arXiv:2302.07745v1 [math.CV] 15 Feb 2023

模为一的有界解析函数的 Bohr型不等式

KAIXIN CHEN、MING-SHENG LIU 和 SAMINATHAN PONNUSAMY *

Abstract. 本文通过在相关函数的幂级数表示中，用 $\varphi = \{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ 替代 $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$，并由此引入一个单一参数，建立了单位圆盘内有界解析函数的若干种新的 Bohr型不等式，从而推广了早期作者的若干相关结果。

1. Introduction and Preliminaries

Herald Bohr 在 1914 年的一项重要发现指出，若 $f \in H_\infty$，则

$$B_0(f,r) := |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \le \|f\|_\infty \quad \text{for } 0 \le r \le 1/6,$$

其中，对于 $k \ge 0$，有 $a_k = f^{(k)}(0)/k!$。这里， H_∞ 表示单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}$ 中所有有界解析函数 f 构成的类，且其上确界范数为 $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$。后来，M. Riesz、I. Shur 和 F. W. Wiener 独立证明了该结论在更大的范围 $0 \le r \le 1/3$内成立；通过分析单位圆盘共形自同构中的适当函数可知，数值 $1/3$是最佳的。此结果称为经典 Bohr 不等式，通常称为单位圆盘上的 Bohr 幂级数定理，而数值 $1/3$则称为 Bohr 半径。Bohr 的论文 [8]实际上包含了 Wiener 的证明，并指出 Bohr 半径为 $1/3$。文献中还有少数其他证明。参见 Abu-Muhanna 等人的综述文章 [2], 以及 Garcia 等人的文章 [12, 第 8], 章，还有 Defant 等人关于现代分析中更一般情形下 Bohr 现象的优秀专著[10] 。值得指出的是，在 H_∞ 中不存在极值函数，使得 Bohr 半径恰好为 $1/3$（参见 [4], [12, 推论 8.26] 和 [15]）。关于 Bohr 不等式的其他若干方面及其推广，可见许多近期文章。参见[1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 15, 21, 22, 23, 24] 及其中的参考文献。尤其是，在文章 [2] 和 [16], 发表之后，文献中探讨了平面上 Bohr 不等式的若干方法和新问题（参见 [7, 17, 22, 24]）。

本文的目标之一是推广或改进近期针对来自 H_∞ 的函数提出的 Bohr 不等式版本。参见定理 1、2、3、4、5 和 6。

File: arXiv-LiuSamyChen10.tex, printed: 16-2-2023, 1.352000年数学主题分类。主要分类：30A10、30C45、30C62；次要分类：30C75。关键词和短语：Bohr 半径、有界解析函数、Bohr不等式

*通讯作者电子邮箱：samy@iitm.ac.in
* 通讯作者：S Ponnusamy。

1.1. 基本记号。为了陈述我们的结果，需要引入一些基本记号。按照近期对这一主题的研究（参见 [14]），令 $\mathcal{F}$ 表示所有由非负连续函数构成的序列 $\varphi = \{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ 的集合，其中这些函数定义在 [0,1)上，并且级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(r)$ 在区间 $[0,1)$ 上局部一致收敛。为方便起见，在整个讨论过程中我们使用

$$\Phi_N(r) = \sum_{n=N}^{\infty}\varphi_n(r)$$

每当 $\varphi = \{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$ 时。此外，我们引入 $\mathcal{B} = \{f \in H_\infty : \ \|f\|_\infty \le 1\}$并且，对于 $m \in \mathbb{N} := \{1,2,\ldots\}$，令

$$\mathcal{B}_m \ = \ \{\omega \in \mathcal{B} : \omega(0) = \cdots = \omega^{(m-1)}(0) = 0 \ \text{ and } \ \omega^{(m)}(0) \neq 0\}.$$

此外，对于 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$以及 $f_0(z) := f(z) - f(0)$，我们令（如 [25] 中所示）

$$B_N(f,r) := \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|r^n \text{ for } N \ge 0, \ \text{ and } \ \|f_0\|_r^2 := \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \ ,$$

在下文中，我们令 $B_N(f,\varphi,r) := \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|\varphi_n(r)$，其中 $N \ge 0$,

$$A(f_0,\varphi,r) := \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\left[\frac{\varphi_{2n}(r)}{1+|a_0|} + \Phi_{2n+1}(r)\right].$$

特别地，当 $\varphi_n(r) = r^n$ 时， $A(f_0,\varphi,r)$ 的公式具有以下简单形式（参见 [24]）

$$A(f_0,r) := \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r}\right)\|f_0\|_r^2,$$

