arXiv:2302.07785v1 [quant-ph] 15 Feb 2023

最优与变分多参数量子计量和矢量场传感

Raphael Kaubruegger,[1,2] Athreya Shankar,[1,2,3] Denis V. Vasilyev,[1,2] 和 Peter Zoller[1,2]
[1]*Institute for Theoretical Physics, University of Innsbruck, Innsbruck, 6020, Austria*
[2]*Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Innsbruck, 6020, Austria*
[3]*Department of Instrumentation and Applied Physics, Indian Institute of Science, Bengaluru, 560012, India*(日期：2023年2月16日)

我们在贝叶斯框架下研究了$SU(2)$量子干涉测量中的二维和三维矢量场多参数传感。我们建立了一种确定最优量子传感器的方法，该传感器确定了使用含有 N 个原子的传感器同时估计多个参数时精度的基本极限。考虑到当前的实验平台，我们提出了纠缠能力有限的传感器，但其性能仍显著优于不使用纠缠的传感器，并且在性能上接近最优量子传感器。此外，我们展示了如何通过最小化计量代价函数，利用变分量子电路在当前可编程量子传感器上实现这些传感器。由此得到的电路可制备定制的纠缠态，并在适当的纠缠基中进行测量，从而利用特定传感器平台上可用的原生纠缠资源，实现尽可能出色的量子传感器。值得注意的例子包括二维和三维量子“罗盘”，以及一种性能可扩展提升、优于未纠缠传感器的二维传感器。我们关于最优与变分多参数量子计量的研究成果有助于推动基础科学中的精密测量，并确保量子计算机的稳定性；通过在量子反馈回路中纳入最优量子传感器，即可实现这一目标。

I. 引言

量子计量学的目标 [1–4] 是利用作为探针的量子系统，实现并提升对物理系统参数的测量能力。量子物理限制了采用互不相关（经典）输入态的传感器性能，由此确立了所谓的标准量子极限（SQL）。与此同时，量子物理为我们提供了纠缠这一资源，使我们能够突破 SQL，并在量子传感中逼近测量精度的终极极限，这些极限定义了最优量子传感器（OQS）。识别并最终构建此类 OQS，是量子计量学面临的一项重大挑战。首先，这需要针对给定的传感任务，识别最优纠缠输入态和测量方式。随后便产生一个问题：鉴于实验中可用的（纠缠）资源，如何在特定量子传感器平台上实现接近 OQS 所定义极限运行的量子传感器。

对于单参数量子计量学，关于 OQS [2, 5, 6], 已有明确的理论认识，近期利用可编程量子传感器开展的实验，已通过浅层纠缠量子电路 [7]实现了接近最优的 N 原子 Ramsey 干涉测量。相比之下，我们下文将关注多参数量子计量学 [8–12], ，它研究多个参数同时精确估计的问题，因此与众多实际应用相关 [13–19], ，例如矢量场传感 [20–22], ，这与磁力测量 [23–30] 或电测量 [31–33]有关。

多参数计量与单参数计量之间的一个根本区别，源于不同参数所对应的最优测量可能彼此不相容，而这些参数是由不对易的哈密顿量编码的。

多参数量子计量的这一独特特征，主要是在量子费 Fisher 信息框架内进行研究的。在该框架中，随着对同一信号的测量重复次数趋于无穷，传感器精度受到 Holevo Cram`ér-Rao 界 [1, 9, 34]的严格下界约束。相较之下，我们关注的是仅限于一次或少数几次测量重复次数的测量场景，例如时变信号的传感 [35]。在给定参数值范围内，寻找能够使单次测量精度最大化的传感器，可以在贝叶斯量子计量学框架下进行表述 [1, 9]。然而，对于不对易哈密顿量，求解贝叶斯多参数量子计量问题仍是一个长期存在的挑战。迄今为止，在这一框架内仅研究了少数几个具有底层群对称性的问题 [36–39]。

在本研究中，我们研究贝叶斯框架下具有代表性的矢量场传感多参数量子计量学问题 [20–22]。尽管一维传感的纠缠场传感器已经在实验中实现 [40–43], ，但我们考虑了这样一个尚未解决的问题：在使用 N 原子的纠缠拉姆齐干涉测量背景下，对二维和三维场进行传感。我们建立了一种确定OQS的方法，从而为利用给定数量的原子通过单次测量同时估计矢量场各分量的可实现精度设定终极极限。当原子数量无法任意增加时，例如为了保持较高的空间分辨率，这一点尤为重要。考虑到当前的实验能力，我们研究了实验量子控制能力受限的传感器；尽管如此，它们在性能上仍能接近

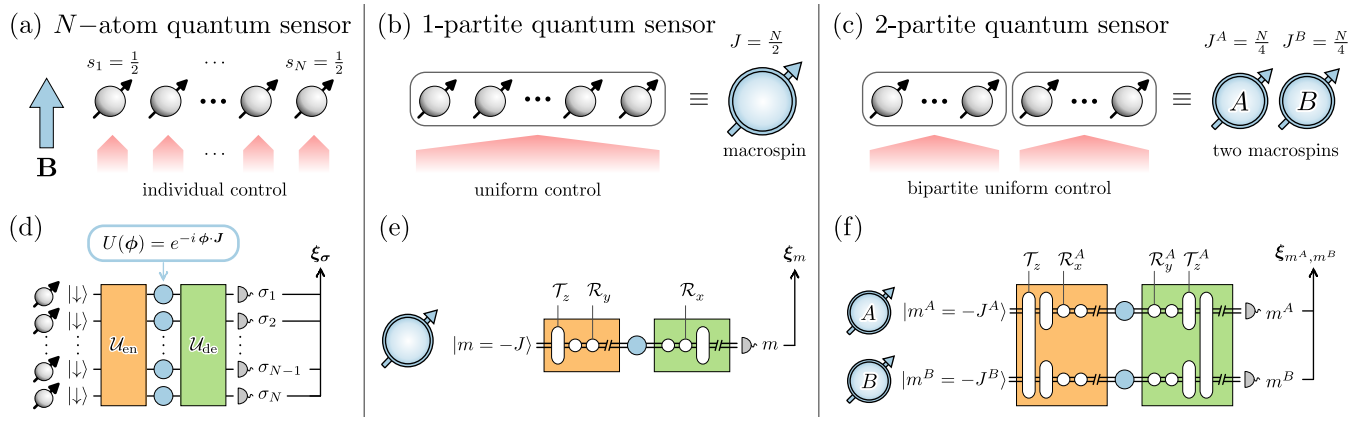


图 1. 使用 SU(2)干涉测量对矢量场 B 进行量子传感。我们考虑纠缠原子参与的拉姆齐干涉测量，其中相位向量 $\boldsymbol{\phi}$通过承载矢量场 B 信息的 $SU(2)$ 幺正算符 $U(\boldsymbol{\phi})$ 编码到量子系统中（见第 II A 节）。面板 (a,b,c) 定义了三种干涉仪，第 III B 节和第 IV 节将对此进行更详细的讨论；它们的区别在于实验装置中可用于操控原子纠缠的控制程度。面板 (d,e,f) 通过量子电路和投影测量给出了这些干涉仪的操作性定义。纠缠器 $\mathcal{U}_{\rm en}$ 和解码器 $\mathcal{U}_{\rm de}$ 分别在相位编码前后变换系统的量子态。投影测量结果 $\boldsymbol{\sigma}$, m, $m^{A(B)}$ 被转换为对真实相位向量 $\boldsymbol{\phi}$的估计值 $\boldsymbol{\xi}$。(a, d)：最一般的 N 原子传感器假定可对原子实施通用控制，从而能够实现最优量子传感器（见第 II C 节）。(b, e)：单体量子传感器中的原子（见第 IV A 1 节）受到均匀控制。因此，传感器动力学受限于 N 个原子的置换对称子空间，即原子系综可由一个角动量为 $J=N/2$ 的宏观自旋表示。单体控制由包含集体旋转 $\mathcal{R}_{x(y)}$ 和单轴扭转（OAT）门 $\mathcal{T}$ 的电路实现。(c, d)：二体量子传感器中的原子（见第 IV A 2 节）被分为两个分区 A 和 B，并在各分区内受到均匀控制，其中包括对整个原子系综的均匀控制。因此，该系统等效于两个角动量分别为 $J^A=J^B=N/4$ 的纠缠宏观自旋。二体控制由电路实现，电路包含作用于各分区的集体旋转 $\mathcal{R}_x^{A(B)}$ $(_y)$ 和单轴扭转（OAT） $\mathcal{T}_z^{A(B)}$，以及作用于整个系综的单轴扭转（OAT） $\mathcal{T}_z$。

OQS，并显著优于SQL；SQL由不使用纠缠的传感器所实现。可编程传感器能够在多种传感平台上实现，包括囚禁离子 [7, 18],、激光激发的里德堡原子 [44, 45], 、光学腔中的原子 [46], 、极性分子 [47, 48], 、色心 [49, 50]以及具有轨道角动量的光子 [19, 51, 52]。以囚禁离子等平台可实现的单轴扭转（OAT）相互作用 [53], 为例，我们优化了变分量子电路 [54] ，为实现纠缠量子传感器 [7]提供了一条切实可行的路径。

本文的结构安排如下。在第II 节中，我们介绍 SU 利用 (2) 干涉测量矢量场的各分量，并在贝叶斯多参数估计框架下为最优量子传感器奠定基础。第III节讨论理论方面的内容，并提供用于寻找最优量子传感器的（数值）算法，同时定义量子电路模型。在第IV 节中，我们将单体和双体量子传感器介绍为纠缠能力有限的量子传感器。由此引出对变分低深度量子电路的讨论，这类电路可用于逼近第V节中的最优量子传感器。本文的大多数结果针对二维场传感；第VI 节则讨论三维场传感的相关方面，最后给出结论。

II. 贝叶斯多维场传感

本节以多维场传感为例，回顾多参数估计理论。我们重点介绍相位估计的贝叶斯框架，该框架考虑了待测参数的先验不确定性。我们将最优量子传感器定义为使贝叶斯代价函数最小化的传感器。

A. 使用 $SU(2)$ 干涉仪进行矢量场传感

我们研究如何估计矢量场的所有分量 $\mathbf{B}=(\mathrm{B}_x,\ \mathrm{B}_y,\ \mathrm{B}_z)^T$在 $SU(2)$ 干涉测量中[55], , 其中我们假设该场均匀耦合到一组 N 相同的二能级原子。我们设想的物理传感场景例如包括直流磁场，或交流磁场和电场。在附录 A中，我们将详细介绍实现下文所考虑模型系统的示例性实验设置。

在我们的模型中，原子根据以下哈密顿量与矢量场耦合

$$H=\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{J}\equiv\sum_\nu \mathrm{B}_\nu J_\nu. \tag{1}$$

这里， $J_\nu=\sum_{k=1}^N\sigma_k^\nu/2$ 是集体自旋算符

而 σ_k^ν 是第 k 个原子的泡利算符，其中$\nu = x,\ y,\ z$。经过演化时间 T后，相位 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{B}T$ 被幺正算符$SU(2)$作用到输入态 $|\psi_{\rm in}\rangle$ 上

$$U(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left[-i\,\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{J}\right] \tag{2}$$

使得 $|\psi_{\boldsymbol{\phi}}\rangle = U(\boldsymbol{\phi})\,|\psi_{\rm in}\rangle$。这里我们假设场的相干时间 $\tau \gg T$ 远大于T，即在演化过程中场实际上保持不变。最后，对处于态 $|\psi_{\boldsymbol{\phi}}\rangle$ 的二能级原子进行测量，以估计相位$\boldsymbol{\phi}$ ，从而推断场$\mathbf{B}$。这里我们重点讨论离散时刻的测量，基于连续测量的另一种方法见 [56]。

最一般的测量由正算子值测度（POVM）描述，即一组 $\{M_\mu\}$正厄米算符 $M_\mu \succeq 0$，满足$\sum_\mu M_\mu = \mathbb{1}$。下文中，我们将 POVM 与一般性较低但在实验上更易实现的投影测量进行比较，后者记为 Π_μ。对于给定的相位向量 $\boldsymbol{\phi}$，标记为μ的测量结果出现的概率为

$$p(\mu|\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{Tr}\{M_\mu\,|\psi_{\boldsymbol{\phi}}\rangle\,\langle\psi_{\boldsymbol{\phi}}|\}. \tag{3}$$

根据结果 μ，利用估计量 $\boldsymbol{\xi}_\mu = (\xi_\mu^x,\ \xi_\mu^y,\ \xi_\mu^z)^T$估计相位。估计值与实际值 $\boldsymbol{\phi}$ 之间的偏差由误差（或损失）函数 $\epsilon(\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{\xi}_\mu)$来表征，通常选用平方误差

$$\epsilon(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\xi}_\mu) = (\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\xi}_\mu)\cdot(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\xi}_\mu)\,. \tag{4}$$

最后，衡量指标考虑了测量统计特性，对于给定的 $\boldsymbol{\phi}$，其定义为平均估计误差（或风险）。在我们的情形下，它采用均方误差（MSE）的形式

$$\mathrm{MSE}(\boldsymbol{\phi}) = \sum_\mu \epsilon(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\xi}_\mu)\,p(\mu|\boldsymbol{\phi}). \tag{5}$$

注意，SU（2）相位编码 U（$\boldsymbol{\phi}$）具有周期性，这意味着 $|\boldsymbol{\phi}|$ 只能按模 2π估计。由于我们希望根据$\mathbf{B}^{\rm est} \sim \boldsymbol{\xi}/T$，从估计相位推断矢量场，因此必须考虑这种模糊性。为此，我们将相位限制在区间 $-\infty < |\boldsymbol{\phi}| < \infty$ 内，并明确选择平方误差（4），这是一种非周期误差函数，会对超出无模糊相位估计的 d维球面 $|\boldsymbol{\phi}| \le \pi$ 的相位施以重罚。

B. 贝叶斯多参数估计

在贝叶斯方法中，待估计的参数向量 $\boldsymbol{\phi}$ 被视为随机变量。关于待估计相位的信息由先验概率密度 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})$表示。通过估计相位，我们可以推断相关信息，并将先验密度更新为后验概率密度。

