arXiv:2302.07768v1 [cs.CG] 15 Feb 2023

超平面排列的组合深度度量

Patrick Schnider 瑞士苏黎世联邦理工学院计算机科学系¨urich, Switzerlandpatrick.schnider@inf.ethz.ch

Pablo Sober´on 纽约市立大学巴鲁克学院数学系，美国；纽约市立大学研究生中心数学系，美国psoberon@gc.cuny.edu

摘要

回归深度由 Rousseeuw 和 Hubert 于 1999 年提出，用于衡量给定查询超平面相对于一组数据点而言作为回归超平面的优劣。在射影对偶下，这可以解释为查询点相对于数据超平面配置的一种深度测度。研究查询点相对于一组数据点的深度度量由来已久，而在超平面排列的情形下，许多此类深度度量都有自然对应形式。例如，回归深度对应于 Tukey 深度。受此启发，我们研究超平面排列的一般深度度量族，并证明它们都必须存在一个深点。在此过程中，我们证明了一个关于超平面排列的 Tverberg 型定理，从而对 Rousseeuw 和 Hubert 于 1999 年提出的一个猜想给出了肯定答案。我们还为回归深度的中心点定理给出了三个新的证明，每个证明都比 Amenta、Bern、Eppstein 和 Teng 的原始证明更强或更具一般性。最后，我们证明了一个关于回归深度的中心横截定理版本。

1 引言

组合几何和计算几何中的一个核心主题，是研究欧几里得空间中有限点族的结构性质。研究哪些集合可以通过超平面与其他集合分离，是一个自然的问题，这引导我们研究凸集的组合性质。Tverberg 定理 [28] 和 Rado中心点定理 [19]等经典结果，便源于这一思路。

有时，我们收到的数据并非以 $\mathbb{R}^d$ 中的有限点集形式给出，而是以超平面集合的形式给出。了解点族的哪些结果可以推广到超平面族，是一个自然的问题。

给定 $\mathbb{R}^d$ 中的一个超平面排列 A 和一个点 q，我们首先如下考虑其深度：

定义 1. 查询点 q 相对于超平面排列A的回归深度，记作 *RD(A,q)*，是从 q出发的任意射线与 A 中的超平面相交或平行的最小数量。

注意，若 q 位于超平面 H上，则任何从 q 出发的射线都会与 H相交。回归深度已得到广泛研究 [1, 8, 23, 24, 30]。本文为回归深度提供了新的结构性结果，这些结果与 Tverberg 定理和包围深度相关。特别地，给定 $\mathbb{R}^d$中的一个有限超平面配置 A，我们可以用不同的方式测度深度

一个点 q 在 A 中的深度，因此我们研究超平面排列下深度度量的一般性质。这沿用了近期针对有限点族 [25]的深度度量所采用的类似方法。

给定一个由 n 个超平面组成的配置 A，Amenta、Bern、Eppstein 和 Teng [1],，以及后来 Mizera [17] 和 Karasev [13]，已经证明存在回归深度至少为 $n/(d+1)$ 的点。这可以视为 Rado中心点定理 [19] 的超平面版本。我们给出三个关于存在具有较大回归深度的点的新证明。首先，我们证明回归深度中心点定理是一个 Tverberg 型定理的推论，从而证实了 Rousseeuw 和 Hubert[23] 的猜想。

定理 1. 设 r、d 为正整数，A 是一个至少含有 $(r-1)(d+1)+1$ 个超平面的配置，位于 $\mathbb{R}^d$中。那么，存在一个点 q，属于 $\mathbb{R}^d$，并且存在将 A 划分为 r 个部分的划分，使得 q 相对于这 r 个部分中的每一个都具有正回归深度。

此前已知，当 $d=2$ [23]或 r 为素数幂 [14, 15]时，结论成立。Karasev 给出的素数幂情形版本采用了稍加限制的回归深度定义。基于这一结果，我们定义点的超平面 *Tverberg* 深度 。

定义2. 对于超平面排列 A，查询点 q 的超平面 *Tverberg* 深度记为 *HTvD(A,q)*，它是满足以下条件的最大 r ：存在一种将 A划分为 r 个部分的划分，使得 q 相对于每个部分都具有正回归深度。

另外两种证明是拓扑方法，而且各自还能推出更强的结论。一种基于 Helly 定理的拓扑版本的证明表明，存在具有较高开回归深度的点；开回归深度是第5节引入的一种稍弱的深度测度。最后一种证明基于向量丛的性质，适用于加权排列族中的回归深度。

测量点相对于超平面排列的深度，另一种方法是通过 k-包围。若一个排列 A k-包围 查询点 q，则称该排列 A k能够将 A 划分为 $d+1$ 个两两不相交的子集 $A_1,\ldots,A_{d+1}$，每个子集的大小均为 k，并且对于任意选择的 $h_1\in A_1,\ldots,h_{d+1}\in A_{d+1}$，都有 RD($\{h_1,\ldots,h_{d+1}\},q$) ≥ 1。

定义3。 查询点 q 相对于超平面排列 A的超平面包围深度，记作 *HED(A,q)*，是满足以下条件的最大值：存在一个 A的子排列，使其 k-包围 q。

给定一个有限超平面排列 A，我们证明存在相对于 A具有较高超平面包围深度的点。特别地，我们的下界关于 $|A|$是线性的。对于点族，具有较大包围深度的点的存在性已由 Pach [18] 以及 Fabila-Monroy 和 Huemer [7] 确立（关于改进后的常数，参见 [25] ）。

Rado中心点定理的一个引人注目的推广是中心横截定理，该定理由 Dolnikov 和 ˇZivaljevi´c 以及 Vre´cica [6, 31]分别独立证明。在第7节中，我们证明了一个关于超平面排列的类似结果。给定 $\mathbb{R}^d$ 中的一个超平面排列 A 以及 $\mathbb{R}^d$中的一个线性子空间 L，我们将 A在 L上的限制记作 $A\cap L$。在定理 24中，我们证明：给定 $\mathbb{R}^d$中的 $d-k+1$ 个不同的超平面排列，存在一个 k维线性子空间 L，使得每个排列在 L上的限制都与某个具有较高回归深度的点相交。

特别是，正如中心横截定理推广了火腿三明治定理一样，
T定理24有如下推论。

推论2. 设 A_1、...、A_d 是 $\mathbb{R}^d$ 中的 d 个超平面排列。存在一条经过原点的直线 ℓ，位于 $\mathbb{R}^d$ 中，还有一点 $q\in\ell$，使得从 q 出发的 ℓ 中两条射线各自至少与 $|A_i|/2$ 个 A_i 的超平面相交，对每个 $i=1$、...、 d 都成立。

上述推论类似于关于带有线段 [3, 20],的超平面族的质量划分结果，以及中心横截定理 [15]的射影版本。

2 与点集深度度量的对应关系

对于配置 A 和查询点 q，我们将 A q的对偶定义为 A_q^*，如下所示。对于每个超平面 $h \in A$，令 $p(h)$ 为超平面 h 上距离 q最近的唯一一点。我们将 A_q^* 定义为由所有这些点构成的集合，即 $A_q^* := \{p(h) \mid h \in A\}$。注意，如果 q位于 k 个超平面上，那么这 k 个对偶点在 A_q^*中与 q 重合。

利用这种对偶性，对于点集上的每个深度测度 ρ，我们都可以通过令 $\rho^*(A, q) = \rho(A_q^*, q)$，定义一个相应的超平面排列上的深度测度 ρ^*，反之亦然。我们有如下观察。

