arXiv:2302.07743v2 [math.CV] 6 Apr 2023

全纯运动、维数、面积与拟共形映射

Aidan Fuhrer、Thomas Ransford 和 Malik Younsi

Abstract. 我们描述了在全纯运动下移动的集合的 Minkowski 维数、填充维数和豪斯多夫维数的变化，以及其面积的变化。我们的方法为拟共形映射的若干著名定理提供了一种全新的统一方法，其中包括 Astala 关于拟共形映射下面积和维数畸变的工作，以及 Smirnov 关于拟圆的维数的工作。

1. Introduction

^下文中，我们分别用 $\mathbb{D}$、$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}$ 表示开单位圆盘、复平面和黎曼球面。

^定义 1.1. 设 A 是 $\mathbb{C}$的子集。 A 的全纯运动是一个^映射 $f\colon \mathbb{D}\times A\to\mathbb{C}$，满足：

(i) 对每个固定的 $z\in A$，映射 $\lambda\mapsto f(\lambda,z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上全纯；(ii) 对每个固定的 $\lambda\in\mathbb{D}$，映射 $z\mapsto f(\lambda,z)$ 在 A 上是单射；(iii) 对所有 $z\in A$，都有 $f(0,z)=z$。

我们记 $f_\lambda(z):=f(\lambda,z)$ 和 $A_\lambda:=f_\lambda(A)$。有时我们会宽泛地使用术语，将集合值映射 $\lambda\mapsto A_\lambda$ 称为 A的全纯运动。

全纯运动由 Ma˜n´e、Sad 和 Sullivan [15]引入。他们证明了所谓的 λ-引理：每个全纯^运动 $f\colon \mathbb{D}\times A\to\mathbb{C}$ 都可以延拓为全纯运动 $F\colon \mathbb{D}\times\overline{A}\to\mathbb{C}$，且 F 关于 (λ,z) 联合连续。他们利用这一结果描述了双曲有理映射全纯族的朱利亚集的变化。此后，全纯运动还被应用于动力系统的其他领域，尤其用于描述克莱因群极限集的变化，参见例如 [2,§12.2.1]。

Date: 2023年4月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 37F44，次要分类号 30C62、31A05、28A78。*Key words and phrases.* 全纯运动、面积、豪斯多夫维数、装填维数、闵可夫斯基维数、调和函数、拟共形映射、拟圆。Fuhrer 获得了 NSERC加拿大研究生奖学金的资助。Ransford 获得了 NSERC 和加拿大研究讲席计划的资助。Younsi 获得了 NSF资助项目DMS-2050113 的资助。

考虑以下问题。设 $\lambda \mapsto A_\lambda$ 是全纯运动，且对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$ 都有 $A_\lambda \subset \mathbb{C}$。$\lambda \mapsto \dim(A_\lambda)$ 和 $\lambda \mapsto |A_\lambda|$ 是什么类型的函数？这里 $|\cdot|$ 表示面积测度（二维勒贝格测度），而 $\dim(\cdot)$ 可以表示任何合理的维数概念。文献中探讨了这一问题的若干方面，参见例如[1, 3, 4, 7, 8, 11, 14, 17, 18, 19, 21, 23]。稍后我们将更详细地讨论其中一些研究成果。

本文主要关注三种维数概念，即闵可夫斯基维数、填充维数和豪斯多夫维数。为了陈述我们的结果，引入另一个定义会很方便。

定义 1.2。设 D 是复数域 $\mathbb{C}$ 中的一个域。若存在一族定义在 D 上的调和函数 $\mathcal{H}$，使得对于所有 $\lambda \in D$，$u\colon D \to [0,\infty)$ 满足 $u(\lambda) = \inf_{h\in\mathcal{H}} h(\lambda)$，则称正函数 $u\colon D \to [0,\infty)$ 为下调和函数。

在定理 1.3–1.6 中，我们考察集合 $A \subset \mathbb{C}$ 的一个全纯运动 $f\colon \mathbb{D}\times A \to \mathbb{C}$，并记作 $A_\lambda := f_\lambda(A)$。

我们的第一个结果描述了有界集在全纯运动下移动时闵可夫斯基维数，更准确地说是上闵可夫斯基维数 $\dim_M$ 的变化。

定理 1.3. 设 $\lambda \mapsto A_\lambda$ 是 $\mathbb{C}$中有界子集A 的全纯运动。那么对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，A_λ 均有界；并且要么对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_M(A_\lambda) = 0$，要么 $\lambda \mapsto 1/\overline{\dim}_M(A_\lambda)$是 $\mathbb{D}$上的下调和函数。

由此定理，我们可以推出关于装箱维数 $\dim_P$ 的类似结果。

定理 1.4. 设 $\lambda \mapsto A_\lambda$ 是$\mathbb{C}$中子集 A 的全纯运动。那么要么对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_P(A_\lambda) = 0$，要么 $\lambda \mapsto 1/\dim_P(A_\lambda)$是 $\mathbb{D}$上的下调和函数。

由这些定理，我们得到以下推论。

推论1.5. 在定理 1.3 和定理 1.4 各自的假设下，$\dim_M(A_\lambda)$ 和 $\dim_P(A_\lambda)$ 是关于 $\lambda \in \mathbb{D}$ 的连续对数次调和函数（因而在 $\mathbb{D}$上也是次调和函数）。特别地，如果其中任一函数在 $\mathbb{D}$上取得最大值，那么它就是常数。

证明。正如下文将要看到的，下调和函数是连续的超调和函数。利用詹森不等式，容易看出，若 $1/v$ 是正超调和函数，则 $\log v$ 是次调和函数，因此 v也是次调和函数。推论的最后一部分是次调和函数最大值原理的推论。□

对于豪斯多夫维数 $\dim_H$，有一个类似于定理 1.3 和 1.4 的结果，但结论较弱。

定理 1.6. 设 $\lambda \mapsto A_\lambda$ 是 $\mathbb{C}$ 中子集 A 的全纯运动。那么，要么对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_H(A_\lambda) = 0$；要么对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_H(A_\lambda) > 0$。

在后一种情况下， $\lambda \mapsto (1/\dim_H(A_\lambda) - 1/2)$ 是 $\mathbb{D}$ 上一族下调和函数的上确界。

定理 1.6 结论的性质不允许我们推断 $\log \dim_H(A_\lambda)$ 或 $\dim_H(A_\lambda)$ 是关于 $\lambda \in \mathbb{D}$ 的次调和函数。我们将在文章末尾回到这个问题。

我们的下一个定理可视为一种逆向结果。

定理 1.7. 设 $d : \mathbb{D} \to (0, 2]$ 是一个函数，且 $1/d$ 在 $\mathbb{D}$ 上是下调和的。那么存在一个全纯运动 $f : \mathbb{D} \times A \to \mathbb{C}$，它作用于 $\mathbb{C}$ 的一个紧子集 A，使得令 $A_\lambda := f_\lambda(A)$ 后，对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，都有 $\dim_P(A_\lambda) = \dim_H(A_\lambda) = d(\lambda)$。

我们指出，定理 1.4 和 1.7 共同给出了集合在全纯运动下移动时，其填充维数变化的完整刻画。

由双曲有理映射全纯族的朱利亚集产生的全纯运动（如 [15] 中所考察的），还具有额外性质：其豪斯多夫维数和填充维数关于 λ 变化时是实解析函数。这是 Ruelle 的一个结果的特例 [21]。（Ruelle 表述其定理时针对的是豪斯多夫维数，但在此情形下它与填充维数相同。）对于一般的全纯运动，已知豪斯多夫维数和填充维数不一定是实解析函数（例如见 [3]）。定理 1.7 的以下推论表明，事实上，它们可能具有与任意凹函数同样的光滑性缺失。

推论 1.8。给定一个凹函数 $\psi : \mathbb{D} \to [0, \infty)$，存在一个全纯运动 $f : \mathbb{D} \times A \to \mathbb{C}$，其作用于 $\mathbb{C}$ 的一个紧子集 A，使得令 $A_\lambda := f_\lambda(A)$ 后，我们有

$$\dim_H(A_\lambda) = \dim_P(A_\lambda) = \frac{2}{1 + \psi(\lambda)} \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

证明。 $\mathbb{D}$ 上的每个正凹函数都是下调和的，因为它是仿射函数族 $\lambda \mapsto a\,\mathrm{Re}(\lambda) + b\,\mathrm{Im}(\lambda) + c$的下包络，而其中每个函数在 D上都是调和的。因此，映射 $\lambda \mapsto \frac{1}{2}(1 + \psi(\lambda))$ 在 $\mathbb{D}$上是下调和的。此外，它显然以下界 $1/2$为界，因此其倒数的取值属于 $(0, 2]$。于是，结论由定理 1.7 得出。□

现在我们来讨论集合 $A \subset \mathbb{C}$在全纯运动 $f : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$下运动时面积的变化。与前面一样，对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，记 $f_\lambda(z) := f(\lambda, z)$，并记 $A_\lambda := f_\lambda(A)$。于是，每个 $f_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 都是拟共形的，我们将其复伸张记为 μ_{f_λ}（定义见第3节）。下面的结果对函数$\lambda \mapsto |A_\lambda|$作了部分描述，其中 $|\cdot|$ 表示面积测度。

定理 1.9。假设存在 Δ 的一个紧子集 $\mathbb{C}$，使得对每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，映射 f_λ 在 $\mathbb{C} \setminus \Delta$ 上共形，并且 $f_\lambda(z) = z + O(1)$在 ∞附近成立。设 A 是 Δ 的一个博雷尔子集，且 $|A| > 0$。

(i) 若在 A上几乎处处有 $\mu_{f_\lambda} = 0$，则 $\lambda \mapsto \log(\pi c(\Delta)^2/|A_\lambda|)$是 $\mathbb{D}$上的下调和函数，其中 $c(\Delta)$表示 Δ的对数容量。(ii) 若在 $\mathbb{C} \setminus A$上几乎处处有 $\mu_{f_\lambda} = 0$，则 $\lambda \mapsto |A_\lambda|$ 是 $\mathbb{D}$上的下调和函数。

注意，若 $|A| = 0$，则对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，都有 $|A_\lambda| = 0$，因为拟共形映射保持零面积。

我们基于下调和函数的方法，也使我们能够统一阐述拟共形映射下面积和维数畸变的若干著名定理。

这里我们强调，先前关于拟共形映射下维数畸变的研究，依赖于其某些较复杂的解析性质，例如雅可比行列式的高阶可积性。另一方面，我们的方法只要求拟共形映射满足一种“弱”拟对称性，正如推论 3.7 所述。

例如，简单应用哈纳克不等式即可得到以下两个结果。在定理 1.10 中，dim 表示 $\dim_P$、$\dim_H$ 或 $\dim_M$ 中的任意一个。（对于 $\dim_M$ 的情形，我们还假设 A 有界。）

定理 1.10. 设 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个 k-拟共形同胚，且 A 是 $\mathbb{C}$ 的子集，满足 $\dim(A) > 0$。那么

$$\frac{1}{K}\Big(\frac{1}{\dim A} - \frac{1}{2}\Big) \le \Big(\frac{1}{\dim F(A)} - \frac{1}{2}\Big) \le K\Big(\frac{1}{\dim A} - \frac{1}{2}\Big),$$

其中 $K := (1 + k)/(1 - k)$。

对于豪斯多夫维数，上述估计最初由 Gehring 和 V¨ais¨al¨a 提出 [11]，最终由 Astala 证明 [1, 定理 1.4]。对于填充维数，这是 Kaufmann 的一个结果的特例 [14,定理 4]。

定理 1.11. 设 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个 k-拟共形同胚，在 $\mathbb{C}\setminus\Delta$上共形，其中 Δ是一个对数容量至多为 1 的紧集，并且在 ∞附近有 $F(z) = z + o(1)$。设 A 是 Δ的一个博雷尔子集。

(i) 若在 A上几乎处处有 $\mu_F = 0$，那么

$$|F(A)| \le \pi^{1-1/K}|A|^{1/K}.$$

(ii) 如果在 $\mathbb{C} \setminus A$ 上几乎处处有 $\mu_F = 0$，则

$$|F(A)| \le K|A|.$$

(iii) 因此，一般而言，

$$|F(A)| \le K\pi^{1-1/K}|A|^{1/K}.$$

这里再次出现 $K = (1 + k)/(1 - k)$。

定理 1.11 是 Astala 的一个结果的强化形式 [1, 定理由 1]Eremenko 和 Hamilton 所得 [8, 定理 1]。

我们还说明了如何调整定理 1.6 的证明，以得到如下由 Smirnov [23] 给出的拟圆豪斯多夫维数上界。

定理 1.12。如果 Γ 是一个 k-拟圆，则 $\dim_H(\Gamma) \leq 1 + k^2$。

最后，我们得到一个关于拟对称映射下维数畸变的结果。对于豪斯多夫维数 $\dim_H$，Prause 和 Smirnov 已证明了这一结果，见 [18] 的主要结果以及 [17, 定理 3.1]。在下面的定理中，dim 表示 $\dim_M$ 或 $\dim_P$。在 $\dim_M$的情形下，我们还假设 A 有界。