我们讨论的核心量是贝叶斯均方误差（BMSE），定义为对先验概率密度取平均后的均方误差（5），

$$\mathrm{BMSE} \equiv \mathcal{C} = \int d\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{MSE}(\boldsymbol{\phi})\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi}). \tag{6}$$

下文中，贝叶斯均方误差将作为代价函数 $\mathcal{C}$，它取决于输入态 $|\psi_{\rm in}\rangle$、POVM $\{M_\mu\}$ 和估计量 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$。

我们使用贝叶斯定理 $p(\boldsymbol{\phi}|\mu) = p(\mu|\boldsymbol{\phi})\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})/p(\mu)$，将 $\mathcal{C}$ 解释为相位估计的后验期望误差。具体而言，$\mathcal{C}$ 可以改写为

$$\mathcal{C} = \sum_\mu p(\mu)\int d\boldsymbol{\phi}\,\epsilon(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\xi}_\mu)\,p(\boldsymbol{\phi}|\mu), \tag{7}$$

其中，$p(\mu) = \int d\boldsymbol{\phi}\,p(\mu|\boldsymbol{\phi})\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})$ 是测得 μ 的概率。对相位向量 $\boldsymbol{\phi}$ 的积分表示期望平方误差，即相对于后验概率密度$p(\boldsymbol{\phi}|\mu)$取平均后的平方误差；后者表示在测量结果为 μ 的条件下，我们对 $\boldsymbol{\phi}$的了解。

通过最小化期望平方误差（即贝叶斯均方误差）定义的最小均方误差估计量为

$$\boldsymbol{\xi}_\mu^* = \int d\boldsymbol{\phi}\,\boldsymbol{\phi}\,p(\boldsymbol{\phi}|\mu) = \langle\boldsymbol{\phi}\rangle_{p(\boldsymbol{\phi}|\mu)}, \tag{8}$$

它对应于后验概率密度 $p(\boldsymbol{\phi}|\mu)$的平均值。

若选择估计量 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$ 为最小均方误差估计量 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu^*\}$，则贝叶斯均方误差就是后验方差

$$\Delta^2 \equiv \mathcal{C}|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^*} = \sum_\mu p(\mu)\left\langle \epsilon\left(\boldsymbol{\phi},\langle\boldsymbol{\phi}\rangle_{p(\boldsymbol{\phi}|\mu)}\right)\right\rangle_{p(\boldsymbol{\phi}|\mu)}, \tag{9}$$

即按照测得 μ的概率 $p(\mu)$对后验密度的方差取平均。

下文中，后验不确定度 Δ^2 将作为评估性能并比较给定先验密度下各种量子传感器的关注指标 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})$。通过最小化计量代价函数（6），我们也就隐式地最小化了传感器的后验方差。因此，我们将以图表展示结果，比较不同传感器模型的后验不确定度 Δ与先验不确定度之比（见图2、6、7）。单次测量中我们能够获得的相位 $\boldsymbol{\phi}$ 信息越多，该比值就越小。

在继续之前，我们先说明选择先验概率密度 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})$的原因。在贝叶斯量子计量中，待测的$\mathbf{B}$ 场具有一个先验密度，该密度会转化为相位 ϕ 的密度。举一个具体例子，下面我们假设先验是针对

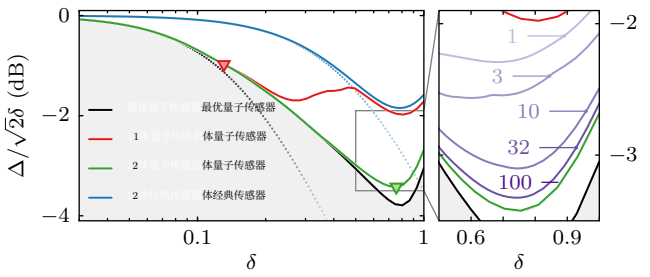


图 2。 **二维场的贝叶斯量子传感**。 (a) 后验宽度 Δ 与先验宽度 $\sqrt{2}\delta$ 的比值，随 δ 变化，适用于$N = 8$ 个原子。OQS 给出了最终性能极限；灰色阴影区域对于任何使用 N 个原子的量子传感器而言都是无法达到的。图中还展示了最优单体量子传感器、二体量子传感器和二体经典传感器，以供比较。经典传感器（蓝色虚线）和量子传感器（黑色虚线）的渐近界由贝叶斯克拉默–拉奥界预测，分别为´（C7）和（C9）。在图3 和4中，我们展示了此处彩色三角形所示最优传感器的工作原理。放大图：第V 节定义的变分电路（紫色线），其解码层数 $\mathrm{n_{de}}$逐渐增加，纠缠器深度 $\mathrm{n_{en}} = 2$保持不变。

场的，其形式为以原点为中心、先验宽度为 $(\delta|\mathbf{B}|)$ 的高斯密度。同时，我们并不知道场的方向。因此，相应的相位先验概率密度为

$$\mathcal{P}_\delta(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\,\delta\right)^d} \exp\left[-\frac{\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}}{2\delta^2}\right], \tag{10}$$

其中 d 是矢量 $\boldsymbol{\phi}$的维数。对于二维场传感，我们取 $d = 2$，并假设 $\mathbf{B}_z = \phi_z = 0$。因此，在本例中，先验由单个参数 $\delta \sim (\delta|\mathbf{B}|)$ T参数化。不过，以下讨论也可推广至由特定量子传感器设置和任务所决定的更一般先验（见附录 B）。如前所述，在通过 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{B}$ T将场映射为相位时，我们必须通过适当选择 T，确保估计相位与矢量场之间存在一一映射，即不存在相位滑移。我们的讨论隐含地假设，待测场 $\mathbf{B}$ 在时间 T内基本保持静态。

C. 最优量子传感器

我们将最优量子传感器（OQS）定义为：对于给定的先验密度 $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$，在所有输入态、测量 $\{M_\mu\}$和估计量 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$ 中，使计量代价函数贝叶斯均方误差（6）达到最小值的方案。因此，最优量子传感器的后验方差为，

$$\Delta^2_{\mathrm{OQS}} = \min_{|\psi_{\mathrm{in}}\rangle, M_\mu, \boldsymbol{\xi}_\mu} \mathcal{C}, \tag{11}$$

表示对于给定先验 $\mathcal{P}_\delta(\boldsymbol{\phi})$，任何 N 原子传感器所能达到的后验方差基本极限。

作为第一个结果，在第 III 节中，我们将开发一种方法，使我们能够高效地找到用于矢量场传感的最优量子传感器，即执行一种仅随粒子数量按多项式规模增长的数值优化 N。

虽然最优量子传感器（OQS）是通过对（纠缠）输入态和测量进行无约束优化来定义的，但在实际实现“最佳”量子传感器时，会受到实验量子资源有限以及各种不完美因素的限制。因此，我们将讨论实验纠缠能力有限的最优量子传感器，即在给定实验约束的情况下确定最佳量子传感器。与 OQS 类似，这些传感器的性能由最小后验方差 Δ^2 定义，如方程（11）所示，但计算时会对输入态和测量施加相关约束。

图1 概述了控制能力和纠缠能力各不相同的量子传感器，我们将在图2中比较它们的性能。这些量子传感器的操作性定义以量子电路模型的形式给出，见第IIIB节。图1(a) 展示了一个具有普适（N体）控制能力的 N粒子量子系统量子传感器，它涵盖了 OQS。与之对照，图1(b) 展示了一个 1 体量子传感器（1p-QS），其定义为对 N个原子进行均匀控制；图1(c) 则展示了一个二体量子传感器（2p-QS），它对原子系综中的两个分区进行均匀控制（详情分别见第IV B1节和第IV B2节）。我们将在下文看到，对于二维场传感，无论先验密度的宽度如何，最优 2p-QS 的性能都接近 OQS，这将促使我们寻找相关量子电路的变分近似。

最后，我们对贝叶斯方法与费舍尔信息方法在多参数量子计量学中的关系进行评述， [9] 结合本文的工作，详见附录C 中的详细讨论。在后一种方法中，计量代价函数是局部无偏估计量的均方误差，其下界由克拉美´-罗界给出。换言之，灵敏度是在相位向量的局部某个给定值 $\boldsymbol{\phi}_0$ 附近考察的，这与贝叶斯均方误差不同，后者是对一个范围内的相位值求均方误差的平均值。然而，在先验宽度 $\sqrt{d}\delta$较小的极限情况下，贝叶斯方法变得局部化，此时两种方法可通过范特里斯不等式（C3）联系起来。在费舍尔信息框架中，任意 N原子多维场传感器的灵敏度都受海森堡类极限约束，而这又通过范特里斯不等式限制了贝叶斯均方误差；详见附录C。对于下文讨论的示例，最优量子传感器在小 [20, 22, 57] 极限下 δ 达到这些界限，说明从费舍尔信息的角度来看，最优量子传感器同样是最优的。

III. 最优量子传感器理论

本节将求解以贝叶斯均方误差（6）为计量代价函数时的最小化问题，该函数定义了最优量子传感器，并构成图2 和6中所示最优量子传感器数值结果的基础。本节最后将介绍一个量子电路模型，用以描述（最优）量子传感器的实际实现方式。

A. 识别最优量子传感器 sor

为找到最优量子传感器（OQS），我们按照式（6）和式（11）所述，在不受约束的输入态、测量和估计量集合上，最小化计量代价函数。一般而言，解决此类数学问题十分困难，因为量子系统 N 个粒子对应的自由度数量呈指数级增长，测量和估计量也同样如此。这里，我们将表明，可以利用规模仅随系统 N大小多项式增长的计算资源，找到最优贝叶斯解。我们的方法基于以下三个关键观察，详见附录D–F。

首先，我们注意到，由N 个原子组成且按照式（1）均匀耦合到场 B 的传感器，其动力学局限于一个有效希尔伯特空间，该空间的维数按 $\sim N^3$ 的规模增长。这与描述 N 个自旋-1/2 原子的完整 2^N 维希尔伯特空间形成对比。这种简化源于 $SU(2)$ 对称性，以及编码相位的幺正算符 $U(\boldsymbol{\phi})$ 所具有的粒子置换对称性。其思路是利用 $SU(2)$ 群的不可约表示来考察 N 量子比特空间。例如，通过角动量耦合，可以将两个自旋-1/2 表示为两个正交子空间的直和，分别对应自旋-1（三重态）和自旋-0（标量），$\mathbf{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{\frac{1}{2}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{0}$。加入两个以上的角动量，会产生多个正交子空间，或等价表示，它们对应相同的自旋-j；例如，对于三个量子比特，我们有两个等价的自旋-1/2 表示，$\mathbf{\frac{1}{2}}^{\otimes 3} = \mathbf{\frac{3}{2}} \oplus \mathbf{\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{\frac{1}{2}}$。自旋-$j$ 的等价表示数量 ℓ_j 随着加入的量子比特数 N 呈指数增长，因此超过单个自旋-j 子空间的自由度数量，$d_j = 2j+1$。由于 $SU(2)$ 幺正算符不会耦合不同的角动量 j 及其等价表示，我们最多只能通过将它们纠缠起来，利用 $d_j \leq \ell_j$ 个等价表示。其余的 $\ell_j - d_j$ 个等价表示不会被占据，因而无法用于传感，从而将 $SU(2)$ 传感器的有效希尔伯特空间维数降至 $\sim N^3$ [37, 38, 58]。详细内容见附录 D。

第二个观察结果是传感器优化问题具有多凸特性。正如我们在附录 E中所展示的，这意味着计量代价函数 Eq. (6) 的最小化是一个凸优化问题 [59] 关于三组变量（$|\psi_{\text{in}}\rangle$、$\{M_\mu\}$ 和 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$），若另外两组变量固定，则该结论成立。相应子问题中最难的是在输入态和估计量固定时，对 POVM 进行优化。该问题可改写为一个半定规划；对于我们这个规模为N [60]的多项式规模问题，它可在多项式时间内求解，详情如上所述。

优化算法总结如下：从随机初始态、POVM 和估计量开始，迭代求解凸子问题，直到解收敛至使计量代价（6）最小的最优传感器（其中 $|\psi^\star_{\text{in}}\rangle$、$\{M^\star_\mu\}$和 $\{\boldsymbol{\xi}^\star_\mu\}$）。相应凸子问题的形式化定义见附录E。

最后，从更具技术性的角度来看，我们注意到，当从搜索空间中消除对称自由度时，可以可靠地收敛到最优解。为此，我们为输入态、广义测量和估计量确定了一种协变试探形式；在所考虑的各向同性先验密度下，该形式描述了场方向先验 未知时的最优传感器，如式（10）所示。附录F详细介绍了针对最优二体二维场传感器的协变试探形式。二维和三维场传感的最优量子传感器的一般情形将在 [61]中讨论。

B. 量子传感器的量子电路模型

量子传感器的实际实现将依赖于幺正量子电路，以操控传感器的量子态，并对原子进行投影测量，如图1所示。在我们的传感器量子电路模型中，初始态

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \mathcal{U}_{\text{en}} \, |\psi_0\rangle \tag{12}$$

由纠缠幺正变换 $\mathcal{U}_{\text{en}}$ 从乘积态制备，例如 $|\psi_0\rangle = |\downarrow\rangle^{\otimes N}$。另一方面，解码幺正变换 $\mathcal{U}_{\text{de}}$ 可视为变换由 $|\boldsymbol{\sigma}\rangle = |\sigma_1\rangle、\cdots、\sigma_N\rangle$给出的投影测量基，其中每个原子 j 被投影到 $\sigma_j = |\uparrow\rangle$或 $\sigma_j = |\downarrow\rangle$。因此，得到测量结果 $\boldsymbol{\sigma}$ 的条件概率$p(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\phi}) = \text{Tr}\{\Pi_{\boldsymbol{\sigma}} \, |\psi_{\boldsymbol{\phi}}\rangle \langle\psi_{\boldsymbol{\phi}}|\}$ 可用有效测量投影算符表示

$$\Pi_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{U}_{\text{de}}{}^\dagger \, |\boldsymbol{\sigma}\rangle \langle\boldsymbol{\sigma}| \mathcal{U}_{\text{de}} \, . \tag{13}$$

支撑 OQS 讨论的一般 POVM，可通过电路模型实现，并使用不参与实际传感过程的额外辅助原子。有趣的是，我们发现，当 N 足够大时，作用于多项式维度 OQS 子空间 $\sim N^3$ 上的最优 POVM，可以通过在完整的 N 原子空间上进行投影测量来实现。N 原子的希尔伯特空间具有指数级数量的自由度 2^N，可用来替代辅助

