存在唯一的实数 $\rho_1'\in(\rho_1,1]$，使得当 $h_0(1)\leq0$ 时，$h_0(\rho_1')=0$，并且

$$\sigma_1=\Lambda_2^2\rho_1+\left(\Lambda_2^3-\Lambda_2\right)\ln\left(1-\frac{\rho_1}{\Lambda_2}\right)-\Lambda_1\rho_1^2=h_0(\rho_1)>h_0(0)=0. \tag{4.3}$$

对于每个固定的 $r\in(\rho_1,1]$，令 $x_1=\rho_1+\varepsilon$，其中

$$\varepsilon=\begin{cases}\min\left\{\dfrac{r-\rho_1}{2},\dfrac{\rho_1'-\rho_1}{2}\right\} & \text{if } h_0(1)\leq0,\\ \dfrac{r-\rho_1}{2} & \text{if } h_0(1)>0.\end{cases}$$

由中值定理，存在唯一的 $\delta\in(0,\rho_1)$，使得 $x_2:=\rho_1-\delta\in(0,\rho_1)$ 且 $h_0(x_1)=h_0(x_2)$。

设 $z_1=x_1$ 和 $z_2=x_2$。则 $z_1,\ z_2\in\mathbb{D}_r$，其中 $z_1\neq z_2$，并注意到

$$F_1(z_1)=F_1(x_1)=h_0(x_1)=h_0(x_2)=F_1(z_2).$$

因此，对于每个 $r\in(\rho_2,1]$，F_1 在圆盘 $\mathbb{D}_r$ 中都不是单叶的，从而半径 ρ_1 是尖锐的。

最后，注意到 $F_1(0)=0$，并取 $z'=\rho_1\in\partial\mathbb{D}_{\rho_1}$，由 (2.2)、(4.2) 和 (4.3)，我们得到

$$|F_1(z')-F_1(0)|=|F_1(\rho_1)|=|h_0(\rho_1)|=h_0(\rho_1)=\sigma_1.$$

因此，单叶圆盘的半径 σ_1 也是尖锐的。 □

4.2. 定理 2 的证明。关于 H 的假设，即 $H \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}$，显然可得 $H(z) \equiv z$ 属于 $\mathbb{D}$（由Schwarz引理）。因此， F 可化为形式 $F(z) = \bar{z}G(z)+z$。

现在证明 F 在圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_1}$ 内是单叶的。为此，对于任意 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_r (0 < r < \rho_2)$，若 $z_1 \neq z_2$，根据条件 $G(0) = 0$ 以及对所有 $z \in \mathbb{D}$ 均有 $|G'(z)| \leq \Lambda$，并结合 (4.1)，可得 $|G(z)| \leq \Lambda|z|$ 在 $\mathbb{D}$ 内。因此，

$$\begin{aligned} |F(z_1) - F(z_2)| &\geq |z_1 - z_2| - \left| \int_{[z_1,z_2]} \bar{z}G'(z)dz + G(z)d\bar{z} \right| \\ &\geq |z_1 - z_2|(1 - 2\Lambda r) > 0 \end{aligned}$$

这证明了 F 在圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_2}$ 内的单叶性，其中 ρ_2 由定理陈述给出。

注意到 $F(0) = 0$，对于任意 $z = \rho_2 e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}_{\rho_2}$，我们有

$$|F(z)| = |\bar{z}G(z) + z| \geq |z| - \rho_1|G(z)| \geq \rho_2 - \Lambda\rho_2^2 = \sigma_2.$$

因此， $F(\mathbb{D}_{\rho_2})$ 包含一个单叶圆盘 $\mathbb{D}_{\sigma_2}$。

最后，对于 $F_2(z) = \Lambda|z|^2 + z$，直接计算可验证 ρ_2 和 σ_2 是尖锐的。证明完毕。□

4.3. 定理3的证明。根据假设，$G \in \mathcal{B}_{M_1} \cap \mathcal{A}$ 和 $H \in \mathcal{B}_{M_2} \cap \mathcal{A}$，我们可以写成

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{and} \quad H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