定理 1.13。设 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 k-拟对称映射，其中 $k \in [0,1)$。那么，对于一个满足 $\dim(A) = \delta$的集合 $A \subset \mathbb{R}$，$0 < \delta \leq 1$，我们有

$$\Delta(\delta, k) \leq \dim(g(A)) \leq \Delta^*(\delta, k).$$

Here

$$\Delta(\delta, k) := 1 - \left(\frac{k+l}{1+kl}\right)^2$$

其中 $l := \sqrt{1-\delta}$，而 $\Delta^*(\delta, k)$ 是逆

$$\Delta^*(\delta, k) := \Delta(\delta, -\min(k, \sqrt{1-\delta})).$$

特别地，若 $\dim A = \delta = 1$，则 $l = 0$ 和 $\Delta(\delta, k) = 1 - k^2$，因此

$$\dim(g(A)) \geq 1 - k^2.$$

本文其余部分安排如下。我们将在第 2 节回顾豪斯多夫维数、装填维数和闵可夫斯基维数的概念。第 3 节将更详细地讨论全纯运动，尤其是它与拟共形映射之间的关系。我们需要的下调和函数的基本性质将在第 4 节中阐述。我们的主要结果——定理 1.3、1.4、1.6、1.7 和 1.9——将在第 5 至第 9 节中证明。关于拟共形映射的应用，即定理 1.10、1.11、1.12 和 1.13，将在第 10 节中讨论。最后，我们将在第 11 节提出一个公开问题。

2. Notions of dimension

本节将简要回顾一些维数的基本概念，介绍相关记号，并着重讨论对后文有用的方面。我们的论述依据 Bishop–Peres[6] 和 Falconer [9]的著作。

2.1. 豪斯多夫维数。我们先给出定义。设 $A \subset \mathbb{C}$。对于$s \geq 0$ 和 $\delta > 0$，定义

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_j)^s\Big\},$$

其中，下确界取遍由直径至多为 δ 的集合构成的 A 的所有可数覆盖 $\{A_j\}$。由于 $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ 随着 δ 减小而增大，极限

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

存在，可能为 0 或 ∞。集合函数 $\mathcal{H}^s(\cdot)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个外测度，称为 s 维豪斯多夫测度。A 的豪斯多夫维数定义为满足下式的唯一实数 $\dim_H(A) \in [0,2]$：

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} \infty, & s < \dim_H(A), \\ 0, & s > \dim_H(A). \end{cases}$$

我们还需要对这一构造稍作变体。二进方形是 $\mathbb{C}$ 的一个子集，形式为 $Q = [m2^{-k}, (m+1)2^{-k}) \times [n2^{-k}, (n+1)2^{-k})$，其中 k、m、n 为整数（可以是负数）。定义

$$\widetilde{\mathcal{H}}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(Q_j)^s\Big\},$$

此时，下确界仅取遍由直径至多为 δ 的二进方形构成的 A 的可数覆盖 $\{Q_j\}$。与之前一样，我们还定义

$$\widetilde{\mathcal{H}}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \widetilde{\mathcal{H}}^s_\delta(A).$$

~ ~显然，对所有 δ，都有 $\mathcal{H}^s_\delta(A) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A)$，因此 $\mathcal{H}^s(A) \geq \mathcal{H}^s(A)$。此外，不难看出，复数域中的任意有界子集都可以用 9 个直径更小的二进方形覆盖，由此可得，对~所有 δ，都有 $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq 9\mathcal{H}^s_\delta(A)$，因此 $\mathcal{H}^s(A) \leq 9\mathcal{H}^s(A)$。特别地，我们得到以下结果。

命题 2.1. 使用上述记号，我们有

$$\widetilde{\mathcal{H}}^s(A) = \begin{cases} \infty, & s < \dim_H(A), \\ 0, & s > \dim_H(A). \end{cases}$$

二进方形具有这样的性质：任意两个方形要么嵌套~，要么不相交。因此，在 $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ 的定义中，集合 Q_j 可以取为互不相交的。这一点稍后会对我们有所帮助。关于此问题的更多内容，参见 [6, §1.3，第 11] 页。

最后我们指出，豪斯多夫维数具有可数稳定性，即对于任意集合序列 (A_j)，都有 $\dim_H(\cup_{j\geq 1} A_j) = \sup_{j\geq 1} \dim_H(A_j)$（参见例如 [9, p.49]）。

2.2. 填充维数。填充维数的概念在某种意义上与豪斯多夫维数的概念互为对偶。该概念由 Tricot 于 [25] 年引入。

我们再次从定义开始。设 $A \subset \mathbb{C}$。对于 $s \geq 0$ 和$\delta > 0$，定义

$$\mathcal{P}_\delta^s(A) := \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(D_j)^s\Big\},$$

其中，上确界取遍所有以 A 中的点为圆心、直径至多为 δ 的两两不相交圆盘 $\{D_j\}$ 的有限集合。由于 $P_\delta^s(A)$ 随着 δ 的减小而减小，极限

$$\mathcal{P}_0^s(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{P}_\delta^s(A)$$

存在，且可能为 0 或 ∞。这还不是外测度，因为它不是可数次可加的。它有时称为 A 的 s 维预打包测度。我们对其进行修改，使之成为外测度，并将 A 的 s 维填充测度定义为

$$\mathcal{P}^s(A) := \inf\Big\{\sum_{j\geq 1} \mathcal{P}_0^s(A_j) : A = \cup_{j\geq 1} A_j\Big\},$$

其中，下确界取遍 A 的所有可数覆盖，这些覆盖由子集 $(A_j)_{j\geq 1}$ 构成。于是，A 的填充维数定义为满足下式的唯一实数 $\dim_P(A) \in [0,2]$

$$\mathcal{P}^s(A) = \begin{cases} \infty, & s < \dim_P(A), \\ 0, & s > \dim_P(A). \end{cases}$$

与豪斯多夫维数的情形一样，填充维数具有可数稳定性：$\dim_P(\cup_{j\geq 1} A_j) = \sup_{j\geq 1} \dim_P(A_j)$。此外，我们总有

$$\dim_H(A) \leq \dim_P(A),$$

并且这个不等式可能是严格的。

2.3. 闵可夫斯基维数。设 A 是 $\mathbb{C}$的一个有界子集。给定$\delta > 0$，记 $N_\delta(A)$ 为覆盖 A所需的直径至多为 δ 的集合的最小数目。A 的上、下闵可夫斯基维数分别定义为

$$\overline{\dim}_M(A) := \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log(1/\delta)} \quad \text{and} \quad \underline{\dim}_M(A) := \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log(1/\delta)}.$$

当然，我们总有 $\dim_M(A) \leq \underline{\dim}_M(A)$。这个不等式可能是严格的。如果等号成立，则称 A的闵可夫斯基维数为 $\dim_M(A)$。它也称为 A的盒计数维数。

闵可夫斯基维数的优点是定义简单，但它也有一个缺点：与豪斯多夫维数和填充维数不同，它不是可数稳定的，也就是说，可能出现 $\dim_M(\cup_j A_j) > \sup_j \dim_M(A_j)$ 的情况。

上闵可夫斯基维数与上一小节介绍的预打包测度 $\mathcal{P}_0^s$ 之间存在一种有用的关系。以下结果出自 Tricot [25, 推论 2]。

命题2.2。若 A 是复数域 $\mathbb{C}$的一个有界子集，则

$$\mathcal{P}_0^s(A) = \begin{cases} \infty, & s < \overline{\dim}_M(A), \\ 0, & s > \overline{\dim}_M(A). \end{cases}$$

利用这个结果，我们可以用上闵可夫斯基维数来表示填充维数。以下定理同样归功于 Tricot[25,命题 2], 另见 [6, 定理 2.7.1]。

命题 2.3。若 A 是复数域 $\mathbb{C}$的一个子集，则

$$\dim_P(A) = \inf\Big\{\sup_{j\geq 1} \overline{\dim}_M(A_j) : A = \cup_{j\geq 1} A_j\Big\},$$

其中，下确界取遍 A 的所有可数覆盖，且覆盖中的集合均为有界子集（A_j）。

由此结果显然可知，对每个有界集 A，都有

$$\dim_P(A) \leq \overline{\dim}_M(A).$$

一般来说，这个不等式可以是严格的。 [6] 和 [9] 两本书都讨论了等号成立的条件。

2.4. 相似维数。还有一种维数概念对下文很有用。它适用于一个特定的例子。

考虑一个有限的压缩相似变换系统

$$\gamma_j(z) = a_j z + b_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

其中 a_1、.....、a_n、b_1、.....、$b_n \in \mathbb{C}$，并且对所有 j，$|a_j| < 1$。在这种情况下，存在唯一的 $\mathbb{C}$ 的紧子集 L，使得 $L = \cup_{j=1}^n \gamma_j(L)$；该集合称为迭代函数系统 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ 的极限集。

如果存在一个非空开子集 U，使得对所有 j，$\gamma_j(U) \subset U$，且当 $i \neq j$ 时，$\gamma_i(U) \cap \gamma_j(U) = \emptyset$，则称系统 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ 满足开集条件。以下结果由 Hutchinson [12]，给出，是对 Moran 早期结果的推广 [16]，；另见 [9, 定理 9.3] 或 [6, 定理 2.2.2]。

定理 2.4. 若系统 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ 满足开集条件，则其极限集 L 的豪斯多夫维数和填充维数分别为 $\dim_H(L) = \dim_P(L) = s$，其中 s 是方程的唯一解

$$\sum_{j=1}^n |a_j|^s = 1.$$

这个数 s （无论是否满足开集条件）称为该系统的相似维数。

3. Holomorphic motions and quasiconformal maps

全纯运动已在定义 1.1 中定义。如引言所述，全纯运动由 Ma˜n´e、Sad 和 Sulli- van 在 [15] 中引入，他们还证明了 λ-引理。Slodkowski 后来在 [22], 中改进了他们的结果，从而证实了 Sullivan 和 Thurston 的一个猜想 [24]。Slodkowski 的结果通常称为扩展的 λ-引理。如今已有多种证明；另一种证明见 [2, §12]。

定理 3.1（扩展 λ-引理）。全纯运动 $f\colon \mathbb{D}\times A\to\mathbb{C}$可扩展为全纯运动 $F\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$。函数 F在 $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$上联合连续。

正如在 [15], 中已经指出的，全纯运动与拟共形映射密切相关。现在我们定义这一术语，并陈述后文将要用到的一些结果。我们的处理遵循 [2]中的方法。

定义 3.2。设 Ω、Ω′ 为平面域。若同胚 $f\colon \Omega\to\Omega'$满足以下条件，则称其为拟共形映射：

(i) f 是保向的；(ii) 其分布 Wirtinger 导数 $\partial f/\partial z$和 $\partial f/\partial\overline{z}$均属于 $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，且 (iii) f 满足贝尔特拉米方程：

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=\mu_f\,\frac{\partial f}{\partial z}\quad \text{a.e. on } \Omega,$$

其中，μ_f 是 Ω 上满足 $\|\mu_f\|_\infty<1$ 的可测函数。
函数 μ_f 称为 f 的贝尔特拉米系数或复伸张。若 f 满足 $\|\mu_f\|_\infty\le k$，我们就称映射 f 是 k-拟共形的。
注释。许多作者（包括 [2] 的作者）使用术语 K-拟共形来表示按我们的定义为 k-拟共形，且 $K=(1+k)/(1-k)$。

我们将需要以下关于贝尔特拉米方程 [2, 的解的存在性和唯一性的基本结果。定理 5.3。4]

定理 3.3（可测黎曼映射定理）。设 μ 是 $\mathbb{C}$ 上满足 $\|\mu\|_\infty<1$ 的可测函数。则存在唯一的拟共形映射 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$，固定 0 和 1，并且在 $\mathbb{C}$ 上几乎处处满足 $\mu_f=\mu$。

众所周知，贝尔特拉米方程的解关于参数全纯依赖 μ [2, 推论 5.7.5]。结合 [2,定理 12.3.2], ，这正是以下全纯运动刻画的关键。

定理 3.4. 设 $f\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个函数。以下陈述等价：

(i) 映射 f 是全纯运动。

(ii) 对每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，映射 $f_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是拟共形的，其贝尔特拉米系数 μ_λ 满足 $\|\mu_\lambda\|_\infty \leq |\lambda|$。此外，映射 f_0 是恒等映射，而取值于 $L^\infty(\mathbb{C})$ 的映射 $\lambda \mapsto \mu_\lambda$ 在 $\mathbb{D}$ 上全纯。

这些结果可用于证明，$\mathbb{C}$ 的每个拟共形同胚都可以嵌入为全纯运动 [2, 的一部分，见定理 12.5。3]

定理 3.5。如果 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个 k-拟共形同胚，则存在一个全纯运动 $f : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $f_k = F$。

拟共形映射具有许多有趣的性质。其中一个对我们来说很重要的性质是：$\mathbb{C}$的拟共形同胚是拟对称的，其含义将在下面的定理中说明，见 [2, 定理 3.5。3]