原子。这表明，如果假设能够在单个原子层面实现通用量子控制，那么 OQS 就能如图所示，通过量子电路忠实地表示。1(a)。我们的数值结果表明，对于由 $N \gtrsim 8$ 个原子组成的传感器，二维场的 OQS 无需辅助原子即可实现。

IV. 最优少体量子传感器

在上一节中，我们讨论了利用 SU量子干涉仪进行多维场传感时，最优量子传感器的若干一般特性；该干涉仪包含 N 个原子。本节将介绍并讨论少体量子传感器，并将其性能与最优量子传感器进行比较。这些传感器通过将构成传感器的 N 个原子划分为多个子系综来定义。具体而言，我们考虑图1（b、e）和（c、f）所示的 1p-QS 和 2p-QS。对于 1p-QS，我们假设原子系综受到均匀控制；而对于 2p-QS，则假设在分区层面受到均匀控制 A 和 B。

引入少体量子传感器有双重动机：首先，我们发现，最优量子传感器的波函数并不总是占据一个含有 N个原子的 SU量子干涉仪的整个希尔伯特空间，见附录G。所占据子空间的特定结构表明，用少体量子传感器可以近似实现用于二维场传感的最优量子传感器。其次，在我们的量子电路模型中，实现纠缠幺正算符和解码幺正算符所需的量子控制有限，少体量子传感器因此更易实现。见图。1（e、f）]。我们将在第V节讨论这类实现，并研究相应量子电路的变分近似；这些电路可借助当前的实验技术实现。

A. 少体量子传感器

1. *One-partite quantum sensor (1p-QS)*

1p-QS 及其对应的量子电路模型分别示意于图1(b, e)中。我们假设采用全局控制，因此 1p-QS 的动力学，即 1p-QS 幺正算符 $\mathcal{U}^{\mathrm{1p}}{}_{\mathrm{en(de)}}$ 以及相位编码 $U(\phi)$ 对 $|\psi_0\rangle$ 的作用，都局限于 N 原子希尔伯特空间 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ 的置换不变子空间 $\mathcal{H}_{1\mathrm{p}} = \mathbb{C}^{N+1}$ 中。因此，该系统等效于一个角动量为 $J = N/2$ [62] 的单个“宏观自旋”。J_z 的本征态 $|m\rangle$ 满足 $J_z|m\rangle = m|m\rangle$，其中 $m = -J, -J+1, \ldots, J$，构成 1p-QS 希尔伯特空间的一组基。

在这个基中，初始态和测量图中的投影算符1（e）定义为

$$|\psi_{\mathrm{in}}\rangle = \mathcal{U}^{\mathrm{1p}}_{\mathrm{en}}|m=-J\rangle, \tag{14}$$

$$\Pi_m = \mathcal{U}^{\mathrm{1p}\,\dagger}_{\mathrm{de}}|m\rangle\langle m|\mathcal{U}^{\mathrm{1p}}_{\mathrm{de}}. \tag{15}$$

最优 1p-QS 由后验方差表征

$$\Delta^2_{\text{1p-QS}} = \min_{\mathcal{U}^{\mathrm{1p}}_{\mathrm{en}}, \mathcal{U}^{\mathrm{1p}}_{\mathrm{de}}, \boldsymbol{\xi}_m} \mathcal{C}. \tag{16}$$

优化的详细内容见附录 H。

2. *Two-partite quantum sensor (2p-QS)*

2p-QS 及其对应的量子电路分别显示于图 1（c、f）中。这里，传感器动力学被限制在子空间$\mathcal{H}_{2\mathrm{p}} = \mathbb{C}^{N/2+1} \otimes \mathbb{C}^{N/2+1}$ 内。该设置等价于一对宏观自旋 $J^A = N/4$ 和 $J^B = N/4$，它们可通过双分区均匀控制实现纠缠。

这里，基态 $|m^A、\ m^B\rangle$ 被定义为 $J^A_z、J^B_z$ 的同时本征态，满足
$J_z^{A(B)}|m^A\ m^B\rangle = m^{A(B)}|m^A\ m^B\rangle$ $m^{A(B)}$ =、，其
$-J^{A(B)} \ldots J^{A(B)}$
中、，。初始态和测量投影算符现在为

$$|\psi_{\mathrm{in}}\rangle = \mathcal{U}^{\mathrm{2p}}_{\mathrm{en}}|m^A = -J^A, m^B = -J^B\rangle, \tag{17}$$

$$\Pi_{m^A,m^B} = \mathcal{U}^{\mathrm{2p}\,\dagger}_{\mathrm{de}}|m^A, m^B\rangle\langle m^A, m^B|\mathcal{U}^{\mathrm{2p}}_{\mathrm{de}}. \tag{18}$$

最优 2p-QS 由后验方差表征（见附录H）

$$\Delta^2_{\text{2p-QS}} = \min_{\mathcal{U}^{\mathrm{2p}}_{\mathrm{en}}, \mathcal{U}^{\mathrm{2p}}_{\mathrm{de}}, \boldsymbol{\xi}_{m^A,m^B}} \mathcal{C}. \tag{19}$$

3. *Two-partite classical sensor (2p-CS)*

我们将 2p-QS 与二体经典传感器（2p-CS）进行比较。后者的定义是在此基础上进一步限制 $\mathcal{U}^{\mathrm{2p}}{}_{\mathrm{en(de)}}$，只允许每个系综中的所有原子进行集体旋转。这意味着原子之间不存在纠缠。我们使用相应的 $\Delta^2_{\text{2p-CS}}$ 来定义二体传感器的标准量子极限。

B. 结果：少体量子传感器的二维场传感

我们关于二维传感的主要结果（其中 $\mathbf{B} = (\mathrm{B}x, \mathrm{B}y, 0)^T$）总结于图 2中。我们绘制了后验宽度与先验宽度之比 $\Delta/(\sqrt{2}\,\delta)$，随先验宽度 $\sqrt{2}\delta$ 变化的曲线；其中包括代表终极量子极限的 OQS、定义标准量子极限的最优 2p-CS，以及最优 1p-QS 和 2p-QS。结果

给出了 $N = 8$ 个原子的情形，其数量足以展示合理的灵敏度增益 [63]。

在这幅图中，有两种极限情况，此时测量后的贝叶斯更新无法提供有关信号的信息，即比值 $\Delta/(\sqrt{2}\,\delta)$ 趋近于 1。第一种是极限情况 $\delta \to 0$，此时量子测量涨落淹没了信号；第二种是 $\delta \gg 1$所示的情形，此时由于相位滑出无歧义估计区域 $|\phi| \lesssim \pi$，信号被巨大的估计误差所掩盖。因此，每个传感器都有一个最优工作点 δ^*，在该点处每次测量的信息增益最大。

图 2(a) 中的结果表明，最优量子传感器在先验宽度较大的情况下达到其最优工作点 $\delta \sim 1$，对应的探测时间为$T \sim (\delta|\mathbf{B}|)^{-1}$。另一个相关情形是先验宽度较小，$\delta \lesssim 1/N$此时最优量子传感器的性能受贝叶斯克拉美-`拉奥界（黑色点线）限制，该界由范特里斯不等式导出（参见附录 C）。相应的较短演化时间 $T \sim (\delta|\mathbf{B}|N)^{-1}$ 使我们能够更快速地监测时变信号，因为对场的 $\tau \gg T$ 相干时间 τ 的要求因而有所放宽。

尽管 1p-QS 在先验宽度较小时能够实现最优量子传感器，但在先验宽度较大的情况下，其表现并不优于经典传感器（蓝色曲线）。相比之下，2p-QS 在整个先验宽度范围内都能达到接近最优量子传感器的表现。2p-QS 接近最优的二维场传感性能，以及其所需的有限实验控制，促使我们在可编程量子传感器上进行实际实现；我们将在第 V 节中从变分量子电路的角度讨论这一实现。

接下来，我们将深入考察最优输入态、测量投影算符和估计量之间的相互作用，以了解这些传感器如何在不同先验宽度下实现（近乎）最优灵敏度。具体而言，我们将借助维格纳准概率分布 [64] 来表示广义布洛赫球上的态 $|\psi_{\rm in}\rangle\langle\psi_{\rm in}|$和测量投影算符 Π_m；该球面对应于传感器的宏观自旋表象。维格纳分布在 $\mathcal{U}(\phi)$ 的作用下如刚体般旋转，而旋转后态 $|\psi_{\boldsymbol{\phi}}\rangle\langle\psi_{\boldsymbol{\phi}}|$ 的维格纳分布与投影测量 Π_m 在布洛赫球面上的重叠积分，对应于观测到相应测量结果 m的概率 $p(m|\boldsymbol{\phi})$。

1. *Optimal 1p-QS*

在先验宽度较小的范围内，1p-QS 是传感的最优方案 $\delta \lesssim 1/N$。在此范围内，最优纠缠输入态为 $|m = 0\rangle$，即一种置换对称态，其中 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 中的原子数相等（我们考虑偶数 N）。该态的维格纳分布如图3 所示，它代表广义布洛赫球赤道周围的一个环，这意味着该态在 z旋转下保持不变，并且对 xy平面内任意轴周围的旋转具有相同的灵敏度。值得注意的是，在这一二维场传感范围内，最优测量是投影测量。图3展示了一个具有代表性的投影算符 Π_m，它与绕 x轴旋转后的输入态具有最大的重叠。相应的测量结果 m 因此被映射为相位估计值 $\boldsymbol{\xi}_m$，表明场沿 x轴取向。

$N+1$ 可能的测量结果被映射为沿圆周均匀分布的相位估计值。这意味着，在先验宽度较小的极限下，1p-QS 的工作方式类似于“罗盘”：也就是说，单次测量只能提供关于 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的信息，而不能提供其大小的信息，因此也无法得知$\mathbf{B}$的大小。二维“罗盘”对微小旋转具有很高的灵敏度，特别适用于监测快速变化的信号。这类似于一维场传感中的 GHZ 态干涉仪 [65]：它在单次测量中只能估计一维场的符号，而无法估计其强度。请注意，场的大小编码在不同测量结果的概率中。因此，通过“罗盘”进行重复测量，我们就能获取有关矢量场的完整信息。

2. *Optimal 2p-QS*

在图4中，我们展示了 2p-QS 在最优工作点（即图2中绿色曲线的极小值）附近 处的态、投影算符和估计器。为了展示维格纳分布，我们利用角动量加法，将两个大小相同的宏观自旋所构成的希尔伯特空间表示为自旋j 表示的直和，即 $\mathcal{H}_{\rm 2p} = \mathbb{C}^{N/2+1} \otimes \mathbb{C}^{N/2+1} = \bigoplus_{j=0}^{N/2} \mathbb{C}^{2j+1}$。我们将算符投影到不同的角动量流形上，并展示对应于各个 j流形的维格纳分布。这意味着，不同 j流形之间的相干性不会呈现在所得的维格纳分布中。尽管如此，这些分布仍直观地展现了传感器的工作方式。2p-QS 的最优输入态在所有自旋表示中均由赤道环构成，这是对最优协变 2p-QS 的一种近似（见附录F），后者是 $|j、\ m = 0\rangle$ 态的叠加。不同自旋流形的使用使 2p-QS 能够扩展可检测场强的范围。

投影测量结果 m^A 和 m^B对应于纠缠投影算符$\Pi_{m^A,\, m^B}$ 被分配给均匀分布的估计量之一，这些估计量近似表示 $N/2+1$ 同心圆环。估计量图中图4 所示的圆环，是根据最优协变 2p-QS 预测的。与二维“罗盘”不同，最优 2p-QS 的一次测量即可提供有关场强和方向的信息。图 4 中展示的三个代表性投影算符可检测绕 x轴的旋转，且旋转强度逐渐增加，也就是说，它们

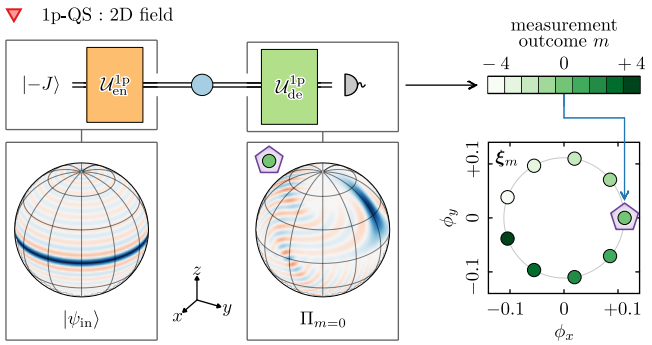


图 3. **二维场的最优 1p-QS 示意图**。该传感器在先验宽度 δ（图中红色三角形所示）下达到最优。2。我们展示了由幺正算符 $|\psi_{in}\rangle$ [制备的输入态 $\mathcal{U}^{1p}_{en}$ (14)] 的维格纳分布，以及一个代表性的投影测量算符 Π_m [，该算符由幺正算符 $\mathcal{U}^{1p}$ de (15)]实现。为便于直观展示，此处给出 $N = 32$对应的维格纳分布；在 $\delta \lesssim 1/N$范围内，对于任意粒子数，其定性特征均相同。测量结果 m 映射为 $\boldsymbol{\xi}_m$ 平面上的估计量$\phi_x\phi_y$，其中与所示 Π_m 相对应的估计量以紫色边框突出显示。