O观察 3. *1.* 从 q 出发的射线 r 与超平面 h 相交，当且仅当由经过 q 且垂直于 r的超平面所界定、并定向为包含 r的半空间 $r^\perp$ 包含 $p(h)$；*2.* 点 q相对于 $h_1, \ldots, h_n$ 具有正回归深度，当且仅当它位于 $p(h_1) \ldots, p(h_n)$的凸包中。*3.* 点 q位于由 $h_1 \ldots, h_{d+1}$ 定义的单纯形中，当且仅当它位于 $p(h_1) \ldots, p(h_{d+1})$的凸包内部。

第1节中定义的三种超平面排列深度测度，都有与之自然对应的点集深度测度，这些测度可直接由观察 3 得出。对于回归深度，对应的深度测度是*Tukey* 深度 (TD)，其定义为：在所有包含查询点 q [27]的闭半空间中，所包含的数据点数量的最小值。对于超平面 Tverberg 深度，对应的是 Tverberg 深度 (TvD)，其定义为：满足存在数据点的一个 r-划分，且查询点 q 位于这些集合交集中的最大 r。最后，对于超平面包围深度，对应的是包围深度(ED)，其定义为：满足存在一个数据点子集能够以 k-包围查询点 q [25]的最大 k。

推论4. 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个处于一般位置的超平面排列，q 是一个查询点。那么

1. $R^d(A, q) =$ 图基深度(A_q^*, q);
2. $HTvD(A, q) = TvD(A_q^*, q)$;
3. $HED(A, q) = ED(A_q^*, q)$.

3 超平面深度的公理

令 $A^{\mathbb{R}^d}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中所有有限超平面排列的族。超平面的深度测度是一个函数 $\rho : (A^{\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，它为由超平面排列 A 和查询点 q 组成的每一对 (A, q) 赋予一个值，用来描述查询点 q 在配置 A 中的位置有多深。如果一个面内所有点的深度测度都相同，则称该深度测度为组合的 。与 [25], 类似，我们引入一些公理，合理的超平面排列深度测度应满足这些公理。

如果一个超平面组合深度度量超可加，则称其满足以下四个条件。

(i) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$ 以及任意超平面 h，都有 $|\rho(A, q) - \rho(A \cup \{h\}, q)| \leq 1$; (ii) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$，若 q 位于 A 的一个无界胞腔中，则有 $\rho(A, q) = 0$；(iii) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$，若 q 位于一个有界胞腔中，或位于某个超平面上，则有 $\rho(A, q) \geq 1$

e

A, (iv) 对任意不相交的子集 A_1、$A_2 \subseteq A$和 $q \in \mathbb{R}^d$，有 $\rho(A$、$q) \geq \rho(A_1$、$q) + \rho(A_2$、$q)$。

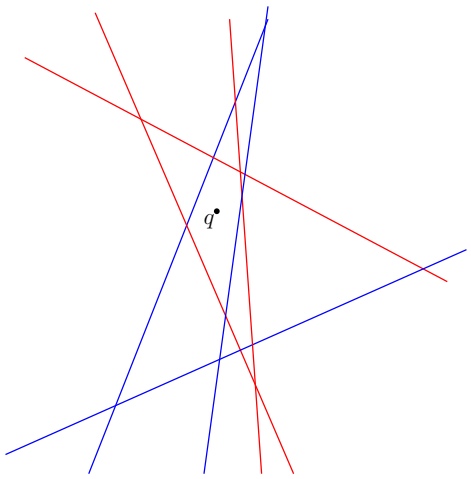

图1：超平面包围深度不满足条件（iv）：点 q 相对于蓝色直线和红色直线的超平面包围深度均为 1，但相对于这两个集合并集的超平面包围深度仍为 1。

观察5。 回归深度和超平面 *Tverberg* 深度是超可加的，但超平面包围深度不是。

对于超平面包围深度，图1给出了一个满足 HED(A_1, q) = HED(A_2, q) = HED(A, q) =1 的示例。

引理 6。 设 ρ 是满足条件（*i*）和（*ii*）的任意组合深度度量。则对于所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$，有 $\rho(A, q) \leq R^d(A, q)$。

证明。设 RD(A, q) = k。这意味着存在一条射线 r，它与某些 k 个超平面相交或平行。移除这些 k 个超平面后，我们得到一个新的配置 A'，并且有 RD(A', q) = 0。特别地，q 位于 A' 的一个无界胞腔中，因此根据条件（ii），也有 $\rho(A', q) = 0$。根据条件（i），我们有 $\rho(A, q) \leq \rho(A', q) + k = k$。 □

引理7。 设 ρ 是满足条件（*iii*）和（*iv*）的任意组合深度度量。那么对于所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$，都有 $\rho(A, q) \geq HTvD(A, q)$。

证明。设 HTvD(A, q) = k。这意味着存在一个 k划分 $A_1, \ldots, A_k$，使得 q相对于每个部分的回归深度均为 ≥ 1。根据条件（iii），对于每个 A_i，我们有 $\rho(A_i, q) \geq 1$。根据条件（iv），我们得到 $\rho(A, q) \geq \rho(A_1, q) + \ldots + \rho(A_k, q) \geq k$。 □

引理8。 对于所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$和 $q \in \mathbb{R}^d$，都有 $HTvD(A, q) \geq \frac{1}{d} RD(A, q)$。

证明。根据推论4，我们有 HTvD(A, q) = TvD(A_q^*, q)，且 RD(A, q) = TD(A_q^*, q)。众所周知，对于 R^d 中的任意点集 S和任意查询点 q，都有 TvD(S, q) $\geq \frac{1}{d}$TD(S, q)，例如参见 [1, 9, 21]。 □

综合以上所有内容，我们得到

定理 9。 设 ρ 是超平面的超可加深度度量。那么对于所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$和 $q \in \mathbb{R}^d$，我们有 $RD(A, q) \geq \rho(A, q) \geq HTvD(A, q) \geq \frac{1}{d} RD(A, q)$。

正如我们上文所见，并非所有深度度量都是超可加的：超平面包围深度就是一个非超可加测度的例子。为了纳入更一般的深度度量，我们定义了第二个度量族，其依据的是一组较弱的公理。若超平面的组合深度度量满足以下条件，我们称其为可包围的。

(i) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$ 以及任意超平面 h，我们有 $|\rho(A, q) - \rho(A \cup \{h\}, q)| \leq 1$,

(ii) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$，若 q 位于 A 的一个无界胞腔中，则有 $\rho(A,q) = 0$；(iii') 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$，若 q 被 A k 包含，则有 $\rho(A,q) \geq k$；(iv') 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$ 以及任意超平面 h，我们有 $\rho(A \cup \{h\}, q) \geq \rho(A,q)$.

观察 10. 回归深度、超平面 *Tverberg* 深度和超平面包围深度都是可包围的。

由引理 6 可知，任何可包围的深度测度都不大于回归深度。另一方面，由条件 (iii') 和 (iv') 可立即推出，任何可包围的深度测度都不小于超平面包围深度。本节最后给出超平面包围深度的一个下界。在 [25] 的定理 17 中已证明，存在常数 $c(d)$，使得对于 $\mathbb{R}^d$ 中的任意点集 S 以及任意查询点q，都有 ED(S, q) $\geq c \cdot$ TD(S, q)。现在设 q 是超平面排列 A 中回归深度最大的点。我们将在定理 20 中证明，q 的回归深度至少为$\frac{|A|}{d+1}$。由观察 3 可知，这意味着 TD(A_q^*, q) $\geq \frac{|A|}{d+1}$。根据 [25], 中的定理 17，可得 ED(A_q^*, q) $\geq \frac{c|A|}{d+1}$。再次利用观察 3，可推出如下结论：

定理 11。设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的超平面排列。存在常数 $c = c(d)$，使得存在一个查询点 q，其超平面包围深度 $HED(A,q) \geq \frac{c|A|}{d+1}$。