定理 3.6。给定 $k \in [0, 1)$，存在一个增同胚$\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得每个 k-拟共形映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足

$$\frac{|f(z_0) - f(z_1)|}{|f(z_0) - f(z_2)|} \leq \eta\Big(\frac{|z_0 - z_1|}{|z_0 - z_2|}\Big) \quad (z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}). \tag{3.1}$$

我们将通过下面这个简单的推论来利用这一结果。

推论 3.7. 给定 $k \in [0, 1)$，存在常数 $\delta, \delta' > 0$，使得每个 k-拟共形同胚 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 都具有以下性质：

(i) 若 $z_0 \in \mathbb{C}$ 且 D 是以 z_0为中心的开圆盘，则 $f(D)$ 包含以 $f(z_0)$ 为中心、半径为 $\delta \operatorname{diam} f(D)$ 的开圆盘。(ii) 若 $z_0 \in \mathbb{C}$ 且 Q 是以 z_0为中心的开正方形，则 $f(Q)$ 包含以 $f(z_0)$ 为中心、半径为 $\delta' \operatorname{diam} f(Q)$ 的开圆盘。

证明. 令 η 为由定理 3.6 与 k 相关联的函数。对于正方形的情形，若 $z_1, z_2 \in \partial Q$，则 $|z_0 - z_1|/|z_0 - z_2| \leq \sqrt{2}$，因此由 (3.1) 得 $|f(z_0) - f(z_1)|/|f(z_0) - f(z_2)| \leq \eta(\sqrt{2})$。由此可知，(ii) 中取$\delta' = 1/(2\eta(\sqrt{2}))$即可成立。(i) 的证明类似，此时取 $\delta = 1/(2\eta(1))$。□

4. Inf-harmonic functions

回顾定义 1.2，定义在平面域 D 上的函数 $u : D \to [0, \infty)$ 若为一族调和函数的下包络，则称其为下调和函数。根据定义，u必为正函数，因此这些调和函数也都是正函数。这意味着，下调和函数继承了正调和函数的若干优良性质。

我们首先证明下调和函数满足哈纳克不等式。回顾一下，给定 λ_1、$\lambda_2 \in D$，存在 $\tau > 0$，使得对所有

D 上的正调和函数 h

$$\frac{1}{\tau} \le \frac{h(\lambda_1)}{h(\lambda_2)} \le \tau.$$

这样的 τ 中的最小值称为 λ_1与 λ_2之间的Harnack距离，记作$\tau_D(\lambda_1, \lambda_2)$。例如，当 $\lambda \in \mathbb{D}$时，$\tau_{\mathbb{D}}(0, \lambda) = (1 + |\lambda|)/(1 - |\lambda|)$。

命题4.1. 设 u 是域 D上的下调和函数，并设 $u \not\equiv 0$。则对所有 $\lambda \in D$，都有 $u(\lambda) > 0$，且

$$\frac{1}{\tau_D(\lambda_1, \lambda_2)} \le \frac{u(\lambda_1)}{u(\lambda_2)} \le \tau_D(\lambda_1, \lambda_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in D). \tag{4.1}$$

证明。对于 D上的每个正调和函数 h，我们有

$$\frac{1}{\tau_D(\lambda_1, \lambda_2)} h(\lambda_2) \le h(\lambda_1) \le \tau_D(\lambda_1, \lambda_2) h(\lambda_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in D).$$

对所有满足 $h \ge u$的 h 取下确界，得到

$$\frac{1}{\tau_D(\lambda_1, \lambda_2)} u(\lambda_2) \le u(\lambda_1) \le \tau_D(\lambda_1, \lambda_2) u(\lambda_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in D).$$

由于 $u \not\equiv 0$，这表明对所有 $\lambda \in D$，$u(\lambda) > 0$，于是（4.1）立即成立。□

推论4.2。若 u 是 D上的下调和函数，则它是 D上的连续超调和函数。

证明。由命题4.1可知，u 连续，因为 τ_D 在 $D \times D$上连续。由于 u 是调和函数的下确界，显然满足超平均值性质，因此它在 D上是超调和函数。□

下面的结果是一个正规族性质。

命题 4.3。设$(D_n)_{n\ge1}$ 是递增域列，且 $D := \cup_{n\ge1} D_n$。对每个 n，设 u_n 是 D_n上的下调和函数。那么，要么 $u_n \to \infty$ 在 D上局部一致收敛，要么存在一个子序列$u_{n_j} \to u$ 在 D上局部一致收敛，其中 u 是 D上的下调和函数。

证明。若存在一点 $\lambda_0 \in D$ 使得 $u_n(\lambda_0) \to \infty$，则由命题4.1可知，序列 $u_n \to \infty$ 在每个 D_m 上局部一致收敛，因而在 D上也局部一致收敛。同样，若 $u_n(\lambda_0) \to 0$，则 $u_n \to 0$ 在 D上局部一致收敛。因此，必要时以子序列替换(u_n)后，我们可以假设存在 $\lambda_0 \in D_1$ 和 $M > 1$，使得对所有 n都有 $1/M \le u_n(\lambda_0) \le M$。在这种情况下，再由命题4.1可知，序列$(u_n)$在每个 D_m上均等连续。根据阿尔泽拉–阿斯科利定理，存在一个子序列(u_{n_j})在 D 上局部一致收敛到一个有限值函数 u。

还需证明 u 本身在 D 上是下调和的。如有必要，重新标记后，我们可以假设整个序列 u_n 在 D 上局部一致收敛到 u。令 $\lambda_0 \in D_0$。选取 n_0，使得 $\lambda_0 \in D_{n_0}$。对于每个 $n \ge n_0$，函数 u_n 在 D_n 上是下调和的，因此存在一个（正的）调和函数 h_n，定义在 D_n 上，使得 $h_n \ge u_n$ 在 D_n 上成立，且 $h_n(\lambda_0) \le u(\lambda_0) + 1/n$。根据

标准正规族论证，子序列 (h_{n_j}) 在 D 上局部一致收敛到函数 h，该函数在 D 上调和。显然，$h \geq u$ 在 D 上成立，且 $h(\lambda_0) = u(\lambda_0)$。对于每个 $\lambda_0 \in D$ 的取值，这样的 h 都存在，因此我们得出结论：u 确实在 D 上是下调和的。□

以下结果列出了下调和函数族的一些闭包性质。

P 命题 4.4. (i) 若 u, u 是下调和的，且若 $\alpha, \beta \geq 0$，则 $\alpha u + \beta v$ 在 D上是下调和的。(ii) 若 u 在 D 上是下调和的，且 h 在 D上是调和的，并且若 $u \geq h$，则 $u - h$ 在 D上是下调和的。(iii) 若 $(u_n)_{n\geq 1}$ 是 D上的下调和函数，且若 $u_n \to u$ 在 D上逐点成立，则 u 要么在 D 上是下调和的，要么 $u \equiv \infty$。(iv) 若 (D_n) 是一列递增的域，且 $\cup_{n\geq 1} D_n = D$，并且若 u 是 D 上的函数，使得对每个 n，$u|_{D_n}$ 在 D_n 上都是下调和的，则 u 在 D上是下调和的。(v) 若 $\mathcal{V}$ 是 D 上的下调和函数族，且 $u := \inf_{v\in\mathcal{V}} v$，则 u 在 D上是下调和的。(vi) 若 $\mathcal{V}$ 是 D上的下调和函数向上有向族（即给定 $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$，存在 $v_3 \in \mathcal{V}$，使得 $v_3 \geq \max\{v_1, v_2\}$），且若 $u := \sup_{v\in\mathcal{V}} v$，则 u 要么在 D 上是下调和的，要么 $u \equiv \infty$。

证明。（i）、（ii）这两点都显然成立。

（iii）假设 $u \not\equiv \infty$。那么，根据命题 4.3，(u_n) 的一个子序列在 D 上局部一致收敛于一个下调和函数 v。由于同一子序列逐点收敛于 u，我们必有 $v = u$。因此u是下调和的。

（iv）将命题 4.3 应用于 $u_n := u|_{D_n}$ 即可得到此结论。

（v）同样，这一点显然成立。

（vi）假设 $u \not\equiv \infty$。那么，根据命题4.1，u 在 D 上取有限值且连续。令 $\Lambda = (\lambda_j)$ 是 D 中的一个稠密子集。利用 $\mathcal{V}$ 向上有向这一事实，我们可以构造一个递增的函数序列 $v_n \in \mathcal{V}$，使得对于所有 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 和所有 $n \geq 1$，有 $v_n(\lambda_j) \geq u(\lambda_j) - 1/n$。于是，$v_n$ 逐点收敛于一个函数 v，满足 $v \leq u$ 且在 Λ上 $v = u$。根据上面的（iii），v 在 D 上是下调和的。由于在稠密子集 Λ 上有 $v = u$，且 u、v 都是连续的，因此在 D 上有 $v = u$。从而，如所断言，u在 D 上是下调和的。□

我们以一个关于无穷调和函数的隐函数定理结束本节。

定理 4.5. 设 D 是一个平面域，并设 $a_j : D \to (0, 1)$ 是一个有限或无限的函数序列，使得对于每个 j，$\log(1/a_j)$ 在 D 上是下调和的。令 $c > 0$，并定义 $s : D \to [0, \infty]$ 为

$$s(\lambda) := \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_j a_j(\lambda)^\alpha \leq c\Big\} \quad (\lambda \in D),$$

其中我们将 $\inf \emptyset = \infty$ 理解为……。那么 $s \equiv 0$ 或 $1/s$ 是 D 上的下调和函数。

或许值得强调一下仅有有限多个函数 a_j 的情形。这时便得到一个与第§2 节所定义的相似维数概念密切相关的结果。它推广了 Baribeau 和 Roy 的一个结果 [4, 定理 1]。

推论4.6. 设 $a_1, \dots, a_n \colon D \to (0,1)$ 是一些函数，使得对每个 j，$\log(1/a_j)$ 在 D 上是下调和的。设 $c \in (0,n)$，并且对每个 $\lambda \in D$，令$s(\lambda)$ 为方程的唯一解

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda)^{s(\lambda)} = c.$$

那么 $1/s$ 在 D 上是一个下调和函数。

我们将从一个更一般的抽象结果推导出定理 4.5。为了表述这一结果，引入一些术语会更方便。

设 X 是一个集合，并设 $\mathcal{U}$ 是一族函数 $u \colon X \to [0,\infty)$。如果 $\mathcal{U}$ 满足以下闭包性质，我们就称它是 X 上的一个下确界锥：

- 若 $u, v \in \mathcal{U}$ 且 $\alpha, \beta \geq 0$，则 $\alpha u + \beta v \in \mathcal{U}$；
- 若 $\emptyset \neq \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ 且 $u := \inf_{v \in \mathcal{V}} v$，则 $u \in \mathcal{U}$。

由命题 4.4 的 (i) 和 (v) 可知，域 D 上的下调和函数集合是 D上的一个下确界锥。

以下结果可视为下确界锥的一个抽象隐函数定理。

引理 4.7. 设 $\mathcal{U}$是 X上的一个下确界锥，$(u_j)_{j\geq 1}$是 $\mathcal{U}$中的一个序列，并且对每个 j，令 $\phi_j \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为一个连续、递减、凸函数。定义 $v \colon X \to [0,\infty]$ 如下：

$$v(x) := \sup\Big\{ t > 0 : \sum_{j\geq 1} \phi_j(u_j(x)/t) \leq 1 \Big\} \quad (x \in X),$$

其中我们将 $\sup \emptyset = 0$解释为。那么 $v \in \mathcal{U}$ 或 $v \equiv \infty$。

证明。对于每个 j，令 $\mathcal{L}_j$ 为形如 $L(y) := b_L - a_L y$ 的函数族，使得 $a_L \geq 0$、$b_L \in \mathbb{R}$ 和 $L \leq \phi_j$。由于 ϕ_j是连续递减凸函数，因此我们有 $\phi_j = \sup_{L \in \mathcal{L}_j} L$。因此，如果 $x \in X$

且 $t>0$，那么

$$\sum_{j\ge1}\phi_j(u_j(x)/t)\le 1$$
$$\iff \sum_{j=1}^{n}\phi_j(u_j(x)/t)\le 1 \quad (n\ge1)$$
$$\iff \sum_{j=1}^{n}(b_{L_j}-a_{L_j}u_j(x)/t)\le 1 \quad (n\ge1,\ L_1\in\mathcal{L}_1,\ \dots,\ L_n\in\mathcal{L}_n)$$
$$\iff t\Big(\sum_{j=1}^{n}b_{L_j}-1\Big)\le\sum_{j=1}^{n}a_{L_j}u_j(x) \quad (n\ge1,\ L_1\in\mathcal{L}_1,\ \dots,\ L_n\in\mathcal{L}_n).$$

现在有两种可能。如果对于所有 n 以及 $(L_1,\dots,L_n)\in\mathcal{L}_1\times\cdots\times\mathcal{L}_n$ 的所有取法，$\sum_{j=1}^{n}b_{L_j}\le1$，那么上述条件对所有 $t>0$ 和所有 $x\in X$ 都成立。在这种情况下，$v\equiv\infty$。另一种情况下，我们有

$$v(x)=\inf\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{L_j}u_j(x)}{\sum_{j=1}^{n}b_{L_j}-1}\right\}\quad(x\in X),$$