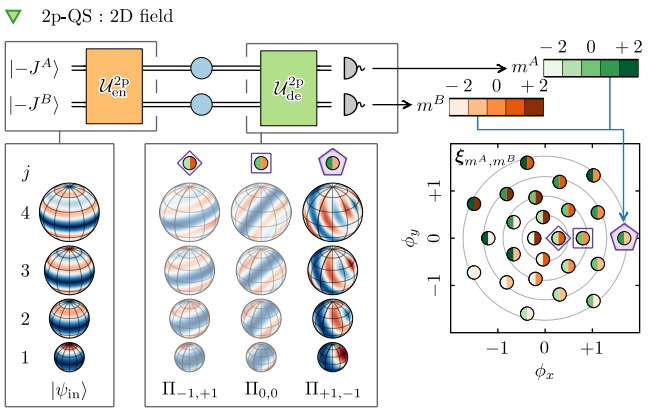


图 4. **二维场最优 2p-QS 的示意图**。对于图 2中绿色三角形所示的先验宽度 δ，该传感器是最优的。我们展示由幺正算符 $\mathcal{U}^{2p}_{en}$ (17)制备的输入态 $|\psi_{in}\rangle$ [的维格纳分布，以及由幺正算符 de ( ) 实现的代表性投影测量算符 $\Pi_{m^A,}$ $^{m^B}$ [$\mathcal{U}^{2p}$ 18] 。我们将其在 2p-QS 空间的自旋-j 表示上的投影可视化，其中 $j = 0, 1, \ldots, N/2$（更多细节见第 IV B 2节）。测量结果 m^A 和 m^B 映射为 $\phi_x\phi_y$ 平面中的估计量$\boldsymbol{\xi}_{m^A,\ m^B}$，与图示的$\Pi_{m^A,\ m^B}$相对应的结果以紫色边框标出。

在绕 x 轴旋转幅度逐渐增大后，与 $|\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$ 有较大的重叠。

V. 变分量子电路

如今的可编程量子传感器属于 NISQ 设备，部署于各种平台之上，支持由原生门构成的精简指令集；尽管如此，这些门仍可高保真地执行，且通常可扩展至数十个、甚至数百个粒子。因此，量子传感器的实际实现，尤其是量子电路模型，必须依赖于将纠缠器和解码器的幺正算符分解为这组原生门。通过变分量子电路可以近似实现这一点。具体而言，以低深度量子电路为 $\mathcal{U}_{en}$ 和 $\mathcal{U}_{de}$ 构造拟设，并分别由一组变分参数 $\boldsymbol{\theta}$ （$\boldsymbol{\vartheta}$）对纠缠器（解码器）进行参数化。给定这样的变分拟设后，变分量子电路类别中的最优纠缠器和解码器对应于计量代价函数的最小值

$$\Delta^2_{var} = \min_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{\xi}} \mathcal{C} \quad (\geq \Delta^2_{OQS}), \tag{20}$$

从而为给定的（纠缠）资源（即资源门集、电路设计和电路深度）确定最佳量子传感器。变分最小化的实际操作细节将在附录 I 中讨论。这一优化既可以在传感器的理论模型中进行，也可以通过在实际物理设备上利用量子反馈回路优化变分参数来实现 [7]。

后一种情况使我们能够在相应的量子电路难以进行经典模拟，以及存在控制误差和噪声的情况下，优化量子传感器。

下面我们介绍一项关于不同深度变分量子电路的研究，这些电路使我们能够接近多参数量子计量学中 OQS 的性能。作为原生门集，我们假设采用单轴扭转（OAT）操作作为纠缠门，并采用均匀自旋旋转作为单量子比特门。此方案的动机在于，可利用囚禁离子链实现可编程量子传感器；在这种方案中，OAT 可通过 Mølmer-Sørensen门 [66, 67], 原生实现，而自旋旋转则通过激光或微波驱动实现。1p-QS 和 2p-QS 可直接由此类平台原生提供的门构成电路来实现。我们指出，腔量子电动力学装置 [68] 以及玻色-爱因斯坦凝聚体的自旋混合物 [69, 70]也具备类似的量子资源。

具体而言，我们将重点讨论图中所示的 2p-QS。1c。上一节中，我们已证明，2p-QS 在二维场传感方面的性能接近最优。这里我们将展示，由单轴扭转和自旋旋转构成的低深度变分电路能够很好地近似最优 2p-QS，并显著提升性能，优于未纠缠传感器（见图 2）。

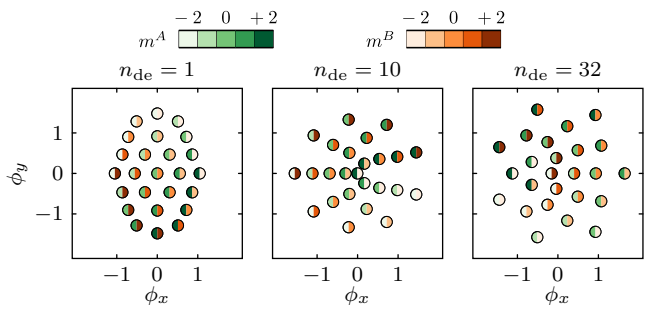


图5。 **优化变分电路的估计量收敛性**。 估计量 $\boldsymbol{\xi}_{m^A,\ m^B}$ 优化的 $N=8$ 原子变分电路，适用于 $\delta\approx 0.75$，其中 $\mathrm{n_{en}}=2$ 和 $\mathrm{n_{de}}=1$，10、32。估计量根据相应的测量结果进行着色 m^A 和 m^B。相应的灵敏度如图 2所示。

A. 2p-QS 的资源门集

2p-QS 假设我们拥有一组本机门操作，可分别作用于分区A 和 B [，见图1(c)]。首先，这包括对各分区内自旋进行均匀旋转，

$$\mathcal{R}_\nu^{A(B)}(\theta)=e^{-i\theta J_\nu^{A(B)}}\qquad \text{with } \nu=x,y,z. \tag{21}$$

此外，我们假设纠缠操作采用单轴扭转（OAT）的形式。这些操作包括

$$\mathcal{T}_z^{A(B)}(\theta)=e^{-i\theta\left(J_z^{A(B)}\right)^2} \tag{22}$$

其中，这些操作分别将分区 A 和 B 内的原子纠缠起来，而 A 与 B 之间的纠缠则通过以下操作生成：

$$\mathcal{T}_z(\theta)=e^{-i\theta\left(J_z^A+J_z^B\right)^2}, \tag{23}$$

由此完成门集 [71]。此类门可在囚禁离子平台上实现，例如用于展示最优一维场传感的平台 [7]。

B. 2p-QS 的电路设计

通过上述基本门编译出近似于 2p-QS 最优纠缠器和解码器的变分电路（见图 1c）。具体而言，我们考虑通过堆叠多个层构造的电路。每一层由一个幺正算符描述

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta_k})=&\mathcal{R}_y^A\left(\theta_k^{(4)}\right)\mathcal{R}_y^B\left(-\theta_k^{(4)}\right)\mathcal{R}_x^A\left(\theta_k^{(3)}\right)\mathcal{R}_x^B\left(\theta_k^{(3)}\right)\\&\times\mathcal{T}_z^A\left(\theta_k^{(2)}\right)\mathcal{T}_z^B\left(\theta_k^{(2)}\right)\mathcal{T}_z\left(\theta_k^{(1)}\right),\end{aligned} \tag{24}$$

取决于向量 $\boldsymbol{\theta}_k=\left(\theta_k^{(1)},\cdots,\theta_k^{(4)}\right)^T$ 中包含的四个参数。每个层中的参数彼此关联（即 $\theta_k^{(4)}$、$\theta_k^{(3)}$、和 $\theta_k^{(2)}$ 分别出现在两个连续的量子门中），因此生成的电路保留了我们在最优 2p-QS 解中发现的一种对称性。因此，幺正算符不会遍历 2p-QS 的整个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{2\mathrm{p}}$，从而减少了给定电路深度下 2p-QS 所需的变分参数数量。

我们用一个 $4\mathrm{n_{en}}$ 维参数向量 $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\theta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n_{en}}})^T$ 对由 $\mathrm{n_{en}}$ 层组成的纠缠幺正算符进行参数化，表示为

$$\mathcal{U}_{\mathrm{en}}^{2\mathrm{p}}(\boldsymbol{\theta})=\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n_{en}}}\right)\cdots\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\theta}_{n_1}\right)\mathcal{R}_y^A\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\mathcal{R}_y^B\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \tag{25}$$

而由 $\mathrm{n_{de}}$ 层组成的解码幺正算符则通过一个 $4\mathrm{n_{de}}+2$ 维参数向量 $\boldsymbol{\vartheta}=$进行参数化 $\left(\vartheta_0^{(1)},\vartheta_0^{(2)},\boldsymbol{\vartheta}_1,\cdots,\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{n_{en}}}\right)^T$ as

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathrm{de}}^{2\mathrm{p}}(\boldsymbol{\vartheta})=&\mathcal{R}_x^A\left(\vartheta_0^{(1)}\right)\mathcal{R}_x^B\left(\vartheta_0^{(1)}\right)\mathcal{R}_y^A\left(\vartheta_0^{(2)}\right)\mathcal{R}_y^B\left(-\vartheta_0^{(2)}\right)\\&\times\mathcal{L}^\dagger(\boldsymbol{\vartheta}_1)\cdots\mathcal{L}^\dagger(\boldsymbol{\vartheta}_{n_{\mathrm{de}}}).\end{aligned} \tag{26}$$

因此，纠缠器深度和解码器深度分别为 $(\mathrm{n_{en}},\ \mathrm{n_{de}})$ 的传感器总共依赖于 $4(\mathrm{n_{en}}+\mathrm{n_{de}})+2$个变分参数。使用代价函数公式 (20) 对电路参数进行变分优化，从而为深度为 $(\mathrm{n_{en}},\ \mathrm{n_{de}})$ 的给定电路找到性能最佳的传感器。

C. 结果：2p-QS 的变分优化

在图2的放大图中，我们考察优化的变分电路在多大程度上逼近由 $N=8$ 个原子组成的最优 2p-QS 的性能。随着解码器深度增加，变分电路不断逼近最优 2p-QS，并最终在 n 较大时收敛于它$_{\mathrm{de}}$。有趣的是，纠缠器深度为 $\mathrm{n_{en}}=2$时便可达到最优灵敏度，这表明实现最优解码幺正算符比实现最优纠缠幺正算符困难得多。这是因为纠缠器幺正算符只需将$|\psi_0\rangle$ 变换为 $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$，而解码器则需要同时将所有测量基变换到所需的基，因此对最优幺正算符施加了更多限制。

要理解变分电路如何逼近 2p-QS，研究最优估计量并观察它们如何随解码器深度增加而变化颇有启发。在图5中，我们展示了优化的变分电路的估计量。深度最小的电路 $\mathrm{n_{de}}=1$ 会使估计量在 $\phi_x\phi_y$平面上的分布不对称，这表明传感器对 ϕ_x 和 ϕ_y的灵敏度并不相同。将深度增加到 $\mathrm{n_{de}}=10$后，估计量的分布变得更加均匀；而 n$_{\mathrm{de}}=32$ 对应的估计量模式则与图4所示的最优 2p-QS 非常接近。

对于目前可用的量子传感器，一个重要问题是，在

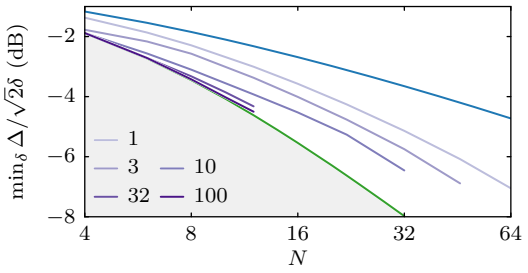


图 6. **变分二维场传感器的性能标度**。后验与先验不确定度之比的最小值随系统规模 N的变化。紫色线表示具有不同解码层数 $\mathrm{n_{de}}$ 、纠缠器深度固定为 $\mathrm{n_{en}} = 2$的变分量子传感器。作为比较，我们还展示了 2p-CS（蓝线）和最优 2p-QS（绿线）的性能。

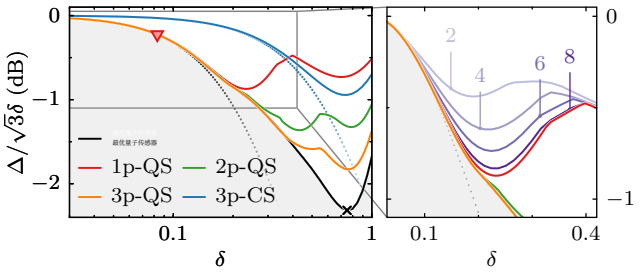


图7。**三维场的贝叶斯量子传感**。左图：后验宽度 Δ 与先验宽度$\sqrt{3}\delta$ 之比，随 δ 变化，针对 $N = 6$ 个原子。黑色标记表示在 $\delta = 0.75$处为 OQS 获得的一个初步数据点。该点与 N分区量子传感器（深灰线）的灵敏度吻合良好。量子传感器（黑色虚线）和经典传感器（蓝色虚线）的渐近界由贝叶斯克拉美-罗界（C7）和（C9）给出。图8中，我们展示了此处红色三角形所示最优传感器的工作原理。放大图（右）：变分电路（紫色线）的性能随总层数 $n_\mathrm{l} = n_\mathrm{en} + n_\mathrm{de}$增加而变化。

固定电路深度下，我们能期待多大的灵敏度增益。为此，我们求出比值 $\Delta/\sqrt{2}\delta$ 在 δ 的最优工作值处、给定电路深度下的最小值。图6展示了该值随系统规模 N变化的情况。有趣的是，我们发现，即使在 $\mathrm{n_{de}} = 1$时，性能也有所提升，且其提升幅度似乎随 N变化。随着电路深度增加，灵敏度和标度表现稳步改善。

VI. 三维场传感

迄今为止，我们关注的都是二维场传感，但前文介绍的技术很容易扩展到三维。在此，我们给出最优和变分三维场量子传感器的初步结果与观察。

我们观察到，三维情况下的 OQS 解用到了一个 SU（2）传感器的全部有效希尔伯特空间（维数为 $\sim N^3$），见附录G。这表明，由少数分区构成的传感器无法很好地近似 OQS，因而难以在先验宽度任意的情况下实现三维场传感。尽管如此，少分区传感器仍能显著优于经典传感器，甚至在先验宽度较小时达到最优性能，正如下文所示。

图7展示了不同传感器在$N = 6$ 个原子下的性能，量化指标为比值 $\Delta/\sqrt{3}\delta$，并扫描 δ 。在先验范围较大时，1p-QS 和 2p-QS 传感器的灵敏度都显著低于 OQS，只有完整的 N分区量子传感器（Np-QS）依靠通用控制，才能达到接近 OQS 的性能。这里，我们将讨论扩展到三分区量子传感器（3p-QS），其在三个分区层面实施均匀控制。然而，3p-QS 的性能仍与 OQS 有明显差异，这凸显了三维 OQS 在其最优工作点附近的复杂性。为了将少分区传感器与经典参照进行比较，我们研究了一种三分区经典传感器，其中原子彼此不纠缠。在这里，我们发现每个分区主要对一个分量敏感。与 3p-CS 相比，2p-QS 和 3p-QS 借助传感原子之间的纠缠，性能有了显著提升。

