arXiv:2302.07774v1 [math.AP] 15 Feb 2023

加权扭曲特征值的等周集

B. BRANDOLINI、A. HENROT、A. MERCALDO 和 M.R. POSTERARO

Abstract. 本文证明了加权算子的第一扭曲特征值 $\lambda_{1,\gamma}^T(\Omega)$ 的一个等周不等式。该特征值定义为通常瑞利商的最小值，其中试探函数属于加权 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega,\ d\gamma)$，且在 Ω 上的加权平均值为零。我们关注正测度 $d\gamma=\gamma(x)dx$，对于这些测度，我们能够确定等周集，即在给定加权测度的集合中，使 $\lambda_{1,\gamma}^T(\Omega)$ 最小的集合。在所考虑的情形中，最优集合由两个相同且互不相交的等周集副本构成（相对于加权测度的加权周长）。

1. 引言

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界的开子集。众所周知，在测度相同的集合中，经典狄利克雷拉普拉斯算子的第一特征值 $\lambda_1^D(\Omega)$ 在球上取最小值。也就是说，著名的 Faber-Krahn 不等式指出：

$$\lambda_1^D(\Omega)|\Omega|^{2/n}\geq\lambda_1^D(B)|B|^{2/n},$$

等号成立当且仅当 $\Omega=B$ 是一个球（除去零容量集）。众所周知，第一特征值 $\lambda_1^D(\Omega)$ 可通过变分方式刻画如下：

$$\lambda_1^D(\Omega)=\min\left\{\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla\phi|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega\phi^2\,dx}:\phi\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}.$$

因此，一个自然的问题随之而来：能否为定义在 $H^1(\Omega)$ 的子集、但不同于 $H_0^1(\Omega)$ 的拉普拉斯算子的第一特征值，推导出类似的下界？如果考虑由零均值 Sobolev 函数构成的 $H^1(\Omega)$ 子集，答案是否定的。事实上，众所周知，诺伊曼拉普拉斯算子的第一个非平凡特征值 $\lambda_1^N(\Omega)$（这里 Ω 必须足够光滑，例如满足 Lipschitz 条件）为：

$$\lambda_1^N(\Omega)=\min\left\{\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla\phi|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega\phi^2\,dx}:\phi\in H^1(\Omega)\setminus\{0\},\int_\Omega\phi\,dx=0\right\},$$

无法用 Ω 的测度给出下界估计，而且其最大值实际上由球取得。更确切地说，著名的 Szeg″o-Weinberger 不等式 ([35, 38]) 成立

$$\lambda_1^N(\Omega)|\Omega|^{2/n}\leq\lambda_1^N(B)|B|^{2/n},$$

当且仅当 $\Omega=B$ 是一个球时，等号成立。我们可以将零均值条件与另一种边界条件结合起来，从而期望得到一个依赖于测度的普适下界。这正是拉普拉斯算子扭曲特征值定义所做的事情；该定义最初是在 [4], 常平均曲率曲面的背景下引入的。在 [4] 中，作者考虑了以下极小化问题

$$\lambda_1^T(\Omega)=\min\left\{\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla\phi|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega\phi^2\,dx}:\phi\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\},\int_\Omega\phi\,dx=0\right\}.$$

或者等价地，以下问题的第一特征值

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,dx & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

由于拉普拉斯算子的平均值的存在，像 (1.1) 这样的问题通常称为非局部问题（另见 [6, 7, 9, 16, 17, 18, 21] 及其中的参考文献）。

在 [23]（另见 [25]）中，研究了在测度给定的集合中最小化 λ_1^T 的问题。作者证明了

$$\lambda_1^T(\Omega) \geq \lambda_1^T(B_1 \cup B_2), \tag{1.2}$$

其中 B_1 和 B_2 是两个不相交球，其测度为 $|\Omega|/2$。此外，当且仅当 $\Omega = B_1 \cup B_2$时，等号成立（对于正则 Ω）。

注 1.1. 由于对应于 $\lambda_1^T(\Omega)$ 的特征函数在 Ω 中变号，不等式 (1.2) 与狄利克雷拉普拉斯算子的第二特征值的 Krahn-Szeg˝o 不等式有诸多相似之处（例如参见 [26]）。

以上回顾的各个不等式并非都以球为基础。这是因为，对于勒贝格测度而言，球是等周集。

In 本文关注以下非局部加权特征值问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u) = \lambda\gamma(x)\,u - \gamma(x)\left(\dfrac{1}{|\Omega|_\gamma}\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u)\,dx\right) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $|\Omega|_\gamma = \int_\Omega \gamma(x)\,dx$ 是 Ω 的加权测度。我们关注“良好测度” $d\gamma = \gamma(x)dx$（定义见第 3 节），它使我们能够如下刻画第一个加权扭曲特征值 $\lambda_{1,\gamma}^T(\Omega)$

$$\lambda_{1,\gamma}^T(\Omega) = \inf\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi|^2\,d\gamma}{\displaystyle\int_\Omega \phi^2\,d\gamma} : \phi \in H_0^1(\Omega, d\gamma)\setminus\{0\}, \int_\Omega \phi\,d\gamma = 0 \right\}, \tag{1.4}$$

并证明以下结论

定理 1.1. 设 $d\gamma$ 为一种“良好测度”。则

$$\lambda_{1,\gamma}^T(\Omega) \geq \lambda_{1,\gamma}^T(\omega_1 \cup \omega_2), \tag{1.5}$$

其中 ω_1, ω_2 是两个互不相交的等周集（相对于测度$d\gamma = \gamma(x)\,dx$的加权周长），且满足 $|\omega_1|_\gamma = |\omega_2|_\gamma = \frac{|\Omega|_\gamma}{2}$。

本文组织如下。第 2 节介绍一些记号，第 3 节给出“良好测度”的定义，第 4 节讨论扭曲加权特征值和特征函数的一些基本性质。第 5 节则将如下问题：在加权测度给定的集合中使 $\lambda_{1,\gamma}^T$ 最小，化简为一个更简单的问题：在加权测度给定的、由两个互不相交的等周集组成的并集中使 $\lambda_{1,\gamma}^T$ 最小。第 6 节和第 7 节致力于在 $d\gamma = \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}dx$（高斯测度）和 $d\gamma = x_n^k dx$（幂型测度）这两种特殊情形下，完整证明定理 1.1。

2. Notation and preliminary results

设 γ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个正函数，并考虑测度 $d\gamma = \gamma(x)\,dx$。若 Ω 是一个局部有限周长集，则定义 Ω 的加权周长和加权测度如下

$$P_\gamma(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \gamma(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}, \qquad |\Omega|_\gamma = \int_\Omega \gamma(x)\,dx.$$

我们假设对每个 $m > 0$，加权等周问题都有解；也就是说，对于任意固定的正加权测度 $m > 0$，假设存在一个局部有限周长集 $\Omega^\sharp \subset \mathbb{R}^n$，使得 $|\Omega^\sharp|_\gamma = m$，并且

$$P_\gamma(\Omega^\sharp) = \min\{P_\gamma(A) : A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ of locally finite perimeter}, |A|_\gamma = m\}. \tag{2.1}$$

等价地，我们写作

$$P_\gamma(\Omega) \geq P_\gamma(\Omega^\sharp), \qquad |\Omega^\sharp|_\gamma = |\Omega|_\gamma. \tag{2.2}$$

我们称这样的集合 $\Omega^\sharp$ 为关于测度 $d\gamma$的等周集。

现在定义可测函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 的加权重排（例如，参见[15]）。若 u的分布函数 μ_u 满足

$$\mu_u(\theta) = |\{x \in \Omega : |u(x)| > \theta\}|_\gamma < \infty, \qquad \text{for every } \theta > 0,$$