其中，下确界取遍所有满足 $\sum_{j=1}^{n}b_{L_j}>1$ 的 $n\ge1$ 以及 $(L_1,\dots,L_n)\in\mathcal{L}_1\times\cdots\times\mathcal{L}_n$。因此，在这种情况下 $v\in\mathcal{U}$。□

定理 4.5 的证明。取 $\mathcal{U}$ 为 D 上的下调和函数集，并对每个 j 令 $\psi_j(y):=(1/c)\exp(-y)$，由此可从引理 4.7 得出该结果。□

5. Proof of Theorem 1.3

我们有 $A_\lambda=f_\lambda(A)=f(\lambda,A)$，其中 $f\colon\mathbb{D}\times A\to\mathbb{C}$ 是一个全纯运动。根据定理 3.1，我们可以将 f 延拓为一个全纯运动 $f:\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$。我们将假设 f 已按此方式延拓。由于 A 有界且 f 连续，因此对所有 $\lambda\in\mathbb{D}$，A_λ 均有界。

以下引理确立了它与下调和函数之间的联系。回顾一下，$D(a,r)$表示以 a 为圆心、r为半径的开圆盘，而 $\operatorname{diam}(S)$表示 S的欧几里得直径。

引理 5.1. 设 $f\colon\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个全纯运动。设 B 是 $\mathbb{C}$的有界子集，且 $\rho\in(0,1)$。那么 $M:=\operatorname{diam} f(D(0,\rho)\times B)<\infty$。若 S是 B的子集，则映射 $\lambda\mapsto\log(M/\operatorname{diam} f_\lambda(S))$ 是 $D(0,\rho)$ 上的下调和函数。因此，我们有

$$\frac{\rho-|\lambda|}{\rho+|\lambda|}\le\frac{\log(M/\operatorname{diam}f_\lambda(S))}{\log(M/\operatorname{diam}S)}\le\frac{\rho+|\lambda|}{\rho-|\lambda|}\qquad(\lambda\in D(0,\rho)).\tag{5.1}$$

证明。由于 $f\colon\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个连续映射，而 $\overline{D}(0,\rho)\times\overline{B}$ 是 $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ 的紧子集，因此可知 $f(\overline{D}(0,\rho)\times\overline{B})$ 是 $\mathbb{C}$ 的紧子集。特别地，它具有有限直径，因此 $M<\infty$。

给定 $S \subset B$，我们有

$$\log\Big(\frac{M}{\operatorname{diam} f_\lambda(S)}\Big) = \inf\Big\{\log\Big(\frac{M}{|f_\lambda(z) - f_\lambda(w)|}\Big) : z, w \in S,\, z \neq w\Big\}.$$

对于满足 $z \neq w$ 的每一对 $z, w \in S$，函数 $\lambda \mapsto \log(M/|f_\lambda(z) - f_\lambda(w)|)$ 在 $D(0,\rho)$ 上为正且调和。因此，$\lambda \mapsto \log(M/\operatorname{diam} f_\lambda(S))$ 在 $D(0,\rho)$ 上是下调和的。

最后，不等式 (5.1) 直接源自下调和函数的 Harnack 不等式，即命题4.1。□

下一个引理包含了定理 1.3 证明的核心。我们回顾一下，上闵可夫斯基维数 $\dim_M$ 可用命题2.2来刻画。

引理 5.2. 若 $\overline{\dim_M}(A) > 0$，则存在一个下调和函数u，定义在 $\mathbb{D}$ 上，使得

$$u(0) = 1/\overline{\dim}_M(A) \qquad and \qquad u(\lambda) \geq 1/\overline{\dim}_M(A_\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

证明. 设 $\rho \in (0,1)$。我们先在圆盘 $D(0,\rho)$ 上完成证明，最后再令 $\rho \to 1$ 。

设 (d_n) 是一个序列，使得 $0 < d_n < \dim_M(A)$ 且 $d_n \to \dim_M(A)$。由命题2.2，对每个 n，存在一个有限的不相交圆盘集 $\mathcal{D}_n$，其圆心位于 A，且当 $n \to \infty$ 时，

$$\max_{D\in\mathcal{D}_n} \operatorname{diam}(D) \to 0 \quad \text{and} \quad \sum_{D\in\mathcal{D}_n} \operatorname{diam}(D)^{d_n} \to \infty. \tag{5.2}$$

令 B 为 $\cup_{n\geq 1}\mathcal{D}_n$ 中所有圆盘的并集。这是一个有界集，因此由引理 5.1，$M := \operatorname{diam} f(D(0,\rho) \times B) < \infty$，并且对每个 $D \in \cup_n \mathcal{D}_n$，$\lambda \mapsto \log(M/\operatorname{diam} f_\lambda(D))$ 在 $D(0,\rho)$ 上是下调和的。

对于每个 $\lambda \in D(0,\rho)$，令 $s_n(\lambda)$ 为方程的唯一解

$$\sum_{D\in\mathcal{D}_n} (\operatorname{diam} f_\lambda(D)/M)^{s_n(\lambda)} = \sum_{D\in\mathcal{D}_n} (\operatorname{diam} D/M)^{d_n}.$$

显然 $s_n(0) = d_n$。此外，由隐函数定理和推论4.6，函数 $1/s_n$ 在 $D(0,\rho)$ 上是下调和的。由命题 4.3，$1/s_n$ 的一个子序列（通过重新编号，我们可以假设它就是整个序列）局部一致地收敛到 $D(0,\rho)$ 上的一个下调和函数 u。显然，我们有 $u(0) = \lim_n(1/d_n) = 1/\overline{\dim}_M(A)$。我们将证明，对于所有 $\lambda \in D(0,\rho)$，都有 $u(\lambda) \geq 1/\dim_M(A_\lambda)$。

固定 $\lambda \in D(0,\rho)$，并令 $c \in (0, 1/u(\lambda))$。那么对所有足够大的 n，$s_n(\lambda) > c$，因此对于这些 n，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{D\in\mathcal{D}_n} (\operatorname{diam} f_\lambda(D)/M)^c &\geq \sum_{D\in\mathcal{D}_n} (\operatorname{diam} f_\lambda(D)/M)^{s_n(\lambda)} \\ &= \sum_{D\in\mathcal{D}_n} (\operatorname{diam} D/M)^{d_n},\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{D\in\mathcal{D}_n}(\operatorname{diam} f_\lambda(D))^c \geq M^{c-d_n}\sum_{D\in\mathcal{D}_n}(\operatorname{diam} D)^{d_n}.$$

对于给定的 n，集合 $\{f_\lambda(D)\colon\ D\in\mathcal{D}_n\}$ 彼此不相交，但它们并不是圆盘。不过，我们可以借助拟共形映射理论来克服这一困难。根据定理 3.4，映射 f_λ 是 ρ-拟共形自同胚，作用于 $\mathbb{C}$。因此，根据推论 3.7(i)，存在一个 $\delta>0$，使得对于每个 $w\in\mathbb{C}$ 以及每个以 w为中心的开圆盘 D，集合 $f_\lambda(D)$ 都包含一个以 $f_\lambda(w)$ 为中心、半径为$\delta\operatorname{diam} f_\lambda(D)$ 的开圆盘。特别地，对于每个 $D\in\mathcal{D}_n$，集合 $f_\lambda(D)$ 都包含一个圆盘，其中心位于 $f_\lambda(A)$ 中，且直径至少为 $\delta\operatorname{diam} f_\lambda(D)$。将所有这类圆盘组成的集合记为 $\mathcal{D}'_n$，我们得到一个有限的不相交圆盘集 D'，其圆心位于 A_λ 中，并且满足

$$\sum_{D'\in\mathcal{D}'_n}(\operatorname{diam} D')^c \geq \sum_{D\in\mathcal{D}_n}(\delta\operatorname{diam} f_\lambda(D))^c \geq \delta^c M^{c-d_n}\sum_{D\in\mathcal{D}_n}(\operatorname{diam} D)^{d_n}.$$

由 (5.2)，我们有 $\sum_{D\in\mathcal{D}_n}(\operatorname{diam} D)^{d_n}\to\infty$，由此可得

$$\sum_{D'\in\mathcal{D}'_n}(\operatorname{diam} D')^c\to\infty\quad(n\to\infty). \tag{5.3}$$

同样由 (5.2)，我们有 $\max_{D\in\mathcal{D}_n}\operatorname{diam}(D)\to 0$，结合不等式 (5.1)，可推出

$$\max_{D'\in\mathcal{D}'_n}\operatorname{diam}(D')\to 0\quad(n\to\infty). \tag{5.4}$$

综合极限 (5.3) 和 (5.4)，可得 $\dim_M(A_\lambda)\geq c$。由于这对每个 $c\in(0,1/u(\lambda))$ 都成立，我们推得 $\dim_M(A_\lambda)\geq 1/u(\lambda)$，换言之，$u(\lambda)\geq 1/\dim_M(A_\lambda)$，这正是所需的结论。

引理的证明已近乎完成，唯一的问题是 u 仅定义在 $D(0,\rho)$ 上，而非 $\mathbb{D}$。为此，取 $(0,1)$ 中一个递增序列 (ρ_m)，使得 $\rho_m\to 1$。对每个 m，上述论证给出一个定义在 $D(0,\rho_m)$ 上的下调和函数 u_m，使得$u_m(0)=1/\dim_M(A)$，且对所有 $\lambda\in D(0,\rho_m)$，$u_m(\lambda)\geq 1/\dim_M(A_\lambda)$。根据命题 4.3，$(u_m)$ 的一个子序列局部一致收敛到 $\mathbb{D}$ 上的下调和函数 u。显然，对所有 $\lambda\in\mathbb{D}$，我们有 $u(0)=1/\dim_M(A)$，且 $u(\lambda)\geq 1/\dim_M(A_\lambda)$。证明至此完成。□

由此便可轻松证明主要结果。

定理 1.3 的证明。只需证明，对于每个满足 $\dim_M(A_{\lambda_0})>0$ 的 $\lambda_0\in\mathbb{D}$，都存在一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的下调和函数 u，使得

$$u(\lambda_0)=1/\overline{\dim}_M(A_{\lambda_0})\qquad\text{and}\qquad u(\lambda)\geq 1/\overline{\dim}_M(A_\lambda)\quad(\lambda\in\mathbb{D}). \tag{5.5}$$

特殊情形 $\lambda_0=0$ 已在引理 5.2 中得到证明。一般情形可如下由此推出。

~取一个 $\mathbb{D}$ 的莫比乌斯自同构 ϕ，使得 $\phi(0) = \lambda_0$。那么 $f_\lambda := f_{\phi(\lambda)} \circ f_{\lambda_0}^{-1}$ 是一个将 $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ 映射到 $\mathbb{C}$ 中的全纯运动。此外，$\widetilde{A} := A_{\lambda_0}$~ ~是 $\mathbb{C}$ 的一个有界子集，使得对于所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$f_\lambda(A) = A_{\phi(\lambda)}$。因此，~ ~将引理 5.2 中的 A、f 替换为 A、f 这一对，我们可推出存在一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的下调和函数 v，使得

$$v(0) = 1/\overline{\dim}_M(A_{\phi(0)}) \qquad \text{and} \qquad v(\lambda) \geq 1/\overline{\dim}_M(A_{\phi(\lambda)}) \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

那么 $u := v \circ \phi^{-1}$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上并满足 (5.5) 的下调和函数。定理的证明至此完成。□

6. Proof of Theorem 1.4

与上一节一样，我们可以假设 $A_\lambda = f_\lambda(A) = f(\lambda, A)$，其中 $f\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个全纯运动。

我们将利用命题 2.3 中关于用闵可夫斯基维数刻画填充维数的结果，由定理 1.3 推出定理 1.4。根据该结果，我们有

$$\dim_P(A) = \inf\Big\{\sup_{j\geq 1}\overline{\dim}_M(A_j) : A = \cup_{j\geq 1}A_j\Big\},$$

其中，下确界是对 A 的所有由有界子集 (A_j) 构成的可数覆盖取的。由于 f_λ 是从 A 到 A_λ 的双射，因此可得，

$$\dim_P(A_\lambda) = \inf\Big\{\sup_{j\geq 1}\overline{\dim}_M(f_\lambda(A_j)) : A = \cup_{j\geq 1}A_j\Big\} \quad (\lambda \in \mathbb{D}),$$

因此

$$\frac{1}{\dim_P(A_\lambda)} = \sup\Big\{\inf_{j\geq 1}\frac{1}{\overline{\dim}_M(f_\lambda(A_j))} : A = \cup_{j\geq 1}A_j\Big\} \quad (\lambda \in \mathbb{D}). \tag{6.1}$$

