arXiv:2302.07838v1 [math.DG] 14 Feb 2023

从无限维几何到偏微分方程约束优化的微分学

Nico Goldammer、JEAN-PIERRE MAGNOT 和 Kathrin Welker

Abstract. 我们综述微分学如何完善从无限维几何到偏微分方程领域中经典采用的框架。这些框架以经典泛函分析为基础，并以经典映射空间为关键示例。作为函数空间的经典示例，我们讨论 Sobolev 类中的映射流形（并介绍 ILB 框架）、射流空间和三角剖分空间。这些构成了我们重点介绍的微分学在两个应用领域中的关键框架：演化方程与可积系统，以及受偏微分方程约束的优化问题。

Contents

引言 1
1. 微分学空间与 Fr¨olicher 空间概述及示例 3 2. 微分学在函数方程中的应用 22 3. 关于映射空间 31 参考文献 44

引言

微分空间和 Fr¨olicher 空间是两种框架，它们在 20 世纪独立发展而来，旨在为那些无法以标准方式表述基本微分性质的对象定义光滑性。由于在技术上难以恰当地表述应用问题，文献中还出现了许多彼此独立发展的此类框架，它们是经典有限维微分几何的推广。此类框架的不完全列表可见于例如 [**87**]。一个普遍存在的根本问题是：

如何在微分不易进行的框架下表述变分问题?

人们很容易想到带有奇点的空间作为基本例子，例如无理环面或轨形；借助微分学，可以在这些空间上描述丰富的微分几何

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46T05,58J60,58Z05.*Key words and phrases.* 微分学，Fr¨olicher 空间，无限维几何，偏微分方程，形状分析。

。 [**34**], 然而，最初推动微分学发展的（历史）例子，是法国数学家 Jean-Marie Souriau 在其著作中研究的非紧流形的微分同胚群和余伴随轨道（原著均以法文写成）；相关综述并在此基础上大幅拓展的内容见 [**33**]。同样，瑞士数学家 Alfred Fr¨olicher 的研究动机无疑也部分源于对无限维问题的考量，直至他与 Andreas Kriegl 合著的著作 [**21**]。因此，基于历史背景以及我们自身的关注点，尽管这两个领域中大多数近期研究都是在广义理解的代数几何或辛几何背景下开展的，我们仍认为有必要对微分空间以及作为其子范畴的 Fr¨olicher 空间作出与时俱进的介绍，立足于泛函分析、无限维几何和数值分析中涌现的无限维例子。事实上，近十年来，在新一代富有热情的研究者推动下，微分学已显著拓展了已知的技术能力。具体构造中的例子和反例成功地凸显了相关问题的奇异性，也让非专业人士注意到，微分学可能为解决某些技术难题提供一种框架。本文主要面向这类潜在读者。我们自身主要关注两个截然不同的领域，二者都与泛函分析有关，而微分学的应用对我们而言已成为必要。事实上，在几何与可积系统理论取得突破之后，[**51，57**], 微分空间近来也开始应用于应用数学（例如参见 [**92**]）。从可积系统的角度看，微分学使得我们能够在无限维（多为代数）框架中定义光滑性，进而讨论适定性。从形状优化问题的角度看，微分学提供了一种比过去几十年中基于经典黎曼无限维几何的传统框架更灵活的框架。

本文的一个目标是，基于我们较为熟悉的例子，用简明易懂的语言清晰地介绍微分学和 Fr¨olicher 空间的基本结果，以便让泛函分析和广义应用数学领域的其他研究者也能理解。本文的另一个目标是，清晰阐述微分学与泛函分析、无限维几何和优化等主题相互关联的一些基本概念，面向基础知识仍停留在低维拓扑或范畴论等领域、对这类无限维背景并不熟悉的研究者。

本文结构如下：

- 第 1 节简要介绍微分空间和 Fr¨olicher 空间。我们尤其介绍并概述文献中出现的微分空间的各种切空间定义。我们还讨论推广到微分学中的其他几何对象，例如微分（李）群、向量丛或主（伪）丛、黎曼度量、微分同胚群，以及各种微分代数结构或集合论结构的自同构。

- 第2节从两个方面探讨（偏）微分方程。我们借助这两节的阐述，着重介绍或综述一些在（有限维）流形上广为人知、并在微分空间中得以重现的切结构和余切结构，

并补充具体的技术细节。在第2.1节中，我们研究微分学李群中指数映射的存在性问题，该映射通过求解一阶微分方程来构造；此外，我们还通过陈述一个无限维 Ambrose-Singer定理，讨论整体论型方程。在第2.2节中，我们介绍微分空间上的一阶优化技术，并着重探讨应用范围广泛的形状优化。

- 本文最后以第 3 节收尾，从无限维几何的角度综述基本函数空间，即映射空间。根据对映射所要求的正则性以及源流形的不同，可以沿着 [**72**], 中的思路观察到希尔伯特流形、巴拿赫流形或 ILB 流形，也可以观察到能够理解为微分空间的拓扑空间 [**52**]。隐函数、射流空间和三角剖分空间是相关的例子，展示了微分学在与映射空间相关的情形中的应用。

1. 微分空间与 Fr¨olicher 空间的介绍及示例

1.1. 微分空间与 Fr¨olicher 空间。本节将沿用并完善 [**51, 58, 57**]中所述的内容。关于微分学的全面论述，主要参考文献是 [**33**]。全文将针对具体问题逐步补充这一参考文献的内容。

Definition 1.1. 设 X 为一个集合。

- 在 X 上的、维数为 p 的一个 p-参数化，是从 $\mathbb{R}^p$ 的一个开子集 O 到 X的映射。
- X 上的一个微分学是一个参数化集合 $\mathcal{P}$，其中的参数化定义在 X 上，并满足:
  - 对于每个 $p \in \mathbb{N}$，任意常值映射 $\mathbb{R}^p \to X$ 都属于 $\mathcal{P}$;
  - 对于任意指标集合 I和一族 $\{f_i\colon\ O_i \to X\}_{i\in I}$，若这些映射彼此相容且可延拓为映射 $f\colon\ \bigcup_{i\in I} O_i \to X$，并且 $\{f_i\colon\ O_i \to X\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}$，则 $f \in \mathcal{P}$。
  - 对于每个 $f \in \mathcal{P}$、 $f\colon\ O \subset \mathbb{R}^p \to X$以及 $g\colon\ O' \subset \mathbb{R}^q \to O$，其中 g 是从开集 $O' \subset \mathbb{R}^q$ 到 O的光滑映射（按通常意义），我们有$f \circ g \in \mathcal{P}$。

若 $\mathcal{P}$ 是 X 上的一种微分学，则 $(X, \mathcal{P})$ 称为微分空间；若 $(X, \mathcal{P})$ 和 $(X', \mathcal{P}')$ 是两个微分空间，则映射 $f\colon\ X \to X'$ 光滑，当且仅当 $f \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$。

微分空间这一概念源自 J.M. Souriau，参见 [**86**], ；其灵感来自 Chen 在 [**9**] 中提出的评论和构造。关于基本概念的全面阐述可见 [**33**]。

Definition 1.2. 设 $(X, \mathcal{P})$ 是一个微分空间。设 $\mathcal{P}'$ 是 X. 上的另一种微分学。那么，$\mathcal{P}'$ 是 $\mathcal{P}$ 的子微分学，当且仅当 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ ；换言之，恒等映射 $(X, \mathcal{P}') \to (X, \mathcal{P})$ 是光滑的。

Example 1.3. 在任意非空集合 X 上，都存在一种关于包含关系最小、仅由常值参数化构成的微分学。它称为离散微分学。这是 X. 上任意微分学的子微分学

EXAMPLE 1.4. 设 X 为一个集合。给定一个非空函数族 A

$$f : O_f \to X$$

其中 O_f 是函数 f 的定义域，它是欧几里得空间的一个开子集。直接应用佐恩引理可证明，存在一个包含 A 的微分学$\mathcal{P}(A)$，且它关于包含关系是极小的；换言之，A 是一族光滑映射。这就是由 A. 生成的微分学。

微分空间构成的范畴规模庞大，即使它为无限维对象提供了一个非常易用的框架，其中仍包含许多不同的病态例子。因此，采用一个受限的范畴可能会有帮助，例如 Fr¨olicher 空间范畴。这就是 [**8**] 中所采用的框架。

DEFINITION 1.5. Fr¨olicher 空间是一个三元组 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$，满足
- $\mathcal{C}$ 是路径的集合 $\mathbb{R} \to X$,
- $\mathcal{F}$ 是从 X 到 $\mathbb{R}$的函数集合，其中函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 属于$\mathcal{F}$，当且仅当对于任意 $c \in \mathcal{C}$, $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
- 路径 $c : \mathbb{R} \to X$ 属于 $\mathcal{C}$ （即为轮廓），当且仅当对于任意 $f \in \mathcal{F}$，$f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$。

如果（X，$\mathcal{F}$，$\mathcal{C}$）和（X'，$\mathcal{F}'$，$\mathcal{C}'$）是两个 Fr¨olicher 空间，则映射 $f : X \to X'$ 是光滑的，当且仅当 $\mathcal{F}' \circ f \circ \mathcal{C} \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$。

这个定义最早出现在 [**20**], 中，参见例如 [**21**], ，但据我们所知，实际术语是在 Andreas Kriegl 和彼得·米肖尔的著作 [**42**], 中确定的，Paul Cherenack 也在 [**10, 11**]中独立采用了这一术语。

要完成一篇完整的综述，就必须阐明这两种框架的比较。相关工作的初步成果已发表于 [**50**]；读者也可参阅 [**51, 54, 57, 91**]，其中有更详尽的论述。具体而言， [**57**] 解释了：如果将范围限定在弗雷歇语境中，微分空间、弗勒歇空间与盖托光滑性是同一概念，本文也将对此作出说明。

为此，我们首先需要分析如何生成弗勒歇空间或微分空间，也就是说，如何在给定集合 X.上构造弗勒歇结构或微分结构。

任意一个从 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射族 $\mathcal{F}_g$，通过如下设定即可生成一个弗勒歇结构（$X, \mathcal{F}, \mathcal{C}$），其中设定方式取自 [**42**]:
- $\mathcal{C} = \{c : \text{满足 } \mathcal{F}_g \circ c \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ 的 $\mathbb{R} \to X$
- $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ 使得 } f \circ \mathcal{C} \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$.

我们称 $\mathcal{F}_g$为 Fr¨olicher 结构 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 的生成函数集。容易看出 $\mathcal{F}_g \subset \mathcal{F}$。Fr¨olicher 空间 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 带有一个自然拓扑，即 $\mathbb{R}$ 经由 $\mathcal{F}$诱导的拉回拓扑。

同样，也可以从生成轮廓集 $\mathcal{C}_g$ 出发，并定义：

- $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ 使得 } f \circ \mathcal{C}_g \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$- $\mathcal{C} = \{c : \mathbb{R} \to X \text{ 使得 } \mathcal{F} \circ c \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$.

