arXiv:2302.07833v1 [math.DG] 2 Feb 2023

李伪群作用下微分算子的不变量与等价

VALENTIN LYCHAGIN & VALERIY YUMAGUZHIN

Abstract. 本文研究相对于代数李伪群的线性微分算子不变量。随后，我们利用这些不变量和 n-不变量原理，得到微分算子的标准形（或模型），并解决代数李伪群作用下的等价问题。作为这些方法应用的贯穿示例，我们采用局部辛同胚伪群。

1. Introduction

对位法与复调不仅在音乐和艺术中发挥着关键作用，在科学和数学中也同样如此。

例如，以不变量理论为例，在研究二元形式不变量的最初阶段，Sylvester J.J. 提出通过转矢量构造不变量（[23],[18]）；Gordan P.（[3]）不仅证明了二元形式的多项式不变量代数是有限生成的，而且还表明，可以通过转矢量找到不变量，而转矢量是具体的微分算子。

这解释了戈登为何否认希尔伯特关于不变量代数有限性的证明。

在先前的出版物（[10],[9],[11]）中，我们讨论了将微分不变量用于寻找代数不变量的问题。这与 Hilbert-Rosenlicht 定理（[21]）和 Lie-Tresse 定理（[7]）之间的差异有关；这两类定理描述了代数不变量代数和微分不变量代数的结构。代数方法与微分方法之间的这种交互似乎极富成效，尤其是在应用于微分算子时。

还值得指出的是，描述正则轨道所需的基本不变量数量，对于代数不变量和微分不变量而言存在本质差异。因此，Rosenlicht 定理要求代数不变量的数量等于正则轨道的余维，而余维会随着所考察的代数形式的次数呈指数增长。另一方面，Lie-Tresse 定理，即 n-不变量原理（[1]），所需的不变量数量则本质上少得多。因此，在描述线性标量微分算子时，我们只需要 n 个不变量，其中 n 等于底空间维数。

本文研究李伪群作用下的标量线性微分算子轨道（以及某些非线性微分算子类的轨道）；关于所有局部微分同胚构成的完备伪群这一情形，已在（[14]）中进行研究。

在这种情况下，我们颠倒代数不变量与微分不变量之间的关系，并说明，为了找到所需数量的微分不变量，可以利用算子符号的代数不变量。由于这些不变量的数量受底空间维数限制，我们在此使用转矢量。

本文结构如下。首先，我们回顾变换李伪群及其不变量的基础知识。随后，我们讨论 n-不变量原理，以及基于处于一般位置的不变量构造的线性微分算子模型。这使我们能够解决关于给定变换李伪群的微分算子等价问题。我们以辛同胚李伪群为例说明这一方法。为此，我们引入辛转接。仅利用算子符号，它们便可用于构造微分算子的辛不变量。

然而，有一类算子，其符号的辛不变量通常永远不会处于一般位置。这类算子的特征是：其符号的辛轨道是正则且恒定的。我们称这类算子为恒定类型算子（[12]）。

对于这类阶数为 $k > 2$ 的算子，我们关联一个唯一的仿射联络。该联络是辛的，也就是说，它保持辛结构形式以及符号不变。我们将这些联络称为 Wagner 联络（[24]）；Wagner 首先发现了与二维流形上的三次对称张量相关联的这类联络。这些联络曲率为零，但具有非平凡的挠率。我们利用这些联络将微分算子分解（或量子化）为对称张量之和，并通过纯代数方法得到额外的不变量。对于二阶微分算子，我们使用 Levi-Civita联络来分解微分算子并寻找额外的不变量。

2. Lie pseudogroups and Lie equations

所谓伪群 $\mathcal{P}$ 作用于连通流形 M，是指（[22]）一组局部微分同胚，即 M 中开集之间的微分同胚，并且在以下操作下封闭：

(1) 开域上的限制： $\phi \in \mathcal{P}$, $U \subset M$ 为开集，则$\phi|_U \in \mathcal{P}$；若对于任意开域 $U \subset \mathrm{dom}(\phi)$, $\phi|_U \in \mathcal{P}$ ，则$\phi \in \mathcal{P}$；(2) 复合： ϕ, $\psi \in \mathcal{P}$，则 $\phi \circ \psi \in \mathcal{P}$，若 $\mathrm{dom}\,(\phi) \subset \mathrm{im}\,(\psi)$；(3) 逆：$\phi \in \mathcal{P} \Rightarrow \phi^{-1} \in \mathcal{P}$，且 $\mathrm{id}_M \in \mathcal{P}$。

若对于任意 $a, b \in M$，都存在$\phi \in \mathcal{P}$，使得 $\phi(a) = b$，则称该作用是传递的；若在 M. 上不存在 $\mathcal{P}$ 不变叶状结构，则称该作用是本原的。

令 δ_k：$D_k(M) \to M$为局部微分同胚的 k-阶喷射丛。纤维 $\delta_k^{-1}(a)$（其中 $a \in M$）由点处局部微分同胚的 k-阶喷射 $[\phi]_a^k$ ϕ 组成。

我们有丛塔

$$\to D_k(M) \overset{\delta_{k,k-1}}{\to} D_{k-1}(M) \to \cdots \to D_2(M) \overset{\delta_{2,1}}{\to} D_1(M) \overset{\delta_{1,0}}{\to} M \times M \overset{\delta}{\to} M,$$

其中映射 $D_k(M) \overset{\delta_k,}{\to} D_{k-1}(M)$ 是将 k-阶喷射$[\phi]_a^k$ 约化为 $(k-1)$-阶喷射的映射 $[\phi]_a^{k-1}$.

给定一个伪群 $\mathcal{P}$，我们将 $G_k \subset D_k(M)$ 定义为以下子集，

$$G_k = \left\{ [\phi]_a^k, \phi \in \mathcal{P}, a \in \operatorname{dom}(\phi) \right\}.$$

若伪群 $\mathcal{P}$ 满足所有 G_k 都是 $D_k(M)$ 中的光滑子流形，且 δ_k：$G_k \to M$ 是丛δ_k：$D_k(M) \to M$.的光滑子丛，则称其为正则的。

注意，伪群中的复合诱导出部分定义的复合，并在 G_k. 丛中定义了李代数丛结构。取 G_k 点 $a \times a$ 处对角线 $\Delta \subset M \times M$的纤维，我们得到微分群 $D_k(a)$ 的子群 $G_k(a)$，它们由微分同胚 $\phi \in \mathcal{P}$ 的 k-jet$[\phi]_a^k$ 构成，使得 $\phi(a) = a$.