设 $A = \cup_{j\geq 1}A_j$ 是 A 的一个由 A 的有界子集构成的可数覆盖。根据定理 1.3，对每个 j，要么 $\dim_M(f_\lambda(A_j)) \equiv 0$，要么 $\lambda \mapsto 1/\overline{\dim}_M(f_\lambda(A_j))$ 是 $\mathbb{D}$ 上的下调和函数。因此，要么对所有 $j \geq 1$，$\dim_M(f_\lambda(A_j)) \equiv 0$；要么 $\lambda \mapsto \inf_{j\geq 1} 1/\dim_M(f_\lambda(A_j))$ 是 $\mathbb{D}$ 上的下调和函数。在第一种情形下，(6.1) 蕴含 $\dim_P(A_\lambda) \equiv 0$。在第二种情形下，关系式 (6.1) 将 $1/\dim_P(A_\lambda)$ 表示为一族下调和函数的上确界。

通常，一族下调和函数的上确界不再是下调和函数。然而，这个特殊的函数族是一个向上有向集，含义如命题 4.4 (vi) 所述。事实上，给定 $A = \cup_i A_i = \cup_j B_j$ 的任意两个由有界集构成的可数覆盖，存在第三个这样的覆盖，即 $A = \cup_{i,\ j}(A_i \cap B_j)$，它具有如下性质：

$$\sup_{i,j}\overline{\dim}_M(A_i \cap B_j) \leq \min\Big\{\sup_i \overline{\dim}_M(A_i),\ \sup_j \overline{\dim}_M(B_j)\Big\},$$

这意味着（6.1）具有向上有向性。由命题 4.4(vi)可知，要么 $\dim_P(A_\lambda) \equiv 0$，要么 $\lambda \mapsto 1/\dim_P(A_\lambda)$ 在 $\mathbb{D}$ 上是下调和的。定理 1.4 的证明至此完成。□

7. Proof of Theorem 1.6

定理 1.6 的证明与第 5 节中给出的定理 1.3 的证明思路相似；不过，由于豪斯多夫维数是通过覆盖而非打包来定义的，因此有些不等式的方向相反。遗憾的是，这最终导致了一个较弱的结果。

我们有 $A_\lambda = f_\lambda(A) = f(\lambda, A)$，其中 $f\colon \mathbb{D} \times A \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动。与前面一样，我们可以将 f 延拓为一个全纯运动 $f\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，并且我们将假设 f 已作了这样的延拓。

证明的核心包含在以下引理中。

引理 7.1. (i) 若 $\dim_H(A) = 0$，则对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_H(A_\lambda) = 0$。(ii) 若 $\dim_H(A) > 0$，则存在一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的下调和函数 u，使得

$$u(0) = 1/\dim_H(A) \quad \textit{and} \quad 1/2 \le u(\lambda) \le 1/\dim_H(A_\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

证明。若 $\dim_H(A) = 2$，则我们只需取 $u \equiv 1/2$。以下假设 $0 \le \dim_H(A) < 2$。

设 $\rho \in (0, 1)$。我们将在圆盘 $D(0, \rho)$ 上完成证明，然后在最后令 $\rho \to 1$。

设 (d_n) 是一个序列，使得 $\dim_H(A) < d_n < 2$ 且 $d_n \to \dim_H(A)$。根据命题 2.1，对于每个 n，存在一个覆盖 $\mathcal{Q}_n$（可数），由不相交的二进方格组成，并且 A 满足，当 $n \to \infty$ 时，

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}_n} \operatorname{diam}(Q) \to 0 \quad \text{and} \quad \sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} \operatorname{diam}(Q)^{d_n} \to 0. \tag{7.1}$$

我们可以假设 $\cup_n \mathcal{Q}_n$ 中的所有方格都与 A 相交。因此，如果 B 是 $\cup_n \mathcal{Q}_n$ 中所有方格的并集，那么 B 是一个有界集。根据引理 5.1，$M := \operatorname{diam} f(D(0,\rho) \times B) < \infty$，并且对于每个 $Q \in \cup_n \mathcal{Q}_n$，$\lambda \mapsto \log(M/\operatorname{diam} f_\lambda(Q))$ 在 $D(0,\rho)$ 上是下调和的。

取常数 C，稍后再选定（它只依赖于 ρ），并对每个 $\lambda \in D(0,\rho)$，令

$$s_n(\lambda) := \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} \Big(\frac{\operatorname{diam} f_\lambda(Q)}{M}\Big)^\alpha \le C\Big\}.$$

由隐函数定理和定理 4.5，$s_n \equiv 0$ 或 $1/s_n$ 在 $D(0,\rho)$ 上是下调和的。由命题 4.3，(s_n) 的一个子序列（重新编号后，可假设它就是整个序列）在 $D(0,\rho)$ 上局部一致收敛到 s，其中 $s \equiv 0$ 或 $1/s$ 在 $D(0,\rho)$ 上是下调和的。

由（7.1）可知，对于所有充分大的 n，有 $s_n(0) \le d_n$，因此

$$s(0) = \lim_{n\to\infty} s_n(0) \le \lim_{n\to\infty} d_n = \dim_H(A). \tag{7.2}$$

如果对于某个 $\lambda \in D(0,\rho)$ 有 $\alpha > s(\lambda)$，那么对于所有充分大的 n，有 $\alpha > s_n(\lambda)$，因此，对于这些 n，

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} \operatorname{diam} f_\lambda(Q)^\alpha \le CM^\alpha.$$

对于每个 n，族 $\{f_\lambda(Q) : Q \in \mathcal{Q}_n\}$ 是 A_λ的一个覆盖。此外，由 (7.1) 和 (5.1)，我们有 $\sup_{Q\in\mathcal{Q}_n} \operatorname{diam} f_\lambda(Q) \to 0$，当 $n \to \infty$时。因此，根据豪斯多夫维数的定义，$\dim_H(A_\lambda) \le \alpha$。由于这对每个 $\alpha > s(\lambda)$都成立，我们得出

$$s(\lambda) \ge \dim_H(A_\lambda) \quad (\lambda \in D(0,\rho)). \tag{7.3}$$

接下来我们证明，若常数 C 取值足够大，则对于所有 $\lambda \in D(0,\rho)$，也有 $s(\lambda) \le 2$。为此，我们再次运用拟共形映射理论。根据定理 3.4，映射f_λ 是 $\mathbb{C}$上的一个 ρ-拟共形自同胚。因此，由推论 3.7 (ii)，存在一个仅依赖于 ρ的常数 $\delta' > 0$，使得对于 $\mathbb{C}$中的每个开正方形 Q，集合 $f_\lambda(Q)$都包含一个半径为$\delta' \operatorname{diam} f_\lambda(Q)$的开圆盘。特别地，对于每个 n，不相交的集合 $\{f_\lambda(Q) : Q \in \mathcal{Q}_n\}$中都包含半径为 $\delta' \operatorname{diam} f_\lambda(Q)$的不相交圆盘。由于这些圆盘都包含在集合 $f(D(0,\rho) \times B)$内，而该集合的直径为 M，比较它们的面积可得不等式

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} \pi(\delta' \operatorname{diam} f_\lambda(Q))^2 \le \pi M^2,$$

换言之，

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} \Big(\frac{\operatorname{diam}(f_\lambda(Q))}{M}\Big)^2 \le 1/\delta'^2.$$

这表明，若 $C \ge 1/\delta'^2$，则对所有 n，都有 $s_n(\lambda) \le 2$，因而 $s(\lambda) \le 2$。

综上所述，我们已经证明，若 $\dim_H(A) = 0$，则对所有 $\lambda \in D(0,\rho)$，有 $\dim_H(A_\lambda) = 0$（结合 (7.2) 和 (7.3)）；并且，若 $\dim_H(A) > 0$，则 $u := 1/s$ 是定义在 $D(0,\rho)$ 上的一个下调和函数，且满足

$$u(0) = 1/\dim_H(A) \quad \text{and} \quad 1/2 \le u(\lambda) \le 1/\dim_H(A_\lambda) \quad (\lambda \in D(0,\rho)).$$

该引理的证明几乎完成，唯一的问题是 u 仅定义在 $D(0,\rho)$ 上，而非定义在 $\mathbb{D}$ 上。我们完全按照引理 5.2 的证明末尾所用的方法来修正这一点。□

注。引理 7.1 的第 (i) 部分也可以利用如下众所周知的事实来证明：一个豪斯多夫维数为零的集合的拟共形像，其豪斯多夫维数也为零。

定理 1.6 的证明。我们断言，对于每个 $\zeta \in \mathbb{D}$，若 $\dim_H(A_\zeta) = 0$，则对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_H(A_\lambda) = 0$；并且，若 $\dim_H(A_\zeta) > 0$，则存在一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的下调和函数 u_ζ，使得

$$u_\zeta(\zeta) = 1/\dim_H(A_\zeta) \quad \text{and} \quad 1/2 \le u_\zeta(\lambda) \le 1/\dim_H(A_\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

特殊情形 $\zeta = 0$ 已在引理 7.1 中证明，而一般情形则可仿照 §5 末尾定理 1.3 的证明由此推出。

因此，要么对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_H(A_\lambda) = 0$；要么对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_H(A_\lambda) > 0$。在后一种情况下，我们有

$$\frac{1}{\dim_H(A_\lambda)} - \frac{1}{2} = \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} (u_\zeta(\lambda) - 1/2) \quad (\lambda \in \mathbb{D}),$$

其中右侧是一个函数族的上确界，这些函数在 $\mathbb{D}$ 上都是下调和的。□

8. Proof of Theorem 1.7

证明的核心思想包含在以下引理中，该引理基于 Astala 的一篇论文 [1]中的构造。

引理 8.1. 设 $h : \mathbb{D} \to (0, \infty)$ 是一个正调和函数，且$n \geq 10$。那么存在一个全纯运动 $\lambda \mapsto E_\lambda$，使得对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，E_λ 都是 $\mathbb{D}$ 的紧子集，并且

$$\frac{1}{\dim_H(E_\lambda)} = \frac{1}{\dim_P(E_\lambda)} = h(\lambda) + \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2 \log n} \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

证明。由于 h 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的正调和函数，因此存在全纯函数 $a : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$，使得

$$\log |a(\lambda)| = -h(\lambda) \log n \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

设 $\overline{D}(w_1, r), \dots, \overline{D}(w_n, r)$ 是位于 $\mathbb{D}$ 内且互不相交的闭圆盘，其中 $r = 1/\sqrt{2n}$。若 $n \geq 10$，则可以找到这样的圆盘。对于 $j = 1, \dots, n$ 和 $\lambda \in \mathbb{D}$，定义

$$\gamma_{j,\lambda}(z) := ra(\lambda)z + w_j \quad (z \in \mathbb{C}).$$

注意，对于每个 $j = 1, \dots, n$ 以及每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，都有 $\gamma_{j,\lambda}(\mathbb{D}) \subset D(w_j, r)$。因此，对于每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，族 $\{\gamma_{j,\lambda} : j = 1, \dots, n\}$ 生成一个满足开集条件的迭代函数系统。若以 E_λ 表示其极限集，则 $\lambda \mapsto E_\lambda$ 是一个紧值全纯运动（例如参见 [4,定理 4]），满足对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$ 都有 $E_\lambda \subset \cup_{j=1}^n \overline{D}(w_j, r) \subset \mathbb{D}$。此外，根据 Hutchinson–Moran 公式定理 2.4 的一个特例，E_λ 的 Hausdorff 维数和填充维数由 $\dim_H E_\lambda = \dim_P E_\lambda = s(\lambda)$ 给出，其中 $s(\lambda)$ 是下列方程的解

$$n(r|a(\lambda)|)^{s(\lambda)} = 1.$$

解这个方程，得到

$$\frac{1}{s(\lambda)} = -\frac{\log(r|a(\lambda)|)}{\log n} = \frac{\log(\sqrt{2n}) + h(\lambda) \log n}{\log n} = \frac{\log 2}{2 \log n} + \frac{1}{2} + h(\lambda).$$

证明至此完成。 □

引理 8.2. 设 D 是一个域，且 u 是 D 上的下调和函数。那么存在一个正调和函数序列 $(h_n)_{n \geq 1}$，定义在 D 上，使得对每个 $m \geq 1$，都有 $u = \inf_{n \geq m} h_n$ 在 D 上。

证明. 设 S 是 D 的一个可数稠密子集，并设 $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ 是 S 中的一个序列，它无限多次取遍 S 中的每个点。由于 u 是 D 上的下调和函数，对每个 $n\geq 1$，存在一个定义在 D 上的正调和函数 h_n，使得 $h_n \geq u$ 且 $h_n(\lambda_n) < u(\lambda_n) + 1/n$。于是，对每个 $m \geq 1$，都有$u = \inf_{n\geq m} h_n$ 在 S 上。由于 S 在 D 中稠密，并且下调和函数自动连续，因此 $u = \inf_{n\geq m} h_n$ 在 D 上。□

定理 1.7 的证明。令 $u(\lambda) := 1/d(\lambda) - 1/2$。由于 $1/d$ 是下调和的且 $1/d \geq 1/2$，因此 u 也是下调和的。由引理 8.2，存在一个由 $\mathbb{D}$ 上的正调和函数组成的序列 $(h_n)_{n\geq 1}$，使得对于每个 $m \geq 1$，$u = \inf_{n\geq m} h_n$。