综合以上结果，我们得到定理 9 的一个类似结论。

定理 12。设 ρ 是超平面的一个可包围深度测度。那么对于所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$，都有 $RD(A,q) \geq \rho(A,q) \geq HED(A,q) \geq c \cdot RD(A,q)$。

特别是，本文所研究的所有超平面组合深度度量，都是回归深度的常数因子近似。在接下来的三节中，我们将给出最深点深度的三个下界。第 4 节给出超平面 Tverberg 深度的下界，第5节给出回归深度的一个稍强下界，第 6 节则在更一般的加权排列情形下，给出具有可缩深度区域的超可加深度度量的下界。

4 一个初步下界：超平面 Tverberg 深度

本节证明超平面排列的一个 Tverberg 定理类比结果，从而解决 Rousseeuw 和 Hubert 在 1999 [23] 中提出的猜想。我们的证明受到 Roudneff [22], 对 Tverberg 定理的证明启发 [2]另见 [2]。

定理 1。设 r, d 为正整数，A 为一个至少含有 $(r-1)(d+1)+1$个超平面的配置，且位于 $\mathbb{R}^d$中。那么，存在一点 q 属于 $\mathbb{R}^d$，以及将 A 划分为 r 个部分的一种划分，使得 q 相对于这 r 个部分中的每一个都有正回归深度。

证明。设 π 是将 A 划分为 r 个部分的一种划分，每个部分的大小至多为 $d+1$。注意，π 中大小为 $\leq d$的部分至多有 d 个。定义如下函数 $f_\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$: 对于每个点 $q \in \mathbb{R}^d$，考虑点集 A_q^*。划分 π 在该点集上诱导出一个划分，分为若干部分 $X_1(q) \ldots, X_r(q)$。令 $B(q)$ 为以 q为中心、与每个部分的凸包相交的最小球，并将该球的半径定义为 $f_\pi(q)$。由于对超平面 h而言，将 $\mathbb{R}^d$ 中的一点映射到 h 上距其最近的点，这一映射关于 q是连续的，因此函数 f_π 也是连续的。此外，该函数沿任意射线趋于无穷大，因此可取到最小值。用 $C(q)$ 表示其凸包与之相切的部分集合 $B(q)$。由一般位置假设，我们可以假定 $|C(q)| \leq d+1$。

现在令 π 为使 $\min f_\pi$ 最小的划分，并令 p 为 f_π 取得其最小值的点。如果 $f_\pi(p) = 0$，那么根据观察 3，p 就是所需的点。因此，假设 $f_\pi(p) > 0$。对于每个 $X_j(q)$，令 $y_j(q)$ 表示 conv$X_j(q)$ 中使到 q 的距离最小的唯一点，即 $d(q, \text{conv}X_j) = ||q - y_j(q)||$，并将 $Y_j(q) \subset X_j(q)$ 定义为唯一的

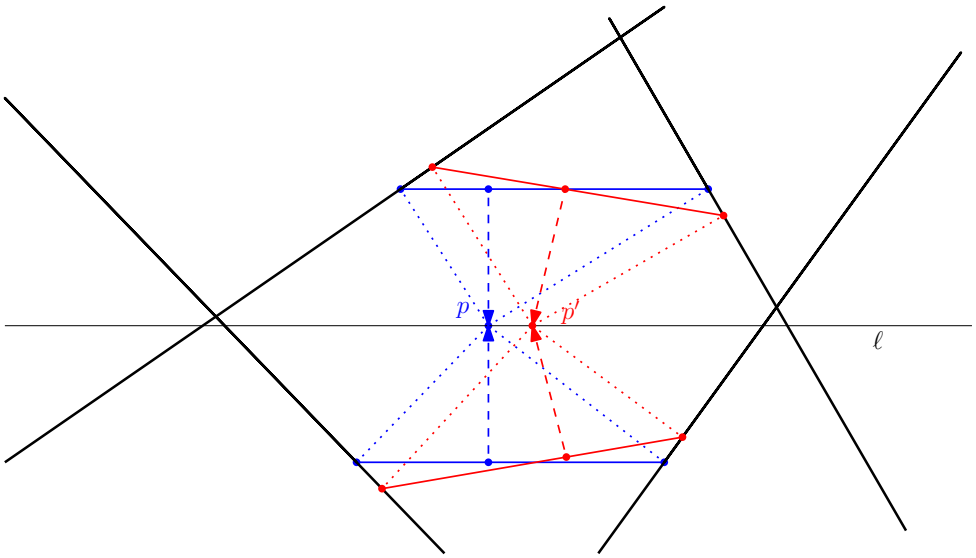

图2：将 p 移至 p' 后， Y_j 的仿射包不再与 ℓ 平行。

子集，使得 $y_j(q)$ 位于 conv($Y_j(q)$) 的相对内部。特别地，我们可以写成$f_\pi(q) = \frac{1}{|C(q)|}\sum_{X_j \in C(q)} ||q - y_j(q)||$，其梯度为 $\nabla f_\pi(q) = \frac{1}{|C(q)|}\sum_{X_j \in C(q)}(q - y_j(q))$。由于 f_π 在 p 处取得最小值，我们有 $\nabla f_\pi(p) = 0$。

我们断言， $C(p)$ 恰好由 $d+1$ 部分组成，并且相应的向量 $(p - y_j(p))$ 中，除 p外，任意 d 个都不共面于同一个超平面。反设后者不成立，也就是说，存在一个超平面 h ，包含这些向量 $(p - y_j(p))$ 中除至多一个以外的所有向量。设 ℓ 为一条经过 p 且与 h正交的直线。注意，对于 $X_j(p) \in C(p)$ ，除至多一个之外，所有仿射包 aff$Y_j(p)$ 都与 ℓ平行。如果有一个向量不属于 h，那么该向量会在 ℓ上确定一个方向。沿相反方向移动 p ，距离为ε 。如果所有向量都在 h 中，那么就沿 ℓ 朝任意方向移动 p 。将所得的点记为 p'。我们可以选择足够小的 ε ，使得 $C(p') = C(p)$ 。设 h' 为经过 p' 且平行于 h 的超平面，并设 h^+ 为包含 p的一侧。现在考虑点 $y_j(p')$ ，其中 $X_j(p) \in C(p)$ 。该点位于 $Y_j(p')$ 中这些点的相对内部。令 $a(p') \in Y_j(p')$ ，并令 $a(p)$ 为 $Y_j(p)$ 中对应的点。如果 $a(p)$ 与 p'位于 h 的同一侧，那么 $d(a(p') p') < d(a(p) p)$ ；如果 $a(p)$ 位于另一侧，那么$d(a(p') p') > d(a(p) p)$ ，见图2。特别地，仿射子空间 $Y_j(p')$ 不平行于 ℓ ，并且向量 $(p' - y_j(p'))$ 指向 h^+内部。由于这对任意 $X_j \in C(p)$ 都成立，因此梯度 $\nabla f_\pi(p') = \frac{1}{|C(p)|}\sum_{X_j \in C(p)} (p' - y_j(p'))$ 也指向 h^+内部；又因为这一侧包含 p，这意味着 p 不可能是局部最小值，这与 p的选取矛盾。因此，向量 $(p - y_j(p))$ 中的任意 d个都线性无关，所以至少需要其中的 $d+1$ 个，才能使 $\nabla f_\pi(p) = 0$。