我们将 u 的递减重排 u^* 定义为 μ_u的广义逆，即

$$u^*(s) = \inf\{\theta \geq 0 : \mu(\theta) \leq s\}, \qquad s \in (0, |\Omega|_\gamma].$$

通常称两个函数 u 和 v 等分布；或者等价地，若 u 和 v 具有相同的分布函数，即 $\mu_u = \mu_v$，则称 v 是 u的重排。

等周不等式 (2.2) 中等号成立情形的判定，引出了对 u 的一种特殊重排的定义，即加权重排 $u^\sharp$。它是唯一一个与 u 等分布、且其超水平集为等周集并具有与 u 的相应超水平集相同加权测度的函数。

Si因此，根据定义，u、u^* 和 $u^\sharp$ 等分布，卡瓦列里原理推出

$$\|u\|_{L^p(\Omega,d\gamma)} = \|u^*\|_{L^p(0,|\Omega|_\gamma)} = \|u^\sharp\|_{L^p(\Omega^\sharp,d\gamma)}, \qquad p \geq 1. \tag{2.3}$$

我们还需要以下哈代–利特尔伍德不等式。

引理 2.1. 设 u、v 为可测函数，且满足

$$\mu_u(\theta) < \infty, \qquad \mu_v(\theta) < \infty, \qquad \textit{for every } \theta > 0.$$

Then

$$\int_\Omega |u\,v|\,d\gamma \leq \int_0^{|\Omega|_\gamma} u^*(s)v^*(s)ds = \int_{\Omega^\sharp} u^\sharp\, v^\sharp d\gamma. \tag{2.4}$$

本文考虑满足如下条件的测度 $d\gamma$：关于 $d\gamma$ 的 P´olya-Szeg˝o 原理成立。为准确陈述该原理，我们回顾加权 Sobolev 空间的定义。

定义 2.1. 加权 Sobolev 空间 $H^1(\Omega\ d\gamma)$ 是由所有满足 $(\phi, |D\phi|) \in L^2(\Omega\ d\gamma) \times L^2(\Omega\ d\gamma)$ 的函数 $\phi \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ 构成的集合，并赋予范数

$$||\phi||_{H^1(\Omega,d\gamma)} = ||\phi||_{L^2(\Omega,d\gamma)} + ||D\phi||_{L^2(\Omega,d\gamma)}.$$

加权 Sobolev 空间 $H^1_0(\Omega\ d\gamma)$ 是 $C^\infty_0(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega\ d\gamma)$ 中的闭包。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有有限加权测度的开子集，并且 $u \in H^1_0(\Omega\ d\gamma)$。如果 $u^\sharp \in H^1_0(\Omega^\sharp, d\gamma)$ 且

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\gamma \geq \int_{\Omega^\sharp} |\nabla u^\sharp|^2 d\gamma. \tag{2.5}$$

此外，当且仅当 $u = u^\sharp$（模去初等变换）时，(2.5) 中的等号成立。

我们将处理一类测度，对于这类测度，加权等周不等式和 P´olya-Szeg˝o 原理均成立。在下一节中，我们将列举这类测度的一些例子。

3. Good measures

本节中，我们引入一类测度，称之为“良测度”，对于这类测度，定理 1.1 成立；同时，我们还给出一些属于该类的测度示例。下述主要性质（4）在于能够将两个等周集分离开来。

定义 3.1 。设 γ 是 $\mathbb{R}^n$上的正函数。若 $d\gamma = \gamma(x)dx$ 是良测度，则

(1) 等周问题 (2.1) 对任意 $m > 0$都有解；(2) 对于每个具有有限加权测度的开集 Ω，嵌入 $H_0^1(\Omega\ d\gamma) \hookrightarrow L^2(\Omega\ d\gamma)$ 是紧的；(3) 对于每个具有有限加权测度的开集 Ω，P´olya-Szeg˝o 原理 (2.5) 成立；(4) 对于每个具有有限加权测度的开集 Ω，以及任意满足 $m_1 + m_2 = |\Omega|_\gamma$ 的 m_1、$m_2 \geq 0$，存在两个等周集 ω_1、ω_2，使得 $|\omega_1| = m_1$、$|\omega_2| = m_2$ 以及 $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$。

3.1. 例 1. 令 $d\gamma = dx$, $x \in \mathbb{R}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中通常的勒贝格测度。显然，$d\gamma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的良测度。事实上，经典等周不等式成立，且球是等周集，从而保证条件 (1) 和 (4) 成立；经典索伯列夫嵌入定理成立，从而保证条件 (2) 成立；若 $u^\sharp$ 表示 u 的施瓦茨对称化函数，则经典的 P´olya-Szeg˝o 不等式成立（见 [20], [33]）。

3.2. 例 2. 令 $d\gamma = \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}\,dx$, $x \in \mathbb{R}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中通常的高斯测度，并将其归一化，使得 $\gamma(\mathbb{R}^n) = 1$。那么 $d\gamma$) 是 $\mathbb{R}^n$ 中的良测度。事实上，根据高斯测度的等周不等式（见 [5, 12, 22]），条件 (1) 和 (4) 得以满足，该不等式可表述如下。

定理 3.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个具有有限高斯周长的可测子集，且 $\Omega^\sharp$ 是半空间

$$\Omega^\sharp = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > a\},$$

其中 a 的取法使得 $|\Omega^\sharp|_\gamma = |\Omega|_\gamma$. 那么

$$P_\gamma(\Omega) \geq P_\gamma(\Omega^\sharp). \tag{3.1}$$

此外，当且仅当 $\Omega = \Omega^\sharp$（相差一个旋转）时，(3.1) 中等号成立。

注 3.1. 直接计算可得

$$a = k^{-1}(|\Omega|_\gamma),$$

其中 $k(t)$ 是函数

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \exp(-\sigma^2)d\sigma\,, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

此外，关于高斯测度，P´olya-Sz´eg˝o 原理同样成立，因此定义 3.1 中的条件 (3) 也满足。事实上，根据上一节给出的加权重u 排布定义，我们可以如下定义可测函数u :Ω $\to \mathbb{R}$, $u^\sharp$ 的重排

$$u^\sharp(x) = u^*(k(x_1)),\ x \in \Omega^\sharp,$$

其中 k 定义于(3.2)中。根据定义， $u^\sharp$ 的超水平集是半空间，因此 $u^\sharp$ 实际上仅依赖于一个变量（记为 x_1），并且关于该变量为递增函数。以下P´olya-Sz´eg˝o原理由 [12, 22, 36]证明。

定理3.2。设 $u \in H_0^1(\Omega\ d\gamma)$。则 $u^\sharp \in H_0^1(\Omega^\sharp, d\gamma)$且

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\gamma \geq \int_{\Omega^\sharp} |\nabla u^\sharp|^2 d\gamma.$$

此外，当且仅当$\Omega = \Omega^\sharp$ 且 $u = u^\sharp$时等号成立，其中允许相差一个旋转。

最终，定义 3.1 中的条件 (2) 也成立（例如，参见 [14]）。

3.3. 例 3. 在上半空间上，定义 $d\gamma = x_n^k\,dx$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$，其中 $x_n > 0$,$k > 0$。那么 $d\gamma$ 是 $\mathbb{R}^n$中的良测度。事实上，条件 (1) 和 (4) 可由下述加权等周不等式成立推出；该不等式在 $n = 2$ 时由 [31] 证明，而当$n > 2$ 时由 [8, 10] 证明（另见 [1, 2, 3]）。

定理 3.3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个具有有限加权周长的有界 Lipschitz 子集，且 $\Omega^\sharp$ 是一个以上半空间 $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ 中某个 x_0 为中心的上半球，即

$$\Omega^\sharp = B_r(x_0) \cap \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$