对于有限维可微流形 X，我们可以取 $\mathcal{F}$ 为从 X 到 $\mathbb{R}$ 的所有光滑映射构成的集合，并取 $\mathcal{C}$ 为从 $\mathbb{R}$ 到 X. 的所有光滑路径构成的集合。于是，Fr¨olicher 结构的底层拓扑与流形拓扑 [**42**] 相同。

我们还指出，如果 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 是一个 Fr¨olicher 空间，我们可以通过使用以下定义在开域上的映射族，在 X 上定义一种自然微分结构 f

$D(f)$ 个欧几里得空间，见 [**50**]:

$$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{F}) = \coprod_{p\in\mathbb{N}^*} \{\, f : D(f) \to X \mid D(f) \text{ is open in } \mathbb{R}^p \text{ and } \mathcal{F}\circ f \in C^\infty(D(f),\mathbb{R})\}.$$

若 X 是一个有限维可微流形，令 $\mathcal{F} = C^\infty(X,\mathbb{R})$，则这种微分学称为星云微分学，参见例如 [**33**]。现在，我们可以轻松证明以下结论:

PROPOSITION 1.6. [**50**] 设 $(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$ 和 $(X',\mathcal{F}',\mathcal{C}')$ 是两个 Fr¨olicher 空间。映射 $f: X \to X'$ 在 Fr¨olicher 意义下光滑，当且仅当它对于底层微分学 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{F})$ 和 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{F}')$ 光滑。

因此，命题 1.6 及前述说明表明，以下蕴含关系成立:

$$\text{smooth manifold} \quad\Rightarrow\quad \text{Frölicher space} \quad\Rightarrow\quad \text{diffeological space}$$

这些蕴含关系可以用更精细的方式加以分析。有关它们的深入分析，请参阅博士论文 [**91**] 。

REMARK 1.7. Fr¨olicher 空间（X、 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{C}$）的轮廓集合 $\mathcal{C}$并不能构成微分学，因为微分学需要在定义域的限制下保持稳定。对于路径而言， $\mathcal{C}$ 的定义域始终是 $\mathbb{R}$ ，而 1-图的定义域可以（并且必须）是 $\mathbb{R}$. 中的任意区间。然而， $\mathcal{C}$ 定义了一个“最小微分学” $\mathcal{P}_1$（$\mathcal{F}$），其图是局部具有 $c\circ g$ 形式的光滑参数化，其中 $g \in \mathcal{P}_\infty$（$\mathbb{R}$）以及 $c \in \mathcal{C}$. 在这一框架下，我们可以在命题 1.6 中用 $\mathcal{P}_1$ 替换 $\mathcal{P}_\infty$。讨论这一问题所需的主要技术工具是 Boman 定理 [**42**, , 见第 26] 页。相关讨论见 [**50, 91**]。

在此备注之后，对于任意微分学 $\mathcal{P}$ 在 X.上的情形，都可以进一步推进“限制”过程。

THEOREM 1.8. 设 $\mathcal{P}$ 是 X.上的微分学。令 $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ 表示从 $(X,\mathcal{P})$ 到 $(\mathbb{R},\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}))$ 的光滑函数集合，其中将 $\mathbb{R}$ 理解为光滑流形。则:

- 存在一个由 $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ 生成的星云微分学 $\mathcal{P}_\infty$ ，
- $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_\infty$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$，存在一个 $n-$ 维微分空间 $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}$ ，其图 $p \in \mathcal{P}$ 均通过 t 因子分解
$$D(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}^k \to X$$
- $\forall k \in \mathbb{N}$，从 $(X,\mathcal{P}_k)$ 到 $(\mathbb{R},\mathcal{P}_\infty(R))$ 的光滑映射集合与 $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ 重合。

关于 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty$ 的这一构造可见于 [**51**]。它可以直接推广到任意微分学 $\mathcal{P}.$ 。由此定理很容易看出，Fr¨olicher 空间范畴与微分空间范畴并不相同。现在我们需要明确说明:

DEFINITION 1.9. [**91**] 如果 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty$，则称微分学 $\mathcal{P}$ 为自反的（并且它是 Fr¨olicher 空间的星云微分学）。

REMARK 1.10. 给定一个微分空间（X， $\mathcal{P}$）， X 上有一种自然拓扑， [**13**] 中称为 $D-$拓扑，它是以下映射的终拓扑

$p \in \mathcal{P}$. 这种拓扑可能相当复杂，实际上也鲜少得到研究。据我们所知，与微分学相关的拓扑问题，实际上在 Fr¨olicher 空间的背景下研究得更为深入，参见例如 [**21, 42**] ，其中包含一系列技术性结果。

现在我们给出一类微分学的例子。

EXAMPLE 1.11. 设 $k \in \mathbb{N}$. Let $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 是一个 Fr¨olicher 空间。$(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 的 C^k–微分学由下式定义： $\mathcal{P}_{(k)}$

$\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall O$ open subset of $\mathbb{R}^d \quad \mathcal{P}_{(k)_O} = \left\{ p : O \to X \mid \mathcal{F} \circ p \subset C^k(O, \mathbb{R}) \right\}$

and

$$\mathcal{P}_{(k)} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{O \text{ open in } \mathbb{R}^d} \mathcal{P}_{(k)_O}.$$

这个例子在 [**33**] 中是针对有限维流形给出的。推广到 Fr¨olicher 结构是直接的。

1.2. 映射空间、乘积、商空间、子集和代数结构上的微分学。

PROPOSITION 1.12. [**86, 33**] 设 $(X, \mathcal{P})$ 和 $(X', \mathcal{P}')$ 是两个微分空间。存在一种定义在 $X \times X'$ 上的微分学结构 $\mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ ，由满足以下分解形式的图 g 构成： $O \to X \times X'$ ，其中 f： $O \to X \in \mathcal{P}$ 且 f'： $O \to X' \in \mathcal{P}'$。我们称之为乘积微分学结构，这种构造还可推广到无限（可能不可数）乘积。

我们将这一结果应用于 Fr¨olicher 空间的情形，并推导出以下结论（与 [**42**] 对照）：

PROPOSITION 1.13. 设 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 和 $(X', \mathcal{F}', \mathcal{C}')$ 是两个配备了自然微分学结构 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 的 Fr ¨olicher 空间。在 $X \times X'$ 上存在一种自然的 Fr ¨olicher 空间结构，其轮廓 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ 的 1-图。

我们也可以将上述结果表述为适用于无限乘积的形式；只需对图或轮廓取笛卡尔积即可。

现在我们在 [**86**] 和 [**33**, 之后考虑商空间。 27]: 设 $(X, \mathcal{P})$ 是一个微分空间，且 X' 是一个集合。设 f： $X \to X'$ 是一个映射。我们将推前微分学记作 $f_*(\mathcal{P})$，并将其定义为 X' 上所有包含 $f \circ \mathcal{P}$且使 f 为光滑映射的微分学中最粗的一个（即按包含关系最小的一个）。这一构造是例 1.4 的一种具体情形，其中生成族 A 设为 $A = f \circ \mathcal{P}$.。如果一个光滑映射 f: $(X, \mathcal{P}) \to (X', \mathcal{P}')$ 在两个微分空间之间是满射，且 $f_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$.，则称其为下沉。反过来，若 $(X', \mathcal{P}')$ 是一个微分空间， X 是一个集合，且 f： $X \to X'$，则记作 $f^*(\mathcal{P}')$ 的拉回微分结构是 X 上按包含关系最大的、使 f 为光滑映射的微分学。

PROPOSITION 1.14. [**86, 33**] 设 $(X, \mathcal{P})$ 是一个微分空间，且 $\mathcal{R}$ 是 X 上的等价关系。那么， $X/\mathcal{R}$ 上存在一种自然微分结构，记作 $\mathcal{P}/\mathcal{R}$，它定义为商投影 $X \to X/\mathcal{R}$ 将 $X/\mathcal{R}$ 上的微分学推前所得的微分学。

给定一个子集 $X_0 \subset X$，其中 X 是一个 Fr¨olicher 空间或微分空间，我们为 X_0 配备由 X 诱导的结构如下：

(1) 如果 X 配备了微分学 $\mathcal{P}$，我们通过如下定义在 X_0 上的微分学 $\mathcal{P}_0$ ，称为子集微分学或迹微分学，参见 [**86, 33**], :

$$\mathcal{P}_0 = \{p \in \mathcal{P} \text{ 使得 } p \text{ 的像是 } X_0\} \text{ .的子集}$$

(2) 如果 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 是一个 Fr¨olicher 空间，我们取映射 $\mathcal{F}_g$ 在 X_0 上的限制作为生成映射集合 $f \in \mathcal{F}$。在这种情况下， X_0 上的轮廓（分别为诱导微分学）是 X 上像为 X_0 子集的轮廓（分别为图）。

EXAMPLE 1.15. 考虑 Y^X. 上的无穷乘积微分学。这是使得对于每个 $x \in X$.，求值映射 ev_x 都光滑的最大微分学。因此，任何 Y^X 的子集上使求值映射光滑的其他微分学，都是从该乘积微分学继承的子集微分学的子微分学。

EXAMPLE 1.16. 设 M 是一个光滑（黎曼）流形。那么，$M^{\mathbb{N}}$ 上的序列集合 M 是一个拓扑空间，其开集具有如下形式

$$O_0 \times O_1 \times ... \times O_k \times ...$$

其中，族 $\{O_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是 M 的开子集族，并且除有限个指标 k. 外， $O_k = M$根据这种拓扑，虽然难以在 $M^{\mathbb{N}}$ 上定义图册，但通过考虑无限乘积的每个分量上的微分，可以直观地得到“自然”的微分。考虑 M 上的微分学 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ 按通常意义成立，则微分学 $\mathcal{P}$ 也可沿用例 1.15 的思路，通过（可数）无穷维乘积微分学，在 $M^{\mathbb{N}}$ 上定义一种微分学，以编码这种“自然微分”。例如，可令 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty(M)$来定义这样一种微分学。根据命题 1.13，不难验证，与 $\mathcal{P}$相关的 n 维微分学 $\mathcal{P}_n$ 也会在无限乘积上生成一种 n 维微分学。

此外，也可以考虑 $M^{\mathbb{N}}$ 的子集，它们继承了子集微分学，例如所谓的带标记（无限）构形空间（参见 [**2**]），这里将其记作

$$O\Gamma_M = \left\{(x_n) \in M^{\mathbb{N}} \,|\, \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \Leftrightarrow x_n \neq x_m \right.$$
$$\left. \text{and for all bounded set } B \subset M, |\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cap B| < +\infty \right\}.$$

要证明 $O\Gamma_M$ 上由另一种称为 Sikorski 可微性的广义可微性概念所定义的可微结构（概述参见 [**87**] ）与这里的微分学相吻合，是一项简单的练习；只需注意到，每个点 $x_n \in M$ 都可以视为其狄拉克测度 δ_{x_n} ，它作用于$C^\infty(M, \mathbb{R})$。

与带标记的无限构形空间相关联的（未标记）无限构形空间 Γ_M 曾由同一研究组研究，参见 [**1**], 。它可以理解为将带标记的构形按重新编号取商后得到的空间。更准确地说，由 $\mathbb{N}$ 的双射构成的无限对称群 $\mathfrak{G}_\infty$ 作用于 $O\Gamma_M$ 中序列的指标，并且

$$\Gamma_M = O\Gamma_M / \mathfrak{G}_\infty.$$

赋予其商微分结构后，这个空间继承了原始文献中所描述的相同广义可微性结构。其他类似的例子可见 [**35**]。

EXAMPLE 1.17. [**55**] 设 Y 是一个光滑完备流形（不一定是有限维的），且$(X, \mathcal{P})$是一个微分空间，使得 $X \subset Y$ 作为集合成立，并且 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_\infty(Y)$（换言之，典范包含映射对于 Y上的星云微分学是光滑的）。那么，我们将 $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$定义为 X 中在 Y中收敛的序列所构成的集合，换言之，它是 $X^{\mathbb{N}}$ 中由关于 Y. 的拓扑为柯西序列所构成的子集。然后，

- 极限
$$\lim : \mathcal{C}^\infty(X, Y) \to Y$$
当 $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ 赋予从 $X^{\mathbb{N}}$ 的无穷乘积微分学继承的子空间拓扑，且 Y 赋予 $\mathcal{P}_\infty(Y)$ 时，只要 X. 中存在一条非常值光滑路径，极限就不是光滑的。

- $\lim^*(\mathcal{P}_\infty(Y))$ 可能会使典范投影（求值）映射
$$\mathcal{C}^\infty(X, Y) \to X$$
不光滑；例如，考虑赋予其子集微分学的 $Y = \mathbb{R}$ 和 $X = \mathbb{Q}$ 。

因此，确有必要在 $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ 上定义柯西微分结构，使得极限映射和求值映射在 $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ 中光滑。