我们称正则伪群 $\mathcal{P}$ 为李伪群，如果该塔

$$\to G_k \overset{\delta_{k,k-1}}{\to} G_{k-1} \overset{\delta_{k-1,k-2}}{\to} G_{k-2} \to \cdots \to G_1 \overset{\delta_{1,0}}{\to} M \times M \overset{\delta}{\to} M, \quad (1)$$

是光滑丛的塔，并且它形式上定义了一个完全可积的方程 G（称为李方程，更多细节见 [8]），其一阶延拓 $G_k^{(1)} \subset G_{k+1}$对于所有 $k \geq 1$.

根据嘉当–库兰尼希延拓定理还可知，在这种情况下存在一个数 k_0，称为伪群的阶 $\mathcal{P}$，使得 i阶延拓 $G_{k_0}^{(i)}$ 与 G_{k_0} 重合于 G_{k_0+i}，对于所有 $i \geq 0$.

换言之，$\mathcal{P}$ 是微分方程G_{k_0}的解，其阶数为 k_0.

此外，嘉当–K¨ahler 定理指出，在解析情形下，也就是说，当所讨论的所有流形和映射都是解析的情况下，伪群 $\mathcal{P}$ 的元素恰好是方程 G_{k_0}.的所有局部解

我们在本文中只会用到一次这一对 $\mathcal{P}$ 的限制（并会对此作出说明），因此本文其余部分中的伪群将是由光滑局部微分同胚构成的伪群。

还值得注意的是，丛 $D_k(M)$ 的纤维具有代数流形的内在结构，而流形 M 上局部微分同胚在这些丛上的延拓也是代数的。

特别地，微分群 $D_k(a)$ 及其作用都是代数的。

我们称李伪群 $\mathcal{P}$ （更多细节见 [7], ）是代数的，如果 $G_k \subset D_k(M)$ 也继承了这种代数性，即纤维 G_k 是纤维 $D_k(M)$ 中的代数子流形，且复合律也是代数的。

特别地，群 $G_k(a)$ 及其作用都是代数的。

还要指出，这种代数性概念也可应用于任意光滑丛 $\pi: E(\pi) \to M.$ 的截面的喷射丛 $\pi_k: J^k(\pi) \to M$。点变换（即 $E(\pi)$ 的局部微分同胚）在投影 $\pi_{k,0}: J^k(\pi) \to E(\pi)$ 的纤维上的延拓，在标准喷射坐标下是有理的，因此这些纤维具有由标准喷射坐标的选取所诱导的代数结构。

我们还将形式可积微分方程 $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ 称为代数的，如果丛 $\pi: E(\pi) \to M$ 是自然且代数的，也就是说，π 的纤维具有不可约代数流形的结构，且该结构在 M 的局部微分同胚伪群作用下保持不变；投影 $\pi_{k,0}: \mathcal{E} \to E(\pi)$ 的纤维也都是不可约代数流形。

在这种情形下，我们将（[7]）阶的有理微分 $\mathcal{P}$–不变量定义为 l 次延拓 $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi)$ 上的 $\mathcal{P}$–不变有理函数。

由于我们假设 $\mathcal{P}$ -作用在流形M上传递，因此这些不变量完全由它们在固定基点 $b \in M$.上方的纤维$\mathcal{E}^{(l)}_b \subset J^{k+l}_b(\pi)$ 上的取值决定

因此，阶数为 $(k+l)$ 的有理微分 $\mathcal{P}$–不变量构成一个域$\mathcal{F}_l$；根据 Rosenlicht 定理（[21]），该域能够区分 $\mathcal{E}^{(l)}_b$ 中正则 G_{k+l}（b）轨道，而 $\mathcal{F}_l$ 的超越次数等于正则 G_{k+l}（b）– 轨道的余维数。

此外，Lie-Tresse 定理（[7]）指出，所有有理微分 $\mathcal{P}$–不变量 $\mathcal{F}_*$ 构成的域由有限个 $\mathcal{P}$–不变量和 $\mathcal{P}$–不变导子生成（通常，这些导子是特雷斯导子，它们与一组处于一般位置的有理微分 $\mathcal{P}$不变量相关联）。

3. Linear differentiial operators and their $\mathcal{P}$-invariants

本文采用以下记号：向量丛 π 的光滑截面的 $C^\infty(M)$-模 $E(\pi) \to M$ 记作 $C^\infty(\pi)$。

我们用 $\pi_k\colon J^k(\pi)\to M$ 表示丛 π 的截面的 k 阶喷射丛，并用 $\pi_{k,\,l}\colon J^k(\pi)\to J^l(\pi)\quad k>l$ 表示自然投影。

令 $\psi_k\colon \mathbf{Diff}_k(M)\to M$ 为阶数为 $\leq k.$ 的线性标量微分算子丛

那么 $C^\infty(\psi_k)=\mathbf{Diff}_k(M)$ 是定义在 M 上、阶数为 $\leq k.$ 的线性标量微分算子模

以下这些模的正合列将发挥关键作用

$$0\to \mathrm{Diff}_{k-1}(M)\to \mathrm{Diff}_k(M)\overset{\mathrm{smbl}}{\to}\Sigma_k(M)\to 0. \tag{2}$$

这里，$\Sigma_k(M)$ 是次数为 k 的对称向量场模，$\Sigma_k(M)=C^\infty(\tau_k)$，其中 $\tau_k\colon S^k(TM)\to M$ 是切丛的 k 阶对称幂，而符号映射将算子 $A\in\mathbf{Diff}_k(M)$ 映射为其符号 $\sigma_A\in\Sigma_k(M)$。

请注意，$\mathcal{P}$ 作用在 M 上的局部微分同胚的任意李伪群也作用于所有这些丛。

流形 $J^l(\psi_k)$ 或 $J^l(\tau_k)$ 上关于延拓后的 $\mathcal{P}$-作用不变的有理函数，称为微分算子或 k-对称向量场的有理$\mathcal{P}$不变量。

由于 $\mathcal{P}$ 在 M 上的作用具有传递性，这些不变量由固定基点 $b\in M.$ 处纤维 $J^l_b(\psi_k)$ 或 $J^l_b(\tau_k)$ 上的取值所确定。