由引理 8.1，对于每个 $n \geq 10$，存在 $\mathbb{D}$ 中取紧集值的全纯运动 $\lambda \mapsto E_\lambda^{(n)}$，使得

$$\frac{1}{\dim_H(E_\lambda^{(n)})} = \frac{1}{\dim_P(E_\lambda^{(n)})} = h_n(\lambda) + \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2\log n} \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

取 $\mathbb{C}$ 中一列两两不相交的闭圆盘 $\overline{D}(\zeta_n, s_n)$，使得 $\zeta_n \to 0$ 且 $s_n \to 0$，并定义

$$A_\lambda := \bigcup_{n\geq 10} (s_n E_\lambda^{(n)} + \zeta_n) \cup \{0\} \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

于是 $\lambda \mapsto A_\lambda$ 是发生在不相交圆盘中的全纯运动的并，因此其自身也是一个全纯运动。此外，对于每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，A_λ 是一个紧集。最后，由于豪斯多夫维数和填充维数都是可数稳定的，且这些维数在相似变换下保持不变，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\dim_H(A_\lambda)} = \frac{1}{\dim_P(A_\lambda)} &= \inf_{n\geq 10}\left(\frac{1}{\dim_P(E_\lambda^{(n)})}\right) \\ &= \inf_{n\geq 10}\left(h_n(\lambda) + \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2\log n}\right) \\ &= u(\lambda) + \frac{1}{2} = \frac{1}{d(\lambda)}.\end{aligned}$$

换言之，对于所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\dim_H(A_\lambda) = \dim_P(A_\lambda) = d(\lambda)$。证明至此完成。□

9. Proof of Theorem 1.9

本节中，我们证明定理 1.9，该定理讨论在全纯运动下移动的集合的面积变化。第（i）部分的证明紧随 [8], 的思路，详见 [2, §13.1]。我们首先需要以下引理。

引理 9.1. 设 (Ω, ν) 是一个测度空间，且 $a : \Omega \to (0, \infty)$ 是一个可测函数，使得 $\int_\Omega a \, d\nu < \infty$。那么，对于每个可测

函数 $p\colon \Omega \to (0,\infty)$，若满足 $\int_\Omega p\,d\nu = 1$，则有

$$\log\Big(\int_\Omega a\,d\nu\Big) \geq \int_\Omega p\log\Big(\frac{a}{p}\Big)\,d\nu,$$

当 $p = a/(\int_\Omega a\,d\nu)$ 时等号成立。

证明。不等式由将詹森不等式应用于凹函数 $\log x$ 和概率空间 $(\Omega\ p\,d\nu)$ 得出。等号成立的情形显然。□

引理 9.2。设 D 为一个平面域，$(\Omega\ \nu)$ 为一个有限测度空间，并设 $h\colon D\times\Omega \to \mathbb{R}$ 为满足以下条件的可测函数：

- $\lambda \mapsto h(\lambda,\omega)$ 在 D 上是调和的，对每个 $\omega\in\Omega$ 均成立；
- $\sup_{K\times\Omega}|h(\lambda,\omega)| < \infty$ 对每个紧集 $K\subset D$ 成立。

于是，函数 $H(\lambda) := \int_\Omega h(\lambda,\omega)\,d\nu(\omega)$ 在 D 上是调和的。

证明。由控制收敛定理，函数 H 在 D 上连续。此外，由于 $h(\cdot,\omega)$ 是调和的，并根据 Fubini 定理，它在 D 上满足平均值性质。因此，H 在 D 上是调和的。□

引理 9.3. 设 $k\in(0,1)$，且设 $R>0$。令 $g, g_n\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为 k-拟共形同胚，使得

- $\mu_{g_n}\to\mu_g$ 在 $\mathbb{C}$ 上几乎处处成立，
- $\operatorname{supp}\mu_{g_n}\subset D(0,R)$ 对每个 $n\geq 1$ 都成立，
- $g_n(z) = z + o(1) = g(z)$，当 $|z|\to\infty$ 对每个 $n\geq 1$ 成立时。

Then

$$\|\partial_z g_n - \partial_z g\|_{L^2(\mathbb{C})}\to 0 \quad \textit{and} \quad \|\partial_{\overline{z}} g_n - \partial_{\overline{z}} g\|_{L^2(\mathbb{C})}\to 0.$$

证明。第二个极限由 [2, 引理 5.3.1] 得出。第一个极限则是自动推论，因为 $\|\partial_z g_n - \partial_z g\|_{L^2(\mathbb{C})} = \|\partial_{\overline{z}} g_n - \partial_{\overline{z}} g\|_{L^2(\mathbb{C})}$。这是因为 Beurling变换将 $\partial_{\overline{z}} f$ 映射到 $\partial_z f$，是 $L^2(\mathbb{C})$ 上的酉算子（参见 [2, 第 95] 页的讨论）。□

定理 1.9 的证明。设 $f\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个全纯运动。假设存在 $\mathbb{C}$ 的一个紧子集 Δ，使得对于每个 $\lambda\in\mathbb{D}$，映射 f_λ 在 $\mathbb{C}\setminus\Delta$ 上共形，并且在 ∞ 附近满足 $f_\lambda(z) = z + O(1)$。设 A 是 Δ 的一个博雷尔子集，且 $|A|>0$。我们先做一些准备性说明。

首先要指出的是，在 ∞ 附近按 $f_\lambda(z) = z + O(1)$ 归一化时，我们不妨直接假设，在 ∞ 附近实际上有 $f_\lambda(z) = z + o(1)$。事实上，只需考虑平移后的全纯运动 $f(\lambda,z) - a_0(\lambda)$，其中 $a_0(\lambda)$ 是 $f_\lambda(z)$ 在无穷远附近的洛朗展开中的常数项。注意，由公式可见，$a_0(\lambda)$ 关于 $\mathbb{D}$ 全纯：

$$a_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f_\lambda(z)}{z}\,dz,$$

对所有足够大的 R 均成立，使得 $\Delta\subset D(0,R)$。

接下来，我们声称 $|A_\lambda|$ 存在一个简单的先验界，即

$$|A_\lambda| \le \pi c(\Delta)^2 \quad (\lambda \in \mathbb{D}). \tag{9.1}$$

这里， $c(\Delta)$ 是 Δ 的对数容量，定义见例如 [20, 第 5] 章。事实上，由于 f_λ 是从 $\mathbb{C} \setminus \Delta$ 到 $\mathbb{C} \setminus f_\lambda(\Delta)$ 的共形同胚，且在无穷远处满足 $f_\lambda(z) = z + o(1)$，集合 Δ 和 $f_\lambda(\Delta)$ 的对数容量相同:

$$c(f_\lambda(\Delta)) = c(\Delta) \quad (\lambda \in \mathbb{D}),$$

根据 [20, 定理 5.2.3]。由对数容量的等周不等式（[20, 定理 5.3.5]），我们有 $|f_\lambda(\Delta)| \le \pi c(f_\lambda(\Delta))^2$, ，由此可得

$$|A_\lambda| = |f_\lambda(A)| \le |f_\lambda(\Delta)| \le \pi c(f_\lambda(\Delta))^2 = \pi c(\Delta)^2,$$

如所述。

现在我们转而证明定理的 (i) 部分。首先假设 A 是紧集，并且存在 A 的一个开邻域 U，使得对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，在 U 上有$\mu_{f_\lambda} \equiv 0$。那么每个 f_λ 都是 U 上的共形映射，因此对所有 $z \in U$，$f'_\lambda(z) \neq 0$。根据面积的标准雅可比公式，我们有

$$|A_\lambda| = |f_\lambda(A)| = \int_A |f'_\lambda(z)|^2 \, dm(z),$$

其中 dm 表示 $\mathbb{C}$上的面积测度。利用引理 9.1，我们可以将 $\log|A_\lambda|$ 写成

$$\log|A_\lambda| = \sup_p \Big\{ \int_A p(z) \log\Big(\frac{|f'_\lambda(z)|^2}{p(z)} \Big) \, dm(z) \Big\},$$

其中，上确界取遍所有满足 $\int_A p \, dm = 1$的连续函数 $p: A \to (0, \infty)$。根据引理 9.2，每个积分都是关于 $\lambda \in \mathbb{D}$的调和函数。因此，对于每个 $C \ge \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |A_\lambda|$, $\log(C/|A_\lambda|)$都是 $\mathbb{D}$上的下调和函数；特别地，根据 (9.1)，对 $C = \pi c(\Delta)^2$, 也成立。

现在假设 A 仅为博雷尔函数，但仍假设对所有$\lambda \in \mathbb{D}$， $\mu_{f_\lambda} \equiv 0$ 在 U 上成立。我们有

$$\log\Big(\frac{\pi c(\Delta)^2}{|A_\lambda|} \Big) = \inf_F \log\Big(\frac{\pi c(\Delta)^2}{|F_\lambda|} \Big) \quad (\lambda \in \mathbb{D}),$$

其中，下确界取遍 A的所有紧子集 F。根据我们已经证明的结论，右侧的每个函数都是 $\mathbb{D}$上的下调和函数。因此，左侧在 $\mathbb{D}$ 上也同样是下调和函数。

最后，仅假设对每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，在 A 上几乎处处有 $\mu_{f_\lambda} = 0$。令 U_n 为一列递减的有界开集，使得 $|U_n \setminus A| \to 0$。根据定理 3.4，对每个 n，存在一个全纯运动 $f_n: \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得对每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，在 $\mathbb{C}$ 上几乎处处有 $\mu_{f_{n,\lambda}} = 1_{\mathbb{C} \setminus U_n} \mu_{f_\lambda}$，并且在 ∞ 附近有 $f_{n,\lambda}(z) = z + o(1)$。根据引理 9.3，可得

$$\|\partial_z f_{n,\lambda} - \partial_z f_\lambda\|_{L^2(\mathbb{C})} \to 0 \quad \text{and} \quad \|\partial_{\overline{z}} f_{n,\lambda} - \partial_{\overline{z}} f_\lambda\|_{L^2(\mathbb{C})} \to 0.$$

因此

$$\int_A |\partial_z f_\lambda|^2\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_A |\partial_z f_{n,\lambda}|^2\,dm = \lim_{n\to\infty}|f_{n,\lambda}(A)|$$

and

$$\int_A |\partial_{\overline{z}} f_\lambda|^2\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_A |\partial_{\overline{z}} f_{n,\lambda}|^2\,dm = 0.$$

因此，利用 [2, 公式 (2.24)], ，我们得到

$$|f_\lambda(A)| = \int_A (|\partial_z f_\lambda|^2 - |\partial_{\overline{z}} f_\lambda|^2)\,dm = \lim_{n\to\infty}|f_{n,\lambda}(A)|.$$

Thus

$$\log\Big(\frac{\pi c(\Delta)^2}{|A_\lambda|}\Big) = \lim_{n\to\infty}\log\Big(\frac{\pi c(\Delta)^2}{|f_{n,\lambda}(A)|}\Big) \quad (\lambda\in\mathbb{D}).$$

根据我们已经证明的结果，右端是关于 λ的下调和函数。由命题 4.4 的 (iii) 部分可知，左端在 $\mathbb{D}$ 上也下调和。至此，定理 (i) 部分的证明完成。

现在我们转而证明 (ii) 部分。设 $R_0 := \sup_{z\in\Delta}|z|$ ，并且对于$R > R_0$，设 $\Delta_R := \overline{D}(0,R)$（因此 $c(\Delta_R) = R$）。根据假设， $\mu_{f_\lambda} = 0$ 在$\Delta_R \setminus A$上几乎处处成立。因此，应用我们在 (i) 部分中证明的结果（将 Δ 替换为Δ_R，并将 A 替换为 $\Delta_R \setminus A$），可得

$$\lambda \mapsto \log\Big(\frac{\pi R^2}{|f_\lambda(\Delta_R\setminus A)|}\Big)$$

这是 $\mathbb{D}$上的下调和函数。现在，固定 $\lambda\in\mathbb{D}$。于是 $|f_\lambda(\Delta_R\setminus A)| = |f_\lambda(\Delta_R)| - |A_\lambda|$，根据单叶函数理论中的面积定理，

$$|f_\lambda(\Delta_R)| = \pi R^2 - \pi\sum_{n\ge 1} n|a_n(\lambda)|^2 R^{-2n},$$

其中， $f_\lambda(z) = z + \sum_{n\ge1} a_n(\lambda)z^{-n}$ 是 f_λ 在无穷远点附近的洛朗展开。特别地，当 $R\to\infty$时， $|f_\lambda(\Delta_R)| = \pi R^2 + O(R^{-2})$。因此

$$\log\Big(\frac{\pi R^2}{|f_\lambda(\Delta_R\setminus A)|}\Big) = \log\Big(\frac{\pi R^2}{\pi R^2 - |A_\lambda| + O(R^{-2})}\Big) = \frac{|A_\lambda|}{\pi R^2} + O(R^{-4}) \quad (R\to\infty).$$