这是一个有助于以精细形式重新表述经典 Bohr 不等式的量。

1.2. Bohr不等式的改进及基本问题。最近，Y. Huang 等人 [13]建立了以下版本的 Bohr型不等式。

定理A. [13] 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$，且 $\omega \in \mathcal{B}_m$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$成立。那么我们有

$$|f(\omega(z))| + B_1(f,r) + A(f_0,r) \le 1$$

对 $r \in [0,\alpha_m]$，其中 α_m 是方程在 (0, 1) 中的唯一根

$$(1-r)(1-r^m) - 2r(1+r^m) = 0.$$

常数 α_m 无法进一步改进。此外，

$$|f(\omega(z))|^2 + B_1(f,r) + A(f_0,r) \le 1$$

对 $r \in [0,\beta_m]$成立，其中 β_m 是方程在 (0, 1) 中的唯一根

$$1 - 2r - r^m = 0.$$

常数 β_m 无法进一步改进。

注 1。 请注意，$\alpha_1 = \sqrt{5} - 2$ 和 $\beta_1 = 1/3$ （参见 [19]）。

定理 B。 [13] 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$，且 $\omega \in \mathcal{B}_m$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$成立。那么我们有

$$B_0(f,r) + A(f_0,r) + |f(\omega(z)) - a_0| \leq 1$$

对于 $r \in [0, \zeta_m]$，其中 ζ_m 是方程在 $(0, 1/3]$ 中的唯一根

$$r^m(3-5r) + 3r - 1 = 0,$$

或等价地， $3r^m + 2\sum_{k=1}^{m} r^k - 1 = 0$. 上界 ζ_m 无法改进。此外,

$$|a_0|^2 + B_1(f,r) + A(f_0,r) + |f(\omega(z)) - a_0| \leq 1$$

对于 $r \in [0, \eta_m]$，其中 η_m 是方程在 $(0, 1/2]$ 中的唯一根

$$r^m(2-3r) + 2r - 1 = 0,$$

或等价地， $2r^m + \sum_{k=1}^{m} r^k - 1 = 0$. 上界 η_m 无法改进。

注2。注意， $\zeta_1 = 1/5$ 和 $\eta_1 = 1/3$ （参见 [19]）。

除此之外，在这一背景下还有大量关于经典 Bohr 不等式的研究。此外，Kayumov 等人首次在文献中用 $\{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$ 替代 $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$，将其应用于 Bohr型不等式 [14], ，从而使 Bohr型不等式的结论具有更一般的形式。随后，Ponnusamy 等人 [25] 继续研究了这一一般形式。另见 [18]。下面给出 [14] 中一个结果的温和改进。

定理 C。 [25] 设 f 是一个 Schwarz函数，即 $f \in \mathcal{B}$ 满足 $f(0) = 0$。若 $\varphi = \{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$ 满足

$$\varphi_0(r) \geq 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r),$$

则有如下尖锐不等式:

$$B_0(f', \varphi, r) \leq \varphi_0(r)$$

对所有 $r \leq R_0$，其中 R_0 是方程的最小正根

$$\varphi_0(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(x).$$

当 $\varphi_0(x) < 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(x)$ 在某个区间 $(R_0, R_0+\varepsilon)$ 内时，数值 R_0 不能进一步改进。

2022年，Wu 等人 [26] 为一类有界解析函数的单参数族或其凸组合建立了 Bohr 型不等式，从而推广了一些已有结果。例如，得到了以下结论。

定理 D. [26] 假设 $f \in \mathcal{B}$。那么对于任意的 $\lambda \in (0, \infty)$ 和 $n \in \mathbb{N}$，有

$$|f(z)| + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|r^{nk} \leq 1 \ for \ r \leq R_{\lambda,n},$$

其中 $R_{\lambda,n}$ 是最佳可能值，且是方程的唯一正根

$$(2\lambda-1)r^{n+1}+(2\lambda+1)r^n+r-1=0$$

在区间 (0, 1) 内。

自然会提出以下问题。

问题1。鉴于 [14] 中提出的一般框架，并将基底从$\{r^n\}_{n\geq 0}$ 变更为 $\{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$，是否有可能在单参数族 Bohr 和的框架下给出一般结果，或改进定理A–D?

在本文中，我们以五种不同的形式对这一问题给出了肯定的回答。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们陈述本文的定理，这些定理改进了近期发展起来的有界解析函数的若干版本的 Bohr型不等式，并给出一些备注。在第3节中，我们陈述证明三个定理所需的几个引理。在第4节中，我们给出主要结果的证明。

2. Statement of Main Results and Remarks

定理1. 假设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{B}$, $\omega\in\mathcal{B}_m$ 对某个 $m\in\mathbb{N}$成立，且$p\in(0,2]$. 对于 $\{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}$，定义

$$A_f(z):=|f(\omega(z))|^p\varphi_0(r)+B_1(f,\varphi,r)+A(f_0,\varphi,r)$$

and

$$\Psi_1(r)=p\left(\frac{1-r^m}{1+r^m}\right)\varphi_0(r)-2\Phi_1(r).$$

若 $\Psi_1(r)\geq 0$对 $0\leq r\leq R_1$成立，其中 $R_1:=R_1(m,p)$ 是方程 $\Psi_1(r)=0$ 在 (0, 1) 中的最小正根，则有

$$A_f(z)\leq\varphi_0(r)\quad for\ r\leq R_1.$$

当 $\Psi_1(r)<0$ 在某个区间 $(R_1,R_1+\varepsilon)$ 内成立时，数值 R_1 无法进一步改进。

Rema注3. 若在定理1中令 $p=1,2$ 且 $\varphi_n(r)=r^n$，则得到定理A .