我们最后一个一般性构造是所谓的函数微分学。它的存在意味着以下关键事实：微分空间范畴是笛卡尔闭的。我们的讨论遵循 [**33**]。设 $(X, \mathcal{P})$ 和 $(X', \mathcal{P}')$ 是微分空间。设 $M \subset C^\infty(X, X')$ 是光滑映射的集合。 S上的函数微分学是由下列图构成的微分学 $\mathcal{P}_S$
$$\rho : D(\rho) \subset \mathbb{R}^k \to S$$
使得，对于每个 $p \in \mathcal{P}$，映射 $\Phi_{\rho,\, p} : (x, y) \in D(\rho) \times D(\rho) \mapsto \rho(y)(x) \in X'$都是 $\mathcal{P}'$. 的图。参见 [**33**, 第 1.60]段，我们有：

PROPOSITION 1.18. 设 X, Y, Z 是微分空间。那么，
$$C^\infty(X \times Y, Z) = C^\infty(X, C^\infty(Y, Z)) = C^\infty(Y, C^\infty(X, Z))$$
作为配备函数微分结构的微分空间。

下一个性质对我们很有用：

PROPOSITION 1.19. 对于函数微分结构，映射的复合是光滑的。

现在，给定一个代数结构，我们可以定义相应的相容微分结构（或 Fr¨olicher 结构），例如参见 [**48**]。例如，见 [**33**,第 66-68], 页。若 $\mathbb{R}$ 配备典范微分结构（或 Fr¨olicher 结构），则称配备微分结构（或 Fr¨olicher 结构）的 $\mathbb{R}-$向量空间为微分向量空间（或 Fr¨olicher 向量空间），如果加法和数乘是光滑的。我们陈述如下：

DEFINITION 1.20. 设 G 是一个配备微分结构（Fr¨olicher 结构）的群。如果乘法和求逆都是光滑的，则称其为微分群（Fr¨olicher 群）。

同理，也可以定义微分域、环、代数、群胚、作用等。

1.3. 参数化上的拉回原理。这里我们不使用范畴论术语，而是说明构造余极限所必需的一些构造；余极限常用于在微分学上定义几何对象。我们通过三个例子来进行这些构造：内部或运动学切空间、黎曼度量以及豪斯多夫体积。

需要指出的是，根据定义 1.1 中的性质 1.1，微分学中的图的行为类似于流形上的坐标图。参数化的概念与坐标图的概念在一点上有所不同：坐标图会为其像集合中的每个点定义一个开邻域，而给定微分学中的图则不会如此。此外，对于给定的微分空间（$X, \mathcal{P}$），微分学通过以下两种方式体现给定图的维数概念：

- 由图 p 的定义域的维数决定，
- 以及由定理 1.8 中定义的微分学过滤决定：

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}.$$

事实上，换一种方式表述 $\mathcal{P}_n$ 的定义，图 $p \in \mathcal{P}$ 属于 $\mathcal{P}_n$，当且仅当存在 $g \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$，且存在一个从（$\mathbb{R}^n$，$\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$）到（$X$，$\mathcal{P}$）的光滑映射 h，使得 $p = h \circ g$.

现在，考虑一个配备星云微分学的光滑流形 M。一些几何构造（微分形式、黎曼度量等）可以从 M 拉回到任意图 p. 的定义域。因此，我们可以运用拉回原理，在任意微分学图的定义域上定义相同的构造 $\mathcal{P}$，前提是这些构造在光滑映射复合所诱导的拉回下保持不变。下面通过几个最初的例子，来说明有限维流形上的基本构造如何借助这一原理推广到微分空间。

1.3.1. 运动学（或内部）切锥。这里我们用范畴术语描述这一构造：它最初在 [**48**] 中针对微分学群建立，在 [**18**] 中针对 Fr¨olicher 空间建立，并在 [**12**] 中推广到微分学。我们的目标是在不假定读者熟悉范畴框架的前提下，阐述同一构造。

设 $(X, \mathcal{P})$ 为一个微分空间。每个图 p of $\mathcal{P}$ 的定义域 $D(p)$ 都可以视为一个光滑流形，而首先关注的对象是切空间 $TD(p)$ 中的切向量。它们被理解为满足 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, D(p))$ 的光滑路径 $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0}$ 的芽。令 $x \in X$，并考虑

$$\mathcal{C}_x = \{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, X) \,|\, \gamma(0) = x\}.$$

对于每个 $p \in \mathcal{P}$，我们还定义

$$\mathcal{C}_{x,p} = \{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, D(p)) \,|\, p \circ \gamma(0) = x\}.$$

这组经过 x 的光滑路径使我们能够定义运动学集合

$$\mathcal{K}_x = \coprod_{p \in \mathcal{P}} \left\{ \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} \,|\, \gamma \in \mathcal{C}_{x,p} \right\} = \coprod_{p \in \mathcal{P}} \coprod_{x_0 \in p^{-1}(x)} T_{x_0} D(p).$$

因此，我们将 $(X_1, X_2) \in \mathcal{K}_x^2$ 视为同一对象，其中 $X_1 = \frac{d\gamma_1}{dt}|_{t=0} \in T_{x_1} D(p_1)$ 和 $X_2 = \frac{d\gamma_2}{dt}|_{t=0} \in T_{x_2} D(p_2)$，当且仅当存在一个 $p_3 \in \mathcal{P}$ 以及 $(\gamma_{3,1}, \gamma_{3,2}) \in C_{x,p_3}$，使得

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,2\}, p_i \circ \gamma_i = p_{3,i} \circ \gamma_{3,i} \\ \frac{d\gamma_{3,1}}{dt}|_{t=0} = \frac{d\gamma_{3,2}}{dt}|_{t=0} \end{cases} \tag{1.1}$$

这种等同关系具有自反性和对称性，但不具有传递性，以下反例对此进行了说明:

EXAMPLE 1.21. 设

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, yz = 0\}.$$

我们赋予 X 从 $\mathbb{R}^3$. 的星云微分学继承而来的子集微分学。考虑路径

$$\gamma_1(t) = (t, t^2, 0)$$

and

$$\gamma_2(t) = (t, 0, t^2).$$

自然直觉（在后文中将会看到，对于 X 上的另一种微分学，这一直觉存在缺陷）认为

$$\frac{d\gamma_1}{dt}|_{t=0} = \frac{d\gamma_2}{dt}|_{t=0} = (1, 0, 0),$$

但不存在在 $x = (0, 0, 0)$ 处的参数化 p_3 满足（1.1）。事实上， X 的微分学由以下映射将 $\mathbb{R}^2$ 的图推前到 X 所生成：$(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ 以及 $(x, y \mapsto (x, 0, y)$。为了识别这两个芽，必须考虑一条中间路径 $\gamma_{1.5}(t) = (t, 0, 0)$。

因此，我们定义

DEFINITION 1.22. 我们在 $\mathcal{K}_x$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下：$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{K}_x$, $u_1 \sim u_2$ 当且仅当以下两个条件之一成立:

(1)

$$\exists (\gamma_1, \gamma_2) \in \left(\coprod_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{C}_{x,p} \right)^2, \frac{d\gamma_1}{dt}|_{t=0} = u_1 \in TD(p_1), \frac{d\gamma_2}{dt}|_{t=0} = u_2 \in TD(p_2)$$

以及 $p_3 \in \mathcal{P}$ 和 $(\gamma_{3,\ 1},\ \gamma_{3,\ 2}) \in C_{x,\ p_3}$，使得条件 (1.1) 适用。

(2) 存在一个有限序列 $(v_1, ..., v_k) \in \mathcal{K}_x^k$，使得 $v_1 = u_1, v_k = u_2$，并且对于每个指标 $i \in \mathbb{N}_{k-1}$.，条件 (1) 都适用于 v_i 和 v_{i+1}

DEFINITION 1.23. X 在 $x \in X$ 处的内部切锥或动力切锥定义为

$$^iT_xX = \mathcal{K}_x/\sim,$$

空间 ^iT_xX 赋予了 $\mathcal{C}_x$. 上函数微分学的推前

^iT_xX 中的元素称为 X 在 x. 处的路径芽。事实上，稍后我们会在本文中构造其他切空间，以避免使用可能引起误解的术语“切向量”。

1.3.2. 微分形式与德拉姆复形。

DEFINITION 1.24. [86] 设 $(X, \mathcal{P})$ 是一个微分空间， V是一个配备可微结构的向量空间。 X 上的一个取值于 $V-$ 的 $n-$微分形式 α（记作 $\alpha \in \Omega^n(X, V)$）是一个映射

$$\alpha : \{p : O_p \to X\} \in \mathcal{P} \mapsto \alpha_p \in \Omega^n(p; V)$$

使得

• 设 $x \in X.\ \forall p, p' \in \mathcal{P}$ 满足 $x \in Im(p) \cap Im(p')$，形式 α_p 和 $\alpha_{p'}$具有相同的阶 n.

• 此外，设 $y \in O_p$ 和 $y' \in O_{p'}$. 若 $(X_1, ..., X_n)$ 是$Im(p) \cap Im(p')$中的 n 路径芽，若存在两组 n–向量 $(Y_1, ..., Y_n) \in (T_y O_p)^n$ 和 $(Y_1', ..., Y_n') \in (T_{y'} O_{p'})^n$，若 $p_*(Y_1, ..., Y_n) = p'_*(Y_1', ..., Y_n') = (X_1, ..., X_n)$,

$$\alpha_p(Y_1, ..., Y_n) = \alpha_{p'}(Y_1', ..., Y_n').$$

我们记

$$\Omega(X; V) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \Omega^n(X, V)$$

为取值于 $V-$ 的微分形式集合。

有了这样的定义，我们认为有必要向读者说明两点：

• 如果不存在按定义最后一点所述定义的 n 线性无关向量（Y_1,..., Y_n），则 $\alpha_p = 0$ 在 y.

• 设（α, p, p'）$\in \Omega$（X, V）$\times \mathcal{P}^2$. 如果存在 $g \in C^\infty$（D（p）；D（p'））（通常意义下），使得 $p' \circ g = p$，则 $\alpha_p = g^* \alpha_{p'}$.

Proposition 1.25. 集合 $\mathcal{P}(\Omega^n(X, V))$由映射 q：$x \mapsto \alpha(x)$构成，这些映射从有限维向量空间的开子集 O_q 映到$\Omega^n(X, V)$，且对每个$p \in \mathcal{P}$,

$$\{x \mapsto \alpha_p(x)\} \in C^\infty(O_q, \Omega^n(O_p, V)),$$

是$\Omega^n(X, V)$上的一个微分学。

对该微分学的图进行运算，可以定义微分形式的乘积和微分，它们具有与微分形式的乘积和微分相同的性质。

Definition 1.26. 设 $(X, \mathcal{P})$ 为一个微分空间。

• $(X, \mathcal{P})$ 是有限维的，当且仅当

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \dim(\Omega^n(X, \mathbb{R})) = 0.$$

于是，我们设

$$\dim(X, \mathcal{P}) = \max\{n \in \mathbb{N} | \dim(\Omega^n(X, \mathbb{R})) > 0\}.$$

• 否则，$(X, \mathcal{P})$ 称为无限维的。

让我们对这个定义作几点说明。如果 X 是一个流形，且 $\dim(X) = n$ （按经典意义），则星云微分学 $\mathcal{P}_\infty(X)$ 满足

$$\dim(X, \mathcal{P}_\infty(X)) = n.$$

现在，若 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 是 X 上的自然 Fr¨olicher 结构，取由 $g \circ c$ 类型的映射生成的 $\mathcal{P}_1$，其中 $c \in \mathcal{C}$，且 g 是从有限维空间的一个开子集到 $\mathbb{R}$. 的光滑映射。这是一个容易验证的练习，可以证明

$$\dim(X, \mathcal{P}_1) = 1.$$

这一点首先表明，维数取决于所考虑的微分学。现在，我们注意到，$\mathcal{F}$ 是光滑映射的集合（$X, \mathcal{P}_1$）$\to \mathbb{R}$,

由此得到以下定义，因为 $\mathcal{P}$（$\mathcal{F}$）显然是与（$X, \mathcal{F}, \mathcal{C}$）相关联的维数最大的微分学：