若所考虑算子的阶数固定，我们用 $\mathcal{F}_{k,\,l}$（或更简洁地记作 $\mathcal{F}_l$）表示阶数为 $\leq l$ 的微分算子的有理 $\mathcal{P}$ 不变量域，并用 $\mathcal{F}^\sigma_{k,\,l}$ 表示阶数为 $\leq l$ 的对称向量场的有理 $\mathcal{P}$不变量域。

正合列 (2) 表明，$\mathcal{F}^\sigma_{k,\,l}$ 是 $\mathcal{F}_{k,\,l}$ 的子域，这使我们能够以纯代数的方式求得微分算子的 $\mathcal{P}$ 不变量。

此外，我们还有自然的通用微分算子（[14]）

$$\begin{aligned}\Box\ &:\ C^\infty\left(J^\infty(\psi_k)\right)\to C^\infty\left(J^\infty(\psi_k)\right),\\ \Box\ &:\ C^\infty\left(J^l(\psi_k)\right)\to C^\infty\left(J^{l+k}(\psi_k)\right), l\geq 0,\end{aligned}$$

这使我们能够扩展可用的 $\mathcal{P}$-不变量集合。

该算子是自然的（因此是 $\mathcal{P}$-不变的），也就是说，它与 M 的微分同胚的延拓相交换，因此定义了映射

$$\Box:\mathcal{F}_{k,l}\to\mathcal{F}_{k,k+l},$$

对于 $l\geq 0.$

注意（见 [14]），在标准喷射坐标（$x_1,..,x_n,u_\alpha$）中，其中（$x_1,..,x_n$）是 M 上的局部坐标，α 是长度为 $|\alpha|\leq k$ 的多重指标，且 $u_\alpha(A)=A_\alpha$，如果 $A=\sum A_\alpha\partial^\alpha$ 在坐标 α（$x_1,..,x_n$）中，则有

$$\Box=\sum_{|\alpha|\leq k}u_\alpha\frac{d^{|\alpha|}}{dx^\alpha},$$

其中 $\dfrac{d}{dx_i}$ 是全导数。

我们在（[14]）中使用的 n-不变量原理适用于 M 的所有局部微分同胚组成的伪群；对于任意李伪群的作用，同样可以几乎逐字应用这一原理。

具体而言，设 I_1、...、$I_n \in C^\infty\left(J^l(\psi_k)\right)$，$n = \dim M$ 是在开集 $\mathcal{O} \subset J^l(\psi_k)$ 中处于一般位置的 $\mathcal{P}$-不变量，即

$$\widehat{d}I_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d}I_n \neq 0$$

$\widehat{\ }$ 关于 $\mathcal{O}$，其中 d 是全微分。

那么，

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\Box\left(I^\alpha\right),$$

其中 $I^\alpha = I_1^{\alpha_1} \cdots I_n^{\alpha_n}$、$|\alpha| \leq k$ 也都是 $\mathcal{P}$-不变量。

此外，它们在算子 A 处的取值（即它们在对应于算子 A 的截面 S_A 的 l-阶 jets 上的限制）与局部坐标 $x_1 = I_1$（A）...，$x_n = I_n$（A）中的算子 A 的系数 A_α 相同。

因此，我们得到以下关于 $\mathcal{P}$-不变量的描述。

定理1. 设 I_1，...，$I_n \in C^\infty\left(J^l\left(\psi_k\right)\right)$，$n = \dim M$ 是定义在 M 上的标量线性微分算子的有理 $\mathcal{P}$-不变量，且它们在开集 $\mathcal{O} \subset J^l\left(\psi_k\right)$ 中处于一般位置。

那么，开集 $\mathcal{O}$ 上标量线性微分算子的所有有理 $\mathcal{P}$-不变量，恰好都是不变量（I_1，...，I_n，I_α，$|\alpha| \leq k$）及其特雷斯导数 $\dfrac{d^\beta I_\alpha}{dI^\beta}$ 的有理函数。

4. $\mathcal{P}$-models and $\mathcal{P}$-equivalence of linear differentialoperators

上述定理使我们能够构造线性微分算子的 $\mathcal{P}$-模型（或 $\mathcal{P}$-标准形）。

具体而言，与 ([14]) 类似，我们考虑坐标为 $(y_1, .., y_n, Y_\alpha, |\alpha| \leq k)$ 的空间 $\Phi_k = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\binom{n+k}{k}}$。

设 $I_1, \ldots, I_n \in C^\infty\left(J^l(\psi_k)\right)$ 是一般位置的有理 $\mathcal{P}$-不变量，定义在开集 $\mathcal{O} \subset J^l(\psi_k)$ 上。那么，在区域 $\mathcal{O}' \subset M$ 内的任意线性微分算子 $A \in \mathrm{Diff}_k(M)$，其中 $S_A(\mathcal{O}') \subset \mathcal{O}$，都定义一个映射

$$\begin{aligned} \phi_B &: \mathcal{O}' \to \Phi_k, \\ \phi_B &: x \in \mathcal{O}' \to \left(y_1 = I_1(A), ..., y_n = I_n(A), Y_\alpha = I_\alpha(A)\right). \end{aligned}$$

如果函数 $(I_1(A) \ldots, I_n(A))$ 是区域 $\mathcal{O}'$ 中的坐标，我们就称一对 $(A, \mathcal{O}')$ 为调整的；子流形 $\Sigma_A = \phi_A(\mathcal{O}') \subset \Phi_k$ 称为该算子在区域 $\mathcal{O}'$ 中的一个 $\mathcal{P}$-模型。

设 $B \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 是另一个微分算子，使得有序对 $(B, \mathcal{O}'')$ 针对相同的 $\mathcal{P}$-不变量 $I_1, \ldots, I_n$ 及模型是调整的

算子 A 和 B 相同，

$$\phi_A(\mathcal{O}') = \phi_B(\mathcal{O}''). \tag{3}$$

设 ψ_{AB}： $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}''$ 是一个微分同胚，使得 $\psi_{AB}^*(I_i(B)) = I_i(A)$。

定理 2（n-不变量原理）。设 $(A, \mathcal{O}')$ 和 $(B, \mathcal{O}'')$ 是针对同一组 $\mathcal{P}$-不变量 $I_1, \ldots, I_n$ 的调整对。