因此，球 $B(p)$恰好与 $d+1$ 个凸包相切，而 $d+1$ 个切超平面构成一个单纯形， p 位于其内部。由于大小为 $\leq d$的部分至多有 d 个，因此必定存在某个 X_j 中的一点 v ，使得 $B(p)$仍与 $X_j \setminus \{v\}$的凸包相交。该点必定与 p 位于某个其他切超平面的同一侧，例如 X_i的切超平面。接着将 v 加入 X_i ，即可得到一个新的划分 π' ，其中 $B(p)$与 X_i的凸包内部相交。特别是，根据上述论证， p不是 $f_{\pi'}$的最小值，因此 $\min f_{\pi'} < \min f_\pi$。这与 π的选取矛盾，说明 $\min f_\pi = 0$。

□

根据定理 1，对于任意超可加的深度测度，使用定理 9 可知，存在一个深度至少为 $\frac{|A|}{d+1}$ 的点。 ——

回归深度的 Tverberg 定理的存在，自然促使我们思考这类结果是否存在一个彩色版本。

猜想1. 令 r, d 为正整数， $A_1, \ldots, A_{d+1}$ 为 $\mathbb{R}^d$中各含 r 个超平面的集合。它们的并集可以划分为 r 个集合 $B_1, \ldots B_r$，使得 $|A_i \cap B_j| = 1$ 对于每个 $i \in [d+1], j \in [r]$，都存在一个点 q，使得 q 对每个 B_j都具有正回归深度。

在平面中，Karasev 猜想，只要超平面处于一般位置，就能找到这样的划分，使得 q 位于由每个 B_j确定的单纯形中，因为他的超平面 Tverberg 型结果在这种情况下成立 [13]。然而，他的猜想及其自然推广到 $\mathbb{R}^d$ 的版本已被反例推翻 [5, 16]。不过，这些反例并未推翻回归深度版本；在该版本中， q 可以位于由每个B_j 确定的单纯形中，或者位于构成 B_j的超平面并集内。

5 第二个下界：拓扑 Helly 定理

本节将基于 Helly 定理最早的一种拓扑版本之一，给出回归深度中心点定理的证明。该定理指出，给定由 $\mathbb{R}^d$ 的子集组成的一个有限族 F，若其中任意不超过 $d+1$ 个集合的交集都非空且可缩，则所有这些集合的交集中存在一个点 [11]。事实上，这种方法证明了一个更强的结论：我们将证明，对于处于一般位置的配置 A，其某个单元中总存在一个回归深度为 $\lceil \frac{|A|-d}{d+1} \rceil$的点 A。正如我们将看到的，这意味着总存在一个回归深度为 $\lfloor \frac{|A|}{d+1} \rfloor + 1$的点。

基本思路如下：给定一个超平面配置 A，考虑某个方向 ℓ，并对 $\mathbb{R}^d$ 中的每个点 q，计算从 q 出发、方向为 ℓ 的开射线与 A 中多少个超平面相交。将这个数量记为 $\ell(q)$。定义 $R_A(k, \ell)$ 为 $\ell(q) \geq k$ 的点集。由于 A 是有限的，因此这样的区域只有有限个。如果我们能证明，对于 $k = \lceil \frac{|A|-d}{d+1} \rceil$，任意 $d+1$ 个或更少这类区域的交集都是可缩的，那么上述深点的存在性便可由拓扑 Helly 定理得出。事实上，我们的论证将表明，任何非空深度区域都是可缩的。

然而，这里有一个技术问题：回归深度的深度区域通常并不可缩。考虑平面中构成一个三角形的三条直线。在任一条直线上或三角形内部，回归深度均为 1；而在三个顶点处，回归深度为 2，因为每个顶点都是两条直线的交点。因此，深度为 2 的区域由三个孤立点组成，因而不可缩。

然而，如果我们只考察平面直线排列中的二维单元，就很容易证明：深度至少为 k 的单元并集的闭包是可缩的。没有哪个单元会被深度更大的单元完全包围，因为任何能够证明深度为 k的射线（即恰好与 k 条直线相交），也能证明它所经过的其他单元的深度都小于 k。

为了解决这个问题，我们定义一种新的测度，称为开回归深度，记作 RD’，如下所示：设 A 是 $\mathbb{R}^d$中的一个超平面排列。我们首先对 A 进行微小扰动，得到一个处于一般位置的排列 A'。特别地，在任意 k维仿射子空间中，至多有 $d-k$ 个超平面相交。撤销这一扰动会诱导出一个满射 π，将 A' 的面映射到 A的面。对于 A的任意一个面 F，我们称 $\pi^{-1}(A)$为由 F扰动得到的面扰动后。注意，如果 A 原本就处于一般位置，那么 π 是一个双射。

现在考虑扰动后的配置 A'。对于任意点 $q \in \mathbb{R}^d$，定义相对于扰动后配置的开回归深度为：从 q 发出的任意射线与 A 中的超平面相交或平行时所涉及的超平面数量的最小值；若射线的相对内部上存在一点也位于该超平面上，则称射线与超平面相交。换言之，扰动后配置的开回归深度就是回归深度，只是不计入 q 所在的超平面。扰动后配置中开回归深度的深度区域，是深度足够大的单元的并集；若低维面仅与深度足够大的单元相接，则也将这些面加入其中。

为了将此定义推广到原始配置，我们定义开
gr配置的某个面 F_q 中查询点 q 的回归深度 A 为 RD’$(A, q) :=$

$\max_{q' \in F \in F_q}\{\text{RD'}(A', q)\}$，即从 F_q 扰动得到的某个面中的任意点的最大开回归深度。注意，我们可以用确定性的方式扰动配置，从而确保开回归深度定义良好。根据定义，下面的引理可直接得出：

引理 13. 对于任意超平面配置 A 和任意查询点 q，我们有 $RD'(A, q) \leq RD(A, q)$。

特别地，证明开回归深度存在深点，也就证明了回归深度存在深点。不过请注意，开回归深度并非超可加的：它不满足条件（iii）。现在，我们将采用上述思路，证明开回归深度存在深点。我们将证明，应用拓扑 Helly 定理所需的条件均已具备，首先从相关区域的可缩性入手。回顾一下，我们将区域 $R_A(k, \ell)$ 定义为：对于超平面排列 A 和方向 ℓ，所有满足 $\ell(q) \geq k$ 的点构成的集合；这里我们考虑的相关射线是开射线，也就是说，不包含 q。还要回顾的是，由于 A 是有限的，只需将注意力限制在有限多个方向上；我们可以假设这些方向两两线性无关，即其中任意 d 个方向都张成一个 d 维锥。

我们的可缩性证明需要用到一些代数拓扑知识，尤其是同调论中的 Mayer-Vietoris 序列这一概念。关于背景知识，可参阅许多优秀的代数拓扑著作，例如 $[4, 10]$。根据 Whitehead 和 Hurewicz 定理，要证明某个拓扑空间 X 可缩，只需证明 $\pi_1(X) = 0$，$\tilde{}$，以及对所有 $i \geq 0$，$H_i(X) = 0$。在我们的情形中，如果一个环路无法收缩，那一定是因为配置中的某些面构成的族阻碍了任何收缩。但这个族也定义了 H_1 的一个生成元，因此我们讨论的是足够良好的空间，在这类空间中，第一同调群消失意味着单连通。特别地，要证明 X 可缩，只需证明所有约化同调群都消失。换言之，只需证明 X 是一个 同调胞腔。

引理 14。设 A_1、...、A_m 是 $\mathbb{R}^d$ 的开子集。假设每个集合都是同调胞腔，并且其中任意 d 个集合的并集都是同调胞腔。那么 $\bigcap A := \bigcap_{i=1}^m A_i$ 要么为空，要么是同调胞腔。