由此可得

$$|A_\lambda| = \lim_{R\to\infty}\pi R^2\log\Big(\frac{\pi R^2}{|f_\lambda(\Delta_R\setminus A)|}\Big) \quad (\lambda\in\mathbb{D}).$$

根据我们前面证明的结果，右端是关于 λ 的下调和函数。由命题 4.4 的 (iii) 部分可知，左端在 $\mathbb{D}$ 上也下调和。这就完成了定理 (ii) 部分的证明。

□

10. Applications to quasiconformal maps

本节将说明，我们的结果如何为四个关于拟共形畸变对面积和维数的定理提供统一的方法；这些定理已在引言末尾陈述。

10.1. 拟共形映射对维数的扭曲。本小节将证明定理 1.10，其内容是：若 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个 k- 拟共形同胚且 $\dim A>0$，那么

$$\frac{1}{K}\Big(\frac{1}{\dim A}-\frac{1}{2}\Big)\le\Big(\frac{1}{\dim F(A)}-\frac{1}{2}\Big)\le K\Big(\frac{1}{\dim A}-\frac{1}{2}\Big), \tag{10.1}$$

其中 $K=(1+k)/(1-k)$。这里的 dim 表示 $\dim_P$、$\dim_H$或 $\dim_M$中的任意一种。对于 $\dim_M$的情形，我们还假设集合 A有界。

定理 1.10 的证明。由定理 3.5，存在一个全纯运动$f:\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，使得 $f_k=F$。对于 $\lambda\in\mathbb{D}$，令 $A_\lambda:=f_\lambda(A)$。根据定理 1.3、1.4 和 1.6，要么 $\lambda\mapsto(1/\dim(A_\lambda)-1/2)$ 是定义在 $\mathbb{D}$上的下调和函数，要么至少是下调和函数的上确界。无论哪种情况，它都满足 Harnack 不等式，因此对所有 $\lambda\in\mathbb{D}$，都有

$$\frac{1-|\lambda|}{1+|\lambda|}\Big(\frac{1}{\dim(A_0)}-\frac{1}{2}\Big)\le\Big(\frac{1}{\dim(A_\lambda)}-\frac{1}{2}\Big)\le\frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}\Big(\frac{1}{\dim(A_0)}-\frac{1}{2}\Big).$$

特别地，取 $\lambda=k$，我们得到 (10.1)。 □

注。定理 1.10 的一个推论是，若 $f:\mathbb{D}\times A\to\mathbb{C}$ 是一个全纯运动，且 $A_\lambda=f_\lambda(A)$，那么映射 $\lambda\mapsto\dim(A_\lambda)$ 是连续函数。对于闵可夫斯基维数和填充维数，这一点也已在推论1.5中得到证明。对于这三种维数概念，也可以通过以下方式更直接地看出这一点。

由于 $\lambda\to\lambda_0\in\mathbb{D}$，过渡映射 $f_\lambda\circ f_{\lambda_0}^{-1}$ 是 k-拟共形的，且k 趋于 0，因此也具有赫尔德连续性，赫尔德指数趋于 1（参见 [2, 定理 12.2.3 和推论 3.10.3]）。因此，当 $\lambda\to\lambda_0$ 时，$\dim(A_\lambda)=\dim(f_\lambda\circ f_{\lambda_0}^{-1})(A_{\lambda_0})\to\dim(A_{\lambda_0})$。

10.2. 拟共形映射对面积的扭曲。

定理 1.11 的证明。设 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个 k-拟共形同胚，在 $\mathbb{C}\setminus\Delta$ 上共形，其中 Δ是一个对数容量至多为 1 的紧集，并且在 ∞ 附近满足 $F(z)=z+o(1)$。设 A是 Δ 的一个博雷尔子集。

设 $k:=(K-1)/(K+1)$。由定理 3.4，存在一个全纯运动$f:\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，满足 $f_k=F$，且对每个 $\lambda\in\mathbb{D}$，都有 $\mu_{f_\lambda}=(\lambda/k)\mu_F$。我们还可以要求在 ∞ 附近满足 $f_\lambda(z)=z+o(1)$。

首先假设在 A 上几乎处处有 $\mu_F=0$。根据定理 1.9(i)，函数$\lambda\mapsto\log(\pi/|A_\lambda|)$ 在 $\mathbb{D}$ 上是下调和的。特别是，它满足 Harnack 不等式

不等式 там：

$$\log\Big(\frac{\pi}{|A_\lambda|}\Big) \geq \frac{1-|\lambda|}{1+|\lambda|}\log\Big(\frac{\pi}{|A|}\Big) \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

令 $\lambda = k$，可得

$$\log\Big(\frac{\pi}{|F(A)|}\Big) \geq \frac{1}{K}\log\Big(\frac{\pi}{|A|}\Big).$$

这就证明了(i)。

反之，假设在 $\mathbb{C} \setminus A$ 上几乎处处有 $\mu_F = 0$。根据定理 1.9(ii)，函数 $\lambda \mapsto |A_\lambda|$ 在 $\mathbb{D}$ 上是下调和的。特别地，它在那里满足 Harnack 不等式：

$$|A_\lambda| \leq \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}|A| \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

令 $\lambda = k$，可得

$$|F(A)| \leq K|A|.$$

这就证明了(ii)。

最后，一般情形 (iii) 可通过标准的因式分解过程由 (i) 和 (ii) 推出，参见例如 [2, 定理 13.1.4]。□

注。如 §9 所述，我们对定理 1.11 的 (i) 部分所作的证明，与 Eremenko 和 Hamilton 最初的证明非常相似，[8], 如[2, §13 中所示1]。另一方面，我们对 (ii) 部分的证明与 [8] 和 [2]中使用的方法截然不同，而且简单得多。

10.3. 对称全纯运动与 inf-sym-harmonic 函数。为证明定理 1.12 和 1.13 做准备，我们研究当 A 是 $\mathbb{R}$和 f的子集，且 $\mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是下文所定义意义下的对称全纯运动时，关于函数 $1/\dim(A_\lambda)$ 可以得出什么结论。

定义 10.1. 我们称全纯运动 $f\colon \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是对称的，当且仅当

$$f_\lambda(z) = \overline{f_{\overline{\lambda}}(\overline{z})} \quad (\lambda \in \mathbb{D},\, z \in \mathbb{C}).$$

定义 10.2. 我们称调和函数 $h\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ 是对称的，当且仅当对于所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$h(\overline{\lambda}) = h(\lambda)$。若存在一族 $\mathcal{H}$，由定义在 $\mathbb{D}$ 上的对称调和函数构成，使得

$$u(\lambda) = \inf_{h \in \mathcal{H}} h(\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

现在我们陈述引理 5.2 和 7.1 的对称版本。

引理 10.3. 设 $f\colon \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个对称全纯运动，并且设 A 是 $\mathbb{R}$ 的一个有界子集，且 $\overline{\dim_M}(A) > 0$。令 $A_\lambda := f_\lambda(A)$。那么存在一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的下确界对称调和函数 u，使得

$$u(0) = 1/\overline{\dim}_M(A) \qquad \textit{and} \qquad u(\lambda) \geq 1/\overline{\dim}_M(A_\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

引理 10.4. 设 $f\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个对称全纯运动，且 A 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集，满足 $\dim_H(A) > 0$。令 $A_\lambda := f_\lambda(A)$。那么存在一个下确界对称调和函数 u，定义在 $\mathbb{D}$ 上，使得

$$u(0) = 1/\dim_H(A) \quad and \quad 1/2 \le u(\lambda) \le 1/\dim_H(A_\lambda) \quad (\lambda\in\mathbb{D}).$$

证明。证明过程与引理 5.2 和 7.1 的证明基本相同，区别如下：

- 如果 $S\subset\mathbb{R}$，那么引理 5.1 中定义的函数 $\log(M/\operatorname{diam} f_\lambda(S))$ 在 $D(0,\rho)$ 上是下对称调和的。这可以直接从公式及对称关系 $f_\lambda(z) = f_{\overline{\lambda}}(\overline{z})$ 看出。

$$\log\Big(\frac{M}{\operatorname{diam} f_\lambda(S)}\Big) = \inf\Big\{\log\Big(\frac{M}{|f_\lambda(z)-f_\lambda(w)|}\Big) : z,w\in S,\, z\ne w\Big\},$$

- 因此，如果在引理 5.2 和 7.1 的证明中，分别用 $f_\lambda(D\cap\mathbb{R})$ 和 $f_\lambda(Q\cap\mathbb{R})$ 替换 $f_\lambda(D)$ 和 $f_\lambda(Q)$，那么所有原先下调和的函数现在都变为下对称调和函数。与 $\mathbb{R}$ 相交不会导致关于 A 的信息丢失，因为 $A\subset\mathbb{R}$。
- 应用隐函数定理或其推论（定理 4.5 和推论4.6）时，现在假设函数 $\log(1/a_j)$ 是下对称调和函数，结论则是 $1/s$是下对称调和函数（或 $s\equiv 0$）。这可通过应用引理 4.7 得出，其中取 $\mathcal{U}$ 为下对称调和函数的下确界锥。□

10.4 拟圆的维数。本小节将证明定理 1.12。更确切地说，我们利用引理 10.4 证明，k-拟圆的豪斯多夫维数至多为 $1+k^2$。

定义 10.5. 设 $k\in[0,1)$。曲线 Γ 在 $\mathbb{C}$ 中是一个 k-拟圆，若 $\Gamma = g(\mathbb{R})$，其中 $g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个标准化的 k-拟共形同胚。所谓标准化，是指 g 固定 0 和 1。

多年来，人们对拟圆进行了广泛研究，因为它们所围成的域具有理想的函数论性质，参见例如 [10]。尤其是，如何根据 k 为 k-拟圆的豪斯多夫维数找到上界，这一问题引起了广泛关注。定理 1.10 表明，如果 Γ是一个 k-拟圆，那么

$$\dim_H(\Gamma) \le 1+k.$$

受 Becker 和 Pommerenke 的例子 [5], 启发，Astala 在 [1]中提出，能否将该上界替换为 $1+k^2$。Smirnov 在 [23]中给出了肯定的回答。正如我们将要看到的，Astala 的问题也可以借助下调和函数来回答。

我们首先需要 Smirnov 关于贝尔特拉米系数对称化的一个结果 [23, 定理 4]。另见 [2, §13.3.1]。

引理 10.6。定义 10.5 中的函数 g 可以选取得使其贝尔特拉米系数还满足反对称关系

$$\overline{\mu_g(\overline{z})} = -\mu_g(z) \quad a.e.\ in\ \mathbb{C}. \tag{10.2}$$

我们还需要以下适用于下确界对称调和函数的 Harnack 型不等式，它与 [23, 引理 7] 相似。另见 [2, 引理 13.3.8]。

引理 10.7. 设 $v : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ 为一个下确界对称调和函数。则

$$\frac{1-y^2}{1+y^2}v(0) \le v(iy) \le \frac{1+y^2}{1-y^2}v(0) \qquad (y \in (-1,1)).$$

证明。记

$$v(\lambda) = \inf_{h\in\mathcal{H}} h(\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{D}),$$

其中每个 $h \in \mathcal{H}$ 都是定义在 $\mathbb{D}$ 上的正对称调和函数。固定 $h \in \mathcal{H}$，并令 $k(\lambda) := (h(\lambda) + h(-\lambda))/2$。显然， k 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的偶正调和函数。因此，它可写为 $k(\lambda) = l(\lambda^2)$，其中 l 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的正调和函数。对 l 应用标准 Harnack 不等式，得到

$$\frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}k(0) \le k(\lambda) \le \frac{1+|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}k(0) \qquad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

由于 h 是对称的，我们有

$$h(iy) = \frac{h(iy)+h(-iy)}{2} = k(iy) \qquad (y \in (-1,1)).$$

因此

$$\frac{1-y^2}{1+y^2}h(0) \le h(iy) \le \frac{1+y^2}{1-y^2}h(0) \qquad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

对所有 $h \in \mathcal{H}$ 取下确界，即得所需结果。 □

现在我们可以证明本小节的主要结果。

定理 1.12 的证明。设 Γ 是一个 k-拟圆。根据引理 10.6，我们可以将 $\Gamma = g(\mathbb{R})$ 写成某个经过标准化的 k-拟共形映射 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其贝尔特拉米系数 μ_g 满足反对称关系 (10.2)。对于$\lambda \in \mathbb{D}$，定义贝尔特拉米系数 μ_λ 如下

$$\mu_\lambda := \frac{\lambda}{ik}\mu_g,$$

并记 $f_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为其贝尔特拉米系数为 μ_λ 的唯一经过标准化的拟共形映射，如定理 3.3 所述。注意， f_0 是恒等映射，且 $f_{ik} = g$。由定理 3.4 可知，映射 f_λ 定义了 $\mathbb{C}$ 的一个全纯运动。此外，我们有

$$\overline{\mu_{\overline{\lambda}}(\overline{z})} = \frac{\lambda}{-ik}\overline{\mu_g(\overline{z})} = \mu_\lambda(z) \quad \text{a.e. in } \mathbb{C}.$$