那么，算子 $A, B \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 在开集 $\mathcal{O}'$ 和 $\mathcal{O}''$ 上是 $\mathcal{P}$-等价的，当且仅当它们的 $\mathcal{P}$-模型重合 (3)，且 $\psi_{AB} \in \mathcal{P}$。

注 3. 在李方程完全确定伪群 $\mathcal{P}$ 的情况下，定理的最后一个要求可以表述得更具建设性。也就是说，微分同胚 ψ_{AB} 应满足李方程。

5. $\mathcal{P}$- INVARIANTS OF SYMBOLS

首先，我们指出，来自 $\mathrm{Diff}_k(M)$ 的线性微分算子在点 $a \in M$ 处的符号是对称张量 $\sigma \in S^k T_a(M)$。

为了描述符号的 $\mathcal{P}$-不变量，我们固定一个基点 $b \in M$，并将余切空间 $T_b^*(M)$ 记为 V。

于是，微分算子的符号是对称幂 $S^k V^*$ 的元素，因此可以视为向量空间 V. 上的 k 次齐次多项式函数。

因此，伪群 $\mathcal{P}$ 对符号的作用可归结为代数李群 $G_1(b) \subset \mathrm{GL}(V^*)$ 对这些多项式空间的作用。

寻找这类不变量有多种算法方法，例如参见（[4],[18],[20]）。

我们在（[9],[11]）中提出了利用微分不变量寻找代数不变量的方法。因此，从某种意义上说，本文总结了微分不变量与代数不变量之间的相互关系。

其中最重要的是原始伪群的作用。相应李群 $G_1(b)$ 的李代数 $\mathfrak{g}_1$（也称为线性各向同性代数）列于嘉当分类表中（见 [22],[5]）。

这里我们将讨论这些李代数中最常见的情形：体积保持微分同胚伪群的 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(V^*)$ $\mathfrak{sl}(V^*)$，以及辛同胚伪群 $\mathfrak{S}$ 的 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(V^*)$。

情形 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(V^*)$ 和 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{gl}(V^*)$ 已在（[14]）中讨论过，因此这里我们考虑情形 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sp}(V^*)$（以及 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}(V^*)$），以说明转矢量方法。

请注意，当 $k > 2$ 时， $S^k T(M)$ 中正则 $\mathfrak{g}_1-$ 轨道的余维显著大于 $\dim M$，因此我们可以利用符号的不变量来实现 n-不变原理。

这一观察解释了为何使用转矢量：我们关注的是寻找 n不变量的实用方法，而不是找出所有可能不变量的问题。

二阶算子的情形可以借助 Levi-Civita联络以及与之相关的量子化来进一步阐述，正如（[14]）中所做的那样。

5.1. 辛转移算子。设（M,ω）是一个辛流形，其中 $\omega \in \Omega^2$（M）为结构形式，$\mathcal{P} = \mathfrak{S}$ 为局部辛同胚伪群。

定义该伪群的李方程如下：

$$\mathfrak{S} = \{\phi \in \mathrm{Diffeo}(M), \phi_*(\omega) = \omega\},$$

线性各向同性代数为 $\mathfrak{g}_1 = \mathsf{sp}$（$V^*$）。

设 $\{e_1, .., e_n, f_1, ..., f_n\} \subset V = T_b^*$，$\dim\ M = 2n$，为结构形式 $\omega_b \in \Lambda^2$（V）的典范基，即

$$\omega_b = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge f_i.$$

那么，正如我们所见，M上点 $b \in M$处线性微分算子的符号是对称张量 $\sigma \in S^k V^*$，我们将其视为 V.上的齐次多项式

将 $\mathcal{S} = \oplus_{k\geq 0} S^k V^*$ 上的多项式代数记为 V，并将结构形式 ω_b 表示为双微分算子

$$\widehat{\omega} : S\otimes\mathcal{S} \to \mathcal{S} \otimes \mathcal{S},$$

其作用方式如下

$$\widehat{\omega}\,(P \otimes Q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(e_i\,(P) \otimes f_i\,(Q) - f_i\,(P) \otimes e_i\,(Q)\right),$$

其中，我们用 $e_i(P)$ 和 $f_i(P)$ 表示多项式 P 沿基向量 e_i 和 f_i.的方向导数

那么，阶数为 r 的辛转矢量指的是以下双微分算子

$$P \otimes Q \in S \otimes \mathcal{S} \to [P, Q_r]_r \in \mathcal{S},$$

其中

$$[P, Q]_r = \mu\big(\widehat{\omega}^r (P \otimes Q)\big),$$

以及 μ： $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 是代数 $\mathcal{S}$. 中的乘法

注意，算子 $\widehat{\omega}$ 和 μ以及辛转接都是 sp–不变量。

在 V上的典范坐标 $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ 中，辛转接具有以下形式：

$$[P,Q]_r = 2^{-r}\sum_{l=0}^{r}\sum_{l_1+\ldots+l_n=l}\sum_{m_1+\ldots+n_n=r-l}(-1)^{r-l}\binom{r}{l}\binom{l}{l_1\ldots l_n} \times \binom{r-l}{m_1\cdots m_n}\frac{\partial^r P}{\partial x^l \partial y^m}\frac{\partial^r Q}{\partial x^m \partial y^l},$$

其中

$$\frac{\partial^r P}{\partial x^l \partial y^m} = \frac{\partial^r P}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}\partial y_1^{m_1}\cdots\partial y_n^{m_n}}.$$

注意，

$$\deg\left([P,Q]_r\right) = \deg\left(P\right) + \deg\left(Q\right) - 2r,$$

$[P,Q]_1$ 与泊松括号重合，并且

$$4[P,Q]_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 P}{\partial y_i^2}\right) + 2\sum_{i\neq j}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 Q}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 P}{\partial y_i \partial y_j}\right) - 2\sum_{i,j}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial y_j}\frac{\partial^2 Q}{\partial y_i \partial x_j}.$$

以下陈述直接由转矢量的定义推出。

命题4。当阶数 k 为偶数时，转矢量映射 $P \times Q \to [P,Q]_k$ 是双线性对称映射；当阶数 k 为奇数时，则是斜对称映射。当 $k > \min$（deg P，deg Q）时，它们是平凡的。