定理 2. 假设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{B}$, $\omega\in\mathcal{B}_m$ 对某个 $m\in\mathbb{N}$ 成立，且 $p\in(0,2]$. 若 $\{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}$ 满足不等式

$$\Psi_2(r)=\frac{p}{2}\varphi_0(r)-\Phi_1(r)-\frac{r^m}{1-r^m}\geq 0,$$

对于 $0\leq r\leq R_2$，其中 $R_2:=R_2(m,p)$ 是方程$\Psi_2(r)=0$的最小正根。于是有

$B_f(z):=|a_0|^p\varphi_0(r)+B_1(f,\varphi,r)+A(f_0,\varphi,r)+|f(\omega(z))-a_0|\leq\varphi_0(r)$ 对于 $r\leq R_2$.

当 $\Psi_2(r)<0$ 属于某个区间 $(R_2,R_2+\varepsilon)$ 时，数值 R_2 无法进一步改进。

注 4. 在定理 2 中令 $\varphi_n(r)=r^n$，且 $p=1$ 为 2，即可得到定理 B。

现在我们陈述定理 C 的一个改进版本。

定理 3. 假设 f 是一个 Schwarz函数，即 $f \in \mathcal{B}$ 且 $f(0) = 0$。如果$\{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$ 且 $p \in (0,2]$ 使得

$$\Psi_3(r) = \frac{p}{2}\varphi_0(r) - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r) \geq 0$$

对于 $0 \leq r \leq R_3$，其中 $R_3 = R_3(p)$ 是方程$\Psi_3(r) = 0$在 $(0,1)$ 中的最小正根，则有

$$C_{f'}(\varphi,p,r) := |a_1|^p\varphi_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|a_{n+1}|\varphi_n(r) \leq \varphi_0(r) \quad for \quad r \leq R_5.$$

当 $\Psi_3(r) < 0$ 位于某个区间 $(R_3, R_3+\varepsilon)$ 内时，数值 R_3 无法改进。

定理 4. 假设 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 是一个 Schwarz 函数，$\omega \in \mathcal{B}_m$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$ 成立，并且 $p \in (0,2]$。若 $\{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$ 满足不等式

$$\Psi_4(r) := \frac{p}{2}\varphi_0(r) - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r) - r^m\frac{2-r^m}{(1-r^m)^2} \geq 0$$

对于 $0 \leq r \leq R_4$，其中 $R_4 = R_4(m,p)$ 是方程$\Psi_4(r) = 0$的最小正根，则有

$$D_{f'}(\varphi,p,r) := |a_1|^p\varphi_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r) + |f'(\omega(z)) - a_1| \leq \varphi_0(r) \quad for \quad r \leq R_4.$$

当 $\Psi_4(r) < 0$ 位于某个区间 $(R_4, R_4+\varepsilon)$ 内时，数值 R_4 无法改进。

定理5. 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}, \omega \in \mathcal{B}_m$，其中某个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $p \in (0,2]$。那么对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，有

$$E_f(z) := |f(\omega(z))|^p + \lambda[B_1(f,r) + A(f_0,r)] \leq 1$$

对于 $0 \leq r \leq R_{\lambda,\ m}$，其中 $R_{\lambda,\ m}$ 是最佳可能的，并且是方程 $[0,1]$ 中的最小正根

$$p\frac{1-r^m}{1+r^m} - 2\lambda\frac{r}{1-r} = 0.$$

注5. 在定理5中令 $\lambda = 1$ 和 $p = 1$ 为 2，可得定理A。

最后，我们陈述定理 D 的一个推广。

定理6. 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}, \omega \in \mathcal{B}_m, p \in (0,2], m, q \in \mathbb{N}, q \geq 2$，且 $0 < m < q$。那么对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，有

$$F_f(z) := |f(\omega(z))|^p + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}|a_{qk+m}|r^{qk+m} \leq 1 \quad for \quad r \leq R^p_{\lambda,q,m}, \tag{2.1}$$

其中 $R^p_{\lambda\ ,p,m}$ 是方程 $\Psi_5(r) = 0$ 在区间 $[0,1]$,where 内的最小正根

$$\Psi_5(r) := 2\lambda\frac{r^{q+m}}{1-r^q} - p\frac{1-r^m}{1+r^m}.$$

当 $\Psi_5(r) > 0$ 在某个区间 $(R^p_{\lambda,q,m}, R^p_{\lambda,q,m}+\varepsilon)$ 内时，数值 $R^p_{\lambda,q,m}$ 无法进一步改进。

3. Key lemmas

为了证明我们的主要结果，我们需要以下引理。

引理 1.（施瓦茨-皮克引理）设 φ 在 $\mathbb{D}$ 中解析，且 $|\varphi(z)| < 1$ 。则

$$\frac{|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|}{\left|1-\overline{\varphi(z_1)}\varphi(z_2)\right|} \le \frac{|z_1-z_2|}{|1-\overline{z_1}z_2|} \quad for\ z_1, z_2 \in \mathbb{D},$$

且当且仅当 φ 是一个 M ¨obius 变换时，对于互异的 z_1、$z_2 \in \mathbb{D}$ 等号成立。此外，

$$|\varphi'(z)| \le \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} \quad for\ z \in \mathbb{D},$$