证明。假设 $\bigcap A$ 非空。我们要证明它是一个同调胞腔。我们对这些子集的数量 m 使用归纳法来证明这一结论。事实上，我们将证明以下更强的结论：对于任意 $1 \leq m$，子集 $S_j = (A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1}) \cap (A_j \cup \ldots \cup A_m)$ 是一个同调胞腔。我们称这样的子集为一个帽杯集 对于 $m = 1$，该结论是显然的。对于$m = 2$，考虑 Mayer-Vietoris 序列

$$H_k(A_1 \cup A_2) \to H_{k-1}(A_1 \cap A_2) \to H_{k-1}(A_1) \oplus H_{k-1}(A_2).$$

根据假设，A_1、A_2 以及 $A_1 \cup A_2$ 都是同调胞腔，因此可知 $A_1 \cap A_2$ 也是同调胞腔。

对于一般情形下的子集 $S_j = (A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1}) \cap (A_j \cup \ldots \cup A_m)$，写作 $A := (A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1})$，$B := A_j$ 和 $C := (A_{j+1} \cup \ldots \cup A_m)$。注意，$S_j = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。另请注意，$A \cap B \cap C = S_{j+1}$ 和 $A \cup B \cup C = S_{j-1}$。

首先考虑两个集合 $A \cap B$ 和 $A \cap C$ 的 Mayer-Vietoris 序列：

$$H_k(A \cap B) \oplus H_k(A \cap C) \to H_k((A \cap B) \cup (A \cap C)) \to H_{k-1}(A \cap B \cap C) \to H_{k-1}(A \cap B) \oplus H_{k-1}(A \cap C).$$

假设 $A \cap B$ 和 $A \cap C$（两者均为帽杯集）是同调胞腔，则可推出 $H_k(S_j) \simeq H_{k-1}(S_{j+1})$。现在考虑集合 A 和 $B \cup C$ 的 Mayer-Vietoris 序列：

$$H_{k+1}(A) \oplus H_{k+1}(B \cup C) \to H_{k+1}(A \cup B \cup C) \to H_k(A \cap (B \cup C)) \to H_k(A) \oplus H_k(B \cup C).$$

假设 A 和 $B \cup C$都是同调胞腔，且二者均为帽杯集，则可推出 $H_{k+1}(S_{j-1}) \simeq H_k(S_j)$。特别地，假设由少于

m 个集合定义的所有帽杯集都是同调胞腔，则我们得到一条同构链

$$H_k\left(\bigcap A\right) = H_k(S_m) \simeq H_{k+1}(S_{m-1}) \simeq \ldots \simeq H_{k+j}(S_{m-j}) \simeq \ldots \simeq H_{k+m-1}\left(\bigcup A\right).$$

由于任意 d 集合的并都是一个同调胞腔，因此对于 $m \leq d$，我们通过归纳法得到所要证明的结果。现在考虑 $m = d+1$的情形。由于我们考虑的是 $\mathbb{R}^d$的子集，因此对于 $j \geq d$，有 $H_j(\bigcup A) = 0$。由同构链可得 $H_k(\bigcap A) \simeq H_{k+d}(\bigcup A)$，从而对于 $k \geq 0$，有 $H_k(\bigcap A) = 0$。根据假设，$\bigcap A$ 非空，因此这意味着 $\bigcap A$ 具有点的同调，也就是说，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $H_k(\bigcap A) = 0$。特别地，$\bigcap A$是一个同调胞腔，因此根据同构链，由 $d+1$ 子集定义的所有帽杯集也都是同调胞腔。关于$m > d+1$ 的结论现在同样可由归纳法得到。 □

我们可以将这一结果应用于当前情形。

引理 15. 设 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ 是 $\mathbb{R}^d$中处于 d重一般位置的方向， A 是一个超平面排列，且 $R(k) := \bigcap_{i=i}^{m} R_A(k, \ell)$。若 $R(k) \neq \emptyset$，则 $R(k)$ 是可缩的。

特别地，深度区域，也就是对所有考察的方向 ℓ， $R_A(k, \ell)$ 的交集，是可缩的。

证明。 由于在当前情形中，同调胞腔是可缩的，根据引理 **14**，只需证明任意 d 个区域 $R_A(k, \ell_1) \ldots, R_A(k, \ell_d)$ 的并集是可缩的。将此并集记为 $U(k)$，并设 $n = |A|$。令 $C \subsetneq \mathbb{R}^d$ 为由 d 个方向张成的锥，并令 ℓ_0 为 $-C$中的一个方向。特别地，从 $U(k)$ 中任意一点沿方向 ℓ_0移动，我们始终不会离开 $U(k)$。因此， $U(k)$ 是可缩的。 □

为了应用拓扑 Helly 定理，我们还需要满足的最后一个性质是：任意 $d+1$ 个或更少区域的交集非空。

引理 16. 设 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ 是 $\mathbb{R}^d$, $m \leq d+1$中的方向， A 是一个超平面排列，并且对 $k \leq \lceil \frac{|A|-d}{d+1} \rceil$，有 $R := \bigcap_{i=i}^{m} R_A(k, \ell)$ 一那么 $R \neq \emptyset$。

证明。 对每个方向 ℓ_i，令 h_i 为一个与 ℓ_i 正交的超平面，它界定了一个半空间h_i^+，该半空间包含 $R_A(k, \ell_i)$。特别地，对于 h_i^+ 中的任意点 p，沿方向 ℓ_i移动 p，最终会进入 $R_A(k, \ell_i)$，此后不再离开。因此，如果这些半空间有公共交集，那么可以平移该交集，使其位于 R 中，从而证明 $R \neq \emptyset$。所以，假设这些半空间的交集为空。由于我们假设这些方向中任意 d 个都线性无关，只有当 $m = d+1$时才会出现这种情况。此时，我们可以找到一点$q \in \mathbb{R}^d$，使得从 q 出发、方向为 $-\ell_i$ 的（闭）射线都与严格多于 $|A| - k$ 个 A超平面相交。每个不经过 q 的超平面至多与 d 条射线相交；根据一般位置假设，至多有 d 个超平面经过 q。因此，若 x 表示射线与超平面的交点数，则有

$$(|A| - k)(d+1) < x \leq (|A| - d)d + d(d+1) = (|A| + 1)d.$$

整理后，利用所有数都是整数这一点可得 $k > \lceil \frac{|A|-d}{d+1} \rceil$，这与假设矛盾，说明 $R \neq \emptyset$。

□

现在，我们已经具备了应用拓扑 Helly 定理所需的所有要素，由此可推出以下结论

推论 17. 对于 R^d 中的每个超平面排列 A，都存在一个点 $q \in \mathbb{R}^d$，使其开回归深度为 $RD'(A, q) \geq \lceil \frac{|A|-d}{d+1} \rceil$。

特别地，根据开回归深度的定义，如果配置 A 处于一般位置，则可以在 A 的一个单元中选取这样一个点。接下来要证明，我们可以找到回归深度更大的点。

引理 18. 对于 $\mathbb{R}^d$ 中的每个超平面排列 A，都存在一个点 $q \in \mathbb{R}^d$，使其回归深度为 $RD(A, q) \geq \lfloor \frac{|A|}{d+1} \rfloor + 1$。

证明。考虑位于具有最大开回归深度 k 的单元 C 中的一个点 q，并令 ∂C 为该单元 C 的边界。如果 ∂C 上存在一个具有开回归深度 k 的点，那么该点具有回归深度 $k+1$，结论随即成立。因此，假设在 ∂C 上处处开回归深度都严格更小。于是，我们再次找到 $d+1$ 个方向，使得从 q 发出的射线恰好与 k 个超平面相交。考察相反方向，这些射线便恰好与 $|A|-k$ 个超平面相交；由于 q 位于一个单元的内部，每个超平面至多与 d 条射线相交。类似于引理 16 的证明，我们由此得到 $k > \lceil \frac{|A|}{d+1} \rceil$。这就证明了 $d+1$ 不整除 $|A|$ 时的所有情形。如果 $d+1$ 整除 $|A|$，注意到只要其中一个超平面仅与所考虑射线中的 $d-1$ 条相交，我们就得到 $k > \lceil \frac{|A|+1}{d+1} \rceil$，结论再次成立。因此，假设每个超平面恰好与 d 条射线相交。这将超平面集合划分为 $d+1$ 个部分，每个部分的大小为 $\frac{|A|}{d+1}$，并由它们未相交的那条射线确定。边界 ∂C 继承了这一划分，并且每个部分都是可缩的。特别地，∂C 包含一个顶点 q，它是来自 d 个不同部分的 d 个超平面的交集。现在，从 q 发出的每条射线都必须与某个部分中的所有超平面相交，同时还位于至少 $d-1$ 个其他超平面上，这表明 q 的回归深度至少为 $k+d-1$，这与开回归深度在 ∂C 上处处严格更小的假设相矛盾。