其中 $r > 0$ 的选取满足 $|\Omega^\sharp|_\gamma = |\Omega|_\gamma$. 那么

$$P_\gamma(\Omega) \geq P_\gamma(\Omega^\sharp). \tag{3.3}$$

此外，当且仅当 $\Omega = \Omega^\sharp$（相差一个平移）时，式 (3.3) 中等号成立。

关于测度 $d\gamma$ ，P´olya-Sz´eg˝o 型原理也成立（见 [36]），因此定义 3.1 中的条件 (3) 成立。事实上，根据上一节给出的加权重排定义，对于任意可测函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ，我们可以定义其关于测度 $d\gamma$ 的重排 $u^\sharp$ ：该重排的超水平集是上半球，且其加权测度与 u 对应超水平集的加权测度相同。根据定义， $u^\sharp$ 实际上是径向函数，仅依赖变量 $r = |x - x_0|$，并且关于 r 单调递减。

定理 3.4. 设 $u \in H^1(\Omega\ d\gamma)$。则 $u^\sharp \in H_0^1(\Omega^\sharp, d\gamma)$，并且

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\gamma \geq \int_{\Omega^\sharp} |\nabla u^\sharp|^2 d\gamma.$$

此外，当且仅当 $u = u^\sharp$（模去一个平移）时，等号成立。

最后，定义 3.1 的条件 (2) 也得到满足（例如参见 [8]）。

3.4. 反例。测度 $d\delta_1(x) = e^{|x|^2}dx$ 或 $d\delta_2(x) = x_n^k\, e^{|x|^2}dx$，其中 $x_n > 0$ 和$k > 0$，不是良好测度，因为它们不满足定义 3.1 中的条件 (4)。事实上，相对于测度 $d\delta_1$ 的等周集是原点周围的同心球，而相对于测度 $d\delta_2$ 的等周集则是包含在上半空间 $\{x \in \mathbb{R}^n$ 中的、以原点为中心的同心半球： $x_n > 0\}$（参见 [11, 13, 24, 34]）。

4. Basic properties of weighted twisted eigenvalues and eigenfunctions

本节证明关于良测度的加权扭曲特征值的一些性质。我们先介绍一些经典性质，其证明采用标准论证。为求完整起见，我们在此重述这些性质。

命题 4.1. 假设 $d\gamma$ 是一个良测度。那么问题 (1.4) 在 $u \in H_0^1(\Omega\ d\gamma)$ 中存在一个极小值点。

Proof. 设 $\{\phi_m\}_m$ 为一个极小化序列，并且不失一般性地假设，

$$\int_\Omega |\phi_m|^2\, d\gamma = 1\,, \qquad \int_\Omega \phi_m\, d\gamma = 0. \tag{4.1}$$

因此， $\{\phi_m\}_m$在 $H_0^1(\Omega\ d\gamma)$ 中有界。由嵌入 $H_0^1(\Omega\ d\gamma) \hookrightarrow L^2(\Omega\ d\gamma)$ 的紧性，存在一个函数 $u \in H_0^1(\Omega\ d\gamma)$，使得

$$\begin{aligned} &\phi_m \rightharpoonup u \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega, d\gamma), \\ &\phi_m \to u \quad \text{strongly in } L^2(\Omega, d\gamma) \text{ and a.e.} \end{aligned}$$

由 (4.1) 我们立即推得 $\int_\Omega u^2\, d\gamma = 1$ 和 $\int_\Omega u\, d\gamma = 0$，而根据巴拿赫-斯坦豪斯定理，我们得到

$$\liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega |\nabla \phi_m|^2\, d\gamma \geq \int_\Omega |\nabla u|^2\, d\gamma,$$

即

$$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\gamma.$$

□

我们继续明确指出，$\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega)$ 关于集合的包含关系单调递减（将测试函数延拓为零即可得到测试空间之间的包含关系）。

命题 4 .2. 设 $d\gamma$ 是一个良测度，并令 $m > 0$。若 Ω 是问题的一个最优集合

$$\min\left\{\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) :\ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \ open, |\Omega|_\gamma = m\right\}, \tag{4.2}$$

且 Ω 不连通，则以下性质成立：

(i) 与 $\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega)$ 对应的特征函数 $\tilde{u}$ 不能在 Ω 的任何连通分支上恒为零；(ii) 若 Ω 有两个连通分支，则 $\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega)$ 是单的。

证明。(i) 反设 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$ ，其中 $\Omega_1,\Omega_2 \neq \emptyset$，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$，且 $\tilde{u} = 0$ 在 Ω_1上。令 $t > 1$，使得 $|t\Omega_2|_\gamma = |\Omega|_\gamma$。因此

$$\lambda^T_{1,\gamma}(t\,\tilde{\Omega}_2) < \lambda^T_{1,\gamma}(\tilde{\Omega}_2) = \lambda^T_{1,\gamma}(\tilde{\Omega}),$$

这显然矛盾，因为 Ω 是问题 (4.2) 的最优集合。

(ii) 该断言是 (i) 的推论。事实上，Ω 的两个连通分支与任一特征函数的节点域重合。因此，两个非零特征函数不可能正交。□

注 4.1。我们强调，一般而言，$\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega)$ 可能是多重的。例如，若 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘，且 $d\gamma = dx$, $\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega)$ 是二重的（见 [4]）。这说明球并非最优集合。

以下结果涉及问题 (4.2) 的最优集合 Ω 的第一个加权扭曲特征值所对应的特征函数在边界上的行为。其证明基于如下事实：$\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega)$ 是单的，以及标准的区域导数论证（例如，见 [27]）。

命题 4.3。假设问题 (4.2) 的最优集合 Ω 是光滑的。记 $\tilde{u}$ 为对应于 $\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega)$ 的一个特征函数，则存在一个正常数 μ 使得

$$|\nabla \tilde{u}|^2 = \mu \ on \ \partial\tilde{\Omega}.$$

证明。我们来写出加权扭曲特征值的导数公式。我们将通过形式计算得到该公式。关于其严格证明——这将涉及隐函数定理以及 Fredholm择一定理——我们请感兴趣的读者参阅 [27, 第 257–262] 页。

我们假设给定一个开集 Ω 和一个映射族 $\Phi(t)$ satisfyin g

$$\Phi : t \in [0,T) \to W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ differentiable at } 0 \text{ with } \Phi(0) = I, \Phi'(0) = V,$$

其中 V是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的光滑向量场。我们记 $u_t \in H^1_0(\Omega_t, d\gamma)$ 为对应于 $\lambda^T_{1,\,\gamma}(\Omega_t)$ 的特征函数，并将其归一化使得

$$\int_{\Omega_t} u_t \, d\gamma = 0 \quad \text{and} \quad \int_{\Omega_t} u_t^2 \, d\gamma = 1. \tag{4.3}$$

我们分别用 u' 和 $(\lambda^T_{1,\gamma})'$ 表示 $t \to u_t$ 和 $t \to \lambda^T_{1,\gamma}(\Omega_t)$ 在 0 处的导数。(1.3) 和 (4.3) 的求导得到

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u') = (\lambda^T_{1,\gamma})'\gamma(x)u + \lambda^T_{1,\gamma}u' - c' & \text{in } \Omega \\ u' = -\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, V \cdot \mathbf{n} & \text{on } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u' \, d\gamma = 0, \quad \int_\Omega u\, u' d\gamma = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 n 表示 $\partial\Omega$ 的外单位法向量。将 (4.4) 中的方程乘以 u 并分部积分，可得

$$(\lambda^T_{1,\gamma})'(\Omega) = -\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 V\cdot\mathbf{n}\,\gamma(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{4.5}$$

由于 $\tilde{\Omega}$ 是一个光滑最优集，因此在体积约束下，它是函数 $t\to\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega_t)$ 的临界点。因此

$$\int_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)^2-\mu\right]V\cdot\mathbf{n}\,\gamma(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}=0,$$