Definition 1.27. Fr¨olicher 空间 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ 的维数，是微分空间 $(X, \mathcal{P}(\mathcal{F}))$ 的维数。

这个定义与以下内容完全吻合：

DEFINITION 1.28. 设 $(X, \mathcal{P})$ 是一个微分空间，它不是全不连通的，也就是说，$\mathcal{P}$ 具有非常值的图。我们将 $(X, \mathcal{P})$ 的维数定义为

$$\dim(X, \mathcal{P}) = min \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{P}_n = \mathcal{P}\}.$$

1.3.3. 微分空间上的（伪）黎曼度量。现在我们来讨论如何将黎曼流形的基本结构推广到微分空间。

DEFINITION 1.29. 设 $(X, \mathcal{P})$ 是一个微分空间。 X 上的内在黎曼度量 g （记作 $g \in Met(X)$）是一个映射

$$g : \{p : O_p \to X\} \in \mathcal{P} \mapsto g_p$$

使得

- $x \in O_p \mapsto g_p(x)$ 是 TO_p 上的（光滑）度量
- 此外，设 $y \in O_p$ 和 $y' \in O_{p'}$ 满足 $p(y) = p'(y')$。若 (X_1, X_2) 是 $Im(p) \cap Im(p')$ 中的一对路径芽，若存在两组 $2-$ 向量 $(Y_1, Y_2) \in (T_y O_p)^2$ 和 $(Y_1', Y_2') \in (T_{y'} O_{p'})_2$，且若 $p_*(Y_1, Y_2) = p'_*(Y_1', Y_2') = (X_1, X_2)$，

$$g_p(Y_1, Y_2) = g_{p'}(Y_1', Y_2').$$

若 g 是 $(X, \mathcal{P})$ 上的度量，则 $(X, \mathcal{P}, g)$ 是一个内部黎曼微分空间。

对于任意路径芽 X，记作 $||X|| = \sqrt{g(X, X)}$。此记号与所选的微分学图无关。

DEFINITION 1.30. 我们将映射 $L : C^\infty([0; 1], X) \to \mathbb{R}_+$ 称为弧长，其定义如下

$$L(\gamma) = \int_0^1 ||\dot{\gamma}(t)|| dt.$$

设 $(x, y) \in X^2$. 我们定义

$$d(x, y) = \inf \{L(\gamma) | \gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y\}$$

并将我们刚才描述的映射 $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ 称为黎曼伪距离。

下面的命题说明了“伪距离”这一术语的合理性：

PROPOSITION 1.31. [**52**]

(1) $\forall x \in X, d(x, x) = 0$.(2) $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$ (3) $\forall (x, y, z \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

有人可能会想知道 d 是否为距离，即它是否具有以下更强的性质：

$$\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

遗憾的是，在无限维几何中的一些例子里，似乎会出现某种距离对 $x \neq y$. 等于 0 的情况。这正是 Michor 和 Mumford [**63**] 的著作中对适当浸入空间上的弱黎曼度量所描述的现象。此外，D-拓扑并不是由伪度量 d. 定义的拓扑。所有这些事实都表明，黎曼 Fr¨olicher 空间中的情形与流形中已知的情形大不相同；下面的（玩具）例子将对此进行验证。

REMARK 1.32. 令 $Y = \coprod_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}_i$，其中 $\mathbb{R}_i$ 是 $\mathbb{R}$ 的第 $i-$ 个副本，并赋予其自然标量积。令 $\mathcal{R}$ 为等价关系

$$x_i\mathcal{R}x_j \Leftrightarrow \begin{cases} (x_i \notin]0;\frac{1}{i}[\wedge x_j \notin]0;\frac{1}{j}[) \Rightarrow \begin{cases} x_i = x_j & \text{if } x_i \leq 0 \\ x_i + 1 - \frac{1}{i} = y_j + 1 - \frac{1}{j} & \text{if } x_i \geq \frac{1}{i} \end{cases} \\ (x_i \in]0;\frac{1}{i}[\vee x_j \in]0;\frac{1}{j}[) \Rightarrow i = j \wedge x_i = x_j \end{cases}$$

设 $X = Y/\mathcal{R}$. 这显然是一个一维黎曼微分学空间。设 $\bar{0}$ 为 $0 \in \mathbb{R}_1$的等价类，设 $\bar{1}$ 为 $1 \in \mathbb{R}_1$. 的等价类。那么 $d(\bar{0},\bar{1}) = 0.^{-}$ $^{-}$这表明 d 不是 X. 上的距离。在 $D-$拓扑中，0 和 1 分别有如下不连通邻域:

$$U_{\bar{0}} = \left\{ \bar{x_i} | x_i < \frac{1}{2i} \right\}$$

and

$$U_{\bar{1}} = \left\{ \bar{x_i} | x_i > \frac{1}{2i} \right\}.$$

这表明 d 不能定义 $D-$拓扑。

1.4. 微分同胚群与线性群：微分学群的两个例子。让我们从微分同胚概念的推广 [**86**] 开始。

DEFINITION 1.33. 设 $(X,\mathcal{P})$ 是一个微分空间。 X 上的一个（集合论意义上的）双射，若 f 和 f^{-1} 都光滑，则称为微分同胚。我们用 $\mathbf{Diff}(X)$ 表示 X.的微分同胚群。

PROPOSITION 1.34. 我们为 $C^\infty(X,X)$ 配备其函数微分学 $\mathcal{P}_\circ$。定义映射

$$i : f \in \mathrm{Diff}(X) \mapsto f \in C^\infty(X,X)$$

and

$$(.)^{-1} : f \in \mathrm{Diff}(X) \mapsto f^{-1} \in C^\infty(X,X).$$

那么 $(\mathbf{Diff}(X)\ i^*(\mathcal{P}) \cap ((.)^{-1})^*(\mathcal{P}))$ 是一个微分学群。

REMARK 1.35. 当 X 是一个紧致无边流形时，群 $\mathbf{Diff}(X)$ 是 $C^\infty(X,X)$ 的一个开子流形，具体含义见例如 [**72**], , 我们稍后将对此作出精确定义。我们在此提前介绍这一构造，是为了指出，一般而言，$\mathbf{Diff}(X)$ 并不具有从 $C^\infty(X,X)$ 继承的子集微分学；而当 X 是一个紧致无边流形时则确实如此，这也是当前文献中研究最广泛的情形。

现在假设 X 是一个以微分空间域 $\mathbb{K}$.为标量域的微分向量空间。

PROPOSITION 1.36. (1) 从 X 到X 的光滑线性映射所构成的空间 $\mathcal{L}(X)$ 是一个代数，具有光滑加法、光滑乘法和光滑数乘。(2) $\mathcal{L}(X)$ 的可逆元素群记作 $GL(X)$，它是 $\mathbf{Diff}(X)$ 的一个微分空间子群。

REMARK 1。37. 根据近期的综述 [**24**], , 我们参阅该文以获得完整阐述：在并非赋范空间的拓扑向量空间上，多线性映射仅是次连续的，而非连续的。情况如下,

当 E 和 F 为局部凸完备拓扑向量空间时，对于求值映射

$$\mathcal{L}(E,F)\times E\to F.$$

改用 $\mathcal{L}(E,F)$ 的（子集）函数微分学，其中 E和 F被视为微分向量空间，同一个求值映射仍然是光滑的。

按照 Iglesias-Zemmour 的说法，见 [**33**], 我们不声称任意微分学群都具有相应的李代数；然而，以下结论成立，见 [**48**,命题 1.6.] 和 [**57**, 命题2.20]。

PROPOSITION 1.38. 设 G是一个微分学群。那么，单位元 ${}^iT_eG$ 处的内部切锥是一个微分向量空间。

[**57**] 中出现的命题??的证明明确使用了微分学 $\mathcal{P}_1$ 和$\mathcal{P}_\infty$，它们出现在本文的命题3和注4中。

DEFINITION 1.39. 当且仅当 G 对微分向量空间 ${}^iT_eG$ 的伴随作用定义了一个光滑李括号时，微分学群 G 才是微分学李群；也就是说，设 c 是 $C^\infty(\mathbb{R},G)$中的一条路径，使得 $c(0)=e$且 $\partial_t c(0)=X$，并设 Y是内部切空间 ${}^iT_eG$中的一个元素，

- $\partial_t\left(\mathrm{Ad}_{c(t)}\,Y\right)|_{t=0}=[X,Y]\in {}^iT_eG$
- $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ is smooth.

在这种情况下，我们称 ${}^iT_eG$ 为 G 的李代数，并记作 $\mathfrak{g}$.

关于微分学群成为微分学李群的判据问题，针对微分学群的研究见于 [**48**] ，针对Fr¨olicher群的研究见于 [**47**] 。

REMARK 1.40. 实际上，目前还没有已证明的、不是微分学李群的微分学群实例。

伴随作用、余伴随作用以及李括号的基本性质，在微分学李群上整体而言与有限维李群的情形相同，证明也类似：详情请参见 [**48**] 和 [**18**] 。

1.5. 关于各种切空间。在介绍了内部切锥的构造之后，我们将描述针对给定微分空间 X. 的切空间概念的其他既有推广。事实上，对于有限维流形，切空间涉及诸多值得关注的技术细节，因此切空间的概念可以通过多种方式推广。其中一些推广看似彼此不等价，但实际上，微分空间的微分形式和余切空间却有一个共同的概念。下面简要介绍微分空间的各种切空间概念，并对它们加以比较。

1.5.1. 外部切空间。我们首先将一种经典的代数构造推广到微分学范畴。微分空间 X 上的（微分）导子的集合记为 $\mathfrak{Der}(X)$，它是从 $C^\infty(X,\mathbb{R})$ 到其自身、满足莱布尼茨法则的光滑映射空间。同样， X 上的（微分）逐点导子是满足以下条件的光滑映射 d ，其定义域为 $C^\infty(X,\mathbb{R})$，值域为 $\mathbb{R}$ ：

$$\exists x\in X,\forall(f,g)\in(C^\infty(X,\mathbb{R}))^2, d(fg)=f(x)d(g)+g(x)d(f).$$

DEFINITION 1.41. 外部切空间 ${}^eTX$ 定义为 X. 上的微分空间逐点导子集合

作为一组光滑映射，它可以赋予函数微分学；固定点 $x\in X$，定义 ${}^eT_xX\subset{}^eTX$.

1.5.2. 内部切空间与外部切空间的交集处。这是 [**51, 54, 57**], 中采用并在 [**25**]中加以完善的方法。由此得到两个不同类型的对象：一个锥 [**51, 54, 57**] ，按照与 [**12**]中完全相同的步骤，可以将其补全为向量空间 [**25**] 。这里不介绍后一种构造：我们的介绍不求面面俱到。

在 [**51, 54, 57, 25**] 中定义这个切空间的核心思想，基于通过路径来定义光滑流形上的切空间。更准确地说，我们考虑所有将 0 映射到 x 的路径组成的集合；如果其中两条路径在 0 处的导数相同，就将它们视为等价。因此， T_xX 中的一个元素是等价类 $[c]$ ，其中 $c\colon \mathbb{R}\to X$ ，且 $c(0)=x$。函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 沿方向 v 的方向导数由导数 $^{\partial}{}_{(f\circ c)(t)}\,{}^{\partial t}\quad|_{t=0}$ 给出，其中 $c\colon \mathbb{R}\to X$ ，且 $c(0)=x$ 、$\overline{\quad c'(0)\quad}=v$。接着，将这一方法应用于任意微分空间，从而得到如下切锥：

Definition 1.42. 对于每个 $x\in X$，我们考虑

$$C_x=\{c\in C^\infty(\mathbb{R},X)|c(0)=x\}$$

并且我们取由 $\mathcal{R}$ 给出的等价关系

$$c\mathcal{R}c'\Leftrightarrow\forall f\in C^\infty(X,\mathbb{R}),\partial_t(f\circ c)|_{t=0}=\partial_t(f\circ c')|_{t=0}.$$

$\mathcal{R}$ 的等价类在 [**51, 54, 57**] 中称为芽，记作$\partial_t c(0)$ 或 $\partial_t c(t)|_{t=0}$。在同一篇参考文献中， x 处的内部切锥是商空间 $C_x/\mathcal{R}$. 若 $X=\partial_t c(t)|_{t=0}\in {}^iT_X$，我们定义逐点导子 $f\mapsto Df(X)=\partial_t(f\circ c)|_{t=0}$.读者可将此定义与 [**42**] 中“便利” $c^\infty-$框架下流形的定义进行比较。第 1.3.1 节定义的内部切锥显然与此处的定义不同；后者也是 ${}^eT_xX$.的一个子集。我们将这个“内部—外部”切锥记作 $C^{ie}T_xX$.