1. *Optimal 1p-QS*

在先验宽度较小的情况下 $\delta \lesssim 1/N$，1p-QS 的性能与最优性能无法区分。为了深入了解 1p-QS 的解，我们在图8中展示了最优态、测量投影算符和估计量。最优态在广义布洛赫球面上呈现出规则分布的极大值和极小值，凸显了该态高度的对称性。值得注意的是，估计量位于一个球面上。因此，它们仅提供方向信息，传感器由此表现为一个三维“罗盘”。图中所示的测量投影算符类似于输入态绕各自估计量所指定轴旋转后的状态。换言之，每个投影算符都对绕不同轴的旋转敏感。

我们得出结论：在先验宽度较小时，最优传感器对一维、二维和三维场均呈现普适的罗盘式行为。然而，一个关键区别在于：GHZ（$|m = 0\rangle$）态在一维（二维）中无论 N 为何均为最优，而三维场传感的最优态则会随 N 变化，这与 [51, 57, 72–74]中讨论的态类似。

2. *Variational optimization of 1p-QS*

1p-QS 的性能促使我们研究变分电路，以近似最优 1p-QS。如图 1(e) 所示，我们考虑能够参数化

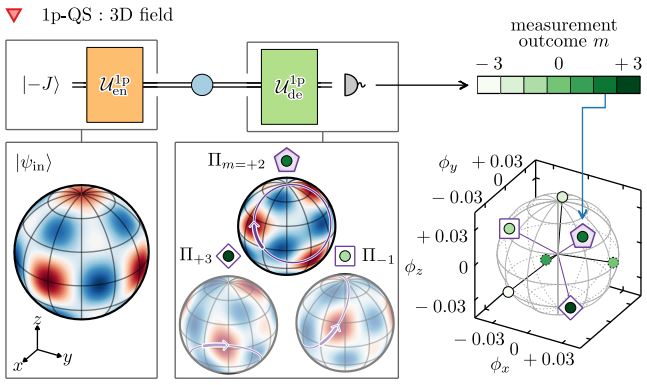


图 8. **三维场最优 1p-QS 的示意图**。对于先验宽度 δ （图 7中红色三角形所示），该传感器达到最优。我们展示了由幺正算符 $\mathcal{U}^{1p}_{en}$ (14)] 制备的输入态 $|\psi_{in}\rangle$ [的维格纳分布，以及由幺正算符 $\mathcal{U}^{1p}{}_{de}$ (15)]实现的代表性投影测量算符 Π_m [。测量结果 m 映射为估计量 $\boldsymbol{\xi}_m$ ，位于 $\phi_x\phi_y$平面；与所示 Π_m 相对应的测量结果以彩色边框突出显示。紫色箭头表明，投影算符的维格纳分布近似于输入态维格纳分布的旋转版本；旋转轴沿着对应估计量所指定的向量方向。 $\boldsymbol{\xi}_m$

terize $\mathcal{U}^{1p}{}_{en(de)}$ 根据

$$\mathcal{U}^{1p}_{en}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_{n_{en}}) \cdots \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_{n_1}) \tag{27}$$

$$\mathcal{U}^{1p}_{de}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathcal{L}^\dagger(\boldsymbol{\vartheta}_1) \cdots \mathcal{L}^\dagger(\boldsymbol{\vartheta}_{n_{de}}). \tag{28}$$

此处，幺正算符由重复应用包含三个基本门的层构造而成。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{T}_z\left(\boldsymbol{\theta}^{(3)}\right) \mathcal{R}_y\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)}\right) \mathcal{R}_x\left(\theta^{(1)}\right). \tag{29}$$

因此，在给定电路深度下，变分参数的数量为 3(n$_{en}$ +n $_{de}$)。在图 7的放大面板中，我们绘制了不同深度的变分电路的性能，并确实发现，深度适中的电路即可接近最优 1p-QS 性能。这些结果凸显了利用现有资源实现三维量子“罗盘”的潜力。

VII. 结论与展望

在本项工作中，我们确定了基本界，并在贝叶斯框架下研究了实际可行的传感器对二维和三维矢量场进行传感时的性能，适用于 $SU(2)$-量子干涉测量。我们建立了一套程序，用于确定能够为 N原子传感器的性能设定基本界的最优量子传感器。此外，我们还引入了实验控制能力有限的传感器，即1p-QS和2p-QS，并研究了它们逼近最优量子传感器的能力。

作为实现实际应用的进一步步骤，我们还模拟了具有限纠缠能力的传感器的变分优化，并考虑了当前最先进囚禁离子系统所具备的资源。

我们对二维场传感的研究揭示了单参数与多参数计量之间的重要相似之处与差异。在一维传感中，最优量子传感器（OQS）在 N 个原子的粒子置换对称子空间内运行，因此，无论先验宽度如何，1p-QS 都是最优的。而在二维传感中，我们发现只有在先验宽度较小时，1p-QS 才是最优的。在这一范围内，它的工作方式如同二维“罗盘”，仅提供有关场方向的信息。这与 GHZ 态干涉仪类似：它在先验宽度较小时对一维传感而言是最优的，但仅提供有关一维场符号的信息。与一维情形不同，我们发现，在先验宽度较大时，2p-QS 的二维场传感性能可接近 OQS。

尽管这种传感器需要比 1p-QS 更多的实验控制，但正如我们通过模拟 2p-QS 的变分电路优化所展示的那样，它仍可在最先进的传感平台上实现。我们的模拟表明，由低深度电路构成的传感器相较于经典（未纠缠）传感器可带来显著提升，而要达到最优性能，可能需要更深的电路。这与一维传感形成对比：此前的理论与实验研究均已表明，低深度变分电路能够实现最优性能。尽管如此，这些结果对于小规模传感器以及涉及宏观数量原子的传感器都具有积极意义；当前技术能够对少量原子实现出色的相干控制，从而构建深电路，使小型量子传感器达到 2p-QS 极限。这类传感器或适用于空间分辨率至关重要的实际应用。另一方面，对于使用大量原子的传感器，我们的结果表明，与未纠缠传感器相比，浅层电路能够显著提升性能。

尽管我们的研究重点是利用无限程 OAT 作为纠缠资源，但许多很有前景的量子传感平台都具有有限程相互作用，例如固态系统或光镊阵列中的中性原子 [75–78]。计量代价函数的变分优化可以直接推广到有限程相互作用，正如 [6, 79–81] 针对其他计量代价函数所做的那样。然而，在这种情况下，少体量子传感器的分类并不适用，而且用经典算法模拟完整的多体问题颇具挑战，因此，在物理量子器件上进行反馈回路优化就更为可取。此外，N原子的 1p-QS 和 2p-QS 也可以分别由一个长度为 $J = N/2$的单个大宏观自旋 [62]，或两个长度各为 $J = N/4$ 的纠缠宏观自旋 [82] 来实现，从而为基于量子多能级系统的量子传感器实现最优传感提供了一条途径。

我们还将研究简要拓展到了

三维场传感问题。在这里，我们发现，具有少量分区的传感器与最优传感器在性能上存在显著差异。因此，寻找能够高效近似三维场传感中最优量子传感器的电路，仍是一项开放性挑战。然而，在先验宽度较小的情况下，我们再次发现，1p-QS 基本上是最优的。与一维和二维情况类似，在这一条件下，它充当一个三维“罗盘”，估计量排列在球面上。此外，我们还证明，这样的三维“罗盘”可以通过低深度变分电路进行良好近似，为其实现实验实现铺平了道路。

总之，我们强调了寻找最优量子传感器的重要性。这类传感器能够以量子物理所允许的极限精度运行，并将其实现为变分量子传感器。这不仅对于通过精密测量发现新物理至关重要 [83]，对于量子计算等实际应用也同样重要。本文讨论的可编程原子传感器可以利用纠缠量子门等共有的量子资源，与原子量子计算系统集成。这样，嵌入系统中的电磁场最优量子传感器便能精确探测并监测噪声场，并通过最优反馈机制提升量子器件的稳定性。

致谢

我们感谢 C. Marciniak 和 Q. Liu 对稿件提出意见。计算结果使用因斯布鲁克大学的 LEO 高性能计算基础设施获得。因斯布鲁克的研究得到美国空军科学研究办公室（AFOSR）通过 IOE 资助（编号 FA9550-19-1-7044 LASCEM）提供的支持、欧盟地平线 2020 研究与创新计划通过 PASQuanS 2 提供的支持，以及西蒙斯超量子物质合作项目的支持；该项目由西蒙斯基金会资助（651440, P.Z.）。此外，研究还得到 Institut f¨ur Quanteninformation 的支持。因斯布鲁克理论组是美国国家科学基金会量子飞跃挑战计划的成员。AS 感谢印度科学研究所 CV Raman 博士后奖学金的支持。

附录A：矢量场传感器的物理实现

第 II A 节对用于感测矢量场的 $SU(2)$ 干涉仪进行了形式化描述。文中将其表述为由 N 二能级原子组成的系综，并用集体角动量算符 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$描述；这些原子均匀耦合到静态（直流）矢量场 $\boldsymbol{\mathcal{B}}$，其哈密顿量由式（1）给出。附录 A1总结了磁力测量背景下这类哈密顿量所对应的各种物理情形。此外，在第 IV节中，我们定义了有限控制传感器，其中 N 二能级原子等价于一个或两个具有较大角动量的“宏观自旋”（见图 1）。相应地，附录 A2给出了直接利用宏观自旋实现矢量场传感器的示例。

1. 使用由 N 个二能级原子组成的系综进行矢量场传感

直流磁力测量 – 对于单个原子，磁场会耦合到由精细结构（或超精细结构）流形 J (或 F) 提供的塞曼能级，其关系为$H_{\mathrm{M}} = -\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}$。这里，磁偶极矩 $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{B}} = \mu_{\mathrm{B}} g \boldsymbol{\mathcal{J}}/\hbar$ 由玻尔磁子 μ_{B}、朗德 g 因子 g 以及总角动量算符 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$（或 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$）给出。在给定的角动量流形内，该塞曼哈密顿量在简并微扰理论下成立，因此塞曼分裂与磁场呈线性关系。

一个代表二能级原子的塞曼流形示例是 $^2S_{1/2}$ 囚禁离子可编程量子传感器实验中使用的 ^{40}Ca 离子的基态[7]。对于 N 原子，将这些单原子贡献相加即可得到哈密顿量（1），从而实现对（静态）磁场三个分量的传感。

交流磁力测量——实验通常会施加偏置场 $\mathcal{B}_0$，该偏置场定义了量子化轴，并解除塞曼态的简并，这与核磁共振中的情况相同。继续以 $^2S_{1/2}$ 流形为例，静态偏置场会引入塞曼分裂 ω，从而定义 z轴。横向交流磁场可以驱动这一塞曼跃迁。在旋波近似成立的条件下，变换到旋转坐标系会得到一个静态哈密顿量；对于 N 个原子，该哈密顿量的形式如式（1）所示。在此情况下，待测磁场的三个分量分别是静态磁场相对于偏置场的偏差，以及驱动磁场的同相分量和反相分量（拉比频率）。

在交流磁场测量的例子中，有效纵向分量和横向分量（相对于偏置场）的原点并不相同，因此我们对这些量的先验知识通常也不相同。所以，正文中采用的各向同性先验密度假设（10）可能并不准确。在附录B中，我们将讨论如何把正文所述结果推广到各向异性先验概率密度的情形。

上述讨论可以推广到属于不同塞曼流形、具有不同朗德 g 因子的原子能级对，但这会导致各向异性耦合哈密顿量。

2. 利用宏观自旋进行矢量场传感

在第IV节中，我们定义了有限控制传感器，即 1p-QS 和 2p-QS（见图1）。在 1p-QS 中，

N 原子受到均匀控制，因此它等价于一个由单个角动量为 $J = N/2$ 的宏观自旋构成的传感器。对于 2p-QS，N 原子被划分为两个大小相等的分区 A 和 B，并在每个分区层面及整个系综范围内施加均匀控制。因此，2p-QS 等价于一个由两个物理上可区分、彼此纠缠的“宏观自旋”构成的传感器，每个宏观自旋的角动量为 $J^A = J^B = N/4$。这里，我们简要阐述宏观自旋在大角动量流形中的直接物理实现。这些可实现为大角动量塞曼流形、用于电场传感的里德堡原子中的 $SO(4)$ 对称流形，以及具有大轨道角动量态的光子干涉测量。

用于磁力测量的大型塞曼流形 – 如附录中已指出 A1，囚禁离子和原子光镊实验中可用的大型塞曼精细与超精细流形，会产生如下形式的哈密顿量（1）。一个例子是 $^{40}Ca^{+}$ 的 $3^2D_{5/2}$ 流形，它可以在量子位操作中进行操控和纠缠。其他适用于使用量子位开展交流磁力测量原理验证实验的平台包括镝原子[84] [62]，其电子自旋为$J = 8$；以及钬 [85, 86] 和铒[87]，它们的基态具有较大的超精细分裂。

利用里德堡原子进行电测量–高度激发且具有较大轨道角动量的里德堡态呈现线性斯塔克效应。这与氢原子的 SO(4) 对称性以及龙格-楞次矢量的守恒有关。属于给定 n-流形的态，其中 n 为主量子数，彼此简并，并且对电场高度敏感 [44]。由此产生的电场与里德堡态耦合的哈密顿量同样可以写成形式（1），其中该流形的有效角动量随主量子数 $J \sim n$ 的变化而标度为 n。参考文献 [82]概述了一种将多个原子的龙格-楞次矢量纠缠起来的方法。

具有轨道角动量的光子——另一种可用作原理验证型多维 SU(2) 传感器试验平台的是光子，其中可将维数可调的量子位编码到每个光子的轨道角动量自由度中 [19]。态制备、幺正相位编码和测量均可实现 [52]。然而，在不同光子之间制备纠缠是一项挑战。