且当且仅当 φ 是一个 M ¨obius 变换时，对于某个 $z \in \mathbb{D}$ 等号成立。

引理 2. [25] 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$ 且 $\{\varphi_n(r)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$。那么我们有 *ve*

$$B_1(f,\varphi,r) + A(f_0,\varphi,r) \le (1-|a_0|^2)\Phi_1(r).$$

下一个引理对于证明第4节中的后续结果至关重要，它可通过应用引理3.1]证明中的思路得出。为求完整清晰起见，我们列出详细证明，因为该引理本身也具有独立的研究价值。

引理3. 设 $m \in \mathbb{N}$ 且 $p \in (0,2]$。对于 $a \in [0,1]$，考虑

$$a \mapsto D_{p,m}(a) = \left[\left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p - 1\right]\varphi_0(r) + (1-a^2)N(r),$$

其中 $\varphi_0(r)$ 和 $N(r)$ 是定义在 $[0,1)$ 上的某些非负连续函数。此外，假设

$$\Psi_{p,m}(r) = p\left(\frac{1-r^m}{1+r^m}\right)\varphi_0(r) - 2N(r)$$

并且 $R := R(m,p)$ 是方程 $\Psi_{p,m}(r) = 0$ 在 $(0,1)$ 中的最小正根。若 $\Psi_{p,m}(r) \ge 0$ 对于 $0 \le r \le R$，则 $D_{p,m}(a) \le 0$ 对于 $0 \le r \le R$。

Proof. 我们需要证明，对于 $r \le R$，不等式 $D_{p,m}(a) \le 0$ 对所有 $a \in [0,1]$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $p \in (0,2]$. 都成立。为方便起见，令 $D(a) := D_{p,m}(a)$。

注意， $D(1) = 0$。首先证明，只要 $0 < p \le 1$， $a \mapsto D(a)$ 在 $[0,1]$, 上递增。事实上，直接计算可得

$$D'(a) = p(1-r^{2m})\frac{(a+r^m)^{p-1}}{(1+ar^m)^{p+1}}\varphi_0(r) - 2aN(r)$$

and

$$D''(a) = p(1-r^{2m})\frac{(a+r^m)^{p-2}}{(1+ar^m)^{p+2}}[p-1-2ar^m-(p+1)r^{2m}]\varphi_0(r) - 2N(r).$$

显然，对于所有 $a \in [0,1]$，只要 $0 < p \le 1.$，就有 $D''(a) \le 0$ 。因此

$$D'(a) \ge D'(1) = \Psi_{p,m}(r)$$

根据假设，对于 $r \le R$，该式非负。因此，对于 $r \le R$ 和 $0 < p \le 1$， $D(a)$ 是 $a \in [0,1]$ 的增函数，进而可推出，对于所有 $a \in [0,1]$， $D(a) \le D(1) = 0$，所需不等式得证。

接下来，我们证明只要 $1 < p \le 2$，上述结论就成立。正如引理3的证明所示， [20,1], 我们得到 $\Phi(\sqrt[m]{r}) \ge a^{p-1}$ 对所有 $r \in [0,1)$ 均成立，其中

$$\Phi(r) = (1+r^m)^2 \frac{(r^m+a)^{p-1}}{(1+ar^m)^{p+1}}.$$

现在，利用最后一个关系和最后一个不等式，我们可以将 $D'(a)$ 改写为

$$\begin{aligned} D'(a) =& p\frac{1-r^m}{1+r^m}\Phi(r)\varphi_0(r) - 2aN(r) \\ \ge& a^{p-1}\left[p\frac{1-r^m}{1+r^m}\varphi_0(r) - 2a^{2-p}N(r)\right] \\ \ge& a^{p-1}\left[p\frac{1-r^m}{1+r^m}\varphi_0(r) - 2N(r)\right] \\ =& a^{p-1}D'(1) = a^{p-1}\Psi_{p,m}(r) \ge 0 \quad \text{for all } a \in [0,1], \end{aligned}$$

因为 $0 \le a^{2-p} \le 1$ 对 $1 < p \le 2.$ 成立。再次注意，当 $1 < p \le 2$时， $D(a)$ 是 $[0,1]$上的 a 的递增函数，这进而意味着，对所有 $a \in [0,1]$， $D(a) \le D(1) = 0$。因此，所需不等式对 $0 \le r \le R$ 成立。□

4. Bohr-type inequalities for bounded analytic functions

4.1. 定理1的证明。设 $f \in \mathcal{B}$, $a := |a_0|$ 且 $\omega \in \mathcal{B}_m$。那么，由经典Schwarz引理可得

$$\begin{aligned} |\omega(z)| &\le |z|^m, \quad z \in \mathbb{D}, \\ |f(u)| &\le \frac{|u|+a}{1+a|u|}, \quad u \in \mathbb{D}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

并且，由于 $x \mapsto \frac{x+a}{1+ax}$ 在 $[0,1)$ 上递增，因此可得

$$|f(\omega(z))| \le \frac{|\omega(z)|+a}{1+a|\omega(z)|} \le \frac{r^m+a}{1+ar^m}, \quad |z| = r < 1. \tag{4.2}$$