其中 $a_1 = b_1 = 1$，由引理3可得

$$|a_n| \leq M_1 - \frac{1}{M_1} \quad \text{and} \quad |b_n| \leq M_2 - \frac{1}{M_2} \quad \text{for all } n \geq 2. \tag{4.4}$$

我们首先证明， F 在圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_3}$ 中是单叶的，其中 ρ_3 由（2.3）定义。事实上，对于所有 z_1、 $z_2 \in \mathbb{D}_r$ （$0 < r < \rho_3$、 $z_1 \neq z_2$），我们看到（其中 $\gamma = [z_1, z_2]$）

$$\begin{aligned} & |F(z_2) - F(z_1)| = \left| \int_\gamma F_z(z)dz + F_{\bar{z}}(z)d\bar{z} \right| \\ \geq & \left| \int_\gamma H'(0)dz \right| - \left| \int_\gamma (H'(z) - H'(0))dz \right| - \left| \int_\gamma \bar{z}G'(z)dz + G(z)d\bar{z} \right| \\ \geq & |z_1 - z_2| \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)|a_n|r^n \right] \\ \geq & |z_1 - z_2| \left[1 - \Big(M_2 - \frac{1}{M_2}\Big) \sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1} - \Big(M_1 - \frac{1}{M_1}\Big) \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)r^n - 2r \right] \\ = & |z_1 - z_2| \left[1 - \Big(M_2 - \frac{1}{M_2}\Big) \frac{2r - r^2}{(1-r)^2} - \Big(M_1 - \frac{1}{M_1}\Big) \frac{(3-2r)r^2}{(1-r)^2} - 2r \right] > 0. \end{aligned}$$

这意味着 $F(z_1) \neq F(z_2)$，从而证明了 F 在圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_3}$ 中的单叶性。

接下来，我们证明 $F(\mathbb{D}_{\rho_3}) \supseteq \mathbb{D}_{\sigma_3}$，其中 σ_3 与命题中的定义相同。事实上，注意到 $F(0) = 0$，且对于任意满足 $w' = F(z') \in F(\partial\mathbb{D}_{\rho_3})$ 的 $z' \in \partial\mathbb{D}_{\rho_3}$，由 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} |w'| &= \left|\bar{z'}G(z') + H(z')\right| \geq |H(z')| - \rho_3|G(z')| \\ &\geq |z'| - \sum_{n=2}^{\infty}|b_n|\,|z'|^n - \rho_3\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|z'|^n \\ &\geq \rho_3 - \rho_3^2 - \Big(M_2 - \frac{1}{M_2}\Big)\frac{\rho_3^2}{1-\rho_3} - \Big(M_1 - \frac{1}{M_1}\Big)\frac{\rho_3^3}{1-\rho_3} = \sigma_3, \end{aligned}$$

这意味着 $F(\mathbb{D}_{\rho_3}) \supseteq \mathbb{D}_{\sigma_3}$。 □

4.4. 定理 4 的证明。我们应用引理 3 和引理 4。现在，根据假设以及定理 3 的证明方法，(4.4) 中的不等式成立，因此我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|a_n|r^n \\ \leq\ &\Big(M_2 - \frac{1}{M_2}\Big)\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1} + \Big(M_1 - \frac{1}{M_1}\Big)\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)r^n + 2r \leq 1 \end{aligned}$$