□

利用上述见解，我们还可以得出结论：许多回归深度区域都是可缩的。

引理 19. 设 $k \leq \lceil \frac{|A|}{d+1} \rceil$。那么，回归深度为 $RD(A, q) \geq k$ 的点 p 所构成的区域 R 是可缩的。

证明。如果存在一点，其开回归深度为 k，那么 R 就是开回归深度至少为 k 的点所构成区域的闭包；根据引理 15，该区域是可缩的。否则，根据引理 18 的证明，R 是仅与开回归深度最大的单元相邻的面的并集。由于没有单元被更深的面完全包围，因此可以从开回归深度最大的单元收缩到与其相邻的更深的面。因此，由于开回归深度最大的区域是可缩的，R 也是可缩的。 □

6 第三个下界：加权排列

本节将给出另一种证明，说明深度较大的点确实存在。这里给出的证明适用于（实际上也要求）更一般的超平面加权排列 情形。超平面加权排列是一个元组 (A, w)，由有限的超平面配置 A 和权重函数 w 构成；该函数 $A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为每个超平面赋予一个权重。稍微滥用一下记号，我们通常直接用 A 表示一个加权排列。对于子排列 $A' \subseteq A$，有 $w'(h) \leq w(h)$，其中 w' 是 A' 上的权重函数；我们记作 $w'(A') := \sum_{h \in A'} w'(h)$。如果 A' 的底层超平面排列是 A 的底层超平面排列的严格子集，我们就称 $A' \subsetneq A$ 是 A 的严格子集。回归深度的定义可推广到加权排列：对于从查询点 q 出发的任意射线 r，令 $A(r)$ 表示被 r 相交的超平面。于是，q 的回归深度 $\mathrm{RD}(A, q)$ 是对所有从 q 出发的射线，取 $w(A(r))$ 的最小值。这个定义与 Mizera [17] 所考察的回归深度的测度论推广相似，但限制更严格。

我们的证明同样适用于加权超平面排列上更一般的深度测度族。我们将上述超可加深度度量的定义扩展到加权超平面排列，具体如下：

(i) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$ 以及任意超平面 h，有 $|\rho(A, q) - \rho(A \cup \{h\}, q)| \leq w(h)$，

(ii) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$，若 q 位于 A 的无界胞腔中，则有 $\rho(A, q) = 0$

(iii) 对所有 $A \in A^{\mathbb{R}^d}$，若 q 位于有界胞腔中，或位于 A 的某个超平面上，则有 $\rho(A, q) \geq \min\{w(h) \mid h \in A\}$

(iv) 对任意互不相交的子集 A_1、$A_2 \subseteq A$ 和 $q \in \mathbb{R}^d$，有 $\rho(A, q) \geq \rho(A_1, q) + \rho(A_2, q)$.

注意，任何超平面排列都可以视为加权超平面排列，只需为每个超平面赋予权重 1。另一方面，每个用于超平面排列的深度测度都可以扩展为加权超平面上的深度测度：利用 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密这一事实，我们可以将多个超平面置于同一位置，然后归一化以得到加权排列。

对于由超平面 A 构成的加权排列和深度测度 ρ，记 $R^A_\rho(\alpha) := \{q \in \mathbb{R}^d \mid \rho(A, q) \geq \alpha\}$ 为 α-深度区域。中位区域是最深的非空深度区域，记作 M^A_ρ。

定理 20. 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的加权超平面排列，且 ρ 是定义在加权超平面上的超可加深度测度，其深度区域紧且可缩。则存在一个点 $q \in \mathbb{R}^d$，使得 $\rho(A, q) \geq \frac{w(A)}{d+1}$。

在证明定理 20 之前，我们先给出证明中需要的一些引理。第一个引理涉及向量丛中截面的一个推广。设 $\pi : E \to B$ 是紧流形 B 上的实向量丛。按照 [31] 的说法，我们称 $\phi : B \to E$ 为多截面，如果对每个 $x \in B$，都有 $\phi(x) \subseteq F_x := \pi^{-1}(x)$。进一步，如果 ϕ 在每个纤维中都是可缩的，我们就称其可缩；也就是说，对每个 $x \in B$，集合 $\phi(x)$ 都是可缩的。最后，如果 ϕ 是紧的，我们就称其为紧的，其中 $\Gamma(\phi) := \{(x, v) \mid v \in \phi(x)\} \subseteq B \times E$ 是紧集。对于任意多截面 ϕ，用 $Z(\phi)$ 表示其与零截面的交集。

引理 21. 设 $\pi : E \to B$ 是紧流形 B 上的实向量丛。设 ϕ 是一个紧的可缩多截面。则存在一个截面 s，使得 $Z(s) = Z(\phi)$。特别地，如果 π 没有处处非零截面，那么 ϕ 必与零截面相交。

证明。令 $B_Z := \{x \in B \mid 0 \in F_x, 0 \in \phi(x)\}$ 为 B 与零截面相交处的（闭）区域。对所有 $x \in B_Z$，令 $s(x) = 0 \in F_x$。令 B_C 为 B_Z 补集的闭包。考虑 B_C 的一个足够精细的三角剖分 T。对于 T 的每个顶点 v，选取某个点 $p_v \in \phi(v)$，并令 $s(v) := p_v$。现在考虑 T 的某个面 F，在该面上 s 未定义，但在其边界上 s 有定义。根据 Smale 的 Vietoris–Begle 型定理（[26],“主定理”），$\phi(F)$ 与 F 同伦等价。由于 F 是单纯形，$\phi(F)$ 因而没有任何非平凡的同伦群，所以不存在障碍，阻止我们将 s 连续延拓到 F 上，从而得到连续函数 s_F: $F \to \pi^{-1}(F)$。这个映射不一定是截面，因为它可能将 F 中的点映到其纤维之外。然而，对每个 $x \in F$，纤维 F_x 都同构，因此将 $s_F(x) \in F_y$ 映到正确纤维 F_x 中对应的点，就能把截面 s 延拓到 F。将 s 延拓到整个 B 后，我们得到一个截面 s；根据构造，有 $Z(s) = Z(\phi)$。

□

第二个引理讨论的是超平面排列的划分。

引理 22. 设 ρ 是一种针对加权超平面的深度测度，其深度区域均为紧且可缩，并设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中满足 $|A| \geq d+2$ 的一个加权超平面排列。那么，存在一个将 A 划分为真子排列 A_1 和 A_2 的划分，使得它们的中位区域相交。

证明与 [25], 中引理 9 的证明类似，只需将 [31] 中的命题 1 换成我们的引理 21。

证明。令 $\partial\Delta$ 为顶点为 A 的单纯形的边界，并令 B 为其重心细分。B 的顶点自然对应于 A 的真子集，也就是说，对于任意这样的顶点 b，我们得到一个真子排列 $A(b)$，其中 $w_b(h) = w(h)$ 当且仅当 h 属于相应的子集，否则为 $w_b(h) = 0$。将这一对应线性延拓到 $\partial\Delta$，便得到一个连续映射，它为每个点 $b \in \partial\Delta$ 指定一个真子排列