因此，阶数为 k 的符号的辛不变量，是符号空间 $S^k V^*$ 上的 sp（V）不变多项式函数。

也就是说，它们确实产生了线性微分算子的零阶辛微分不变量。

为了求出这些 sp-不变量，我们取一个阶数为 p 的符号 $P \in S^p V^*$，并注意到转移算子生成线性算子

$$Q \in S^q V^* \to [P,Q]_k \in S^{p+q-2k}V^*,$$

其中 $k \leq \min$（p，q）。

现在假设阶数 p 为偶数。于是，我们得到算子

$$A_{P,q} : S^q V^* \to S^q V^*, \quad A_{P,q} : Q \to [P,Q]_{\frac{p}{2}},$$

对所有 $q \geq \frac{p}{2}$ 均成立。

对于一般阶数 p，我们用变换不变量 $P_{2l} = [P,P]_{2l}$ 代替张量 $P \in S^p V^*$，其中 $2l < p$，并得到算子

$$A_{P,l} : S^q V^* \to S^q V^*, \quad A_{P,l} : Q \to [P_{2l}, Q]_{p-2l},$$

其中 $q \geq p - 2l$.

定理5。函数 $I_{l,\ k}:\ \ S^pV^*\to\mathbb{R}$,

$$I_{l,k}(P)=\operatorname{Tr}\left(A^k_{P,l}\right),$$

其中 $p-q\le 2l\le p$、 $1\le k\le\binom{2n+q-1}{q}$, 对于一般次数 p, 以及

$$J_{k,q}(P)=\operatorname{Tr}A^k_{P,q},$$

其中 $2q\ \ge\ p$、 $1\ \le\ k\ \le\binom{2n+q-1}{q}$, 对于偶数次 p, 是 S^pV^* 上次数为 2k 的 $\mathfrak{sp}$ -不变多项式。

双线性形式

$$P\otimes Q\to[P,Q]_p\in\mathbb{R}$$

若 p 为奇数，则是 S^pV^* 上非退化的 sp− 不变斜对称 2-形式；若 p 为偶数，则是对称形式。

注6. 该定理表明，这些不变多项式的最高次数等于

$$k_{\max}=\binom{3n-1}{n},$$

而最小值为 $k_{\min}=2.$

5.2. 正则 sp-轨道。李代数 sp (V) 被我们认作空间$S^2(V^*)$，其上配备泊松括号 $P,Q\in S^2(V^*)\ \to(P,Q)_1\in S^2(V^*)$，该括号由一阶转协变给出。

设 $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$ 为辛空间 V 中的典范坐标，则我们将 $S^2(V^*)$ 中的基选为以下互不相交集合 $B^+\cup B^-\cup C$ 的并，其中 $B^+=\{y_iy_j,i,j=1,...,n,i\le j\}$, $B^-=\{x_ix_j,i,j=1,...,n,i\le j\}$, $C=\{x_iy_j,i,j=1,...,n\}$.

任意二次型 $Q\in S^2(V^*)$ 都生成哈密顿导子 $X_Q:S^k(V^*)\ \to\ S^k(V^*)$，其中 $X_Q(P)\ =\ [P,Q]_1$，或在典范坐标中

$$X_Q=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial Q}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}\right).$$

那么向量场

$$\begin{aligned}b^+_{ij}\ &=\ X_{y_iy_j}=y_i\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial x_i},\\ b^-_{ij}\ &=\ X_{x_ix_j}=-x_i\frac{\partial}{\partial y_j}-x_j\frac{\partial}{\partial y_i},\\ c_{ij}\ &=\ X_{x_iy_j}=x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-y_j\frac{\partial}{\partial y_i},\end{aligned}$$

构成李代数 sp (V) 的一组基。

为了估计 to $S^k(V^*)$ 中 sp-轨道的维数，我们必须估计由多项式 $P\in S^k(V^*)$ 生成的子空间 $\{B^+(P)\ \ B^-(P)\ \ C(P)\}$ 到 $S^k(V^*)$ 中的维数。

为此，我们用 $S_i(x)$ 和 $S_j(y)$ 表示分别在 x 和 y 中次数为 i 和 j 的齐次多项式空间。

于是我们得到如下直和分解

$$S^k(V^*) = \oplus_{\alpha+\beta=k} S_{\alpha,\beta},$$

其中

$$S_{\alpha,\beta} = S_\alpha(x) \otimes S_\beta(y),$$

and

$$\begin{aligned} b_{ij}^+ &: S_{\alpha\beta} \to S_{\alpha-1,\beta+1}, \\ b_{ij}^- &: S_{\alpha\beta} \to S_{\alpha+1,\beta-1}, \\ c_{ij} &: S_{\alpha\beta} \to S_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

现取形如 $P = P_0 + P_1$ 的多项式 $P \in S^k(V^*)$，其中$P_0 \in S_k(x)$ $P_1 \in S_k(y)$。

于是，

$$\begin{aligned} B^+(P) &= B^+(P_0) \subset S_{k-1,1}, \\ B^-(P) &= B^-(P_1) \subset S_{1,k-1}, \\ C(P_0) &\subset S_{k,0},\ C(P_1) \subset S_{0,k}. \end{aligned}$$

因此，当 $k \geq 3$ 时， $B^+(P_0)$ 和 $B^-(P_1)$ 属于不同的向量空间，且线性无关，故

$$\dim\left(B^+(P_0) \oplus B^-(P_1)\right) = n(n+1),$$

对于一般多项式 P_0, P_1.