对于任意光滑的 向量场 V，其中 μ 为拉格朗日乘子。由此可立即得出所述结论 . □

注4.2。注意，我们可以直接对 $\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega_t)=\int_{\Omega_t}|\nabla u_t|^2\,d\gamma$ 求导，并施加约束$\int_{\Omega_t}u_t\,d\gamma=0$ 和归一化条件 $\int_{\Omega_t}u_t^2\,d\gamma=1$。

现在来考虑下述加权狄利克雷问题的第一特征值 $\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega)$

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u)=\lambda\gamma(x)\,u & \text{in }\Omega\\ u=0 & \text{on }\partial\Omega,\end{cases} \tag{4.6}$$

也就是说

$$\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega)=\min\left\{\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla\psi|^2\,d\gamma}{\displaystyle\int_\Omega\psi^2\,d\gamma}\ :\ \psi\in H^1_0(\Omega,\gamma)\,,\ \psi\neq0\right\}.$$

以下结果可以通过改编 [23] 中的证明轻易得出（另见 [26]）。

命题4.4. 正数 λ 是加权扭曲问题和加权狄利克雷问题（分别为 (1.3) 和 (4.6)）的特征值，当且仅当存在一个对应的特征函数u ，它满足狄利克雷问题，且

$$\int_\Omega u\,d\gamma=0.$$

我们注意到，若 u 是集合 Ω 的一个加权狄利克雷特征函数，那么它也是 Ω 被其划分成的任一节点域上的特征函数，且特征值相同。当然，对于加权扭曲问题，并无与此对应的结果。不过，可以将第一加权扭曲特征值与其节点域的第一加权狄利克雷特征值联系起来。

命题 4.5. 设 $\lambda^T_{1,\ \gamma}(\Omega)$ 为加权扭曲问题 (1.3) 的第一特征值，并记 u为一个对应的特征函数。则 u 恰有两个节点域。此外，记

$$\Omega_+=\{x\in\Omega:u(x)>0\},\qquad \Omega_-=\{x\in\Omega:u(x)<0\} \tag{4.7}$$

其节点域，我们有

$$\min\{\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega_-),\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega_+)\}\le\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega)\le\max\{\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega_-),\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega_+)\}.$$

证明。通过对应用于扭曲问题的 Courant 节点域定理作一变式，任何与第一特征值对应的特征函数恰有两个节点域（见 [4]）。然后，证明过程与 [23] 中相同。□

采用与 [23] 中类似的论证（另见 [26]），我们可以证明以下结论

推论 4.1。采用命题 4.5 中的相同记号，若以 $\lambda^D_{2,\gamma}(\Omega)$ 表示 Ω 的第二加权 Dirichlet 特征值，则我们有

$$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega)=\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega_+)$$

当且仅当，

$$\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega_+)=\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega_-)=\lambda^D_{2,\gamma}(\Omega).$$

综合以上所有考虑，我们可以轻易地推导出

$$\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega)<\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega)\le\lambda^D_{2,\gamma}(\Omega).$$

注 4.3。实际上，正如 [4]，中所示，狄利克雷特征值与扭曲特征值相互交织，也就是说

$$\lambda^D_{1,\gamma}(\Omega) < \lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) \le \lambda^D_{2,\gamma}(\Omega) \le \lambda^T_{2,\gamma}(\Omega) \le \lambda^D_{3,\gamma}(\Omega) \le \dots$$

5. A general result for good measures

本节的主要结果由定理 5.1 给出。该定理指出，将一般开集 Ω 替换为两个互不相交的等周集的并（其加权测度与对应于$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega)$ 的特征函数的节点集相同）时，第一加权扭曲特征值 $\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega)$ 会减小。这意味着，问题 (4.2) 的最优集合应在两个互不相交的等周集之并中寻找，且其测度与初始集合相同。

为证明下文的定理 5.1，我们用 u 表示对应于 $\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega)$ 的一个特征函数，并考虑式 (4.7) 中定义的节点域。因此，以下恒等式成立

$$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) = \frac{\displaystyle\int_{\Omega_+} |\nabla u|^2\, d\gamma + \int_{\Omega_-} |\nabla u|^2\, d\gamma}{\displaystyle\int_{\Omega_+} u^2 d\gamma + \int_{\Omega_-} u^2 d\gamma}.$$

定理 5.1. 设 ω_- 和 ω_+ 是两个互不相交的等周集（相对于加权测度的加权周长），且满足 $|\omega_+|_\gamma = |\Omega_+|_\gamma$ 和 $|\omega_-|_\gamma = |\Omega_-|_\gamma$。那么

$$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) \ge \lambda^T_{1,\gamma}(\omega_+ \cup \omega_-). \tag{5.1}$$

证明. 考虑 $u_\pm$的加权重排 $u^\sharp_\pm$ 。利用 P´olya-Szeg˝o 原理 (2.5) 和等式 (2.3)，容易验证

$$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) \ge \frac{\displaystyle\int_{\omega_+} |\nabla u^\sharp_+|^2\, d\gamma + \int_{\omega_-} |\nabla u^\sharp_-|^2\, d\gamma}{\displaystyle\int_{\omega_+} |u^\sharp_+|^2\, d\gamma + \int_{\omega_-} |u^\sharp_-|^2\, d\gamma} \tag{5.2}$$

and

$$\int_{\omega_+} u^\sharp_+\, d\gamma - \int_{\omega_-} u^\sharp_-\, d\gamma = \int_{\Omega_+} u_+\, d\gamma - \int_{\Omega_-} u_-\, d\gamma = \int_\Omega u\, d\gamma = 0\,. \tag{5.3}$$

由 (5.2) 和 (5.3) 立即可得

$$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) \ge \lambda^*_\gamma,$$

with

$$\lambda^*_\gamma = \inf\left\{ \frac{\displaystyle\int_{\omega_+} |\nabla f|^2\, d\gamma + \int_{\omega_+} |\nabla g|^2\, d\gamma}{\displaystyle\int_{\omega_+} f^2\, d\gamma + \int_{\omega_+} g^2\, d\gamma} \;:\; f \in H^1_0(\omega_+, d\gamma),\, g \in H^1_0(\omega_-, d\gamma),\, \int_{\omega_+} f\, d\gamma = \int_{\omega_-} g\, d\gamma \right\}. \tag{5.4}$$

我们强调，利用经典的变分法，可以证明在 λ^*_γ 的定义中，下确界可由一对函数 (f_+, f_-) 取得。考虑到条件 $\int_{\omega_-} g\, d\gamma - \int_{\omega_+} f\, d\gamma = 0$， $f_\pm$ 满足的欧拉-拉格朗日方程可写为

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_+} \nabla f_+ \cdot \nabla \phi\, d\gamma + \int_{\omega_-} \nabla f_- \cdot \nabla \psi\, d\gamma - \lambda^*_\gamma \left(\int_{\omega_+} f_+ \phi\, d\gamma + \int_{\omega_-} f_- \phi\, d\gamma \right) = \\ &= \mu_0 \left(\int_{\omega_-} \psi\, d\gamma - \int_{\omega_+} \phi\, d\gamma \right), \quad \phi \in H^1_0(\omega_+, d\gamma), \psi \in H^1_0(\omega_-, d\gamma), \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 μ_0 是一个拉格朗日乘子；根据问题的齐次性，我们假设

$$\int_{\omega_+} f_+^2 \, d\gamma + \int_{\omega_-} f_-^2 \, d\gamma = 1 \, .$$

首先在 (5.5) 中取 $\psi = 0$，然后取 $\phi = 0$。由此可得，$f_\pm$ 分别满足

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Big(\gamma(x)\nabla f_+\Big) = \lambda^*_\gamma \, \gamma(x) \, f_+ - \mu_0 \, \gamma(x) & \text{in } \omega_+ \\ f_+ = 0 & \text{on } \partial\omega_+ \, , \end{cases} \tag{5.6}$$

and

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Big(\gamma(x)\nabla f_-\Big) = \lambda^*_\gamma \, \gamma(x) \, f_- + \mu_0 \, \gamma(x) & \text{in } \omega_- \\ f_- = 0 & \text{on } \partial\omega_- \, . \end{cases} \tag{5.7}$$