容易得出，映射 f_λ 具有相同的对称性:

$$f_\lambda(z) = \overline{f_{\overline{\lambda}}(\overline{z})} \qquad (\lambda \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{C}),$$

例如，参见 [2, 第 13.3 节1]。换言之，全纯运动 f 具有定义 10.1 所述的对称性。

现在，令 $A := \mathbb{R}$。根据引理 10.4，存在一个下确界对称调和函数u，定义在 $\mathbb{D}$ 上，使得

$$u(0) = 1/\dim_H(A) = 1 \quad \text{and} \quad 1/2 \le u(\lambda) \le 1/\dim_H(A_\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

特别地，函数 $v := u - 1/2$ 也是下确界对称调和函数，因此由引理 10.7可得

$$v(ik) \ge \frac{1-k^2}{1+k^2} v(0) = \frac{1}{2}\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

但同时

$$v(ik) \le \frac{1}{\dim_H(f_{ik}(A))} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\dim_H(\Gamma)} - \frac{1}{2},$$

因此我们得到 b i

$$\dim_H(\Gamma) \le 1 + k^2,$$

这正是所需的。 □

备注。事实上，正如 Oleg Ivrii 最近证明的那样，定理 1.12 中的上界并不锐利 [13]。

10.5. 拟对称畸变谱。本小节中，我们证明定理 1.13。更具体地说，我们利用引理 10.3 来估计实数线上某个子集在拟对称映射下的像的闵可夫斯基维数和填充维数。

定义 10.8. 设 $k \in [0, 1)$。同胚 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为k-拟对称的，若它可以扩张为一个归一化的 k-拟共形映射 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得对所有 $z \in \mathbb{C}$，$g(z) = g(\overline{z})$。

为证明定理 1.13，我们需要以下施瓦茨–皮克型不等式，见 [18, 引理2.2]。

引理 10.9. 设 $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是一个全纯函数。假设对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\phi(\lambda) = \phi(\overline{\lambda})$，并且对所有 $\lambda \in (-1,1)$，$\phi(\lambda) \ge 0$。那么

$$\phi(k) \le \left(\frac{k + \sqrt{\phi(0)}}{1 + k\sqrt{\phi(0)}} \right)^2 \qquad (0 \le k < 1).$$

定理 1.13 的证明。只需证明闵可夫斯基维数的情形。填充维数的情形则可通过应用命题 2.3 轻易推出。

设 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 k-拟对称映射，且 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个有界集，满足 $\underline{\dim}_M(A) = \delta$，其中 $0 < \delta \le 1$。只需证明 $\underline{\dim}_M(g(A)) \ge \Delta(\delta, k)$，因为将 g 替换为 g^{-1} 并使用 $\Delta^*(\delta, k)$ 的定义，即可由下界推出上界。

将 g 扩展为一个归一化的 k 拟共形映射 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得对所有 $z \in \mathbb{C}$，$g(z) = g(\overline{z})$。贝尔特拉米系数 μ_g 满足

$$\mu_g(z) = \overline{\mu_g(\overline{z})} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

因此，通过采用与定理 1.12 的证明中类似的构造，存在一个对称全纯运动 $f\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，满足 $f_k = g$。根据引理 10.3，存在一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的下确界对称调和函数 u，使得

$$u(0) = 1/\overline{\dim}_M(A) = 1/\delta \qquad \text{and} \qquad u(\lambda) \geq 1/\overline{\dim}_M(A_\lambda) \quad (\lambda\in\mathbb{D}).$$

函数 $v := u - 1/2$ 也是下确界对称调和的，我们可以写成

$$v(\lambda) = \inf_{h\in\mathcal{H}} h(\lambda),$$

其中每个 $h\in\mathcal{H}$ 都是 $\mathbb{D}$ 上的正对称调和函数。

固定 $h\in\mathcal{H}$。由于 h 是调和函数，且对所有 $\lambda\in\mathbb{D}$，$h(\overline{\lambda}) = h(\lambda)$，因此存在一个在 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 H，满足 $\operatorname{Re} H = h$，并且对所有$\lambda\in\mathbb{D}$，$H(\overline{\lambda}) = H(\lambda)$。于是 H 将 $\mathbb{D}$ 映入右半平面。此外，对于 $\lambda\in(-1,1)$，我们有

$$H(\lambda) = h(\lambda) \geq v(\lambda) \geq \frac{1}{\overline{\dim}_M(A_\lambda)} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},$$

因为根据全纯运动的对称性，$A_\lambda\subset\mathbb{R}$。由此可知，函数

$$\phi := \frac{2H-1}{2H+1}$$

满足引理 10.9 的假设，因此得到

$$\frac{2h(k)-1}{2h(k)+1} = \phi(k) \leq \left(\frac{k+l'}{1+kl'}\right)^2,$$

其中 $l' = \sqrt{\phi(0)}$。利用函数 $x\mapsto(2x-1)/(2x+1)$ 和 $x\mapsto(k+x)/(1+kx)$ 单调递增这一事实，对所有 $h\in\mathcal{H}$ 取下确界后，我们得到，

$$\frac{2v(k)-1}{2v(k)+1} \leq \left(\frac{k+l}{1+kl}\right)^2,$$

其中

$$l = \left(\frac{2v(0)-1}{2v(0)+1}\right)^{1/2} = \left(\frac{2(1/\delta-1/2)-1}{2(1/\delta-1/2)+1}\right)^{1/2} = \sqrt{1-\delta}.$$

注意到

$$\frac{2v(k)-1}{2v(k)+1} = \frac{2u(k)-2}{2u(k)} = 1 - \frac{1}{u(k)} \geq 1 - \overline{\dim}_M(g(A)).$$

由此得到所需的不等式，即

$$\overline{\dim}_M(g(A)) \geq 1 - \left(\frac{k+l}{1+kl}\right)^2 = \Delta(\delta,k). \qquad \square$$

11. An open problem

正如引言中所述，定理 1.4 和 1.7 共同完整刻画了全纯运动下集合填充维数的变化。目前，豪斯多夫维数还缺乏这样的刻画，这是因为定理 1.6 的结论弱于定理 1.4 的结论。由此自然引出以下问题。

问题 11.1. 设 A 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集，满足 $\dim_H A > 0$，并设$f\colon \mathbb{D}\times A \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动。令 $A_\lambda := f_\lambda(A)$。那么，$\lambda \mapsto 1/\dim_H(A_\lambda)$ 必定是 $\mathbb{D}$上的下调和函数吗?

30 年前， [19]中也提出过同一个问题。据我们所知，这仍然是一个公开问题。

[19] 证明，在以下特殊情况下，问题 11.1 的答案是肯定的。设 $(R_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{D}}$ 是一个双曲有理映射的全纯族。那么，由它们的朱利亚集定义的全纯运动 $\lambda \mapsto J(R_\lambda)$ 具有如下性质： $1/\dim_H J(R_\lambda)$ 是 $\mathbb{D}$上的下调和函数。证明依赖于豪斯多夫维数的一个显式公式，即 Bowen–Ruelle–Manning 公式。

另一种特殊情形由 Baribeau 和 Roy [4]证明。他们表明，若 L_λ 是一个由依赖于参数 $\lambda\in\mathbb{D}$、且随该参数全纯变化的压缩相似变换构成的迭代函数系统的极限集，那么在满足一个技术条件的前提下，映射 $\lambda \mapsto L_\lambda$ 是一个全纯运动，并且 $1/\dim_H(L_\lambda)$ 是定义在 $\mathbb{D}$上的下调和函数。他们的证明同样依赖于豪斯多夫维数的一个显式公式，这次用到的是 Hutchinson–Moran 公式，即定理 2.4。

事实上，在这两种特殊情形中，豪斯多夫维数都恰好等于填充维数，因此这两个结果现在都可以由定理 1.4 推出，而无需借助维数的显式公式。

最后，我们指出，若问题 11.1 得到肯定回答，则 $\lambda \mapsto \dim_H(A_\lambda)$ 将是一个次调和函数（这与推论 1.5 对填充维数和闵可夫斯基维数的证明方式大致相同）。即使是这个看似较弱的命题，目前仍是一个公开问题。作为一个有趣的检验案例，我们提出以下问题。

问题 11.2. 全纯运动$\lambda \mapsto A_\lambda$ 的豪斯多夫维数是否总是满足以下不等式

$$\dim_H(A_0) \le \max_{|\lambda|=1/2} \dim_H(A_\lambda)?$$

References

1. K. Astala, *Area distortion of quasiconformal mappings* **173** 1994 1, , 《数学学报》（），第 – 号。MR 37 60 1294669

2. K. Astala、T. Iwaniec 和 G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane* 48, ，普林斯顿数学丛书，第 卷，普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，2009 年 2472875 3。MR。K. Astala 和 M. Zinsmeister, *Holomorphic families of quasi-Fuchsian groups*, 《遍历理论与动力系统》14 1279468 4（1994）2，207–212，第 – 号。MR。L. Baribeau 和 M. Roy, *Analytic multifunctions holomorphic motions and Hausdorff*，，*dimension in IFSs* **147** 2006 3, 199 217 Monatsh. Math.（），第 – 号。MR 2215564 5. J. Becker 和 Ch. Pommerenke, *On the Hausdorff dimension of quasicircles*, 《芬兰科学院学报 A I 数学》12 951982 6（1987）2，329–333，第 – 号。MR。C. J. Bishop 和 Y. Peres, *Fractals in probability and analysis*, 《剑桥高等数学研究丛书》，第 162 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2017 年。MR 3616046 7. E. K. Chrontsios Garitsis 和 J. T. Tyson, *Quasiconformal distortion of the Assouad spectrum and classification of polynomial spirals* **55** 2023 ，《伦敦数学会通报》（），第 1 号，282–307。8. A. Er¨emenko 和 D. H. Hamilton, *On the area distortion by quasiconformal mappings*, 《美国数学会学报》123 1283548 9（1995）9，2793–2797，第 – 号。MR。K. Falconer, *Fractal geometry*，第三版，约翰·威立父子出版公司，奇切斯特，2014 年，《数学基础及其应用》。MR 3236784 10 *The ubiquitous quasidisk* 。F. W. Gehring 和 K. Hag，，数学调查与专著丛书，第 184 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012 年，由 Ole Jacob Broch 提供贡献。MR 11 ¨ ¨ ¨ 2933060 。F. W. Gehring 和 J. Vaisala, *Hausdorff dimension and quasiconformal mappings*, 《伦敦数学会杂志》（2 324028 12 6 1973 504 512）（），–。MR。J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity* **30** 1981 5,，《印第安纳大学数学杂志》（），第 – 号。MR 13. O. Ivrii, *Quasicircles of dimension* $1+k^2$ *do not exist*, arXiv:1511.07240, 2015 年。14. R. Kaufman, *Sobolev spaces*、*dimension*、*and random series*, 《美国数学会学报》128（2000），第 2 号，427–431。MR 1670383 15. R. Ma˜n´e、P. Sad 和 D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, 《高等师范学校科学学报》（4 732343 16 16 1983 2，193–217）（），第 – 号。MR。P. A. P. Moran, *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, 《剑桥哲学学会学报》42 14397 17（1946）15–23。MR。I. Prause, *A remark on quasiconformal dimension distortion on the line*, 《芬兰科学院学报：数学》32 2337481 18（2007）2，341–352，第 – 号。MR。I. Prause 和 S. Smirnov, *Quasisymmetric distortion spectrum*, 《伦敦数学学会通报》43 2781207 19（2011）2，267–277，第 – 号。MR。T. Ransford, *Variation of Hausdorff dimension of Julia sets*, 《遍历理论与动力系统》13 1213086 20（1993）1，167–174，第 – 号。MR。, *Pot~~ential th~~eory in the complex plane*, 《伦敦数学会学生课本》，第 28 卷，1334766 21 1995 年剑桥大学出版社，剑桥。MR。D. Ruelle, *Repellers for real analytic maps*, 《遍历理论与动力系统》2（1982），第 1 号，99 684247 22 107–。MR。Z. Slodkowski, *Holomorphic motions and polynomial hulls*, 《美国数学会学报》111 1037218 23（1991）2，347–355，第 – 号。MR。S. Smirnov, *Dimension of quasicircles*, 《数学学报》205（2010），第 1 号，189–197。MR 2736155 24. D. P. Sullivan 和 W. P. Thurston, *Extending holomorphic motions*, 《数学学报》157（1986 857674 25 3 4，243–257），第 号 - –。MR。C. Tricot, Jr., *Two definitions of fractional dimension*, 《剑桥哲学学会数学学报》91（1982），第 1 号，57–74。MR 633256 625600 713 747

全纯运动、维数、面积与拟共形映射33

Département de mathématiques et de statistique Université Laval Québec , City (Québec) Canada G1V 0A6.

, ,*Email address*: aidan.fuhrer.1@ulaval.ca

Département de mathématiques et de statistique Université Laval Québec , , , City (Québec) Canada G1V 0A6.
Email address: ransford@mat.ulaval.ca

Department of Mathematics University of Hawaii Manoa Honolulu HI , „ , 96822 USA.
Email address: malik.younsi@gmail.com