当 $r \leq \rho_3$ 时。因此，由引理 4 可得定理 4 的结论。 □

致谢。第一作者的这项研究部分得到广东省自然科学基金（项目编号: 2021A1515010058）的资助。

利益冲突。作者声明，在本文发表方面不存在利益冲突。

数据可用性声明。作者声明，本研究纯属理论研究，不涉及任何数据。

References

1. Z. Abdulhadi 和 L.E. Hajj，关于多解析函数的单叶性，Comput. Meth. Funct. Theory，22（2022年），169–181。2. Z. Abdulhadi 和 Y. Muhanna，双调和映射的 Landau 定理，J. Math. Anal. Appl. 338（2008），705-709。3. Z. Abdulhadi、Y. Muhanna 和 S. Khuri，关于双调和方程的单叶解，J. Inequal. Appl. 5（2005），469–478。4. F. Carlson，关于单位圆内有界函数的系数é（法语），Ark. Mat. Astr. Fys.，27A(1)（1940），第 8 页。5. H.H. Chen、P.M. Gauthier 和 W. Hengartner，平面调和映射的 Bloch 常数，Proc. Amer. Math. Soc. 128(11)（2000），3231–3240。6. H.H. Chen 和 P. Gauthier，平面调和映射与多重调和映射的 Landau 定理和 Bloch定理，Proc. Amer. Math. Soc.，139（2011），583–595。7. Sh. Chen、S. Ponnusamy 和 A. Rasila，平面调和映射的系数估计、Landau 定理和 Lipschitz型空间，J. Aust. Math. Soc.，96(2)（2014），198–215。8. SH. Chen、S. Ponnusamy 和 X. Wang，某些双调和映射的 Landau 定理，Appl. Math. Comput.，208(2)（2009），427–433。9. Sh. Chen、S. Ponnusamy 和 X. Wang，某些平面调和映射和平面双调和映射类的性质，Complex Anal. Oper. Theory，5（2011），901–916。

10. Sh. Chen、S. Ponnusamy 和 X. Wang，平面调和映射的系数估计和 Landau-Bloch 定理，马来西亚数学科学学会通报，34(2)（2011），255–265。11. J.G. Clunie 和 T. Sheil-Small，调和单叶函数，Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 9（1984），3–25。12. M. Dorff 和 M. Nowak，平面调和映射的 Landau 定理，Comput. Meth. Funct. Theory，4(1)（2004），151–158。13. I. Graham 和 G. Kohr，一维及高维几何函数论。纽约：Marcel Dekker Inc，2003。14. A. Grigoryan，调和映射的 Landau 和 Bloch 定理，Complex Variable Theory Appl. 51(1)（2006），81–87。15. X.Z. Huang，具有有界 Fr´echet 导数的平面调和映射的单叶半径尖锐估计（中文），中国科学：数学，44（2014）6，685–692。16. H. Lewy，关于某些一一映射中雅可比行列式不为零的问题，Bull. Amer. Math. Soc. 42（1936），689–692。17. M.S. Liu，双调和映射的 Landau 定理，复变函数与椭圆方程 53(9)（2008），843–855。18. M.S. Liu，平面调和映射 Bloch常数的估计，中国科学：数学辑 52(1)（2009），87–93。19. M.S. Liu、Z.W. Liu 和 Y.C. Zhu，某些双调和映射的 Landau 定理，Acta mathematica sinica. Chinese Series，54(1)（2011），69–80。20. M.S. Liu 和 H.H. Chen，具有有界膨胀的平面调和映射的 Landau-Bloch 型定理，J. Math. Anal. Appl. 468(2)（2018），1066–1081。21. M.S. Liu 和 L.F. Luo，某些有界双调和映射的 Landau 型定理，数学成果，74（2019），文章 170。22. M.S. Liu、L. Xie 和 L.M. Yang，双调和映射的 Landau 定理（II），数学方法与应用科学，40（2017），2582–2595。23. Q.H. Luo 和 S. Ponnusamy，单叶多重调和映射的单参数族，马来西亚数学科学学会通报，44（2021），839–856。24. P.T. Mocanu，单位圆盘内非解析函数的星形性与凸性，Mathematica（克卢日），45（1980），77–83。25. S. Ponnusamy 和 J. Qiao，某些双调和映射的多项式逼近，非线性分析，81（2013），149–158。26. Y.C. Zhu 和 M.S. Liu，某些平面调和映射或双调和映射的 Landau 型定理，复变函数与椭圆方程 58(12)（2013），1667–1676。M.S. Liu,
School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou

,
Guangdong 510631, China.电子邮箱：liumsh65@163.comS. Ponnusamy,
Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras,Chennai-600 036,
India.Lomonosov Moscow State University,
Moscow Center of Fundamental and AppliedMathematics, Moscow, Russia.电子邮箱：samy@iitm.ac.in