Example 1.43. 令

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,xy=0\right\},$$

赋予其子集微分学。于是，依照 [**55**],

$$C^{ie}T_0X=X$$

这表明内外切空间通常不是向量空间。

Example 1.44. 让我们考虑 [**15**] 中给出的例子：赋予 $\mathbb{R}^2$ 一维微分学 $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$, 在上述参考文献中称为意大利面微分结构。出于与例1.21中类似的原因，赋予微分学 $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$的 $\mathbb{R}^2$ 的内切空间是无限维的，且维数不可数；而根据Bohman定理, $C^{ie}T_x\mathbb{R}^2$ 是二维向量空间)

接下来我们沿用 [**25**] 的说法，引入以下术语：

Definition 1.45. 设 X 是一个微分空间，且 $c\in C_x$。方向 c 上的路径导数定义为

$$\mathrm{d}_c\colon C^\infty(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ f\mapsto\mathrm{d}_c(f):=\frac{\partial}{\partial t}\left(f(c(t))_{|_{t=0}}\right)\in\mathbb{R}.$$

称 $\mathrm{d}_c(f)$ 为函数 $f\in C^\infty(X,\mathbb{R})$ 沿方向 c 的路径导数。

正如例1.43中所解释的，例如参见 [**25**], $C^{ie}T_xX$ 并未提供自然的微分拓扑向量空间结构。这促使我们给出下一个切空间定义。

DEFINITION 1.46. 设 X 为一个微分空间，且 $x \in X$。内部—外部切空间 ${}^{ie}T_xX$ 为

$$ {}^{ie}T_xX := \operatorname{span} C^{ie}T_xX.$$

REMARK 1.47. 集合 $C^{ie}T_xX$ 记作 C_xX ，称为 [**25**]中的切锥。由于本文中对切对象有多种定义，我们认为有必要使用记号 $C^{ie}T_xX$ ，因为使用简化记号肯定会产生误导。

关于 $C^{ie}T_xX$ 和 ${}^{ie}T_xX$ 上的微分学，为了从集合$C^{ie}T_xX$获得一个微分拓扑切空间，在 [**25**] 中采用以下观点：

- ${}^{ie}T_xX$ 中的一个元素是 $C^{ie}T_xX$ 中元素的有限和，这些元素乘以一个标量。
- $C^{ie}T_xX$ 的微分学是由映射推前得到的推前微分学

  $$c \in C_x \mapsto d_c \in C^{ie}T_xX$$

  ${}^{ie}T_xX$ 中的一个图是一个映射

  $$U \to {}^{ie}T_xX,\, u \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i(u) p_i(u)$$

  其中， $U \subset \mathbb{R}^n$ 表示一个开子集，且 $n \in \mathbb{N}$, λ_i： $U \to \mathbb{R}$ 是光滑的，使得序列

  $$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots)$$

  是以下集合的子集微分学中的一个图

  $$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

  并且每个 p_i 都是 $C^{ie}T_xX$ 中的一个图，其定义域为 U。

T_xX 上引入的微分学称为 [**90**]中定义的弱微分学结构。赋予弱微分学结构后，T_xX 成为可能的最精细微分向量空间；略微滥用直观记法，有：

$$\mathcal{P}_{C^{ie}T_xX} \subset \mathcal{P}_{T_xX}.$$

1.5.3. 微分切空间。现在，我们将 Fr¨olicher 空间上的 [**55**] 构造扩展到（一般的）微分空间。

DEFINITION 1.48. 这里我们沿用前文定义第 1.3.1 节内部切锥时使用的记号。令 ${}^{d}T_xX$ 为 ${}^{i}T_xX$的子集，其定义如下：

$$ {}^{d}T_xX = {}^{d}C_x/\mathcal{R}$$

with

$$ {}^{d}C_x = \{c \in C_x | \exists \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \operatorname{Diff}(X)), c(.) = \gamma(.)(x) \text{ and } \gamma(0) = Id_X\}$$

通过这一定义， ${}^dT_xX$ 与单位元处的切空间 ${}^iT_{Id_X}\mathrm{Diff}(X)$ 内在地联系起来；对于任意微分学群（即配备了使复合和求逆光滑的微分学的群），该切空间已在 [**48**] 中描述。

REMARK 1.49. 设 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R},\mathrm{Diff}(X))$，使得 $\gamma(0)(x) = x$. 那么， $\lambda(x) = (\gamma(0))^{-1} \circ \gamma(.)(x)$ 定义了一条光滑路径 $\lambda \in {}^dC_x$. 因此，

$$ {}^dC_x = \{c \in C_x | \exists \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{Diff}(X)), c(.) = \gamma(.)(x) \text{ and } \gamma(0) = Id_X\} $$

1.6. 微分学中的纤维丛、主丛和向量丛。现在，让我们精确考察经典（有限维）纤维丛中纤维丛的概念。在光滑有限维流形的语境下，纤维丛定义为

- 一个光滑流形 E 称为全空间
- 一个光滑流形 X，称为底空间
- 一个光滑下沉 $\pi : E \to X$，称为纤维丛投影
- 一个光滑流形 F，称为典型纤维，因为 $\forall x \in X, \pi^{-1}(x)$ 是 E 的光滑子流形，且与 F. 微分同胚
- 在 X 上的一个光滑图册，其定义域为 $U \subset X$，满足 $\pi^{-1}(U)$ 是 E 的一个开子流形，且与 $U \times F$. 微分同胚。由此我们得到该纤维丛的一组局部平凡化。

顺便说一下，为了完整起见，一个光滑纤维丛应由四元组数据 (E, X, F, π) 构成（因为 π 和 X 的定义使我们能够找到局部平凡化系统）。简言之，这种四元组设定通常记作投影映射 $\pi : E \to X$.

有些微分空间不具有图册，因此，在对纤维丛概念进行推广时，要求存在一组光滑平凡化并非先验所必需的，即使这一附加条件能够带来有趣的技术性内容 [**61**, 第 194-195] 页。因此，在一般设定下，我们不需要假设局部平凡化的存在。现在，遵循 [**75**],，其中 [**86**, 上一节] 中的思想已推广到向量空间，量子结构这一概念在 [**86**] 中被引入，作为主丛的推广；而向量伪丛这一概念则在 [**75**] 中引入。共同的思想是描述纤维化对象：它们由一个总（微分）空间 E 构成，位于一个微分空间 X 之上，并带有一个规范的光滑丛投影 $\pi : E \to X$，使得 $\forall x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ 具有（光滑的）代数结构，但不假设存在一组局部平凡化。

(1) 对于微分空间向量伪丛，假定纤维 $\pi^{-1}(x)$ 是微分向量空间，即在微分空间域（例如 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）上的加法和乘法均为光滑的向量空间。我们注意到，[**75**] 只涉及有限维向量空间。**(2)** 按照 [**86**], 的术语，所谓的“结构量子”（即“量子结构”）是指一个微分学群 G 在微分空间 E 上光滑且自由地从右作用。轨道空间 $X = E/G$ 定义了量子结构 $\pi : E \to X$ 的基空间；这种结构推广了主丛的概念，而不假设局部平凡化的存在。在这一图景中，每个纤维 $\pi^{-1}(x)$ 都同构于 G.

根据这两个例子，我们可以推广这一图景。

DEFINITION 1.50. 设 E 和 X 是两个微分空间，并设 $\pi : E \to X$是一个光滑满射。那么，当且仅当 π 是一个下沉时，(E, π, X) 是一个微分纤维伪丛。

需要明确的是，我们不假设存在典型纤维，这与 Pervova 的微分拓扑向量伪丛相一致。我们可以给出以下定义：

DEFINITION 1.51. 设 $\pi : E \to X$ 为一个微分拓扑纤维伪丛。则：

(1) 设 $\mathbb{K}$ 为一个微分空间域。若存在以下对象，则 $\pi : E \to X$ 是一个微分空间向量伪丛：

- 一个光滑逐纤维映射 $.: \mathbb{K} \times E \to E$,
- 一个光滑逐纤维映射 $+: E_{(2)} \to E$ 其中

$$E^{(2)} = \coprod_{x \in X} \{(u, v) \in E^2 \,|\, (u, v) \in \pi^{-1}(x)\}$$

赋予典范映射 $E^{(2)} \to E^2$ 的拉回微分结构，

使得 $\forall x \in X$，$(\pi^{-1}(x)\ +, .)$ 是一个微分学 $\mathbb{K}$–向量丛。

(2) $\pi : E \to X$ 是一个微分学规范伪丛，当且仅当存在

- 一个光滑逐纤维对合映射 $(.)^{-1} E \to E$,
- 一个光滑逐纤维映射 $. : E_{(2)} \to E$

使得 $\forall x \in X, (\pi^{-1}(x)\ .)$ 是一个微分学群，其逆映射为 $(.)^{-1}$.

(3) $\pi : E \to X$ 是一个微分学主伪丛，若存在一个微分学规范伪丛 $\pi' : E' \to X$，使得考虑

$$E \times_X E' = \coprod_{x \in X} \{(u, v) \,|\, (u, v) \in \pi^{-1}(x) \times \pi'^{-1}(x)\}$$

配备典范映射 $E \times_X E' \to E \times E'$ 所诱导的拉回微分结构后，存在一个光滑映射 $E \times_X E' \to E$，其在每个纤维上的限制都是光滑、自由且传递的右作用

$$\pi^{-1}(x) \times \pi'^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x).$$

(4) $\pi : E \to X$ 是 Souriau量子结构，若它是一个微分学主伪丛，其微分学规范（伪）丛为 $X \times G \to X$.