附录 B：推广至其他先验概率密度

在正文中，我们考虑相位向量的先验概率密10度（），其在 $\boldsymbol{\phi}$ 中是各向同性的。在许多实际应用中，对场分量 B_ν的了解可能并非各向同性，因此相位也可能并非各向同性。请注意，一维和二维传感是三维场的各向异性情形，此时我们分别完全了解场的两个和一个个分量。因此，根据各向异性的程度，可以将一维或二维解用作起点，为给定的各向异性先验密度寻找最优解。参考文献 [6] 讨论了一维传感的变分电路。

我们作出的另一项假设是，先验密度以零为中心。存在已知偏置场时，如果能在探测时间期间施加一个恰好抵消该偏置的额外外场，这一假设仍然成立。然而，若无法做到这一点，则必须单独处理先验密度以相位向量 $\boldsymbol{\phi}_0$ 为中心的更一般情形，因为 $\boldsymbol{\phi}_0 \cdot \boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{J}$ 不对易，这使二维和三维场传感有别于一维场传感。在一维情形下，我们可以在探测时间之后施加一个幺正算符来补偿 $\boldsymbol{\phi}_0$；但由于非对易性，这对于二维和三维场是不可能的。作为替代，可以尝试找出能够将 $\boldsymbol{\phi}_0$ 的影响考虑在内的其他纠缠器和解码器电路。

最后，对于在原点处各向同性且只有一个极大值的概率密度，我们预计高斯先验解是一个良好的近似。

附录 C：多维场传感的贝叶斯 Cram´er-Rao 类界

在本附录中，我们详细阐述费 Fisher 信息（FI）框架与本文采用的贝叶斯框架之间的联系（见第 IIC节）。我们首先回顾 Cram´er-Rao（CR）不等式，该不等式在费 Fisher 信息方法中为多参数估计的性能给出下界 [9]。然后，我们详细说明费 Fisher 信息方法所依据的假设，并介绍范特里斯不等式，该不等式将费 Fisher 信息矩阵与贝叶斯均方误差联系起来。最后，我们给出多维场传感中贝叶斯均方误差的相应界。

费 Fisher 信息方法中的参数估计考虑的是估计量 $\boldsymbol{\xi}_\mu$，这些估计量在某个相位值 $\boldsymbol{\phi}_0$ [9]附近局部无偏。相应的均方误差（5）随后由 CR 不等式（界）给出下界

$$\mathrm{MSE}(\boldsymbol{\phi}_0) \geq \mathrm{Tr}[F(\boldsymbol{\phi}_0)^{-1}], \tag{C1}$$

$$F(\boldsymbol{\phi}) = \sum_\mu \frac{\boldsymbol{\nabla} p(\mu|\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{\nabla}^T p(\mu|\boldsymbol{\phi})}{p(\mu|\boldsymbol{\phi})}, \tag{C2}$$

其中 $F(\boldsymbol{\phi})$ 是条件概率 $p(\mu|\boldsymbol{\phi})$ 的（经典）费 Fisher信息矩阵3），在 $\boldsymbol{\phi}$处。这里，$\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial_{\phi_x}, \partial/\partial_{\phi_y}, \partial/\partial_{\phi_z})^T$是梯度算符，包含相对于 $\boldsymbol{\phi}$ 各分量的偏导数。

费 Fisher信息矩阵取决于输入态和测量，因此其上界为量子费 Fisher信息（QFI）矩阵，$F_Q(\boldsymbol{\phi})$；该矩阵是通过对量子物理 [9]所允许的所有测量 $\{M_\mu\}$ 优化均方误差而得到的。请注意，在多参数情形下，相应的量子 CR 界 $\mathrm{MSE}(\boldsymbol{\phi}_0) \geq \mathrm{Tr}[F_Q(\boldsymbol{\phi}_0)^{-1}]$ 通常无法达到饱和。

由于不同参数由彼此不对易的哈密顿量编码，针对这些参数的最优测量可能彼此不兼容。Holevo CR界处理了测量不兼容问题 [1, 9]。然而，在多维场传感的情况下，对于由偶数个原子组成的最优传感器，量子 CR 界与 Holevo CR 界重合 N [20, 21]。我们将在下文考虑这种情形，因此量子 CR 不等式给出了紧确界。

一般而言，不仅无偏估计量，最优测量投影算符也显式依赖于 ϕ_0，因此必须事先知道 ϕ_0 的精确值，才能围绕该值进行最优测量。如果能够对同一个未知参数向量重复进行多次测量，或者有多个系综可用于测量同一个参数向量，就可以克服这一缺点。在这些条件下，可以采用自适应方案：先获得一个初步估计，再据此执行最优测量策略 [88]。

在贝叶斯意义上，初步估计可以理解为关于待测相位的先验知识；当先验密度较窄时，这使两个框架得以建立联系。这种联系由范特里斯不等式给出 [89],该不等式为贝叶斯代价定义了类似 CR 的界。其多参数推广 [9] 对 BMSE（6）给出下界：

$$\mathcal{C} \geq \mathrm{Tr}\left[\left(\overline{F}+\mathcal{I}\right)^{-1}\right], \tag{C3}$$

其中 $\overline{F} = \int d\boldsymbol{\phi}\, F(\boldsymbol{\phi})\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})$ 是对先验密度取平均后的费 Fisher信息矩阵，而 $\mathcal{I}$ 是先验密度的费 Fisher信息矩阵

$$\mathcal{I} = \int d\boldsymbol{\phi}\, \frac{\boldsymbol{\nabla}\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\nabla}^T\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})}{\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})}. \tag{C4}$$

不等式（C3）为贝叶斯框架下多维场传感器灵敏度提供了一个类似海森堡极限的界。

具体而言，对于一个 N-原子量子传感器，在采用高斯先验（10）时，不等式（C3）由以下参数定义。先验的 FI 矩阵$\mathcal{P}_\delta$（$\boldsymbol{\phi}$）为

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\delta^2}\mathbb{1}_d, \tag{C5}$$

其中，$\mathbb{1}_d$ 是 d 维单位矩阵，d 为 B场维数。平均 FI 矩阵由量子费舍尔信息矩阵上界约束（对于偶数 N） [20, 22, 57]

$$\overline{F} \leq F_Q = \frac{N(N+2)}{d}\mathbb{1}_d. \tag{C6}$$

将（C5）和（C6）代入不等式（C3），我们得到类似海森堡极限的界

$$\Delta^2_{\mathrm{OQS}} \geq \frac{d}{N(N+2)/d + 1/\delta^2}, \tag{C7}$$

它定义了正文图 2 和 7 中的黑色虚点线。

最后，多维场传感的标准量子极限由对应于最佳经典输入态的 FI 矩阵确定

$$\overline{F} \leq F_{\mathrm{SQL}} = \frac{N}{d}\mathbb{1}_d. \tag{C8}$$

相应的贝叶斯标准量子极限界为

$$\Delta^2_{\mathrm{SQL}} \geq \frac{d}{N/d + 1/\delta^2}. \tag{C9}$$

标准量子极限界在正文图 2 和7 中以蓝色点线表示。

附录 D： $SU(2)$传感器的不可约希尔伯特空间

在本附录中，我们详细介绍描述 $SU(2)$ 传感器的希尔伯特空间（见第 III A 节）。一个由 N 个量子比特组成的一般量子系统，其量子态存在于一个维度呈指数级增长的希尔伯特空间 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ 中。尽管如此，生成元$J_{x,\ y,\ z}$ 的对称性以及在量子比特置换下的不变性，会将传感器所探索的有效希尔伯特空间的维度缩减至关于 N 的多项式量级。

更准确地说，根据 Weyl定理 [90], ，完整的 N 量子比特空间可分解为正交子空间：

$$\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes N} = \bigoplus_{j=0(\frac{1}{2})}^{N/2} \mathbb{C}^{2j+1} \otimes \mathbb{C}^{\ell_j}, \tag{D1}$$

其中，j 标记 $SU(2)$ 的不可约表示，直和的下限在 N 为偶数或奇数时分别为 0 或 $1/2$。每个自旋-j 表示出现的重数为 $\ell_j = \binom{N}{N/2-j}\frac{2j+1}{N/2+j+1}$ [91]。重要的是，对于除最大自旋表示$j = J \equiv N/2$以外的所有表示，自旋-j 等价表示的数量 ℓ_j 都超过自旋自由度的数量 $\ell_j \geq (2j+1)$。因此，对于任意纯量子态，总能找到一种由等价自旋-j 表示构成的分解，使得该态仅占据$2j+1$，而非与每个 j [37, 38, 58]相关联的全部 ℓ_j 个表示。由于相位 $\boldsymbol{\phi}$ 是通过幺正算符 $U(\boldsymbol{\phi}) \in SU(2)$ 写入的，且这些算符不会耦合不同的角动量 j 及其等价表示，因此不失一般性，我们可以将每个 j-子空间描述为一对自旋-j，它们存在于空间 $\mathbb{C}^{2j+1} \otimes \mathbb{C}^{2j+1}$ 中。此处，每对中的第一个自旋仅受 $SU(2)$ 幺正算符 $U(\boldsymbol{\phi})$ 的作用。

将所有自旋-j 对和单个对称子空间（$j = J$）相加，我们得到一个 $SU(2)$ 传感器的不可约希尔伯特空间。

$$\mathcal{H}_{\mathrm{OQS}} \equiv \mathbb{C}^{2J+1} \oplus \bigoplus_{j=0(\frac{1}{2})}^{J-1} \mathbb{C}^{2j+1} \otimes \mathbb{C}^{2j+1}. \tag{D2}$$

空间的维数仅随系统规模的立方 次方增长 N，即 $d_N = (N+1) + \sum_{j=0}^{N/2-1} \binom{1}{2}(2j+1)^2 = 1 + N(N^2+5)/6$. 不可约希尔伯特空间规模的多项式增长，对于高效地最小化计量代价函数（6）至关重要；该最小化采用正文中介绍的数值方法（见第 IIIA节），并在附录 E中作了详细说明。

附录 E：作为多凸问题的代价最小化

在本附录中，我们讨论传感器优化问题的多凸性，并提出一种相应的高效算法，用于求解贝叶斯传感问题（参见第 IIIA 节）。我们首先将代价函数（6）改写为一种突出其多凸性且适用于数值优化的形式。为此，定义线性映射如下：

$$\Lambda_0[\bullet] = \int d\boldsymbol{\phi}\, U(\boldsymbol{\phi}) \bullet U(\boldsymbol{\phi})^\dagger \mathcal{P}(\boldsymbol{\phi}), \tag{E1}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1[\bullet] = \int d\boldsymbol{\phi}\, \boldsymbol{\phi}\, U(\boldsymbol{\phi}) \bullet U(\boldsymbol{\phi})^\dagger \mathcal{P}(\boldsymbol{\phi}), \tag{E2}$$

其中，幺正算符 $U(\boldsymbol{\phi}) = \exp[-i\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{J}]$ 施加相位$\boldsymbol{\phi}$。用这些映射表示，式（6）可写为

$$\mathcal{C} = \mathrm{var}(\boldsymbol{\phi}) - \sum_\mu \Big(2\,\boldsymbol{\xi}_\mu^T \cdot \mathrm{Tr}\left\{ M_\mu \boldsymbol{\Lambda}_1[\rho_{\mathrm{in}}] \right\} - \boldsymbol{\xi}_\mu^T \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu\, \mathrm{Tr}\left\{ M_\mu \Lambda_0[\rho_{\mathrm{in}}] \right\} \Big), \tag{E3}$$

其中 $\mathrm{var}(\boldsymbol{\phi}) = \int d\boldsymbol{\phi}\, \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\phi})$ 表示先验相位方差，且 $\rho_{\mathrm{in}} = |\psi_{\mathrm{in}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{in}}|$。

式（E3）表明，若固定其余两组变量，则关于三组变量（$|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$、$\{M_\mu\}$和 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$）中每一组的计量代价函数最小化都是一个凸优化问题。更准确地说：

(i) 固定 $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$ 和 $\{M_\mu\}$ 时，关于估计量 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$的问题是一个二次最小化问题。最优解可明确表示为最小均方误差估计量（8），即相对于后验概率密度 $p(\boldsymbol{\phi}|\mu)$ 计算得到的相位平均值。

(ii) 固定 $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$ 和 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$时，代价函数（E3）关于测量算符 $\{M_\mu\}$呈线性，测量算符是半正定的（$M_\mu \succeq 0$），并满足 POVM 条件 $\sum_\mu M_\mu = \mathbb{1}$。因此，在态和估计量固定时，代价函数最小化可重述为一个半定规划（SDP）。只要问题规模是多项式级的（本例即是如此），就可以使用多项式时间求解器高效地求解这一优化问题。

（iii）对于固定的 $\{M_\mu\}$ 和 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu\}$，该优化问题关于量子态是二次的。将代价函数（E3）写成如下形式即可看出

$$\mathcal{C} = \langle\psi_{\mathrm{in}}|\Upsilon|\psi_{\mathrm{in}}\rangle,$$

其中厄米算符 Υ 为

$$\Upsilon = \mathrm{var}(\boldsymbol{\phi}) - \sum_\mu \Big(2\,\boldsymbol{\xi}_\mu^T \cdot \boldsymbol{\Lambda}_1^{\#}[M_\mu] - \boldsymbol{\xi}_\mu^T \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu\, \Lambda_0^{\#}[M_\mu] \Big),$$

其中 $\Lambda_0^{\#}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_1^{\#}$ 分别是方程（E1）和（E2）的伴随线性映射。因此，最优态 $|\psi_{\mathrm{in}}^*\rangle$ 是 Υ 对应于最低本征值的本征态。

代价函数（E3）关于三组参数 (i)–(iii) 的多凸性，使得使用数值算法来寻找最优多参数量子传感器成为可能。尽管多凸问题通常难以在全局范围内求解，但基于块坐标下降的局部方法效果良好，并在实践中得到广泛应用 [92]。例如，在单参数计量学中，优化代价函数（E3）会变成一个双凸问题（将第 (i) 点和第 (ii) 点合并为一个针对投影测量的二次优化问题），从而快速且可靠地收敛到唯一解 [5]。

一般情况下，优化过程可概括如下：以随机的输入态、测量和估计量初始化最小化问题。随后，我们迭代求解子问题 (i)-(iii)，直至收敛到最优传感器解 $|\psi_{\mathrm{in}}^\star\rangle$、$\{M_\mu^\star\}$ 和 $\{\boldsymbol{\xi}_\mu^\star\}$，并使代价函数 (E3) [93]最小化。将此算法与输入态和测量的协变拟设相结合（见附录 F），即可获得正文中展示的最优量子传感器结果。