此外， $C(P_0) \subset S_{k,\,0}$ 和 $C(P_1) \subset S_{0,\,k}$ 的维数等于 $P_0 \in S_k(x)$ 和 $P_1 \in S_k(y)$ 的 $\mathfrak{gl}(n)$-轨道的维数，因此，当 $k \geq 3.$ 时等于 n^2

要看出这一点，只需取多项式 $P_0(x)$ $P_1(y)$，使得多项式 $\det \left\| x_i \frac{\partial P_0}{\partial x_j} \right\|$ 和 $\det \left\| y_i \frac{\partial P_1}{\partial y_j} \right\|$ 均不为零。

综上所述，我们得到如下结论

命题7. 当 $k \geq 3.$ 时， $S^k(V^*)$ 中的正则 $\mathfrak{sp}(V)-$ 轨道的维数为 $\dim \mathfrak{sp}(V) = \dim S^2(V^*)$

注8. $S^2(V^*)$ 中正则 $\mathfrak{sp}(V)-$ 轨道的余维等于嘉当代数的维数，即 $n = \dim \frac{V}{2}$。 $\mathfrak{sp}(V)-$不变量是算子 $X_P.$ 的偶次幂的迹。 $S^k(V^*)$ 中正则 $\mathfrak{sp}(V)$ - 轨道的稳定子是离散代数群，因此它们是有限群。

例 9。令 $\dim V = 4$ 和 $k = 3.$ 则 $\mathfrak{sp}(V)$ 中的正则 $-$ 轨道在 $S^3(V^*)$ 中的余维为 10。令 $P \in S^3(V^*)$，则 $P_2 = [P,P]_2 \in S^2(V^*)$ 和 $I_4(P) = \mathrm{Tr}\left(X_{P_2}^2\right)$， $I_8(P) = \mathrm{Tr}\left(X_{P_2}^4\right)$ 是 $\mathfrak{sp}(V)-$ 不变量。此外，我们有算子 A_P： $S^q(V^*) \to S^q(V^*)$，其中 $A_P(Q) = [P_2, Q]_1$，而它们幂的迹 $\mathrm{Tr}\left(A_P^{2l}\right)$ 给出 $\mathfrak{sp}(V)-$

不变量。特别地，对于 $k = 3$ 的情形，我们得到 10 $\mathfrak{sp}(V)-$ 个不变量：$\mathrm{Tr}\left(A_P^{2l}\right)$, $l = 1$, ..., 10。

5.3. 度量转导算子与度量不变量。上述方法可以逐字应用于描述欧几里得向量空间（V, g）上的 $\mathfrak{so}-$ 不变多项式，其中 $g \in S^2(V)$是对偶空间上的度量。

设 $\{e_1, .., e_n\} \subset V$为结构形式 $g \in S^2(V)$的一组标准正交基，维数为 $V = n$，即

$$g = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i.$$

那么双微分算子 $\widehat{g}$：$\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \to \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ 的作用如下

$$\widehat{g}(P \otimes Q) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(P) \otimes e_i(Q)),$$

度量转矢量为

$$(P, Q)_m = \mu(\widehat{g}^m(P \otimes Q)),$$

并且它们在标准正交坐标中的表达式如下:

$$(P, Q)_m = \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} \binom{m}{m_1 ... m_n} \frac{\partial^m P}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_m}} \frac{\partial^m Q}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_m}}.$$

因此,

$$(P, Q)_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_i},$$

and

$$(P, Q)_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j}.$$

请注意，与上文一样，度量转导算子生成线性算子

$$\begin{aligned} Q &\in S^q V^* \to (P, Q)_m \in S^{p+q-2m} V^*, \\ m &\leq \min(p, q), \end{aligned}$$

并且我们得到线性算子

$$\begin{aligned} B_{P,q} &: S^q V^* \to S^q V^* \\ B_{P,q} &: Q \to (P, Q)_m, \\ p &= 2m, \end{aligned}$$

当 $p = \deg(P)$ 为偶数且 $p = 2m$, $2q \geq p$.

对于一般次数 p，我们用转矢量不变量 $P_l = (P,P)_l$ 替换张量 $P \in S^pV^*$，其中 $l < p$，并得到算子

$$\begin{aligned} B_{P,l} &: S^qV^* \to S^qV^*, \\ B_{P,l} &: Q \to (P_l, Q)_{p-l}, \end{aligned}$$

其中 $q \geq p - l.$

在这种情况下，$l = p$ 我们还得到 so (g) - 不变二元形式$K_p(P,Q) = (P,Q)_p$ 在 S^pV^* 上。

定理 10. 函数 $M_{l,\ k}: S^pV^* \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} M_{l,k}(P) &= \operatorname{Tr}\left(B_{P,l}^k\right), \\ p-q &\leq l \leq p,\ 1 \leq k \leq \binom{n+q-1}{q}, \end{aligned}$$

对于一般次数 p、二次多项式 K_p以及函数 $N_{k,\ q}$:$S^pV^* \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} N_{k,q}(P) &= \operatorname{Tr}(B_{P,q}^k), \\ 2q &\geq p,\ 1 \leq k \leq \binom{n+q-1}{q}, \end{aligned}$$

对于偶数次 p，是 S^pV^* 上次数为 2k 的 so (V) – 不变多项式。

不变的非退化对称形式 $K_p(P,Q) = (P,Q)_p$ 在 S^pV^*上实现表示 so $(V) \to$ so (S^pV^*)。

6. Constant type differential operators

6.1. 联络与量子化。首先，我们简要回顾在 ([12]) 中使用的量子化过程。

设 ∇ 为余切丛 $\tau^*: T^*M \to M$ 上的一个联络，并设 $\nabla^{\otimes k}$ 为该联络在对称张量积丛 $\tau_k^*: S^kT^*M \to M.$上的延拓

记 $d_\nabla: \Sigma^k(M) \to \Sigma^k(M) \otimes \Sigma^1(M)$ 为最后一个联络的协变微分。

对这些协变微分进行对称化，得到作用于对称代数 $\Sigma^{\cdot}(M) = \oplus_{k\geq 0}\Sigma^k(M)$ 的导子 d_∇^s，其中

$$d_\nabla^s : \Sigma^k(M) \overset{d_\nabla}{\to} \Sigma^k(M) \otimes \Sigma^1(M) \overset{\mathrm{Sym}}{\to} \Sigma^{k+1}(M),$$

对于 $k \geq 1$ 和 $d_\nabla^s = d:\ C^\infty(M) \to \Sigma^1(M)$，对于 $k = 0.$

那么，d_∇^s 的 k 次幂定义了一个 k 阶算子 $(d_\nabla^s)^k$:$C^\infty(M) \to \Sigma^k(M)$。

容易验证，该算子在微分形式 $\theta \in \Sigma^1(M)$ 处的符号等于 k 次幂 $\theta^k \in \Sigma^k(M)$。

现在设 $H \in \Sigma_k(M)$ 为一个对称逆变张量。

用 $Q(H) \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 表示下述 k 阶微分算子

$$Q(H)(f) = \frac{1}{k!}\left\langle H, (d^s_\nabla)^k(f)\right\rangle,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\Sigma_k(M) \otimes \Sigma^k(M) \to C^\infty(M)$ 是逆变张量与协变张量之间的标准配对。