现在我们将讨论纤维丛的纤维丛初等类。

1.6.1. 切丛。这些构造最初的启发例子当然是切锥和切空间，它们都是纤维伪丛，有时还是向量伪丛。事实上，分析第 1.3.1、1.5.2 和 1.5.3 节中的构造时，一切都始于一组路径，我们在此统记为 $C_x(X)$；这组路径生成点 x 处的切锥，我们在此统记为 CT_xX，并通过等价关系 $\mathcal{R}_x$. 取商得到其微分结构。现在让我们考虑全切空间（事实上，一般情形下是切锥）

$$CTX = \coprod_{x \in X} CT_xX,$$

对于这种情形，基本直觉告诉我们，存在一种比余积微分结构好得多的微分学结构，在这种结构下，各纤维彼此弧不连通。对于

要在内部切锥（第 1.3.1 节）以及内部—外部切锥（第 1.5.2 节）的背景下构造所需的微分学结构，只需注意到，在 $t=0$ 处的求值映射定义了一个纤维伪丛投影

$$\mathrm{ev}_0 : C^\infty(\mathbb{R}, X) \to X$$

它是一个下沉，并且满足

$$\forall x \in X, \mathrm{ev}_0^{-1}(x) = C_x(X).$$

逐纤维等价关系 $\mathcal{R}_x$ 定义了一个全局等价关系 $\mathcal{R}$ ，作用于$C^\infty(\mathbb{R}, X)$，且满足

$$CTX = C^\infty(\mathbb{R}, X)/\mathcal{R},$$

借此可以定义一个全局商微分结构。因此，可以通过 $x \in X$ 处的动力切锥，按如下方式定义 X 的全局内部切锥及其微分结构：

DEFINITION 1.52. X 的内部切锥或动力切锥

$$^iTX = \coprod_{x\in X} {}^iT_xX.$$

空间 ^iTX 由C^∞上的函数微分学经$\mathbb{R}$推前得到的微分学赋予结构（X）。

通过替换等价关系，同一定义也适用于整体内部—外部切锥 $C^{ie}TX$ 的定义。考虑到 ^dTX，还需要在定义中将 $C^\infty(\mathbb{R}, X)$ 改为其子集

$$\coprod_{x\in X} {}^dC_x$$

它赋有子集微分学。

DEFINITION 1.53. 设 X 是一个 Fr¨olicher 空间。我们定义

$$^dTX = \coprod_{x\in X} {}^dT_xX$$

X.的微分切丛

顺便说一下，我们可以很容易地得到以下结论：

PROPOSITION 1.54. 设 $(X, \mathcal{P})$ 是一个自反微分空间，并设 $\mathcal{P}_{\mathrm{Diff}}$为 Diff$(X)$ 上的函数微分学。

(1) 存在一个微分学 $\mathcal{P}$(Diff) $\subset \mathcal{P}$ ，它由以下推前微分学族生成：

$$\{(\mathrm{ev}_x)_*(\mathcal{P}_{\mathrm{Diff}}) \,|\, x \in X\}.$$

(2) $\forall x \in X, {}^dT_xX$ 是 $(X, \mathcal{P}$(Diff)) 在 x. 处的内部切锥 (3) $\forall x \in X$, ^dT_xX 是一个微分向量空间 (4) 总微分切空间

$$^dTX = \coprod_{x\in X} {}^dTX \subset {}^iTX$$

对于从 ^iTX 继承的子集微分学，以及 $(X, \mathcal{P}_{\mathrm{Diff}})$ 的内部切空间微分学，它都是一个向量伪丛。

PROOF. (1) 是由推前微分学的定义得出的，具体如下：这一族

$$\{\mathcal{P} \text{ diffeology on } X \,|\, \forall x \in X, (\mathrm{ev}_x)_*(\mathcal{P}_{\mathrm{Diff}}) \subset \mathcal{P}\}$$

根据佐恩引理，存在一个极小元。

(2) 可由注记 1.49 得出。

(3)：微分学 $\mathcal{P}$(Diff) 与由局部具有 $\mathrm{ev}_x \circ p$ 形式的图构成的微分学一致，其中 $x \in X$ 和 p 是 Diff(X) 的微分学中的一个图。根据 [48]，我们有 ${}^iT_{Id}$Diff(X) 是一个微分向量空间。此关系源于群乘法的微分：给定 C^∞(ℝ, $Diff$(X)) 中的两条路径 γ_1、γ_2，满足 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = Id$，若对 $i \in \{1,2\}$ 有 $X_i = \partial_t\gamma_i(0)$，则

$$X_1 + X_2 = \partial_t(\gamma_1.\gamma_2)(0).$$

在 $\mathcal{P}$(Diff) 中局部观察图时，我们只需考虑形如 $\mathrm{ev}_x \circ p$ 的图，其中p 是 Diff(X) 中的一个图，且满足 $p(0) = Id_X$. 。顺便一提，${}^dT_xX$ 上的向量空间结构是通过求值映射从 ${}^iT_{Id}$Diff(X) 继承而来的。

为了完成对 (3) 的验证，我们通过描述其微分学，直接证明 (4)。为此，我们考虑

$$C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{Diff}(X)) = \{\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{Diff}(X)) \,|\, \gamma(0) = Id_X\}.$$

令 ${}^dC = \coprod_{x\in X}^d C_x$. 总求值映射

$$\begin{array}{rccc} ev: & X \times C_0^\infty(\mathbb{R}, Diff(X)) & \to & {}^dC \\ & (x, \gamma) & \mapsto & ev_x \circ \gamma \end{array}$$

是逐纤维的（在 X 上），且为满射。由此，我们在 ${}^dC$ 上得到一种微分学，它是 $X \times C_0^\infty$(ℝ, Diff(X)) 经 ev 得到的推前微分学。取商后，我们在 ${}^dTX$ 上得到一种微分学，使得每个纤维 ${}^dT_xX$ 都自然地成为一个微分向量空间。

□

因此，微分切空间是一个向量伪丛；不过，还需要额外的工作来在 ${}^{ie}TX$ 上构造一种微分学。为此，我们考虑映射

$$\begin{array}{rccc} l: & C^\infty(X, \mathbb{R}^\infty) \times C^{ie}TX^{\mathbb{N}} & \to & {}^{ie}TX \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots) \times (d_{c_1}, \cdots, d_{c_k}, \cdots) & \mapsto & \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k d_{c_k} \end{array}$$

该映射通过推前在 ${}^{ie}TX$ 上生成所需的微分学。

1.6.2. 向量伪丛上的黎曼度量。

DEFINITION 1.55. 设 $\pi: E \to X$ 是一个实微分空间向量伪丛。E 上的黎曼度量是一个光滑映射

$$g : E^{(2)} \to \mathbb{R}$$

该映射在每个 E_x 上逐纤维地给出一个对称、定性且正的双线性形式。

这里我们必须指出第一类困难，而这些困难在（经典的）有限维流形的语境中并不存在：

- 度量 g 未必能在每个纤维 E_x 与其微分空间对偶 $\mathcal{L}$ 之间定义一个同构（E_x, ℝ）。
- E 的纤维可能并不同构。

作为第一类例子，可以提到配备内部黎曼度量的向量伪丛 ${}^dTX$ （见 1.3.3 节）；不过，我们也可以探讨切锥是否无需嵌入到更大的黎曼向量伪丛中，也能具有黎曼结构。就目前我们所知，唯一已知的这类结构见 1.3.3 节。

1.6.3. 微分空间主丛与联络。在 [**33**, Article 8.32] 中，Iglesias-Zemmour 以全空间 P 上的路径为基础，给出了主 G-丛上联络的定义，将结构群为有限维李群的主丛的经典路径提升概念加以推广。

DEFINITION 1.56. 设 G 为一个微分学群，且 $\pi\colon P \to X$ 是一个主 G-丛。记 $\mathrm{Paths}_{\mathrm{loc}}(P)$ 为局部路径的微分空间（见 [**33**, Article 1.63]），并用 $\mathrm{tpath}(P)$ 表示局部路径的典范丛

$$\mathrm{tpath}(P) := \{(\gamma, t) \in \mathrm{Paths}_{\mathrm{loc}}(P) \times \mathbb{R} \mid t \in D(\gamma)\}.$$

微分空间联络是一个光滑映射 $H\colon \mathrm{tpath}(P) \to \mathrm{Paths}_{\mathrm{loc}}(P)$，满足以下性质：对任意 $(\gamma, t_0) \in \mathrm{tpath}(P)$:

(1) γ 的定义域等于 $H(\gamma, t_0)$的定义域，(2) $\pi \circ \gamma = \pi \circ H(\gamma, t_0)$，(3) $H(\gamma, t_0)(t_0) = \gamma(t_0)$，(4) $H(\gamma \cdot g, t_0) = H(\gamma, t_0) \cdot g$对所有 $g \in G$均成立，(5) $H(\gamma \circ f, s) = H(\gamma, f(s)) \circ f$对于从 $\mathbb{R}$的一个开子集到 $D(\gamma)$的任意光滑映射 f均成立，(6) $H(H(\gamma, t_0)\ t_0) = H(\gamma, t_0)$。

关于该定义的另一种表述见于 [**51**]，其中使用了“路径提升”这一术语。

REMARK 1.57. 微分空间联络满足许多经典联络在主 G-丛（其中 G 是有限维李群）上所具有的通常性质；特别是，它们允许对 $\mathrm{Paths}_{\mathrm{loc}}(M)$ [**33**, Article 8.32], 中的路径作唯一的水平提升，并且可通过光滑映射 [**33**, Article 8.33]拉回。

PROPOSITION 1.58. 设 V 为一个向量空间。则， G 通过以下定义从右侧光滑作用于空间 $\Omega(P,V)$，即 P上的取值于 V的微分形式空间:

$$\forall (g, \alpha) \in \Omega^n(P,V) \times G, \forall p \in \mathcal{P}(P), \quad (g_*\alpha)_{g.p} = \alpha_p \circ (dg^{-1})^n \ .$$

PROOF. G 在 P 上光滑作用，使得当 $p \in \mathcal{P}(P)$ $g.p \in \mathcal{P}(P)$时成立。现在右作用定义良好，且光滑性显然。□

DEFINITION 1.59. 设 $\alpha \in \Omega(P; \mathfrak{g})$。微分形式 α是右不变的，当且仅当对于每个 $p \in \mathcal{P}(P)$以及每个 $g \in G$,

$$\alpha_{g.p} = Ad_{g^{-1}} \circ g_* \alpha_p \ .$$

现在，让我们转而讨论联络和整体单值性。设 $p \in P$，并设 γ 为 P 中的一条光滑路径，其起点为 p.

DEFINITION 1.60. P 上的联络是一个取值于 $\mathfrak{g}$–的右不变1-形式 θ，满足：对于每个 $v \in \mathfrak{g}$，对于任意路径 c： $\mathbb{R} \to G$ 使得

$$\begin{cases} c(0) & = & e_G \\ \partial_t c(t)|_{t=0} & = & v \ , \end{cases}$$

并且对于每个 $p \in P$，我们有：

$$\theta(\partial_t(p.c(t))_{t=0}) = v \ .$$

现在我们假设 $dim(M) \geq 2$，并在 $P.$ 上固定一个联络 θ

DEFINITION 1.61. 设 $\alpha \in \Omega(P; \mathfrak{g})$ 是一个 $G-$不变的 1-形式。令 $\nabla\alpha = d\alpha - \frac{1}{2}[\theta, \alpha]$ 为 $\alpha.$ 的水平导数。由 θ 诱导的曲率 2-形式为

$$\Omega = \nabla\theta \ .$$

2. 函数方程中的微分学

2.1. 主丛、完全正则李群与整体单值性。

2.1.1. 群上的运动与（偏）微分方程。一大类一阶微分方程通常通过将李代数中的光滑路径 v 积分为李群中的光滑路径 g，从而求得全局解，并满足如下类型的微分方程

$$g(t)^{-1}\partial_t g(t) = v(t). \tag{2.1}$$

当 v 为常数时，$g(t) = \exp(tv)$ 在其存在时给出唯一的解 g，使得 $g(0) = e.$。这种方法最初促使 Sophus Lie 发展了李群的概念。对于有限维的例子，这种方法提供了一种几何途径来求解取值于李群的微分方程；不过，这些技术对于无限维对象也可能很有意义。

更确切地说，指数映射不易定义的首批有趣例子，是如下形式的线性微分方程

$$\frac{df}{dt} = A(f) \tag{2.2}$$

其中 A 是作用于光滑函数空间 $F.$ 上的正阶微分算子

EXAMPLE 2.1. 当 $F = C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ 时，考虑 $A = -\frac{d^2}{dx^2}.$。那么存在一个无界算子 $\exp(tA)$，它是满足特征值为 $e^{tn^2}.$ 的 (2.2) 的解

将 A 修改为 $\frac{d^2}{dx^2}$ 后，解 $\exp(tA)$ 是一族指标为 0、特征值为 $e^{-tn^2} \leq 1.$ 的弗雷德霍姆算子

从这个可以任意扩展并复化的初等示例中，可以很容易地理解，对这些方程的解的正则性进行控制，以及对其进行数值近似的方法，在很大程度上取决于算子 $A.$ 的性质。同样地，形如

$$\frac{dS}{dt} = [A(t), S(t)] \,, \tag{2.3}$$

其中 S 是李代数 $\mathfrak{g}$ 中的算子值解，而 A 是 $\mathfrak{g}$ 中的一条光滑路径，具有一个形式解

$$S(t) = \mathrm{Ad}_{G(t)} S(0)$$

其中 G 是方程（2.1）的解。

我们希望在此提及，这些基本事实可以通过两种方式加以推广：

- 偏微分方程的对称性生成变换群，将一个解变换为另一个解。在实践中，人们经常处理无穷小对称性，它们在形式上是对称性群的切向量 [**70**]。对无穷小对称性的李代数进行积分并不容易，需要具备无限维李群领域的专业技术。在 [**79**] 中可以找到关于三维欧拉方程对称性的一个此类例子。这些提示有助于通过约化求解偏微分方程；一般而言，这需要逐个具体处理，并且只有在能够产生“足够多”的对称性时才有效。不过，无论如何，偏微分方程的对称性通常对于从整体上理解解空间都具有重要意义。