附录 F：2p-QS 的协变态与 POVM

此处，我们给出用于二维场传感的协变 [1, 9] 态和测量，$\mathbf{B} = \{\mathrm{B}_x、\mathrm{B}_y\}$，适用于 2p-QS（见第 IIIA节）。这不仅阐明了核心思想，这些思想还可推广至包括三维场传感在内的最优量子传感器情形；同时，也使我们能够高效确定大系统规模下 2p-QS 的性能极限，如图 6所示。

使用附录E 的方法处理场方向先验未知的二维场情形（即 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\phi}) = \mathcal{P}(|\boldsymbol{\phi}|)$），我们得到以下使代价函数最小化的最优输入态（E3），适用于 2p-QS：

$$|\psi_{\mathrm{in}}^{(2\mathrm{p})}\rangle = \bigoplus_{j=0}^{J} \alpha_j\, |j, 0\rangle\,. \tag{F1}$$

态（F1）由以下各项本征态的直和构成：J_z 的本征值为零（我们考虑偶数 N）的所有 j-表示，其对应的振幅为 α_j。因此，该态在绕z-轴旋转时保持不变。各向同性先验密度的数值解表明，输入态（F1）与相应最优测量的组合所得到的均方误差（5）在 z-旋转下也保持不变。我们可以

通过采用如下参数化测量来施加旋转对称性：

$$M_{q\bar{\varphi}} = e^{-i\bar{\varphi}J_z} M_q e^{i\bar{\varphi}J_z}, \tag{F2}$$

使得所有 POVM算符均由种子算符确定 M_q。相应的旋转不变估计量为 $\boldsymbol{\xi}_{q\bar{\varphi}} = \{r_q \cos\bar{\varphi},\ r_q \sin\bar{\varphi}\}$。这里，$r_q$ 和$\bar{\varphi}$ 是相位估计值的极坐标，分别对应场强和方向。最优 2p-QS 的估计量在正文图3 和 4 中以同心圆环的形式示出。

对于输入态采用拟设（F1），对于测量采用拟设（F2），并采用相应的估计量和 φ-不变先验 [$\mathcal{P}$（r）的极坐标表示]，，代价函数（E3）可表示为

$$\mathcal{C} = \mathrm{var}(r) - \sum_q \left(2r_q \mathrm{Tr}\left\{M_q \varrho_1\right\} - r_q^2 \mathrm{Tr}\left\{M_q \varrho_0\right\}\right), \tag{F3}$$

其中，$\mathrm{var}(r) = 2\pi \int r^3 dr\, \mathcal{P}(r)$ 为先验方差，且

$$\varrho_0 = \int r dr\, \mathcal{P}(r) \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\varphi J_z} \left|\psi_r\right\rangle \left\langle\psi_r\right| e^{i\varphi J_z},$$
$$\varrho_1 = \int r^2 dr\, \mathcal{P}(r) \frac{d\varphi}{2\pi} \cos\varphi\, e^{-i\varphi J_z} \left|\psi_r\right\rangle \left\langle\psi_r\right| e^{i\varphi J_z}.$$

这里，我们定义态 $\left|\psi_r\right\rangle \equiv e^{-irJ_x} \left|\psi_{\mathrm{in}}\right\rangle$。

代价函数（F3）关于 $\{M_q\}$（它们是半正定算符）呈线性，$M_q \succeq 0$，并满足经过修改的 POVM 条件 $\sum_q \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\varphi J_z} M_q e^{i\varphi J_z} = \mathbb{1}$。因此，如附录 E中所述，对于固定的态 $\left|\psi_{\mathrm{in}}\right\rangle$ 和估计量 $\{r_q\}$，最小化（F3）是一个半定规划程序。

因此，具有非对易生成元 $\{\phi_x, \phi_y\}$ 的两个参数估计问题 J_x，J_y 已被拆分为两个独立问题：利用生成元 r 估计场强 J_x，以及利用生成元 φ 估计场方向 J_z。后者可通过相应的协变 POVM（F2）显式求解，而前者这一单参数问题则适用于附录 E中的数值方法。请注意，最终得到的估计 r 这一单参数问题需要对 POVM 进行优化。这使其在性质上不同于通常通过投影测量求解的单参数计量问题。

原本的双参数问题显著简化为单参数估计任务，使我们能够高效地获得最优二体二维场传感器。具体而言，最优解至多包含 $N/2+1$ 个秩1的测量种子算符 M_q。我们将在 [61]中介绍协变试探态方法的推广，以求得用于二维和三维场传感的OQS。

附录G：1p-QS和2p-QS的希尔伯特空间

在此，我们确定了 OQS 在不同条件下占据的两个重要子空间，它们分别对应于正文中介绍的 1p-QS 和 2p-QS 的希尔伯特空间（见第 IV 节）。首先，我们发现，在先验宽度较小的极限下，$\delta \lesssim 1/N$，二维和三维场的 OQS 仅占据 $J = N/2$中的最大自旋表示（ $\mathcal{H}_{\mathrm{OQS}}$ （D2）。置换对称子空间描述了 1p-QS，因此

$$\mathcal{H}_{1\mathrm{p}} \equiv \mathbb{C}^{2J+1}. \tag{G1}$$

对于任意先验宽度下的二维场传感，我们发现 OQS并未利用整个 $\mathcal{H}_{\mathrm{OQS}}$，（D2），因为最优输入态由每个 j-子空间中的弱纠缠自旋对构成。因此，二维场 OQS的有效希尔伯特空间可以用2p-QS很好地近似，其中包含重数为1的j-表示：

$$\mathcal{H}_{2\mathrm{p}} \equiv \mathbb{C}^{J+1} \otimes \mathbb{C}^{J+1} = \bigoplus_{j=0(\frac{1}{2})}^{J} \mathbb{C}^{2j+1}. \tag{G2}$$

由参考文献 [22] 中的讨论可知，在原子数趋于无穷大的极限下，$N \to \infty$，2p-QS 达到二维场传感的基本界，因此收敛于最优量子传感器。我们将在参考文献 [61] 中更详细地讨论这一收敛过程。

相比之下，三维场的最优量子传感器利用了完整的 $\mathcal{H}_{\mathrm{OQS}}$ (D2)，并在最优输入态中采用强纠缠自旋对，分布于 j-子空间。因此，通常无法用由少量预先设定的分区构成的传感器来高效表示。三维场传感器的最优分区方式应取决于传感器尺寸 N，这是一个值得进一步研究的课题。

附录 H：纠缠能力有限的传感器优化

在第 IV 节中，我们讨论了纠缠能力有限的传感器的性能。这些传感器处于 $\mathcal{H}_{1\mathrm{p}}$，$\mathcal{H}_{2\mathrm{p}}$ 并且仅能进行投影测量。这里，我们将介绍如何优化这类传感器。

为了将优化限制在投影测量范围内，我们根据式（15）和式（18），分别为 1p-QS 和 2p-QS 表示测量投影算符 Π_m 和$\Pi_{m^A,\ m^B}$。我们进一步将解码酉算符参数化为 $\mathcal{U}^{1\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}} = e^{-iH^{1\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}}}$（$\mathcal{U}^{2\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}} = e^{-iH^{2\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}}}$），其中 $H^{1\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}}$（$H^{2\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}}$）是厄米矩阵。最后，执行附录 E 中讨论的迭代过程，关键区别在于：将 POVM 集合 $\{M_\mu\}$上的优化替换为在厄米矩阵集合 $\{H^{1\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}}\}$ [$\{H^{2\mathrm{p}}{}_{\mathrm{de}}\}$]上的优化。

与一般的 POVM 情形不同，对于参数化投影测量的厄米矩阵而言，该优化问题并非凸的。通常，优化会从多个随机初始条件出发，通过迭代逐步收敛

到每个起始点对应的局部最小值，然后从收敛的解中选取全局最小值。对厄米矩阵各元素进行“蛮力”优化，使这种方法仅适用于小型系统。不过，这种方法的结果为变分量子电路的性能提供了一个可达到的下限，而变分量子电路同样受到投影测量的限制。

附录 I：变分优化

在第V 节和VI节中，我们给出了通过优化变分量子电路得到的结果，其中幺正算符 $\mathcal{U}_{\mathrm{en(de)}}$ 由参数向量参数化量 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\vartheta}$。本研究所考虑的门均具有周期性；尽管如此，参数空间仍会随参数数量呈指数增长，也就是说，随着电路深度增加，无法保证收敛到代价函数的全局最小值（20）。

本文的结果是通过基于精确梯度计算的梯度下降优化得到的。为逼近全局最小值，我们从多个初始条件出发进行优化，并保留最佳结果。首先，我们对随机初始参数进行采样，随后通过选取在传感器其他设置下最优的参数作为起点，进一步优化变分解。具体而言，我们以不同 N 和/或 δ 下的最优参数为起点，为较短的电路添加层，并从较长的电路中移除最接近恒等变换的层。

[1] A. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland 统计与概率系列（North-Holland Publishing Company，1982）。[2] R. Demkowicz-Dobrza´nski、M. Jarzyna 和 J. Kołodyński, *Quantum Limits in Optical Interferometry* 60 2015 《光学进展》，第 卷（Elsevier，）第 345 – 435 页。[3] C. L. Degen、F. Reinhard 和 P. Cappellaro，量子传感，《现代物理评论》89，035002（2017）。[4] L. Pezz`e、A. Smerzi、M. K. Oberthaler、R. Schmied 和 P. Treutlein，非经典原子系综态的量子计量学，《现代物理评论》90，035005（2018）。[5] K. Macieszczak、M. Fraas 和 R. Demkowicz-Dobrza´nski，集体退相干下的贝叶斯量子频率估计，《新物理学杂志》16，113002（2014）。[6] R. Kaubruegger、D. V. Vasilyev、M. Schulte、K. Hammerer 和 P. Zoller，拉姆齐干涉测量与原子钟的量子变分优化，物理评论 X 11，041045（2021）。[7] C. D. Marciniak、T. Feldker、I. Pogorelov、R. Kaubrueg-ger、D. V. Vasilyev、R. van Bijnen、P. Schindler、P. Zoller、R. Blatt 和 T. Monz，可编程量子传感器的最优计量学，《自然》603，604（2022）。[8] M. Gessner、L. Pezz`e 和 A. Smerzi，多参数量子计量学的灵敏度界，《物理评论快报》121，130503（2018）。[9] R. Demkowicz-Dobrza´nski、W. G´orecki 和 M. Guţă，超越量子费 Fisher 信息的多参数估计，物理学杂志 A：数学与理论 53，363001（2020）。[10] J. Liu、H. Yuan、X.-M. Lu 和 X. Wang，量子费舍尔信息矩阵与多参数估计，物理学杂志 A：数学与理论 53，023001 2019( )。[11] J. S. Sidhu 和 P. Kok，量子参数估计的几何视角，AVS Quantum Science 2，014701（2020），https://doi.org/10.1116/1.5119961。[12] J. S. Sidhu、Y. Ouyang、E. T. Campbell 和 P. Kok，不相容参数同时估计的紧致界，物理评论 X 11，011028（2021）。[13] P. C. Humphreys、M. Barbieri、A. Datta 和 I. A. Walmsley，《量子增强多相位估计》，《物理评论快报》111，070403（2013）。[14] M. Gessner、A. Smerzi 和 L. Pezz`e，《传感器网络中实现量子增强的多参数压缩》，《自然·通讯》11，3817（2020）。[15] Z. Huang、C. Lupo 和 P. Kok，《距离和速度的量子极限估计》，《PRX量子》2，030303（2021）。[16] F. Belliardo、V. Cimini、E. Polino、F. Hoch、B. Piccirillo、N. Spagnolo、V. Giovannetti 和 F. Sciarrino，《在含噪装置中优化量子增强的贝叶斯多参数估计》，arXiv 10.48550/ARXIV.2211.04747（2022）。[17] Y. Baamara、M. Gessner 和 A. Sinatra，《量子增强的多参数估计与场的压缩传感》，arXiv 10.48550/ARXIV.2208.00640（2022）。[18] L. O. Conlon、T. Vogl、C. D. Marciniak、I. Pogorelov、S. K. Yung、F. Eilenberger、D. W. Berry、F. S. Santana、R. Blatt、T. Monz、P. K. Lam 和 S. M. Assad，《在量子计算平台上实现接近最优的纠缠集体测量》，Nature Physics 10.1038/s41567-022-01875-7（2023）。[19] M. Eriksson、A. Z. Goldberg、M. Hiekkam¨aki、F. Bouchard、G. Leuchs、R. Fickler 和 L. L. Sanchez-Soto，《利用多平面光转换传感旋转》，arXiv 10.48550/ARXIV.2301.10265（2023）。[20] C. Vaneph、T. Tufarelli 和 M. G. Genoni，《双相位自旋旋转的量子估计》，《Quantum测量与量子计量学》1，12（2013）。[21] T. Baumgratz 和 A. Datta，《多维场的量子增强估计》，《物理评论快报》116，030801（2016）。[22] W. G´orecki 和 R. Demkowicz-Dobrza´nski，《海森堡极限区间中的多参数量子计量学：多次重复情形与完全优化的比较》，《物理评论A》106，012424（2022）。[23] D. Budker 和 M. Romalis，《光学磁力测量》，Nature Physics 3，227（2007）。[24] D. Budker 和 D. F. J. Kimball，编，《*Optical Magnetometry* 2013 》（剑桥大学出版社，）。[25] D. Le Sage、K. Arai、D. R. Glenn、S. J. DeVience、L. M. Pham、L. Rahn-Lee、M. D. Lukin、A. Yacoby、A. Komeili,