容易验证，符号 $Q(H)$ 等于 H，因此，对应关系 Q: $H \in \Sigma_k(M) \to Q(H) \in \mathrm{Diff}_k(M)$（我们称之为量子化）分裂正合列 (2)。

另一方面，设 $A \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 是一个微分算子，并设 $\sigma_A \in \Sigma_k(M)$ 是它的符号。

设 $A_1 = A - Q(\sigma_A) \in \mathrm{Diff}_{k-1}(M)$，并设 $\sigma_1 \in \Sigma_{k-1}(M)$ 是其符号。于是，$A_2 = A_1 - Q(\sigma_1) \in \mathrm{Diff}_{k-2}(M)$；以此类推，我们得到张量 $\sigma_i \in \Sigma_i(M)$ $i = 0$、1、2.....、$k-1$，它们被称为次符号，以及初始算子 A 的如下表示形式

$$A = Q(\sigma_A) + \Sigma_{i=0}^{k-1} Q(\sigma_i), \tag{4}$$

其中

$$\sigma(A) = [\sigma_A, \sigma_{k-1}, ..., \sigma_1, \sigma_0] \in \Sigma_k(M) \oplus \Sigma_{k-1}(M) \oplus \cdots \oplus \Sigma_1(M) \oplus \Sigma_0(M)$$

称为该算子的全符号。

6.2. 常型算子与关联联络。现在设 Γ 是流形 M 上的传递李伪群，并设 $A \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 是定义在 M. 上的微分算子

用 $O_a \subset S^k T_a M$ 表示符号 $\sigma_{A,a} \in S^k T_a M$ 的 $G_1(a)$-轨道，其中 $G_1(a) \subset \mathrm{End}(T_a)$ 是线性各向同性群 (1)。

用 $[\psi]_{a,b}$, $a, b \in M$ 表示微分同胚 $\psi \in \Gamma$ 的一阶喷射，使得 $\psi(a) = b$.

$\sim$ $\sim$还需注意，对于任意 $\psi \in \Gamma$，都有 $[\psi]_{a,b} \circ [\psi]_{b,a} \in G_1(b)$，且满足$\sim\psi(b) = a$.

我们称算子 $A \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 在点 $a, b \in M$ 处具有相同的类型，若对于微分同胚 $\psi \in \Gamma$, $\psi(a) = b$，有

$$[\psi]_{a,b}(\sigma_{A,a}) \in O_b. \tag{5}$$

我们还称算子 $A \in \mathrm{Diff}_k(M)$ 具有常数 Γ-型，若

$$[\psi]_{a,b}(O_a) = O_b,$$

对于任意点 $a, b \in M$ 以及所有满足 $\psi(a) = b$. 的微分同胚 $\psi \in \Gamma$

若仿射联络 ∇ on Γ-流形 M 满足：沿连接点 $a, b \in M$的路径进行的平行移动 ∇–属于 $G_1(a, b)$，则称其为 Γ-联络。

定理 11. 设 Γ 是流形 M 上的传递代数李伪群，且 $A \in \mathbf{Diff}_k(M)$ 是 M 上的微分算子，其 Γ-型为常数，并且符号 σ_A 的线性各向同性群的稳定子是有限的（等价地，对所有$a \in M$，$\dim O_a = \dim G_1(a)$）。

于是，在 M 上存在唯一的仿射 Γ-联络，它保持该算子的符号 $\sigma_A \in \Sigma_k(M)$。

证明。设 $U \ni a$ 是一个邻域，我们假设它足够小，$G_1(U,U) = \delta_1^{-1}, 0(U \times U) \subset G_1$，并设 $f\colon U \times U \to G_1(U,U)$ 是丛 $\delta_1, 0$ 在 $U \times U.$ 上的一个截面。于是，元素 $f(b,a) \in G_1(b,a)$ 满足条件 (5)，且 $f(a,a) \in G_1(a)$。因此，元素 $f(b,a) = f(a,a)^{-1} \cdot f(b,a)$ 满足条件 (5)，此外，$f(a,a)$ 是群 $G_1(a)$ 的单位元。
令 $St_a \subset G_1(a)$ 为符号 $\sigma_{A,a}$ 的稳定子，且令 $\pi\colon G_1(a) \to O_a = G_1(a)/St_a$ 为自然覆盖。取这样的邻域 $V_a \subset O_a$，使得 $\pi^{-1}(V_a) \cap St_a$ 只包含单位元。现在假设邻域 U 足够小，使得对所有 $b \in U.$，$f(b,a)(\sigma_{A,b}) \in V_a$
那么，根据构造，存在唯一的映射 $\lambda\colon U \to G_1(a), \widetilde{}$，其中 $\lambda(a)$ 是 $G_1(a)$ 的单位元，并且 $f(b,a)(\sigma_{A,b}) = \lambda(a)\sigma_{A,a}$。
因此，同构族 $T_{b,a} = f(b,a) \circ \lambda(b)^{-1}$ 唯一确定，并保持符号：$T_{b,a}^{\sim}(\sigma_{A,b}) = \sigma_{A,a}$，因此确定了所需的仿射联络（我们称之为 WagnerΓ-联络，（参见 [24],[13]）。□

设 $A \in \mathbf{Diff}_k(M)$ 是上述定理中的一个定义在 M 上的常 Γ 型微分算子，∇ 是与该算子相关联的 Wagner 联络。

设 $Q\colon \Sigma_i(M) \to \mathbf{Diff}_i(M)$ 是与 Wagner 联络相关联的量子化。

记

$$\sigma(A) = [\sigma_A, \sigma_{k-1}, ..., \sigma_1, \sigma_0] \in \Sigma_k(M) \oplus \Sigma_{k-1}(M) \oplus \cdots \oplus \Sigma_1(M) \oplus \Sigma_0(M)$$

为该算子的全符号。

注意，Γ-等价算子具有 Γ-等价的全符号。

定理 12. 设 $A_1, A_2 \in \mathbf{Diff}_k(M)$ 与上述定理中一样，是定义在 M 上、具有常 Γ 型的微分算子，且 ∇_1, ∇_2 是与这些算子相关联的 Wagner 联络。那么，算子 A_1, A_2 等价，当且仅当它们的全符号 σ_{A_1}, $\sigma_{A_2} \in \Sigma_k(M)$ 等价。