- 可积系统是等价于零曲率条件的微分方程，也就是说，它们可以表示为

$$dS \pm [S, S] = 0$$

  其中， S 是根据初始偏微分方程构造的恰当的 1-形式。解决该问题的主要线索在于，这个特定方程是一种所谓的零曲率方程；当我们在一个平凡的有限维主丛上处理该方程，并将 S 视为联络 1-形式时，它便可被全局积分。

在第2节中，我们介绍微分学在微分学李群所需技术性质方面的应用现状，并探讨其在可由无限维李群表示的偏微分方程中的潜在应用。

2.1.2. 关于正则微分拓扑李群。由于我们关注李群的无限维类似物，因此需要考虑微分空间的切空间，并处理李代数和指数映射。我们在 [**48, 18, 12**] 之后给出以下定义：

Definition 2.2. [**48**] 若一个微分学李群 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$，则称其为正则的，当且仅当存在一个光滑映射

$$\mathrm{Exp} : C^\infty([0;1], \mathfrak{g}) \to C^\infty([0,1], G)$$

使得 $g(t) = \mathrm{Exp}(v(t))$ 是微分方程的唯一解

$$\begin{cases} g(0) = e \\ \frac{dg(t)}{dt} g(t)^{-1} = v(t) \end{cases} \tag{2.4}$$

我们如下定义指数函数：

$$\begin{aligned} exp : \mathfrak{g} &\to G \\ v &\mapsto exp(v) = g(1) \, , \end{aligned}$$

其中 g 是常值路径 $v.$ 经 Exp 映射所得的像

Remark 2.3. 方程 (2.4) 称为右对数方程，而方程 2.1 称为左对数方程。这两个方程之间的对应关系在 [**42**]，中得到了清晰阐述，并且第一个方程存在解，当且仅当第二个方程存在解。

当李群 G 是向量空间 V时，正则李群的概念具体化为 [**51**] 中的正则向量空间和[**48**]中的积分向量空间；我们采用前一种术语。

Definition 2.4. [**48**] 设 $(V,\mathcal{P})$ 为一个微分向量空间。如果存在一个光滑映射，则称空间 $(V,\mathcal{P})$ 为积分的或正则的

$$\int_0^{(.)} : C^\infty([0;1];V) \to C^\infty([0;1],V)$$

使得 $\int_0^{(.)} v = u$ 当且仅当 u 是该微分方程的唯一解

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u'(t) = v(t) \end{array} \right. .$$

例如，如果 V 是一个完备的局部凸拓扑向量空间，并配备由其 n´ebuleuse 微分学的 Fr¨olicher 完备化所给出的自然 Fr¨olicher 结构，那么该定义便适用，参见 [**33, 50, 51**]。现在我们给出相应的导数概念。在此之前先说明，$\forall v \in V$, $V \subset {}^iT_vV$ 通过将线性路径 $t \mapsto tv$ 与 v 相识别：

Definition 2.5. 设 V 为一个微分向量空间。若 V，则称其为余正则

$$\forall v \in V, {}^iT_vV = V.$$

这一性质看似自然，却高度依赖于所考虑的微分学，参见例 1.44。这或许可以解释，为什么从 [**48**] 以来直至今日，所有作者乃至我们自己，都将这个问题视为次要甚至可以忽略的问题。

Definition 2.6. 设 G 是一个微分学李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。那么，G 是完全正则的，也就是说，若 $\mathfrak{g}$ 是可积分的且 G 按定义 2.2 和 2.4 的意义是正则的，则它是带有可积分李代数的正则对象。

我们以两个结构性结果结束本节；其中第二个结果是在 [**51**] 中于受限情形下基本证明的。

Theorem 2.7. 设

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$$

是 Fr¨olicher 李群的一个正合列，且存在一个光滑截面$s : H \to G$，并且 $i(K) \subseteq G$ 上的迹微分学与从 K 到 $i(K)$ 的推前微分学一致。我们还考虑相应的李代数序列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k} \xrightarrow{i'} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \mathfrak{h} \longrightarrow 0 .$$

那么，

- 李代数 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{h}$ 可积分，当且仅当李代数 $\mathfrak{g}$ 可积分；
- Fr¨olicher 李群 K 和 H 当且仅当 Fr¨olicher 李群 G 是正则的。

Theorem 2.8. 设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列共正则且可积的 Fr¨olicher 向量空间，并配备了 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ 上的分次光滑乘法运算，即一种乘法，使得对于每个 $n, m \in \mathbb{N}^*$, $A_n.A_m \subset A_{n+m}$，相对于相应的 Fr¨olicher 结构都是光滑的。

- 我们来定义形式级数的（非含幺）代数:

$$\mathcal{A}=\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n|\forall n\in\mathbb{N}^*,a_n\in A_n\right\},$$

赋予无限乘积的 Fr ¨olicher 结构。于是，该空间

$$1+\mathcal{A}=\left\{1+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n|\forall n\in\mathbb{N}^*,a_n\in A_n\right\}$$

是一个正则 Fr ¨olicher 李群，其李代数 Fr ¨olicher 为 $\mathcal{A}$.此外，指数映射定义了一个光滑双射 $\mathcal{A}\to 1+\mathcal{A}$.

对于 Fr´echet 李群，类似于定理2.7的结果同样成立，参见 [**42**]。

2.1.3. 微分空间主丛中联络的整体单值性。现在，设 P 是一个主丛。设 $p\in P$ 和 γ 是 P 中的一条光滑路径，从p出发，定义在 $[0,1]$. 上。令 $H_\theta\gamma(t)=\gamma(t)g(t)$，其中 $g(t)\in C^\infty([0,1];\mathfrak{g})$ 是一条满足微分方程的路径:

$$\begin{cases}\theta\left(\partial_t H_\theta\gamma(t)\right)=0\\ H_\theta\gamma(0)=\gamma(0)\end{cases}$$

该方程的第一行等价于微分方程

$$g^{-1}(t)\partial_t g(t)=-\theta(\partial_t\gamma(t))$$

该方程可积，而第二行等价于初始条件 $g(0)=e_G$. 这表明水平提升是良定义的，与有限维流形的标准情形一样。此外，映射 $H_\theta(.)$ 平凡地定义了一个微分空间联络。这使我们能够考虑该联络的全纯群。注意，直接改编 [**51**] 的论证即可证明，全纯群（在共轭意义下，且不考虑 M 的连通分支的选择）与基点 p. 的选择无关。该定义使我们能够考虑结构群约化。按照 [**51**],

THEOREM 2.9. 假设 G_1 和 G是正则 Fr ¨olicher 群，其李代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}$. 也正则。令 $\rho:G_1\mapsto G$ 为李群的单射态射。若 P上存在一个联络 θ，其曲率为 Ω，并且对于任意从 p出发的水平路径光滑 1 参数族 $H_\theta c_t$，以及 M中的任意光滑向量场 X、Y，映射

$$s,t\in[0,1]^2\quad\to\quad\Omega_{Hc_t(s)}(X,Y)\tag{2.5}$$

是一个光滑的 $\mathfrak{g}_1$ 值映射（相对于 $\mathfrak{g}_1-$ 微分学），并且若 M 单连通，则 P 的结构群 G 可约化为 G_1，且联络 θ 也可约化。

现在，我们可以使用 [**79**] 在通过指数映射性质 [**51**] 进行群分类时所用的术语，陈述前面提到的 Ambrose-Singer 定理:

THEOREM 2.10. 设 P 是一个主丛，其结构群是完全正则的 Fr ¨olicher 李群 G。设 P 上有一个联络 θ，其对应的微分空间联络为 H_θ 。

(1) 对于每个 $p\in P$，整体单值群 $\mathcal{H}_p^L$ 是 G 的微分空间子群，除共轭外不依赖于 p 的选择。

(2) 存在第二个整体单值群 H^{red}, $\mathcal{H} \subset H^{red}$，它是使得存在一个子丛 P'，令 θ 约化到该子丛的最小结构群。其李代数由曲率元素张成，即它是包含曲率元素的最小可积李代数。(3) 如果 G 是 I 型或 II 型李群（经典意义下），则存在一个（极小）闭李子群 $\bar{H}^{red}$ （经典意义下），使得 $H^{red} \subset \bar{H}^{red}$; 其李代数是 $\mathfrak{g}$ 中 H^{red}. $\bar{H}^{red}$ 的李代数的闭包，并且它是 G 的结构群中最小的闭李子群，这些结构群对应于 P 的闭子丛 P'，且 θ 约化到该子丛。

再次由 [**51**]，我们得到以下结果：

PROPOSITION 2.11. 若联络 θ 是平坦的，且 M 是连通且单连通的，那么对于任意一条始于 $p \in P$ 的路径 γ，映射

$$\gamma \mapsto H_\theta \gamma(1)$$

仅取决于 $\pi(\gamma(1)) \in M$，并定义了一个全局光滑截面 $M \to P$.因此， $P = M \times G$.

让我们进一步详细说明这一结果（参见 [**42**, section40.2]，其中给出了 c^∞ 设定下的类似陈述）：

THEOREM 2.12. 设 $(G, \mathfrak{g})$ 是一个正则李群，其李代数也是正则的；设 X 是一个单连通的 Fr ¨olicher 空间。设 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 满足

$$d\alpha + [\alpha, \alpha] = 0 \,. \tag{2.6}$$

则存在一个光滑映射

$$f : X \to G$$

满足

$$df.f^{-1} = \alpha.$$

此外，我们可以通过在 $x \in X$ 中逐点施加 G 的伴随作用，从一个解 f 转换到另一个解。

我们指出，若考虑方程

$$d\alpha - [\alpha, \alpha] = 0$$

而不是 (2.6)，定理仍然成立；我们只需将左对数导数改为右对数导数，并将伴随作用改为余伴随作用。解之间的对应关系由群 $C^\infty(X, G)$ 上的逆映射 $f \mapsto f^{-1}$ 给出。

2.2. 微分空间上的优化。一般而言，优化方法旨在最小化或最大化目标泛函。该泛函通常取决于偏微分方程（PDE）的解。偏微分方程的实例包括弹性结构的柔度，或黏性流动中的耗散能。由于最大化问题可以通过考察目标泛函的相反数转化为最小化问题，因此文献中通常只考虑最小化问题。一般而言，优化方法是迭代方法，通过生成更新来降低目标泛函（对于最小化问题）。我们首先聚焦于形状优化，以说明在优化技术中考虑微分空间的动机。随后，我们概述有关微分空间上优化技术的最新研究成果。

2.2.1. 在（形状）优化中考虑微分空间的动机。形状优化有许多应用，也有种类繁多的方法。应用实例包括声学形状优化 [**81**], 传输问题中界面的优化 [**23, 73**], 电化学加工 [**30**], 图像复原与分割 [**31**] 以及皮肤结构的反演建模 [**69**]。

形状优化问题通常通过迭代方法求解：从一个初始形状出发，逐渐演化，并通过变形使其成为最优形状。为了构建优化方法并开展理论研究，首先需要定义我们所说的形状。形状有多种表示方式，例如，使用地标向量 [**16, 28, 37, 74, 85**], 平面曲线 [**63, 65, 64, 66**] 或高维空间中的曲面 [**5, 6, 40, 46, 62**],对象的边界轮廓 [**22, 49, 80**], 多相对象 [**93**], 可测集的示性函数 [**94**] 以及图像形态 [**17**]。一般而言，形状空间不具有向量空间结构。次优的选择是为其赋予流形结构和相应的黎曼度量。如果无法为特定的形状空间建立流形结构，另一种选择是采用微分空间结构。与将形状空间视为黎曼流形的研究相比，将微分空间视为形状空间的研究才刚刚起步，参见例如 [**38, 92**]。