以及 R. L. Walsworth，《活细胞的光学磁成像》，《自然》496，486（2013）。[26] N. Behbood、F. Martin Ciurana、G. Colangelo、M. Napoli- tano、M. W. Mitchell 和 R. J. Sewell，《利用冷原子磁力计实时跟踪矢量场》，《应用物理快报》102，173504（2013），https://doi.org/10.1063/1.4803684。[27] S.-Y. Lee、M. Niethammer 和 J. Wrachtrup，_《基于 $s = \frac{3}{2}$ 电子自旋的矢量磁测量》，《物理评论B》92，115201（2015）。[28] T. Thiele、Y. Lin、M. O. Brown 和 C. A. Regal，《通过微波偏振重构实现自校准矢量原子磁测量》，《物理评论快报》121，153202 2018( )。[29] H. Zheng、Z. Sun、G. Chatzidrosos、C. Zhang、K. Naka- mura、H. Sumiya、T. Ohshima、J. Isoya、J. Wrachtrup、A. Wickenbrock 和 D. Budker，《沿金刚石中单一轴的氮空位中心无微波矢量磁测量》，《物理评论应用》13，044023（2020）。[30] G. Wang、Y.-X. Liu、Y. Zhu 和 P. Cappellaro，《利用金刚石中的单个氮空位中心进行纳米尺度矢量交流磁测量》，《纳米快报》21，5143（2021），pMID: 34086471。[31] H. Fan、S. Kumar、J. Sedlacek、H. K¨ubler、S. Karimkashi 和 J. P. Shaffer，《基于原子的射频电场传感》，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》48，202001（2015）。[32] M. Brownnutt、M. Kumph、P. Rabl 和 R. Blatt，《离子阱测量表面附近的电场噪声》，《现代物理评论》87，1419（2015）。[33] J. A. Sedlacek、A. Schwettmann、H. K¨ubler 和 J. P. Shaffer，《利用蒸气室中的铷里德堡原子进行基于原子的矢量微波电测量》，《物理评论快报》111，063001（2013）。[34] F. Albarelli、J. F. Friel 和 A. Datta，《评估多参数量子计量学的 Holevo Cram´ér-Rao界》，《物理评论快报》123，200503（2019）。[35] M. Tsang、H. M. Wiseman 和 C. M. Caves，《波形估计的基本量子极限》，《物理评论快报》106，090401（2011）。[36] E. Bagan、M. Baig、A. Brey、R. Mu˜noz-Tapia 和 R. Tar- rach，《自旋方向的最优编码与解码》，《物理评论A》63，052309（2001）。[37] G. Chiribella、G. M. D'Ariano、P. Perinotti 和 M. F. Sacchi，《用于参考系传输的量子资源高效利用》，《物理评论快报》93，180503（2004）。[38] E. Bagan、M. Baig 和 R. Mu˜noz-Tapia，《没有非局域关联的量子逆向工程与参考系对准》，《物理评论A》70，030301(R)（2004）。[39] J. Kahn，《SU(d)中幺正操作的快速速率估计》，《物理评论A》75，022326（2007）。[40] W. Wasilewski、K. Jensen、H. Krauter、J. J. Renema、M. V. Balabas 和 E. S. Polzik，《量子噪声极限与纠缠辅助磁测量》，《物理评论快报》104，133601（2010）。[41] R. J. Sewell、M. Koschorreck、M. Napolitano、B. Dubost、N. Behbood 和 M. W. Mitchell，《通过自旋压缩实现超越投影噪声极限的磁灵敏度》，《物理评论快报》109，253605（2012）。[42] C. F. Ockeloen、R. Schmied、M. F. Riedel 和 P. Treut- lein，《利用扫描探针原子干涉仪进行量子计量学》，《物理评论快报》111，143001（2013）。[43] A. Arias , G. Lochead , T. M. Wintermantel , S. Helmrich , 以及 S. Whitlock，里德堡缀饰拉姆齐干涉仪和静电计的实现，《物理评论快报》122，053601（2019）。[44] A. Facon、E.-K. Dietsche、D. Grosso、S. Haroche、J.-M. Raimond、M. Brune 和 S. Gleyzes，基于处于薛定谔猫态的里德堡原子的灵敏静电计，《自然》535，262（2016）。[45] A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、A. S. Zibrov、H. Pichler、S. Choi、J. Cui、M. Rossignolo、P. Rembold、S. Montangero、T. Calarco、M. Endres、M. Greiner、V. Vuletić 和 M. D. Lukin，里德堡原子阵列中薛定谔猫态的生成与操控，Science 365，570（2019），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.aax9743。[46] J. M. Robinson、M. Miklos、Y. M. Tso、C. J. Kennedy、T. Bothwell、D. Kedar、J. K. Thompson 和 J. Ye，对两台低于量子投影噪声极限的自旋压缩光学钟进行直接比较，arXiv 10.48550/ARXIV.2211.08621（2022）。[47] L. D. Carr、D. DeMille、R. V. Krems 和 J. Ye，冷分子和超冷分子：科学、技术与应用，《新物理学杂志》11，055049（2009）。[48] L. Anderegg、L. W. Cheuk、Y. Bao、S. Burchesky、W. Ketterle、K.-K. Ni 和 J. M. Doyle，超冷分子光镊阵列，Science 365，1156（2019），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.aax1265。[49] A. Bermudez、F. Jelezko、M. B. Plenio 和 A. Retzker，远距离氮空位中心之间由电子介导的核自旋相互作用，《物理评论快报》107，150503（2011）。[50] N. Y. Yao、L. Jiang、A. V. Gorshkov、P. C. Maurer、G. Giedke、J. I. Cirac 和 M. D. Lukin，室温固态量子信息处理器的可扩展架构，《自然·通讯》3，800（2012）。[51] F. Bouchard、P. de la Hoz、G. Björk、R. W. Boyd、M. Grassl、Z. Hradil、E. Karimi、A. B. Klimov、G. Leuchs、J. Řeháček 和 L. L. Sánchez-Soto，利用极值马约拉纳星座实现极限量子计量，《光学》4，1429（2017）。[52] F. Brandt、M. Hiekkamäki、F. Bouchard、M. Huber 和 R. Fickler，利用光子的全场空间模式实现高维量子门，《光学》7，98（2020）。[53] M. Kitagawa 和 M. Ueda，自旋压缩态，《物理评论A》47，5138（1993）。[54] M. Cerezo、A. Arrasmith、R. Babbush、S. C. Benjamin、S. Endo、K. Fujii、J. R. McClean、K. Mitarai、X. Yuan、L. Cincio 和 P. J. Coles，变分量子算法，《自然综述：物理学》3，625（2021）。[55] 我们将幺正相位编码属于 SU(2) 群的干涉仪称为 SU(2)干涉仪。[56] D. Yang、S. F. Huelga 和 M. B. Plenio，通过连续测量高效提取用于传感的信息，arXiv 10.48550/ARXIV.2209.08777（2022）。[57] P. Kolenderski 和 R. Demkowicz-Dobrzanski，保持参考系对齐的最优态与柏拉图立体，《物理评论A》78，052333（2008）。[58] G. Chiribella、G. M. D'Ariano、P. Perinotti 和 M. F. Sacchi，使似然最大化的协变量子测量，《物理评论A》70，062105（2004）。[59] 优化问题的凸性保证每个局部最小值都是全局最小值。

[60] 维希尔伯特空间的 POVM复杂度上界由一个包含$d_N^2 \sim N^6$个满秩测量算符的 POVM 给出。我们发现，OQS解明显比该上界简单。[61] D. V. Vasilyev 等，最优多参数量子计量：矢量场传感（未发表）。[62] T. Chalopin、C. Bouazza、A. Evrard、V. Makhalov、D. Dreon、J. Dalibard、L. A. Sidorenkov 和 S. Nascimbene，利用高磁性原子的非经典自旋态实现量子增强传感，《自然·通讯》9，4955（2018）。[63]小原子数的结果适用于只能使用少量原子执行传感任务的场传感情形，例如为了保持良好的空间分辨率。[64] J. P. Dowling、G. S. Agarwal 和 W. P. Schleich，一般角动量态的维格纳分布：在一组二能级原子中的应用，《物理评论A》49，4101（1994）。[65] J. J. Bollinger、W. M. Itano、D. J. Wineland 和 D. J. Heinzen，利用最大关联态实现最优频率测量，《物理评论A》54，R4649（1996）。[66] D. Leibfried、E. Knill、S. Seidelin、J. Britton、R. B. Blakestad、J. Chiaverini、D. B. Hume、W. M. Itano、J. D. Jost、C. Langer、R. Ozeri、R. Reichle 和 D. J. Wineland，六原子"薛定谔猫"态的制备，《自然》438，639（2005）。[67] T. Monz、P. Schindler、J. T. Barreiro、M. Chwalla、D. Nigg、W. A. Coish、M. Harlander、W. Hänsel、M. Hennrich 和 R. Blatt，14量子比特纠缠：制备与相干性，《物理评论快报》106，130506（2011）。[68] I. D. Leroux、M. H. Schleier-Smith 和 V. Vuletić，集体原子自旋腔压缩的实现，《物理评论快报》104，073602（2010）。[69] M. F. Riedel、P. Böhi、Y. Li、T. W. Hänsch、A. Sinatra 和 P. Treutlein，基于原子芯片的量子计量纠缠生成，《自然》464，1170（2010）。[70] C. Gross、T. Zibold、E. Nicklas、J. Estève 和 M. K. Oberthaler，非线性原子干涉仪超越经典精度极限，《自然》464，1165（2010）。[71] 请注意，扩展此门集（例如允许绕任意轴扭转） [94, 95] 可使参数化更加高效，即达到特定性能所需的门数更少。[72] J. Zimba，通过马约拉纳表示构造反相干自旋态，EJTP 3，143（2006）。[73] O. Giraud、P. Braun 和 D. Braun，量化量子性与寻找量子女王，《新物理学杂志》12，063005（2010）。[74] G. Björk、A. B. Klimov、P. de la Hoz、M. Grassl、G. Leuchs 和 L. L. Sánchez-Soto，极值量子态及其马约拉纳星座，《物理评论A》92，031801(R)（2015）。[75] A. W. Young、W. J. Eckner、W. R. Milner、D. Kedar、M. A. Norcia、E. Oelker、N. Schine、J. Ye 和 A. M. Kaufman，光镊钟实现半分钟尺度的原子相干性和高相对稳定性，《自然》588，408（2020）。[76] T. M. Graham、M. Kwon、B. Grinkemeyer、Z. Marra、X. Jiang、M. T. Lichtman、Y. Sun、M. Ebert 和 M. Saffman，二维中性原子量子比特阵列中的里德堡介导纠缠，《物理评论快报》123

[77] I. S. Madjarov、J. P. Covey、A. L. Shaw、J. Choi、A. Kale、A. Cooper、H. Pichler、V. Schkolnik、J. R. Williams 和 M. Endres，《高保真纠缠及碱土里德堡原子的探测》，Nature Physics 16, 857 (2020)。[78] N. Schine、A. W. Young、W. J. Eckner、M. J. Martin 和 A. M. Kaufman，《光学钟量子比特阵列中的长寿命贝尔态》，Nature Physics 18, 1067 (2022)。[79] R. Kaubruegger、P. Silvi、C. Kokail、R. van Bijnen、A. M. Rey、J. Ye、A. M. Kaufman 和 P. Zoller，《可编程量子传感器上的变分自旋压缩算法》，《物理评论快报》123, 260505 (2019)。[80] B. Koczor、S. Endo、T. Jones、Y. Matsuzaki 和 S. C. Benjamin，《变分态量子计量学》，《新物理学杂志》22, 083038 (2020)。[81] T.-X. Zheng、A. Li、J. Rosen、S. Zhou、M. Koppenh¨ofer、Z. Ma、F. T. Chong、A. A. Clerk、L. Jiang 和 P. C. Maurer，《偶极相互作用自旋系统中计量学态的制备》，npj Quantum Information 8, 150 2022( )。[82] A. Kruckenhauser、R. van Bijnen、T. V. Zache、M. D. Liberto 和 P. Zoller，《用于量子模拟的高维SO(4)对称里德堡流形》，Quantum Science and Technology 8, 015020 (2022)。[83] K. A. Gilmore、M. Affolter、R. J. Lewis-Swan、D. Barberena、E. Jordan、A. M. Rey 和 J. J. Bollinger，《利用二维囚禁离子晶体量子增强传感位移和电场》，Science 373, 673 (2021), https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.abi5226。[84] M. Ringbauer、M. Meth、L. Postler、R. Stricker、R. Blatt、P. Schindler 和 T. Monz，《囚禁离子通用量子多能级量子处理器》，Nature Physics 18, 1053 (2022)。[85] M. Saffman 和 K. Mølmer，《通过钬原子集体编码扩展中性原子里德堡门量子计算机》，《物理评论A》78, 012336 (2008)。[86] F. Robicheaux、D. W. Booth 和 M. Saffman，《附着于超精细分裂原子实的里德堡态长程相互作用理论》，《物理评论A》97, 022508 (2018)。[87] A. Patscheider、B. Zhu、L. Chomaz、D. Petter、S. Baier、A.-M. Rey、F. Ferlaino 和 M. J. Mark，《在大自旋费米子的致密三维阵列中控制偶极交换相互作用》，Physical Review Research 2, 023050 (2020)。[88] O. Barndorff-Nielsen 和 R. D. Gill，《量子统计中的费 Fisher 信息》，Journal of Physics A: Mathematical and General 33, 4481 (2000)。[89] H. L. V. Trees，*Detection, Estimation and Modulation* (Wiley，纽约，1968)。[90] W. Fulton 和 J. Harris，*Representation Theory*，数学研究生教材丛书，第129卷（Springer，纽约，纽约州纽约市，2004）。[91] J. I. Cirac、A. K. Ekert 和 C. Macchiavello，《单量子比特的最优纯化》，《物理评论快报》82, 4344 1999( )。[92] X. Shen、S. Diamond、M. Udell、Y. Gu 和 S. Boyd，《规范化多凸规划》，载于 *2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)* (IEEE，2017)，第895–900页。[93] 我们注意到，由于最优测量算符 $\{M_q^\star\}$的秩较低，使用增广拉格朗日非线性规划算法 [96] 求解子问题(ii)中的半定规划更为有利。[94] M. Schulte

, 230501（2019）.

, V. J. Mart´ınez-Lahuerta , M. S. Scharnagl , and

K. Hammerer，采用广义单轴扭转回波的拉姆齐干涉测量，《Quantum》4，268（2020年）。[95] T. G. Thurtell 和 A. Miyake，为现实的变分贝叶斯量子计量优化单轴扭转ogy，arXiv 10.48550/ARXIV.2212.12461 (2022)。[96] S. Burer 和 R. D. Monteiro，利用低秩分解求解半定规划的非线性规划算法，MathematicalProgramming **95**，329 (2003)。