根据引理 2 和 (4.2)，可知

$$A_f(z) \le \left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p \varphi_0(r) + (1-a^2)\Phi_1(r) = \varphi_0(r) + D_{p,m}(a),$$

其中 $D_{p,m}(a)$ 与引理3中的定义相同，且 $N(r) = \Phi_1(r)$。鉴于引理3，对于 $0 \le r \le R_1$, 所需不等式 $A_f(z) \le \varphi_0(r)$ 成立，其中 R_1 与定理陈述中的定义相同。

还需证明半径 R_1 是最佳可能的。为此，我们考虑以下函数

$$\omega(z) = z^m \text{ and } f_a(z) = \frac{z+a}{1+az} = a + \left(1-a^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^{n-1}z^n, \ a \in [0,1). \tag{4.3}$$

利用这两个函数，经过直接计算可得（对于 $z=r$）

$$\begin{aligned} A_{f_a}(z) &= \left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p \varphi_0(r)+(1-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\varphi_n(r) \\ &\quad +(1-a^2)^2\sum_{n=1}^{\infty}a^{2n-2}\left[\frac{\varphi_{2n}(r)}{1+a}+\Phi_{2n+1}(r)\right] \\ &= \varphi_0(r)+\left[\left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p-1\right]\varphi_0(r) \\ &\quad +(1-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\varphi_n(r)+O((1-a)^2) \\ &= \varphi_0(r)+(1-a)Q(a,r)+O((1-a)^2), \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$Q(a,r)=\frac{\varphi_0(r)}{1-a}\left[\left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p-1\right]+(1+a)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\varphi_n(r).$$

显然，(4.4) 右侧的最后一个表达式大于或等于 $\varphi_0(r)$，如果 $Q(a,r)\geq 0$。事实上，当 $r\geq R_1$ 和 a 接近 1 时，我们看到

$$\lim_{a\to 1^-}Q(a,r)=2\Phi_1(r)-p\left(\frac{1-r^m}{1+r^m}\right)\varphi_0(r)=-\Psi_1(r)>0.$$

由于 $\Psi_1(r)<0$ 在某个区间 $(R_1,R_1+\varepsilon)$ 内（根据假设），容易看出，当 $a\to 1^-$ 时，(4.4) 中上述表达式的右侧大于 $\varphi_0(r)$。这验证了半径 R_1 是最佳可能的。□

4.2. 定理 2 的证明。假设定理 2 的假设成立。那么，当 $\omega\in\mathcal{B}_m$ 时，我们有 $|\omega(z)|\leq r^m$，且 $f(\omega(0))=a_0$，因此（令 $a=|a_0|$）

$$|f(\omega(z))-a_0|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\omega(z))^n\right|\leq(1-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}r^{mn}=(1-a^2)\frac{r^m}{1-r^m}.$$

对于　定理的证明，由上述不等式和引理 2 可得 at

$$B_f(z) \leq a^p\varphi_0(r)+(1-a^2)\Phi_1(r)+(1-a^2)\frac{r^m}{1-r^m} = \varphi_0(r)+(1-a^2)H(a),$$

其中

$$H(a)=\Phi_1(r)+\frac{r^m}{1-r^m}-\frac{1-a^p}{1-a^2}\varphi_0(r).$$

由于对每个 $p\in(0,2]$，， $x\mapsto A(x)=\frac{1-x^p}{1-x^2}$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，因此 $A(x)\geq$li $\mathrm{m}_{a\to 1^-}A(x)=\frac{p}{2}$。于是， $H(a)$ 显然是 $a\in[0,1)$ 的增函数，因此我们有

$$H(a)\leq H(1)=\Phi_1(r)+\frac{r^m}{1-r^m}-\frac{p}{2}\varphi_0(r)\leq 0,$$

由此可得，当 $H(1)=-\Psi_2(r)\leq 0$ 时， $B_f(z)\leq\varphi_0(r)$，这对$r\leq R_2$成立，其中 R_2 是方程 $\Psi(r)=0$ 的最小正根。

为证明半径 R_2 是最佳可能的，我们考虑以下函数

$$\omega(z)=z^m \text{ and } g_a(z)=\frac{a-z}{1-az}=a-\left(1-a^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}z^n,\ a\in[0,1). \tag{4.5}$$

利用这两个函数，经过直接计算可得（对于 $z=r$）

$$\begin{aligned}B_{g_a}(z) &= a^p\varphi_0(r)+(1-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\varphi_n(r)\\ &\quad+(1-a^2)^2\sum_{n=1}^{\infty}a^{2n-2}\left[\frac{\varphi_{2n}(r)}{1+a}+\Phi_{2n+1}(r)\right]+(1-a^2)\frac{r^m}{1-ar^m}\\ &= \varphi_0(r)+(1-a^2)\left[\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\varphi_n(r)+\frac{r^m}{1-ar^m}-\frac{1-a^p}{1-a^2}\varphi_0(r)\right]+O((1-a^2)^2).\end{aligned}$$

由于 $\Psi_2(r)<0$ 位于某个区间 $(R_2,R_2+\varepsilon)$ 内，容易看出，当 $a\to1^-$ 时，上述表达式的右边大于 $\varphi_0(r)$。这验证了半径R_2 是最佳可能的。证明完毕。□