对 ω_+ 上的方程（5.6）以及 ω_- 上的方程（5.7）进行积分。将所得积分关系相减，可得

$$-\int_{\omega_+} \operatorname{div}\left(\gamma(x)\nabla f_+\right) \, dx + \int_{\omega_-} \operatorname{div}\left(\gamma(x)\nabla f_-\right) \, dx = -\mu_0 \left(|\omega_+|_\gamma + |\omega_-|_\gamma\right) = -\mu_0 |\Omega|_\gamma .$$

我们推得

$$\mu_0 = \frac{1}{|\Omega|_\gamma} \int_{\omega_+ \cup \omega_-} \operatorname{div}\left(\gamma(x)\nabla w\right) \, dx,$$

其中

$$w = \begin{cases} f_+ & \text{in } \omega_+ \\ -f_- & \text{in } \omega_- . \end{cases}$$

这意味着 w 是以下特征值问题的解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\gamma(x)\nabla w\right) = \lambda^*_\gamma \, \gamma(x) \, w - \gamma(x) \left(\dfrac{1}{|\Omega|_\gamma} \displaystyle\int_{\omega_+ \cup \omega_-} \operatorname{div}\left(\gamma(x)\nabla w\right) \, dx \right) & \text{in } \omega_+ \cup \omega_- \\ w = 0 & \text{on } \partial\left(\omega_+ \cup \omega_-\right) , \end{cases}$$

or，换言之，λ^*_γ 是集合 $\omega_+ \cup \omega_-$ 的加权扭曲特征值。因此

$$\lambda^T_{1,\gamma}(\Omega) \geq \lambda^*_\gamma \geq \lambda^T_{1,\gamma}(\omega_+ \cup \omega_-)$$

结论得证。 □

推论 5.1。假设加权测度的等周集构成一个区域的单参数族，并且加权扭曲特征值关于该参数连续。~ 那么，对于每个 $m > 0$，形状优化问题 (4.2) 都有一个解 Ω。

证明。定理 5.1 表明，为了解决形状优化问题，只需考察~两个互不相交的等周集的并。于是，根据连续性假设（以及特征值的有界性），最优集合 Ω 的存在性立即得到。□

6. Proof of Theorem 1.1: the Gaussian measure

在本节中，我们假设 $\gamma(x) = \pi^{-n/2} e^{-|x|^2}$。正如第 3 节所指出的，$d\gamma$ 是良测度，等周集是半空间。

在证明定理 1.1 之前，我们先回顾厄米函数的几个性质，这些性质将在后文中用到（例如，参见 [30, 第 4 章和 10]）。

6.1. 厄米函数。考虑微分方程

$$y'' - 2\,ty' + 2\,\nu y = 0. \tag{6.1}$$

若 $\nu = n \in \mathbb{N}_0$，则它由 n 次厄米多项式满足，即

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n(e^{-t^2})}{dt^n}.$$

例如，

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t, ...$$

因此，当 ν 是任意参数时，将方程 (6.1) 的解称为厄米函数是很自然的。厄米函数可以用合流超几何函数$\Phi(\alpha, \beta; t)$ 表示如下

$$y = A\Phi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; t^2\right) + Bt\Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; t^2\right).$$

特别地，取常数 A 和 B 为

$$A = \frac{2^\nu\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad B = \frac{2^\nu\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)},$$

我们得到解

$$y = H_\nu(t) = \frac{2^\nu\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}\Phi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; t^2\right) + \frac{2^\nu\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}t\Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; t^2\right),$$

称为次数为 ν 的厄米函数。

若 $\nu = n \in \mathbb{N}_0$，容易验证 $H_\nu(t)$ 可化为次数为 n 的厄米多项式。

若 $\nu \notin \mathbb{N}_0$，方程 (6.1) 的通解可用厄米函数表示。事实上，由于将 t 替换为 $-t$ 不会改变方程 (6.1)，因此函数 $H_\nu(t)$ 和 $H_\nu(-t)$ 都满足该方程。此外，它们的朗斯基行列式等于

$$W(H_\nu(t), H_\nu(-t)) = \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{t^2},$$

并且它恒不为零。因此，若 $\nu \notin \mathbb{N}_0$，解 $H_\nu(t)$ 和 $H_\nu(-t)$ 线性无关，方程 (6.1) 的通解可写为

$$y(t) = MH_\nu(t) + NH_\nu(-t), \quad M, N \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

显然，以下类型的非齐次方程的通解

$$y'' - 2\,ty' + 2\,\nu y = c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

具有如下形式

$$y(t) = MH_\nu(t) + NH_\nu(-t) + \frac{c}{2\nu}, \quad M, N \in \mathbb{R}.$$

遗憾的是，如果 $\nu = n \in \mathbb{N}_0$, $W(H_\nu(t)\ H_\nu(-t)) = 0$，那么 $H_\nu(t)$ 和 $H_\nu(-t)$ 线性相关。事实上，

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t).$$

因此，(6.2) 不再是 (6.1) 的通解。对于任意自然数 ν，可以证明，(6.1) 的通解可以写成以下两种等价形式之一：

$$y(t) = MH_\nu(t) + Ne^{t^2}H_{-\nu-1}(it) = PH_\nu(t) + Qe^{t^2}H_{-\nu-1}(-it), \quad M, N, P, Q \in \mathbb{R}.$$

当 t 为较大的正数且 ν 任意时，厄米函数的行为由以下恒等式描述

$$H_\nu(\pm t) = \pm(2|t|)^\nu \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(-\nu)_{2k}}{k!}(2t)^{-2k} + O\left(|t|^{-2N-2}\right)\right], \tag{6.3}$$

其中 $(-\nu)_{2k} = (-\nu)(-\nu-1)\cdots(-\nu-2k+1)$。此外，以下递推关系成立

$$H'_\nu(t) = 2\nu H_{\nu-1}(t). \tag{6.4}$$

众所周知，如果 $0 < \nu < 1$，则 $H_\nu(t)$ 没有正零点；而如果$2m-1 < \nu < 2m+1$, $m \geq 1$，则有 m 个正零点。对于厄米多项式这一特殊情形，即 $\nu = n \in \mathbb{N}$, $H_n(t)$ 在区间 $\left[-2\sqrt{\frac{n+1}{2}}, 2\sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]$ 内有 n个零点（例如参见 [19]）。

在 [28] 中，证明了以下Turan型不等式成立

$$H_\nu(t)^2 - H_{\nu-1}(t)H_{\nu+1}(t) > 0, \quad t > h_{1,\nu}, \tag{6.5}$$

其中$h_{1,\ \nu}$ 是 $H_\nu(t)$最左边的零点。

6.2. 定理 1.1 的证明。由定理 5.1，不等式(5)对于 ω_+、ω_- 半空间成立。因此，为了完成定理 1.1 的证明，还需证明两个对称半空间的并集（因而具有相同的高斯测度）在$\lambda_1^T,\ \gamma$ 中取得可能的最小值，该类为

$$\mathcal{H} = \{H_\ell \cup H_r \subset \mathbb{R}^n : \ |H_\ell|_\gamma \leq |H_r|_\gamma, \ |H_\ell \cup H_r|_\gamma = |\Omega|_\gamma\},$$

其中

$$H_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 < -\ell\}, \qquad H_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 > r\}.$$