证明。只需注意到，全符号的 Γ 等价蕴含主符号的 Γ 等价，因此也蕴含 Wagner 联络及分解 (4) 的 Γ 等价。□

注记 13. 局部辛同胚伪群， $\mathfrak{S}$，满足上述定理的要求，因此，任何常数 $\mathfrak{S}$型、阶数为 $k \geq 3$的正则线性微分算子 $A \in \mathrm{Diff}_k(M)$，都定义了辛流形上的一个辛联络，并保持符号 $\sigma_A \in \Sigma_k(M)$。

6.3. 二阶算子。对于二阶线性微分算子，我们有两种实用工具。首先，在正则符号的情形下，可以使用与这些算子自然相关联的 Levi-Civita联络，以及相应的量子化来求得不变量。

另一方面，至少对于某些伪群，符号本身相对于线性各向同性群具有代数不变量以及微分不变量（[16]）。

总而言之，这使我们能够获得适用于任意伪群微分不变量的必要数量，并应用 n-不变量原理。

6.4. 弱非线性算子。在文献（[14],[17]）中，我们研究了某类非线性算子，并将其称为弱非线性算子。

在局部坐标（$x_1, .., x_n$）中，这些算子具有如下形式： $A_w(f) = \sum a_\alpha(x, f(x))\ \partial^\alpha$，其中系数 $a_\alpha(x, u)$ 作为零阶喷射空间 $\mathrm{J}^0(M)$ 上的函数，在任意点 $x \in M$ 处都属于有理函数域 $\mathrm{Q}\ （\ u\ ）$ 关于 u 函数的一个固定有限代数扩张。

我们已经展示了如何从 $\mathrm{J}^0(M)$ 上形如 $A = \sum a_\alpha(x, u)\ \partial^\alpha.$ 的线性微分算子的不变量出发，为这类算子获得自然的微分不变量。

对于伪群 Γ，与由 $\overset{|\alpha|\leq k}{M}$ 的所有局部微分同胚构成的伪群不同，我们还可以利用符号 σ_A 相对于线性各向同性群的代数不变量，然后应用 n-不变性原理。

References

[1] D. Alekseevskij、V. Lychagin、A. Vinogradov，《微分几何的基本思想与概念》，载于《数学科学百科全书·几何学 1》，第 28 卷，施普林格，柏林，1991 年。[2] Cartan, E.，《连续、无限、单变换群》，《高等师范学校科学年刊》26，93–161（1909）。[3] Gordan, Paul（1868），《不变量理论讲义》´，切尔西，纽约（1987）

[4] H. Derksen, 《构造不变量理论》, 载于《所有特征下的不变量理论》, 载于《CRM 会议录讲义》, 第 35 卷, 美国数学学会, 2004 年, 第 11–36 页。[5] Guillemin, V.; Quillen, D.; Sternberg, S., 《复本原无限伪群的分类》。《美国国家科学院院刊》55（1966）, 687–690。[6]Hilbert, David, 《代数不变量理论》, 剑桥大学出版社, 1897, （1993）。[7] Kruglikov, Boris; Lychagin, Valentin。《全局 Lie-Tresse 定理》。《Selecta Mathematica》（新系列）22（2016）, 第 3 期, 1357–1411。[8] Kumpera, Antonio; Spencer, Donald。《Lie 方程》, 第 I 卷。普林斯顿大学出版社。[9] Bibikov, Pavel; Lychagin, Valentin, 《从微分观点看代数群作用的不变量》。《几何与物理学杂志》136（2019）, 89–96。[10]Bibikov, Pavel; Lychagin, Valentin, 《二元量与三元型的射影分类》。《几何与物理学杂志》61（2011）, 第 10 期, 1914–1927[11] Lychagin, Valentin; Roop, Michael。《代数中的微分不变量》。《群、不变量、积分与数学物理：Wis la 2020–21 学校与研讨会》。施普林格·自然, 2023 年, 1–34[12] Lychagin, Valentin; Yumaguzhin, Valeriy, 《作用于线丛的线性微分算子的结构》。《几何与物理学杂志》148（2020）, 103549, 27 页。[13] Lychagin, Valentin; Yumaguzhin, Valeriy, 《二维流形上线性三阶微分算子的等价性》。《几何与物理学杂志》146（2019）, 103507, 18 页。[14] Lychagin Valentin, Yumaguzhin Valeriy, 《自然不变量与微分算子的等价性》//《几何与物理学杂志》。2023。[15] Lychagin, Valentin; Yumaguzhin, Valeriy, 《二阶线性微分算子与微分方程的分类》。《几何与物理学杂志》130（2018）, 213–228。[16] Lychagin, V.; Yumaguzhin, V., 《相对论中的不变量》。《Lobachevskii 数学杂志》36（2015）, 第 3 期, 298–312。[17] Lychagin, Valentin; Yumaguzhin, Valeriy, 《非线性二阶微分算子的自然微分不变量与等价性》。《几何与物理学杂志》178（2022）, 论文编号 104549, 8 页。[18] P.J. Olver, 《经典不变量理论》, 《伦敦数学学会研究丛书·文本》, 第 44 卷, 剑桥大学出版社, 1999 年。[19] Olver, Peter J.; Sanders, Jan A.（2000）, 《转矢量、模形式与海森堡代数》, 《应用数学进展》25（3）: 252–283[20]V.L. Popov, 《不变量理论中的群、生成元、系综关系与轨道》。《数学专著译丛》, 第 100 卷, 美国数学学会, 1992 年。[21] Rosenlicht, Maxwell, 《关于代数群的一些基本定理》。《美国数学杂志》78（1956）, 401–443。[22] Singer, I. M.; Sternberg, Shlomo, 《Lie 与 Cartan 的无限群, 第一部分（传递群）》。《数学分析杂志》15（1）: 1–114, 1965。[23] J.J. Sylvester, 《关于子不变量, 即任意阶二元量的半不变量》。《美国数学杂志》5（1882）, 第 79–136 页[24] V.V. Wagner, 《具有三次度量的二维空间》, 载于《萨拉托夫国立大学科学笔记》, 第 1（XIV）卷, 载于《FMI 系列》, 第 1 卷, 1938 年, 第 29–34 页（俄文）