4.3. 定理 3 的证明。令 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$. 于是 $f(z)=zg(z)$，因此 $g\in\mathcal{B}$其中 $a_{n+1}=b_n=g^{(n)}(0)/n!$ 对所有 $n\geq0$ 均成立。因此，对所有 $n\neq1$，我们有 $|b_n|\leq1-|b_0|^2$，即对所有 $n\geq1$，$|a_{n+1}|\leq1-|a_1|^2$。由此得到

$$\begin{aligned}C_{f'}(\varphi,p,r) &\leq |a_1|^p\varphi_0(r)+(1-|a_1|^2)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r)\\ &= \varphi_0(r)+(1-|a_1|^2)\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r)-\varphi_0(r)\frac{1-|a_1|^p}{1-|a_1|^2}\right]\\ &\leq \varphi_0(r)+(1-|a_1|^2)\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r)-\frac{p}{2}\varphi_0(r)\right]\\ &\leq \varphi_0(r)\quad\text{for } r\leq R_3,\end{aligned}$$

其中 R_3 与定理陈述中的相同，且 $p\in(0,2]$。注意，在上面的第二个不等式中，我们用到了以下事实（参见 [14,定理 1] 的证明）：

$$A(x)=\frac{1-x^p}{1-x^2}\geq\frac{p}{2}\ \text{ for all } x\in[0,1 \text{ and } p\in(0,2].$$

为了证明半径 R_3 是最佳可能的，我们考虑函数

$$\varphi_a(z)=z\left(\frac{a-z}{1-az}\right)=az-(1-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}z^{n+1},z\in\mathbb{D},$$

其中 $a \in [0,1)$。对于这个函数，直接计算可得

$$\begin{aligned} C_{\varphi_a'}(\varphi,p,r) &= a^p\varphi_0(r)+(1-a^2)\sum_{n=2}^{\infty}na^{n-2}\varphi_{n-1}(r) \\ &= \varphi_0(r)+\frac{p}{2}(1-a^2)\left[\frac{2}{p}\sum_{n=2}^{\infty}na^{n-2}\varphi_{n-1}(r)-\varphi_0(r)\right] \\ &\quad +(1-a^2)\left(\frac{p}{2}-\frac{1-a^p}{1-a^2}\right)\varphi_0(r). \end{aligned}$$

由于 $\Psi_3(r)<0$，即在某个区间 $(R_3, R_3+\varepsilon)$ 内，$\frac{p}{2}\varphi_0(r)<\sum_{n=2}^{\infty}n\varphi_{n-1}(r)$，容易看出，当 $a\to 1^-$ 时，对于 $r\in(R_3, R_3+\varepsilon)$，有 $C_{\varphi_a'}(\varphi,p,r)>\varphi_0(r)$。这验证了半径 R_3 是最佳可能的，定理的证明至此完成。□

4.4. 定理 **4** 的证明。与前一定理的证明类似，由假设可知，对所有 $n\geq 1$，$|a_{n+1}|\leq 1-|a_1|^2$，因此由 **(4.1)** 可得

$$\begin{aligned} |f'(\omega(z))-a_1| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\omega^n(z)\right| \\ &\leq (1-|a_1|^2)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|\omega(z)|^n \\ &\leq (1-|a_1|^2)\cdot r^m\frac{2-r^m}{(1-r^m)^2}. \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} D_{f'}(\varphi,p,r) &\leq |a_1|^p\varphi_0(r)+(1-|a_1|^2)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r)+(1-|a_1|^2)\cdot r^m\frac{2-r^m}{(1-r^m)^2} \\ &= \varphi_0(r)+(1-|a_1|^2)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r)-\frac{1-|a_1|^p}{1-|a_1|^2}\varphi_0(r)+r^m\frac{2-r^m}{(1-r^m)^2}\right\} \\ &\leq \varphi_0(r)+(1-|a_1|^2)A(p,r), \end{aligned}$$

其中

$$A(p,r)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi_n(r)-\frac{p}{2}\varphi_0(r)+r^m\frac{2-r^m}{(1-r^m)^2}.$$

注意，对于 $0\leq r\leq R_4$（由假设），$A(p,r)=-\Psi_4(r)\leq 0$，其中 $\Psi_4(r)$ 与定理陈述中的定义相同。因此，我们得到，对于 $0\leq r\leq R_4$，有 $D_{f'}(\varphi,p,r)\leq\varphi_0(r)$。

为了证明半径 R_4 是最佳可能的，我们再次考虑函数

$$\omega(z)=z^m \quad\text{and}\quad \varphi_a(z)=z\left(\frac{a-z}{1-az}\right)=az-(1-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}z^{n+1},\ z\in\mathbb{D},$$

其中 $a \in [0,1)$。利用这两个函数，经过简单计算可得

$$\begin{aligned} D_{\varphi_a'}(\varphi,p,r) &= a^p\varphi_0(r) + (1-a^2)\sum_{n=2}^{\infty} na^{n-2}\varphi_{n-1}(r) + ar^m\frac{2-ar^m}{(1-ar^m)^2}\cdot(1-a^2) \\ &= \varphi_0(r) + (1-a^2)\left[\sum_{n=2}^{\infty} na^{n-2}\varphi_{n-1}(r) - \frac{1-a^p}{1-a^2}\varphi_0(r) + ar^m\frac{2-ar^m}{(1-ar^m)^2}\right]. \end{aligned}$$

由于 $\Psi_4(r) < 0$ 位于某个区间 $(R_4, R_4+\varepsilon)$ 内，很容易看出，当 $a \to 1^-$ 时，最后一个表达式的右侧大于 $\varphi_0(r)$。这证明半径 R_4是最佳可能的。定理的证明至此完成。□

定理 5 和定理 6 的证明与定理 1.