˜设Ω为由推论 5.1 保证存在的最优集合。记

$$\tilde{\Omega} = H_L \cup H_R,$$

˜对于某些 $L, R > 0$。我们证明，当 $R = L$ 时 Ω 即为所给区域。反设 $R < L$。我们断言，存在一个对应于 $\lambda_{1,\gamma}^T$(˜Ω) 的特征函数 u，它不满足命题 4.3。

我们将证明分为三个步骤。

˜步骤 1。特征函数 u。考虑如下在 Ω 中定义的函数，

$$u = \begin{cases} u_L = A\left(H_\nu(-x_1) - H_\nu(L)\right), & x_1 < -L \\ \\ u_R = B\left(H_\nu(R) - H_\nu(x_1)\right), & x_1 > R, \end{cases} \tag{6.6}$$

其中 $2\nu = \lambda_{1,\gamma}^T(H_L \cup H_R)$。这个函数 u 是 Ω $=$ ˜Ω 时问题 (1.3) 的特征函数。事实上，根据定理 5.1，u_L 和 u_R 是相对于高斯测度的重排函数，也就是说，它们仅依赖于变量 x_1。此外，u_L 和 u_R 分别满足以下边值问题

$$\begin{cases} y'' - 2\,x_1\,y' + \lambda_{1,\gamma}^T(H_L \cup H_R)y = c \quad \text{if } x < -L \\ \\ y \in H_0^1\left((-\infty, -L); d\gamma_1\right), \end{cases} \tag{6.7}$$

and

$$\begin{cases} y'' - 2\,x_1\,y' + \lambda_{1,\gamma}^T(H_L \cup H_R)y = c \quad \text{if } x > R \\ \\ y \in H_0^1\left((R, +\infty); d\gamma_1\right), \end{cases} \tag{6.8}$$

其中 $d\gamma_1 = e^{-x_1^2}/\sqrt{\pi}\,dx_1$，而 c 是一个先验未知的常数，对应于项 $|^{\,1}{}_{\Omega|\gamma} \int_\Omega \mathrm{div}\,(\gamma(x)\nabla u)\ dx$。此外，由于在此情形下 Courant定理的一个变体对节点域仍然成立，u_L 在 H_L 中为正，而 u_R 在 H_R 中为负。

步骤 2。常数 c。在这一步中，我们给出常数 c 的显式表达式；该表达式在问题 (6.7) 和 (6.8) 中相同，由此得到

$$AH_\nu(L) + BH_\nu(R) = 0. \tag{6.9}$$

事实上，如果我们对 (6.6) 中的表达式求导，计算出 u_L' 和 u_L''，然后利用 (6.1) 将它们代入方程 (6.7)，便可推出

$$c = -2\nu A H_\nu(L). \tag{6.10}$$

同理，我们计算出 u_R' 和 u_R''，将它们代入（6.8）中的方程，并利用（6.1），得到

$$c = 2\nu B H_\nu(R). \tag{6.11}$$

结合（6.10）和（6.11），可得（6.9）。
步骤 3。结论。我们证明 $u'(R)^2-u'(L)^2>0$，这与命题 4.3 中所述的最优性条件相矛盾。

结合 (6.6) 和 (6.9) 可得

$$u'(R)^2-u'(L)^2=B^2H'_\nu(R)^2-A^2H'_\nu(L)^2=A^2H_\nu(L)^2\left[\left(\frac{H'_\nu(R)}{H_\nu(R)}\right)^2-\left(\frac{H'_\nu(L)}{H_\nu(L)}\right)^2\right]. \tag{6.12}$$

现在将递推关系 (6.4) 应用于 (6.12)，得到

$$u'(R)^2-u'(L)^2=4\nu^2A^2H_\nu(L)^2\left[\left(\frac{H_{\nu-1}(R)}{H_\nu(R)}\right)^2-\left(\frac{H_{\nu-1}(L)}{H_\nu(L)}\right)^2\right].$$

记

$$\psi_\nu(x_1)=\frac{H_{\nu-1}(x_1)}{H_\nu(x_1)},\qquad x_1>R.$$

函数 $\psi_\nu(x_1)$ 是良定义的，因为正如第 6.1 小节中所述，厄米函数 H_ν 有限个零点，并且由于 u_R 在半空间 H_R 中为负， R 大于 H_ν 的最大零点。

M此外， $\psi_\nu(x_1)$关于 $[R,+\infty[$严格递减。事实上，利用 (6.4)，我们可以计算 e

$$\psi'_\nu(x_1)=\frac{H'_{\nu-1}(x_1)H_\nu(x_1)-H_{\nu-1}(x_1)H'_\nu(x_1)}{H_\nu(x_1)^2}=\frac{2(\nu-1)H_{\nu-2}(x_1)H_\nu(x_1)-2\nu H_{\nu-1}(x_1)^2}{H_\nu(x_1)^2}.$$

如果 $\nu-1<0$，我们立即得到 $\psi'_\nu(x_1)<0$。如果 $\nu-1>0$，我们可以利用图兰不等式 (6.5)，并得出相同的结论。另一方面，由于根据 (6.3)，当 $x_1\to+\infty$时， $H_\nu(x_1)\sim x_1^\nu$ ，当 $x_1\to+\infty$时，$\psi_\nu(x_1)\to0$，因此 $\psi_\nu(x_1)$严格为正。因此，下列不等式成立

$$u'(R)^2-u'(L)^2=4\nu^2\alpha^2H_\nu(L)^2\left(\psi_\nu(R)^2-\psi_\nu(L)^2\right)>0\,,$$

˜，由此得到矛盾。因此，最优集合 Ω 与两个具有相同高斯测度的对称半空间之并重合，且 (1.5) 成立。

7. Proof of Theorem 1.1: the power-like measure

本节中，我们假设 $\gamma(x)=x_n^k$, $k>0$, $x_n>0$。如第 3 节所指出的， $d\gamma$ 是良测度，而包含于上半空间 $\{x\in\mathbb{R}^n:\ x_n>0\}$且以某点 $x_0\in\{x\in\mathbb{R}^n:\ x_n=0\}$为中心的半球是等周集。

在证明定理 1.1 之前，我们先回顾贝塞尔函数的一些性质，这些性质将在下文中用到（例如，参见 [32], [37]）。

7.1. 贝塞尔函数。考虑微分方程

$$r^2y''+ry'+(r^2-\alpha^2)y=0,\quad \alpha\in\mathbb{R},r\in\mathbb{R}. \tag{7.1}$$

众所周知，该方程的解为一阶和二阶贝塞尔函数 J_α、 Y_α ，其阶数为 α 。对于任意 α，J_α、 Y_α 都是线性无关的。此外，以下关系成立（当 α 不是整数时）

$$Y_\alpha(r)=\frac{J_\alpha(r)\cos(\alpha\pi)-J_{-\alpha}(r)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{7.2}$$

并且，当 α 为整数时，右侧替换为其极限值。此外，J_α 满足以下基本递推关系

$$rJ'_\alpha(r)-\alpha J_\alpha(r)=-rJ_{\alpha+1}(r),\qquad r\in\mathbb{R}. \tag{7.3}$$

若分别用 $j_{\alpha,h},j'_{\alpha,h}$ 表示 J_α,J'_α 的零点，则

$$\alpha\le j'_{\alpha,1}<j_{\alpha,1}<j'_{\alpha,2}<\dots.$$

and

$$j_{\alpha,1}<j_{\alpha+1,1}<j_{\alpha,2}<\dots.$$

此外，在 [32] 中可以找到以下恒等式

$$
\begin{aligned}
J_\alpha(r) &= \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{j_{\alpha,h}^2}\right), \quad \alpha \geq 0 \\
J'_\alpha(r) &= \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{(j'_{\alpha,h})^2}\right), \quad \alpha > 0.
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