$A(b)$。此外，在 $\partial\Delta$ 上的标准对跖作用下，我们得到加权项的补集
sub排列。

令 $M(b)$ 表示加权排列 $A(b)$ 的中位区域。我们断言，存在一点 $b \in \partial\Delta$，使得中位区域 $M(b)$ 与 $M(-b)$ 相交。令 $A_1 := A(b)$ 且 $A_2 := A(-b)$，即可证明该断言。为证明这一断言，考虑向量丛 ζ：将 $\mathbb{R}^d$ 附加到 $\partial\Delta$ 的每一点上，再对对跖性取商得到该向量丛。注意， $M(b)$ 在 ζ 中定义了一个多截面，根据引理 15，它是紧且可缩的。通过将 $M(b)$ 中的每个 b 关于原点反射，定义负多截面 $-M$ 。对每个 $b \in \partial\Delta$，考虑 $Q(b) := M(b) - M(-b)$，其定义为 $M(b)$ 与 $-M(-b)$ 的闵可夫斯基和。紧且可缩集合的闵可夫斯基和仍然紧且可缩，因此 Q仍是一个紧且可缩的多截面。特别地，根据引理 21，存在一个截面 s，其零点与 Q的零点重合。由于 $\partial\Delta$ 与球面 $S^{|A|-2}$ 及 $|A| \geq d+2$同胚，根据博苏克-乌拉姆定理， s ，因此 Q 有一个零点。于是，存在一点 b，使得 $M(b)$ 与 $M(-b)$ 相交，正如所断言的那样。

□

现在我们可以证明定理 20 了。

定理 20 的证明。设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个加权超平面排列。我们对 A 中超平面的数量进行归纳证明。若 A 至多由 $d+1$ 个超平面组成，则由条件（iii）可知，对于某个 $q \in \mathbb{R}^d$，有 $\rho(A,q) \geq w(A)_{d+1}$：只需将 q 取为最大权重超平面上的任意一点即可。因此，假设 A 至少由 $d+2$ 个超平面组成。根据假设，深度区域是紧且可缩的。因此，由引理 22，我们可以将 A 划分为真子排列 A_1 和 A_2，且它们的中位区域相交。由于 A_1 和 A_2 都是真子排列，根据归纳假设，对于它们中位区域交集中的任意点 q，都有 $\rho(A_1,q) \geq w_1(A_1)_{d+1}$，且 $\rho(A_2,q) \geq w_2(A_2)_{d+1}$。由于 ρ 满足条件（iv），对于任意这样的点，我们因此有

$$\rho(A,q) \geq \rho(A_1,q) + \rho(A_2,q) \geq \frac{w_1(A_1) + w_2(A_2)}{d+1} = \frac{w(A)}{d+1}.$$

□

此时，我们还不清楚如何利用定理 20 证明回归深度中心点的存在性。考察回归深度的深度区域，我们在第5节中看到，这些区域通常并非可缩。为解决这一问题，我们引入了开回归深度，并论证了开回归深度的深度区域是可缩的；即使配置带有权重，这些论证也仍然成立。然而，对于处于一般位置的超平面排列，这些区域按定义是开集，因此并非紧集。此外，开回归深度不是超可加深度度量，因为它不满足条件（iii）。具体而言，如果 A 由单个超平面构成，那么开回归深度处处为 0，因此定理 20 证明中的基本情形不成立。不过，正如我们在引理 19 中所见，如果 $k \leq \lceil \frac{|A|}{d+1} \rceil$ 回归深度至少为k 的区域是可缩的。同样，相关论证在配置带有权重时也成立，这意味着如果 $k \leq w_{(A)\ d+1}$，那么回归深度至少为 k 的区域是可缩的。因此，定义一种新的测度——截断回归深度，其定义为

$$\mathrm{TRD}(A,q) := \min\left(\frac{w(A)}{d+1}, \mathrm{RD}(A,q)\right),$$

我们得到一种测度，其深度区域是闭且可缩的。显然，唯一的无界区域是包含配置中无界面的区域，我们可以通过与一个足够大的球求交使其变为紧集。最后，由于回归深度具有超可加性，截断回归深度也具有超可加性；根据定义，截断回归深度的上界为回归深度。因此，我们有如下结论：

引理 23. 截断回归深度是超平面配置的一种超可加深度测度，其深度区域是紧且可缩的。此外，对于每个配置A 和每个点 q，我们有 $TRD(A,q) \leq RD(A,q)$。

由此可知，根据定理 20，截断回归深度 TRD$(A,q) \geq {}^{w}{}_{(A)\,d+1}$ 总是存在一个点，并且这样的点也具有回归深度 RD$(A,q) \geq {}^{w}{}_{(A)\,d+1}$。

7 中心横截定理的回归深度版本

设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个超平面排列。假设原点不属于 A 中的任何超平面。设 L 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个 k 维线性子空间。那么 $A \cap L$ 是 L 中的一个超平面排列。特别地，我们可以再次研究欧几里得空间 L 中的点 $q \in L$ 相对于配置 $A \cap L$ 的深度。不过请注意， $A \cap L$ 的基数可能小于 A，因为 A 中的一些超平面可能与 L 平行。事实上，如果它们全都与 L 平行，那么 $A \cap L$ 为空。我们将 $q \in L$ 相对于 $A \cap L$ 的回归深度定义为：从 q 出发的 L 中任意射线所相交或平行的 A 中超平面的最小数量，并记为 RD$(A,\ q,\ L)$。特别地，如果 A 中的所有超平面都与 L 平行，那么对所有 $q \in L$，RD$(A,\ q,\ L) = |A|$。此定义也适用于开回归深度和截断回归深度，其中截断值为 $\lceil \frac{|A_i|}{k+1} \rceil$。

定理 24. 设 $1 \leq k \leq d$ 为整数， $A_1, \ldots, A_{d-k+1}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的 $d-k+1$ 有限超平面排列。那么存在一个 k 维线性子空间 L 和一个点 $q \in L$，使得对于每个 $i \in \{1, \ldots, d-k+1\}$， q 在 L 中的回归深度 $RD(A_i, q, L) \geq \lceil \frac{|A_i|}{k+1} \rceil$。

证明。我们将证明截断回归深度对应的结论，由于回归深度不小于截断回归深度，这便可推出该定理。考虑由所有 k 维子空间组成的格拉斯曼流形 $Gr_k(\mathbb{R}^d)$。设 γ_k^d 为 $Gr_k(\mathbb{R}^d)$ 上的典范丛，其全空间为 $E := \{(L, v) \mid v \in L\}$，投影 $\pi : E \to Gr_k(\mathbb{R}^d)$ 由 $\pi((L, v)) = L$ 给出。对于配置 A_i，令 $R_i(L)$ 为 L 中深度较大的点所组成的集合，即 $R_i(L) := \{v \in L \mid \text{TRD}(A_i, v, L) \geq \lceil \frac{|A_i|}{k+1} \rceil\}$。由引理 23 可知，每个 $R_i(L)$ 都是紧且可缩的。此外，当一个超平面 $h \in A_i$ 变得与 L 平行时，任意点的深度只会增加，因此对于 L 的小邻域中的任意 L'，都有 $R_i(L') \subseteq R_i(L)$。于是， R_i 是一个紧的可缩多截面。通过对每个 L 处的 $R_i(L)$ 关于原点作反射，定义负多截面 $-R_i$；对于每个 $i \in \{1, \ldots, d-k\}$，考虑 $Q_i := R_{d-k+1} - R_i$，它是在每个 L 上取 $R_{d-k+1}(L)$ 与 $-R_i(L)$ 的闵可夫斯基和而定义的。紧集与可缩集的闵可夫斯基和仍然紧且可缩，因此 Q_i 仍是一个紧的可缩多截面。特别地，根据引理 21，存在截面 s_i，其零点与 Q_i 的零点重合。命题 2（另见 [6], 引理 1）已证明， γ_k^d 上的任意 $d-k$ 个截面都必有公共零点，也就是说，存在一个子空间 L，使得 $s_1(L) = \ldots s_{d-k}(L) = 0$。根据截面 s_i 的定义，这意味着存在一个点 $q \in L$，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, d-k+1\}$ 都有 $q \in R_i(L)$。特别地，对于每个 $i \in \{1, \ldots, d-k+1\}$， $\geq \lceil \frac{|A_i|}{k+1} \rceil$ 在 L 中的 TRD$(A_i, q, L) \geq \lceil \frac{|A_i|}{k+1} \rceil$。