4.5. 定理5的证明。假设定理5的假设成立。由此可得 (4.2)

$$E_f(z) \le \left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p + \lambda(1-a^2)\frac{r}{1-r} = 1 + D(a). \tag{4.6}$$

其中， $D(a) := D_{p,m}(a)$ 与引理3中的相同，其中 $N(r) = \lambda r/(1-r)$ 且 $\varphi_0(r) = 1$。现在，应用引理3，当 $0 \le r \le R_{\lambda,m}$ 时，所需不等式 $E_f(z) \le 1$ 成立，其中 $R_{\lambda,m}$与定理陈述中的相同。

为证明半径 $R_{\lambda,m}$ 是最佳可能的，我们考虑函数

$$\omega(z) = z^m \quad \text{and} \quad f_a(z) = \frac{z+a}{1+az} = a + \left(1-a^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^{n-1}z^n,\ a \in [0,1).$$

利用这些函数，直接计算可得（对于 $z = r$）

$$\begin{aligned} E_{f_a}(z) &= \left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p + \lambda\left[(1-a^2)\frac{r}{1-ar} + (1-a^2)^2\frac{r^2}{(1+a)(1-r)(1-ar)}\right] \\ &= \left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p + \lambda(1-a^2)\frac{r}{1-r} = 1 + D(a). \end{aligned}$$

接下来，我们只需证明：如果 $r > R_{\lambda,m}$，则存在一个 a，使得 $E_{f_a}(z)$ 大于 1。这等价于证明，对于 $r > R_{\lambda,m}$ 以及某个 $a \in [0,1,\ D(a) > 0)$。根据引理3的证明， $D(a)$ 在 $[0,1)$ 上关于 $r \in (R_{\lambda,m}, R_{\lambda,m}+\varepsilon)$ 是递减的，由此得到 $D(a) > D(1) = 0$。这证明了半径 $R_{\lambda,m}$ 是最佳可能的。定理5的证明完成。□

4.6. 定理6的证明。假设定理6的条件成立。根据（4.2），由（2.1）可得 $F_f(z) \le 1 + D(a)$，其中 $D(a) := D_{p,m}(a)$ 如引理3中所述，且 $N(r) = \lambda r^{q+m}/(1-r^q)$，以及 $\varphi_0(r) = 1$。现在应用引理 3，对于 $0 \le r \le R^p_{\lambda,q,m}$，所需不等式 $F_f(z) \le 1$成立，其中 $R^p_{\lambda,q,m}$ 如定理陈述中所述。

为证明半径 $R^p_{\lambda,\ q,\ m}$ 是最佳可能的，我们考虑函数

$$\omega(z) = z^m \quad \text{and} \quad f_a(z) = \frac{z+a}{1+az} = a + \left(1-a^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^{n-1}z^n,\ a \in [0,1).$$

利用这些函数，通过常规计算可得（对于 $z=r$）

$$F_{f_a}(z)=\left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p+\lambda(1-a^2)\frac{a^{q+m-1}r^{q+m}}{1-a^qr^q}=1+(1-a)T(a), \tag{4.7}$$

其中

$$T(a) = \frac{1}{1-a}\left[\left(\frac{a+r^m}{1+ar^m}\right)^p-1\right]+\lambda(1+a)\frac{a^{q+m-1}r^{q+m}}{1-a^qr^q}.$$

显然，当 $T(a)>0$ 时， $F_{f_a}(z)$ 大于或等于 1。事实上，对于 $r\in(R^p_{\lambda,\,q,\,m}$、$R^p_{\lambda,\,q,\,m}+\varepsilon)$ 且 a 接近 1 的情形，我们有

$$\lim_{a\to1^-}T(a)=2\lambda\frac{r^{q+m}}{1-r^q}-p\frac{1-r^m}{1+r^m}>0$$

由于 $2\lambda\frac{r^{q+m}}{1-r^q}>p\frac{1-r^m}{1+r^m}$ 位于某个区间 $(R^p_{\lambda,\,q,\,m}$、$R^p_{\lambda,\,q,\,m}+\varepsilon)$ 内，很容易看出，当 $a\to1^-$ 时，上述表达式 (4.7) 的右端大于 1。这证明半径 $R^p_{\lambda\,,\,q,\,m}$ 是最佳可能的。定理6的证明完成。□