7.2. 定理 1.1 的证明。由定理 5.1，不等式 (5) 对包含在上半空间 $\{x \in \mathbb{R}^n$ 内、以超平面 $\{x_n = 0\}$ 为中心的 ω_+, ω_- 半球成立： $x_n > 0\}$。因此，为完成定理 1.1 的证明，只需证明：在满足 $\{x \in \mathbb{R}^n :$ $x_n > 0\}$、包含于上半空间、以超平面 $\{x_n = 0\}$ 为中心且加权测度相同的两个互不相交半球的并集中，$\lambda_{1,\gamma}^T$ 取得可能的最小值的那一类

$$
\mathcal{B} = \{B_L \cup B_R \subset \mathbb{R}^n : \, |B_L|_\gamma \geq |B_R|_\gamma, \, |B_L \cup B_R|_\gamma = |\Omega|_\gamma\},
$$

with

$$
B_L = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0 : \, ||x - O_L|| < L\}, \quad B_R = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0 : \, ||x - O_R|| < R\},
$$

为 $||O_L - O_R|| > L + R$。我们将证明分为三个步骤。

步骤 1. 特征函数。设 u 是对应于 $\lambda_{1,\gamma}^T(B_L \cup B_R)$ 的一个特征函数，它在两个半球上均不为零。记

$$
u = \begin{cases} u_L & \text{in } B_L \\ u_R & \text{in } B_R. \end{cases}
$$

与高斯测度的情形一样，不失一般性，我们可以假设 $u_L > 0$属于 B_L，$u_R < 0$ 属于 B_R，且 u_L、u_R 是径向对称的。于是， u_L 和 u_R 分别满足以下边值问题

$$
\begin{cases} ry'' + (n+k-1)y' + \lambda^2 ry = cr & \text{if } r \in (0, L) \\ y \in H_0^1(B_L, d\gamma) \end{cases} \tag{7.5}
$$

and

$$
\begin{cases} ry'' + (n+k-1)y' + \lambda^2 ry = cr & \text{if } r \in (0, R) \\ y \in H_0^1(B_R, d\gamma), \end{cases} \tag{7.6}
$$

其中 $y(r) = y(|x - x_0|)$， $r = |x - x_0|$、 c 是常数，其值事先未知，对应于项 $\frac{1}{|\Omega|_\gamma} \int_\Omega \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u)$ dx 和 $\lambda^2 = \lambda_{1,\gamma}^T(B_L \cup B_R)$。

考虑到第 7.1 小节中回顾的贝塞尔函数的性质，方程 (7.5) 和 (7.6) 中都出现的方程，其通解为

$$
y(r) = r^\alpha \left(c_1 J_\alpha(\lambda r) + c_2 Y_\alpha(\lambda r)\right) + \frac{c}{\lambda^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},
$$

其中 $\alpha = 1 - \frac{n+k}{2} < 0$。此外，如果 α 不是整数，则由 (7.2) 可将 $y(r)$ 写为如下形式

$$
y(r) = r^\alpha \left(c_1 J_\alpha(\lambda r) + c_2 J_{-\alpha}(\lambda r)\right) + \frac{c}{\lambda^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
$$

由于两个问题 (7.5)、(7.6) 的解都必须具有有限能量，也就是说，分别为 $y \in H_0^1(B_L, d\gamma)$ 和$y \in H_0^1(B_L, d\gamma)$，考虑到 (7.4)，我们必须选择 $c_1 = 0$（事实上，当 $r \to 0$时， J_α 乘以 x_n^k 的梯度表现为 $1/r$，因而不可积），于是可以写成

$$
u = \begin{cases} u_L = A\left(|x - O_L|^\alpha J_{-\alpha}(\lambda|x - O_L|) - L^\alpha J_{-\alpha}(\lambda L)\right), & \text{if } x \in B_L \\ u_R = B\left(R^\alpha J_{-\alpha}(\lambda R) - |x - O_R|^\alpha J_{-\alpha}(\lambda|x - O_R|)\right), & \text{if } x \in B_R. \end{cases} \tag{7.7}
$$

当 α 为整数时，我们也可以完全用同样的方法论证，得到相同的公式 (7.7)。回顾贝塞尔函数 $J_{-\alpha}(x)$ 的图像，由于 u_L、 u_R 分别在 B_L、 B_R 中符号恒定，且它们关于 r 单调，我们立即得到 λL、 $\lambda R \in [0, j'_{-\alpha,1}]$.

Step 2. 常数 c。两个问题 (7.5)、(7.6) 中的常数 c 相同，因此 t

$$AL^\alpha J_{-\alpha}(\lambda L) + BR^\alpha J_{-\alpha}(\lambda R) = 0. \tag{7.8}$$

事实上，若我们对 (7.7) 中显式表达式求导，计算出 u'_L 和u''_L ，并将其代入 (7.5) 中的方程，再利用 (7.1)，便可推出

$$c = -A\lambda^2 L^\alpha J_{-\alpha}(\lambda L)\,. \tag{7.9}$$

同理，我们计算出 u'_R 和 u''_R，将它们代入 (7.6) 中的方程，再利用 (7.1)，得到

$$c = B\lambda^2 R^\alpha J_{-\alpha}(\lambda R), \tag{7.10}$$

结合 (7.9) 和 (7.10)，可推出 (7.8)。

˜步骤 3. 最优集合 Ω。在这一步中，我们证明当 $R = L$ 时，最优集合 Ω 由 ˜ 给出。Ω 的存在性由推论 5.1 保证。

用反证法，假设 $R < L$。结合 (7.7) 和 (7.8) 可得

$$\begin{aligned} u'(L)^2 - u'(R)^2 &= A^2 L^{2\alpha-2}\left(\alpha J_{-\alpha}(\lambda L) + L\lambda J'_{-\alpha}(\lambda L)\right)^2 - B^2 R^{2\alpha-2}\left(\alpha J_{-\alpha}(\lambda R) + R\lambda J'_{-\alpha}(\lambda R)\right)^2 \\ &= A^2 L^{2\alpha} J_{-\alpha}(\lambda L)^2 \lambda^2 \left[\left(\frac{\alpha J_{-\alpha}(\lambda L) + \lambda L J'_{-\alpha}(\lambda L)}{\lambda L J_{-\alpha}(\lambda L)}\right)^2 - \left(\frac{\alpha J_{-\alpha}(\lambda R) + \lambda R J'_{-\alpha}(\lambda R)}{\lambda R J_{-\alpha}(\lambda R)}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

定义

$$\phi_\alpha(s) = \frac{\alpha J_{-\alpha}(s) + s J'_{-\alpha}(s)}{s J_{-\alpha}(s)}\,, \qquad s \in [0, j'_{-\alpha,1}]$$

或者等价地，由 (7.3) 得

$$\phi_\alpha(s) = -\frac{J_{-\alpha+1}(s)}{J_{-\alpha}(s)}\,, \qquad s \in [0, j'_{-\alpha,1}].$$

由 $[29, 第\ 4]$ 节 ϕ_α可推得，(s) 关于 $[0, j'_{-\alpha,1}]$ 严格递减且为负。因此

$$u'(L)^2 - u'(R)^2 < 0,$$

˜这与命题 4.3 矛盾。因此，最优集合 Ω 是两个不相交半球的并集，且二者的加权测度相同，于是得到 (1.5)。

注 7.1. 特别指出，在前面的论证中取 $k = 0$ ，即 $d\gamma = dx$，并回顾等周集是球，可得到这里给出的另一种证明，证明的结果见 $[23]$。