□

既然存在中心横截定理和 Tverberg 定理的回归深度版本，一个自然的问题是，是否存在对二者的推广。对于有限点族的情形，这仍是一个开放问题，因为 Tverberg 和 Vre´cica 在 1993 [29] 中提出了这一猜想。

猜想 2. 设 $1 \leq k \leq d$ 为整数，且 $A_1, \ldots, A_{d-k+1}$ 为 $d-k+1$ 中的有限超平面排列。假设对于每个 $i = 1, \ldots, d-k+1$，都有 $|A_i| = (k+1)(r_i - 1) + 1$，其中 r_i 为某个正整数。那么，存在一个 k 维子空间 L、一个点 $q \in L$，以及对每个 A_i 的划分，将其分成 r_i 个部分 $A_i^{(1)}, \ldots, A^{(r_i)\,i}$，使得

$$RD(A_i^{(j)}, q, L) \geq 1$$

对于每个 $i = 1, \ldots, d-k+1$, $j = 1, \ldots, r_i$。

对于点族的经典猜想具有类似的参数，但只有在所有 r_i 都是同一个素数的幂 p 且 pk 为偶数 [12]时才得到证实。

参考文献

[1] Nina Amenta、Marshall Bern、David Eppstein 和 S H Teng。回归深度与中心点。《离散与计算几何》，23(3):305–323，2000年。[2] Imre B´ar´any 和 Pablo Sober´on。Tverberg 定理问世50周年：综述。《美国数学会通报》，55(4):459–492，2018年。[3] Sergey Bereg、Ferran Hurtado、Mikio Kano、Matias Korman、Dolores Lara、Carlos Seara、Rodrigo I Silveira、Jorge Urrutia 和 Kevin Verbeek。平面上三色几何集合的平衡划分。《离散应用数学》，181:21–32，2015年1月。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X14004326, doi:10.1016/j.dam.2014.10.015。[4] G.E. Bredon。《拓扑与几何》。数学研究生教材。施普林格出版社，1993年。网址：https://books.google.ch/books?id=vsSjQgAACAAJ。[5]J. P. Carvalho 和 P. Sober´on。关于超平面彩色 Tverberg 猜想的反例。《匈牙利数学学报》，167(2):385–392，2022年。doi:10.1007/s10474-022-01249-8。[6] VL Dol'nikov。集合族的横截线及 Helly 定理与 Borsuk 定理之间的联系。俄罗斯科学院。《数学文集》，79(1):93，1994年。[7] Ruy Fabila-Monroy 和 Clemens Huemer。深度中的 Carath´eodory 定理。《离散与计算几何》，58(1):51–66，2017年。doi:10.1007/s00454-017-9893-8。[8] Radoslav Fulek、Andreas F. Holmsen 和 J´anos Pach。用射线相交凸集。《离散与计算几何》，42(3):343–358，2009年。doi:10.1007/s00454-009-9163-5。[9] Sariel Har-Peled 和 Timothy Zhou。改进的 Tverberg 划分近似算法。arXiv 预印本 arXiv:2007.08717，2020年。[10] Allen Hatcher。代数拓扑。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。网址：https://cds.cern.ch/record/478079。.[11] Eduard Helly。关于具有公共点的闭集系统。《数学月刊》，37:281–302，1930年。[12] Roman N. Karasev。Tverberg 横截线猜想与横截线不可嵌入定理的类比。《离散与计算几何》，38(3):513–525，2007年12月。doi:10.1007/s00454-007-1355-2。[13] Roman N. Karasev。关于中心点的对偶定理及其推广。《数学文集》，199(10):1459–1479，2008年。doi:10.1070/sm2008v199n10abeh003968。[14] Roman N. Karasev。用射线相交的 Tverberg 型定理。《离散与计算几何》，45(2):340–347，2011年。doi:10.1007/s00454-010-9294-8。[15]Roman N. Karasev 和 Benjamin Matschke。射影中心点定理与 Tverberg 定理。《离散与计算几何》，52(1):88–101，2014年。doi:10.1007/s00454-014-9602-9。[16] Seunghun Lee 和 Kangmin Yoo。关于 Karasev 猜想。《计算几何》，75:1–10，2018年。doi:10.1016/j.comgeo.2018.06.003。[17] Ivan Mizera。关于深度与深点：微积分。《统计年鉴》，30(6):1681–1736，2002年。

[18] J´anos Pach. 关于多色单形的 Tverberg 型结果。计算几何，10(2):71–76，1998年。doi:10.1016/s0925-7721(97)00022-9。[19] Richard Rado. 关于一般测度的定理。伦敦数学会数学期刊，s1-21(4):291–300，1946年。doi:10.1112/jlms/s1-21.4.291。[20] Edgardo Rold´an-Pensado 和 Pablo Sober´on。质量划分综述。美国数学会通报 *(新系列)*，59(2):227–267，2022年。doi:10.1090/bull/1725。[21] David Rolnick 和 Pablo Sober´on。基于中心点定理的 Tverberg 定理算法。*arXiv* 预印本 *arXiv:1601.03083*，2016年。[22] Jean-Pierre Roudneff。点划分为交集维数为 k的单形。第一部分：锥形 Tverberg 定理。欧洲组合数学期刊，22(5):733–743，2001年。[23] Peter J. Rousseeuw 和 Mia Hubert。超平面排列中的深度。《离散与计算几何》，22(2):167–176，1999年。[24]Peter J. Rousseeuw 和 Mia Hubert。回归深度。美国统计学会会刊，94(446):388–433，1999年。附讨论及作者与 Stefan Van Aelst 的回复。doi:10.2307/2670155。[25]Patrick Schnider。包围深度及其他深度度量。*arXiv* 预印本 *arXiv:2103.08421*，2021年。[26] Stephen Smale。关于同伦的 Vietoris 映射定理。美国数学会会刊，8(3):604–610，1957年。[27] John W. Tukey。数学与数据图示。载于国际数学家大会论文集，第523–531页，1975年。[28] Helge Tverberg。Radon 定理的推广。伦敦数学会数学期刊，41(1):123–128，1966年。[29]Helge Tverberg 和 Siniˇsa T. Vre´cica。Radon 定理和火腿三明治定理的推广。欧洲组合数学期刊，14(3):259–264，1993年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669883710292，doi:10.1006/eujc.1993.1029。[30] Marc van Kreveld、Joseph S. B. Mitchell、Peter Rousseeuw、Micha Sharir、Jack Snoeyink 和 Bettina Speckmann。最大回归深度的高效算法。离散计算几何，39(4):656–677，2008年。doi:10.1007/s00454-007-9046-6。[31] Rade T. ˇZivaljevi´c 和 Siniˇsa T Vre´cica。火腿三明治定理的推广。伦敦数学会通报，22(2):183–186，1990年。