致谢。前两位作者的这项研究部分得到广东自然科学基金（项目编号: 2021A1515010058）的资助。

利益冲突。作者声明，他们与本文的发表不存在利益冲突。

数据可用性声明。作者声明，本研究纯属理论研究，不涉及任何数据。

References

1. Y. Abu-Muhanna 和 R. M. Ali，解析函数的 Bohr 现象与双曲度量，Math. Nachr. 286(11-12) (2013), 1059–1065。2. Y. Abu-Muhanna、R.M. Ali 和 S. Ponnusamy，论 Bohr不等式，载于《逼近论与应用复分析进展》（N.K. Govil 等编），Springer Optimization and Its Applications, 117 (2016), 265–295。3. M.B. Ahamed 和 V. Allu，某些调和映射类的 Bohr 现象，Rocky Mountain J. Math. 52(4) (2022), 1205–1225。4. S.A. Alkhaleefah、I.R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，论具有固定零系数的 Bohr不等式，Proc. Amer. Math. Soc. 147(12) (2019), 5263–5274。5. V. Allu 和 H. Halder，某些调和映射的 Bohr不等式，Indag. Math. (N.S.) 33(3) (2022), 581–597。6. C. B´en´eteau、A. Dahlner 和 D. Khavinson，关于 Bohr 现象的评述，Comput. Methods Funct. Theory 4(1) (2004), 1–19。7. B. Bhowmik 和 N. Das，某些单叶函数从属族的 Bohr 现象，J. Math. Anal. Appl. 462(2) (2018), 1087–1098。8. H. Bohr，关于幂级数的一个定理，Proc. Lond. Math. Soc., 2(13) (1914), 1–5。9. A. Defant、L. Frerick、J. Ortega-Cerd`a、M. Ouna¨ıes 和 K. Seip，齐次多项式的 Bohnenblust-Hille 不等式具有超压缩性，Ann. of Math. 174(2) (2011), 512–517。10. A. Defant、D. Garc´ıa、M. Maestre 和 P. Sevilla-Peris，高维中的 Dirichlet 级数与全纯函数，第 37 卷，剑桥大学出版社，2019。11. P.B. Djakov 和 M.S. Ramanujan，关于 Bohr 定理及其推广的一个评注，J. Analysis 8 (2000), 65–77。12. S.R. Garcia、J. Mashreghi 和 W.T. Ross，有限 Blaschke 乘积及其关联，Springer，Cham，2018。

13. Y. Huang、M.S. Liu 和 S. Ponnusamy，带面积测度的有界解析函数精细 Bohr型不等式，Anal. Math. Phys., 10(4) (2020), Paper No. 50, 21 pp. 14. I.R. Kayumov、D.M. Khammatova 和 S. Ponnusamy，广义 Ces´aro 平均算子的 Bohr不等式，Mediterr. J. Math. 19 (2022), no. 1, Paper No. 19, 16 pp; 15. I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，奇解析函数的 Bohr不等式，Comput. Methods Funct. Theory, 17(4) (2017), 679–688。16. I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，具有间隙级数的解析函数与调和函数的 Bohr不等式，J. Math. Anal. and Appl., 465(2) (2018), 857–871。17. I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，Bohr 不等式的改进版本，C. R. Math. Acad. Sci. Paris 356(3) (2018), 272–277。18. R.-Y. Lin、M.- S. Liu 和 S. Ponnusamy，解析函数中 Bohr型不等式的推广，《数学学报》（中文版），66(2) (2023), 1–20。19. G. Liu、Z.H. Liu 和 S. Ponnusamy，有界解析函数的精细 Bohr 不等式，Bull. Sci. Math. 173 (2021), Paper No. 103054, 20 pp。20. M.S. Liu 和 S. Ponnusamy，精细 Bohr 不等式的多维类比，Proc. Amer. Math. Soc., 149(5) (2021), 2133–2146。21. M.S. Liu、S. Ponnusamy 和 J. Wang，拟从属类与K-拟正则调和映射类的 Bohr 现象，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F ´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 114(3) (2020), Paper No. 115, 15 pp。22. M. S. Liu、Y. M. Shang 和 J. F. Xu，解析函数的 Bohr型不等式，J. Inequal. Appl., 345 (2018), 13 pp。23. V.I. Paulsen、G. Popascu 和 D. Singh，论 Bohr 不等式，Proc. Lond. Math., 85(2) (2002), 493–512。24. S. Ponnusamy、R. Vijayakumar 和 K.-J. Wirths，关于模为一的有界函数系数的新不等式，Results Math. 75(3) (2020), Paper No. 107, 11 pp。25. S. Ponnusamy、R. Vijayakumar 和 K.-J. Wirths，各种情形下 Bohr 不等式的修正，Houston J. Math. 47(4) (2021), 807–831。26. L. Wu、Q.H. Wang 和 B.Y. Long，有界解析函数的若干单参数 Bohr型不等式，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F ´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 116(2) (2022), 1–13K.X. Chen, School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510631, China.电子邮箱：20143582732@qq.comM.S. Liu, School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510631, China.电子邮箱：liumsh65@163.comS. Ponnusamy, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras,Chennai-600 036, India.Lomonosov Moscow State University, Moscow Center of Fundamental and AppliedMathematics, Moscow, Russia.电子邮箱：samy@iitm.ac.in