References

[1] A. Alvino、F. Brock、F. Chiacchio、A. Mercaldo 和 M.R. Posteraro, *On weighted isoperimetric inequalities with non-radial densities* 98 10 1935 1945, 2019 。Appl. Anal. ( ): – 。[2] A. Alvino、F. Brock、F. Chiacchio、A. Mercaldo 和 M.R. Posteraro, *The isoperimetric problem for a class of non-radial weights and applications* 267 12 6831 6871, 2019 。J. Differential Equations ( ): – 。[3] A. Alvino 、 F. Brock 、 F. Chiacchio 、 A. Mercaldo 和 M.R. Posteraro, *Some isoperimetric inequalities with respect to monomial weights* 27 3, 29 2021 。ESAIM Control Optim. Calc. Var. suppl., Paper No. S pp, 。[4] L. Barbosa 和 P. B´erard, *Eigenvalue and "twisted" eigenvalue problems, applications to CMC surfaces*。J. Math. Pures Appl. (9), 79 (5):427–450, 2000。[5] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*。Invent. Math. 30 (2):207–216, 1975。[6] B. Brandolini、F. Della Pietra、C. Nitsch 和 C. Trombetti, *Symmetry breaking in a constrained Cheeger type isoperimetric inequality* 21 2 359 371, 2015 。ESAIM Control Optim. Calc. Var. ( ): – 。[7] B. Brandolini、P. Freitas、C. Nitsch 和 C. Trombetti, *Sharp estimates and saturation phenomena for a nonlocal eigenvalue problem* 228 4 2352 2365, 2011 。Adv. Math. ( ): – 。[8] F. Brock、F. Chiacchio 和 A. Mercaldo, *Weighted isoperimetric inequalities in cones and applications*。Nonlinear Anal. 75 (15):5737–5755, 2012。

[9] A. P. Buslaev、V. A. Kondrat'ev 和 A. I. Nazarov, *On a family of extremal problems and related properties of an integral* 64 6 830 838, 1998 64 5 6 719 。（俄文，俄文摘要）Mat. Zametki ( ): – ；译文见 Math. Notes (-): – 725, 1999。[10] X. Cabr´e 和 X. Ros-Oton, *Sobolev and isoperimetric inequalities with monomial weights*。J. Differential Equations 255 (11):4312–4336, 2013。[11] X. Cabr´e、X. Ros-Oton 和 J. Serra, *Sharp isoperimetric inequalities via the ABP method*。J. Eur. Math. Soc. 18 (12):2971–2998, 2016。[12] E. A. Carlen 和 C. Kerce, *On the cases of equality in Bobkov's inequality and Gaussian rearrangement*。Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (1):1–18, 2001。[13] G. Chambers, *Proof of the log-convex density conjecture*。J. Eur. Math. Soc. 21 (8):2301–2332, 2019。[14] A. Cianchi 和 L. Pick, *Optimal Gaussian Sobolev embeddings*。J. Funct. Anal. 256 (11):3588–3642, 2009。[15] K. M. Chong 和 N. M. Rice，函数的等测重排。Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No. 28。Queen's University, 金斯顿, Ont., 1971。[16] G. Croce 和 B. Dacorogna, *On a generalized Wirtinger inequality*。Discr. Contin. Dyn. Syst. 9(5):1329–1341, 2003。[17] G. Croce、A. Henrot 和 G. Pisante, *An isoperimetric inequality for a nonlinear eigenvalue problem*。Annales de l'IHP (C), Non Lin. Anal. 29 21 34, 2012 *An isoperimetric inequality for a nonlinear eigenvalue* : – ；勘误：, *problem* 32 485 487, 2015 Annales de l'IHP (C), Non Lin. Anal. : – 。[18] B. Dacorogna、W. Gangbo 和 N. Sub´ıa, *Sur une généralisation de l'inégalité de Wirtinger*。Annales de l'IHP Anal. non Lin. 9 (1): 29–50, 1992。[19] P. Dean, *The constrained quantum mechanical harmonic oscillator*。Proc. Cambridge Philos. Soc. 62:277–286, 1966。[20] E. De Giorgi, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita* , 。5 33 44, 1958 Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I, : – 。[21] F. Della Pietra 和 G. Piscitelli, *Saturation phenomena for some classes of nonlinear nonlocal eigenvalue problems*。Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 31 (1):131–150, 2020。[22] A. Ehrhard, *Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes*。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4), 17 (2):317–332, 1984。[23] P. Freitas 和 A. Henrot, *On the first twisted Dirichlet eigenvalue*。Comm. Anal. Geom. 12 (5):1083–1103, 2004。[24] A. Figalli 和 F. Maggi, *On the isoperimetric problem for radial log-convex densities*。Calc. Var. Partial Differential Equations 48 (3-4):447–489, 2013。[25] A. Greco 和 M. Lucia, *Laplacian eigenvalues for mean zero functions with constant Dirichlet data*。Forum Math. 20 (5):763–782, 2008。[26] A. Henrot，椭圆算子特征值的极值问题。Frontiers in Mathematics。Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2006。[27] A. Henrot 和 M. Pierre，Shape Variation and Optimization, A geometrical analysis, Tracts in Mathematics, 28, EMS, 2018。[28] P. Ivanisvili、A. Volberg, *Improving Beckner's bound via Hermite functions* 。Anal. PDE 10 (4):929–942, 2017。[29] L. J. Landau, *Ratios of Bessel functions and roots of* $\alpha J_\nu\ x\ + xJ'_\nu\ x\ = 0$ 240 1 174 204, ( ) ( ) , J. 1999 Math. Anal. Appl. ( ): – 。[30] N. N. Lebedev, 《特殊函数及其应用》。Dover Publications, Inc., 纽约, 1972。修订版，译自俄文并由 Richard A. Silverman 编辑。完整未删节并经校订的再版。[31] C. Maderna 和 S. Salsa, *Sharp estimates of solutions to a certain type of singular elliptic boundary value problems in two dimensions* 12 4 307 321, 1981 。Applicable Anal. ( ): – 。[32] NIST 数学函数手册。由 Frank W. J. Olver、Daniel W. Lozier、Ronald F. Boisvert 和 Charles W. Clark 编辑。附 1 张 CD-ROM（Windows、Macintosh 和 UNIX）。美国商务部、美国国家标准与技术研究院，华盛顿特区；剑桥大学出版社，剑桥，2010。[33] G. P´olya 和 G. Szeg˝o, 《数学物理中的等周不等式》。Annals of Mathematics Studies。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1951。[34] C. Rosales、A. Ca˜nete、V. Bayle 和 F. Morgan, *On the isoperimetric problem in Euclidean space with density*。Calc. Var. Partial Differential Equations 31 (1):27–46, 2008。[35] G. Szeg˝o, *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area*。J. Rational Mech. Anal. 3:343–356, 1954。[36] G. Talenti, *A weighted version of a rearrangement inequality*。Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) 43:121–133 (1998), 1997。[37] G.N. Watson, 《贝塞尔函数理论论著》。第 2 版。剑桥大学出版社，1995。[38] H. F. Weinberger, *An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem*。J. Rational Mech. Anal. 5:633–636, 1956。

（Barbara Brandolini），数学与信息学系，巴勒莫大学，Archirafi街34号，90123 巴勒莫，意大利；电子邮箱：barbara.brandolini@unipa.it

(Antoine Henrot)，洛林大学，法国国家科学研究中心，洛林埃利·嘉当研究所，F-54000 南锡，法国，电子邮箱：antoine.henrot@univ-lorraine.fr

(Anna Mercaldo) 那不勒斯费德里科二世大学数学与应用系“R. Caccioppoli”，Monte S. Angelo 综合体 - 琴蒂亚路，80126 那不勒斯，意大利；电子邮箱：anna.mercaldo@unina.it

（Maria Rosaria Posteraro）那不勒斯费德里科二世大学“R. Caccioppoli”数学与应用系，Monte S. Angelo 综合体，琴蒂亚路，80126 那不勒斯，意大利；电子邮箱：posterar@unina.it