下面我们总结 [**92**], 的主要发现，该研究建议在受偏微分方程约束的形状优化中使用微分空间，而非光滑流形。

在形状优化中，人们研究形状泛函。对于合适的形状空间 $\mathcal{U}$，形状泛函是一个函数 $J\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$。无约束形状优化问题可表示为

$$\min_{\Omega\in\mathcal{U}} J(\Omega). \tag{2.7}$$

在实际应用中，形状优化问题通常受到偏微分方程等方程的约束。

关于优化问题中的合适形状空间，[**92**] 首先聚焦于一维光滑形状。一维光滑形状是单连通紧集 Ω 的 C^∞-边界。这些形状可理解为光滑简单闭曲线，由从 S^1 到$\mathbb{R}^2$的嵌入表示。由于我们只关注形状本身，即曲线的像，因此不关注重新参数化。因此，可以考虑 [**63**]中给出的形状空间：

$$B_e(S^1,\mathbb{R}^2) := \mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^2)/\mathrm{Diff}(S^1),$$

其中 $\mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^2)$ 是从 S^1 到 $\mathbb{R}^2$ 的所有嵌入构成的集合，而 $\mathrm{Diff}(S^1)$ 是从 S^1 到其自身的所有微分同胚构成的空间。空间 $B_e(S^1,\mathbb{R}^2)$ 是一个光滑流形，见 [**42**]。切空间为

$$T_cB_e(S^1,\mathbb{R}^2) \simeq \{h \mid h = \alpha n, \alpha \in C^\infty(S^1)\},$$

其中 n 表示形状边界 $c\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$的外部单位法向场。一维光滑形状空间在多种黎曼度量下构成黎曼流形，例如近似局部度量和索伯列夫度量；参见例如 [**63, 5, 6, 62, 65**]。所有这些度量都源自标准的 L^2 度量，并在其中加入权重（近似局部度量）、导数（索伯列夫度量）或两者兼有（加权索伯列夫度量）。

在 [**92**], 中，针对 $\mathcal{U}$，考虑了形状空间 $B_e(S^1,\mathbb{R}^2)$ 与一阶 Sobolev 度量和 Steklov-Poincar´e 度量（参见 [**83**]）的组合。

REMARK 2.13. 可以将形状空间 $B_e(S^1,\mathbb{R}^2)$ 及其相关结果推广到紧流形 M和黎曼流形 N，其中 $\dim(M) < \dim(N)$（参见例如 [**62**]）。

一般而言，要在黎曼形状空间 $(\mathcal{U}, g)$ 上构建优化方法，需要相对于 g 的黎曼形状梯度。文献 [**92**]给出了形状空间 $B_e(S^1,\mathbb{R}^2)$ 的联络，以及一阶 Sobolev 度量和 Steklov-Poncar´e 度量与形状微积分的联系。此外，还对这两种方法进行了比较（参见 [**82, 92**]）。特别值得一提的是，采用 Steklov-Poincar´e 度量在有限元网格方面具有若干计算优势；求解偏微分方程约束时需要考虑该网格。请参阅 [**82, 84, 83**]。

REMARK 2.14. 众所周知，形状优化算法在优化过程中可能会对初始形状进行大幅变换，这往往会导致底层计算网格的单元纵横比恶化。通常，函数空间中的优化问题可以采用两种不同的方法求解：先离散后优化（DO）和先优化后离散（OD）。形状优化问题也不例外。感兴趣的读者可参阅 [**7**] ，其中通过一个典型的偏微分方程约束形状优化问题描述了 OD 与 DO 方法之间的区别。

无论是否采用这些 OD 方法及其带来的益处（相关内容可参阅文献），形状空间 $B_e(S^1,\mathbb{R}^2)$ 本身都限制了这些方法的应用，因为其中只包含光滑形状。从数值角度来看，最好放宽对形状光滑性的假设。数值实验表明，带有尖点的形状也可以使用 Steklov-Poincar´e 度量处理；参见 [**82, 83, 84**]。因此，需要另行定义一种形状空间。在 [**92**], 中定义了所谓的 $H^{1/2}$-形状空间：

DEFINITION 2.15. 设 $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 d 维 Lipschitz 形状（一个非平凡 Lipschitz 区域的边界）。所有 d 维 $H^{1/2}$-形状构成的空间为

$$\mathcal{B}^{1/2}\left(\Gamma_0,\mathbb{R}^d\right) := \mathcal{H}^{1/2}\left(\Gamma_0,\mathbb{R}^d\right)/\sim,$$

其中

$$\mathcal{H}^{1/2}\left(\Gamma_0,\mathbb{R}^d\right) := \left\{ w : w \in H^{1/2}\left(\Gamma_0,\mathbb{R}^d\right) \text{ injective, continuous; } w\left(\Gamma_0\right) \text{ Lipschitz shape} \right\}$$

且等价关系 $\sim$ 定义为

$$w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1\left(\Gamma_0\right) = w_2\left(\Gamma_0\right), \text{ where } w_1, w_2 \in \mathcal{H}^{1/2}\left(\Gamma_0,\mathbb{R}^d\right).$$

由于空间 $\mathcal{B}^{1/2}$ 颇具挑战性，目前尚不清楚它是否是黎曼流形，甚至是否是流形。因此， [**92**] 提出了采用不同视角的想法，摒弃黎曼流形的严格限制，开始探索微分空间中的可能性。由于自然微分空间种类繁多， $\mathcal{B}^{1/2}$ 形状空间是一个微分空间

（参见 [**92**]）。此外， $\mathcal{B}^{1/2}$ 的限制性远低于 B_e。然而，微分空间在优化领域尚未得到充分确立。下一小节将总结关于微分空间上优化技术的首批研究成果

2.2.2. 微分空间上的优化一般概念。下面简要总结 [**25**], ，其中阐述了微分空间上的优化方法。为了在微分空间上表述优化方法，我们将流形上的最速下降法推广到微分空间。为方便起见，我们在算法 1 中表述完备黎曼流形（M, g）上的最速下降法。

要求： M上的目标函数 f；（M, g）上的Levi-Civita联络 ∇；步长策略。
目标：求解 $\min_{x \in M} f(x)$。

输入：初始数据 $x_0 \in M$。

对于 $k = 0$, 执行 1,...

[1] 计算 grad$f(x_k)$，记为 f 在 x_k中的黎曼形状梯度。[2]计算步长 t_k。[3] 设 $x_{k+1} := \exp^{x_k}(-t_k \text{grad} f(x_k))$，其中 exp: $TM \to M$表示指数映射 结束循环

算法 1：完备黎曼流形 (M, g) 上的最速下降法

在 [**25**], 中，本文考虑了光滑流形上最速下降法所需的已知对象及其微分空间对应物，即黎曼流形、黎曼梯度、Levi-Civita联络以及回缩的微分空间变体。下文将从 [**25**]介绍这些对象。

Remark 2.16。文章 [**25**] 未考虑指数映射的微分空间版本，因为出于优化目的，通常会用近似指数映射的回缩来替代指数映射。此外，微分空间意义下指数映射是否存在，完全不明确。

2.2.3. 微分学梯度。出于优化的目的，梯度的存在或多或少是不可或缺的，因为在特定假设下，它能提供一个下降方向。为了定义微分学梯度的微分空间版本，我们首先定义微分学黎曼空间，由此得到微分学梯度的定义。这里照录 [**25**], 中给出的定义，以便与先前的定义进行比较。

Definition 2.17（微分学黎曼空间）。设 X 为一个微分空间。如果存在一个光滑映射，使得 X 是一个微分学黎曼空间。

$$\text{Sym}({}^{ie}TX, \mathbb{R}),\ x \mapsto g_x$$

使得 g_x: ${}^{ie}T_xX \times {}^{ie}T_xX \to \mathbb{R}$ 光滑、对称且正定。那么，我们称映射 g 为微分空间黎曼度量。

Remark 2.18。这个定义符合定义 1.55 中关于微分学向量丛 ^{ie}TX 上的黎曼度量的定义，但不同于内部黎曼度量的定义 1.29。

Definition 2.19（微分学梯度）。设 X 为一个微分学黎曼空间。函数 $f \in C^\infty(X)$ 在 $x \in X$ 中的微分学梯度 $\operatorname{grad} f$ 定义为下式的解

$$g_x(\operatorname{grad} f, \mathrm{d}_c) = \mathrm{d}_c(f).$$

Remark 2.20。微分学黎曼空间的微分学梯度并不一定存在。此外，迄今为止，我们还没有任何条件能够保证存在一个不会导致平凡微分学黎曼空间的微分学梯度。这并不令人意外，因为即使在限制性更强的无限维流形环境中，梯度的存在也无法得到保证。

2.2.4. 朝向迭代点的更新：微分学收缩。为了更新迭代点，通常使用指数映射。然而，指数映射在优化技术中是一项昂贵的操作。因此，人们使用所谓的回缩来更新迭代点。

Definition 2.21（微分学收缩）。设 X 是一个微分空间。X 的微分学收缩是一个映射 $\mathcal{R}\colon TX \to X$，满足以下条件：

(i) $\mathcal{R}_{|_{T_xX}}(0) = x$
(ii) Let $\xi \in T_xX$ and $\gamma_\xi\colon T_0\mathbb{R} \to T_xX,\ t \mapsto \mathcal{R}_{|_{T_xX}}(t\xi)$. Then $T_0\gamma_\xi(0) = \xi$.

由于寻找微分学收缩颇具挑战性，我们还定义了所谓的弱微分学收缩。

Definition 2.22。设 X 是一个微分空间，且 CX 是 X的切锥丛。X 的弱微分学收缩是一个映射 $\mathcal{R}\colon CX \to X$，满足以下条件：

(i) $\mathcal{R}_{|_{C_xX}}(0) = x$
(ii) Let $\xi \in C_xX$ and $\gamma_\xi\colon C_0\mathbb{R} \to C_xX,\ t \mapsto \mathcal{R}_{|_{C_xX}}(t\xi)$. Then, $C_0\gamma_\xi = \xi$.

在 (ii) 中，映射 $C_0\gamma_\xi$是一个切向锥映射，定义为 $C_0\gamma_\xi\colon C_0\mathbb{R} \to C_0X$, $\mathrm{d}_\alpha \mapsto \mathrm{d}^{\gamma_\xi \circ \alpha}\cdot$

Remark 2.23. 在 [25], 中，不仅讨论了收缩映射，还给出了微分学列维-奇维塔联络的定义以及此类联络唯一性的证明。但与黎曼梯度类似，文中并未给出其存在性的条件。

2.2.5. 微分空间上的一阶优化技术。考虑算法 1, [**25**] 提出了一种微分空间版本的最速下降算法，该算法使用回缩而非指数映射。为方便起见，我们在下文重复给出该算法（参见算法2）。

要求：微分学黎曼空间 X 上的目标函数 f；定义在 X 上的微分学收缩 $\mathcal{R}$。目标：求解 $\min_{x\in X} f(x)$。输入：初始数据 $x_0 \in X$；常数 $\hat{}\alpha > 0$ 和 σ，用于 $k = 0$ 的 Armijo 回溯策略的参数 $\rho \in (0, 1)$，1, . . . do[1] 计算 $\mathrm{grad} f(x_k)$，表示 x_k 中 f 的微分学形状梯度。[2] 计算 Armijo 回溯步长：[3] 设定 $x_{k+1} : = \mathcal{R}_{|_{T_{x_k}X}}(-t_k \mathrm{grad} f(x_k))$。

Set $\alpha := \hat{\alpha}$.
while $f\big(\mathcal{R}_{|_{T_{x_k}X}}(-t_k \mathrm{grad} f(x_k))\big) > f(x^k) - \sigma\alpha \left\|\mathrm{grad} f(x_k)\right\|^2_{T_{x_k}X}$
Set $\alpha := \rho\alpha$.
end while
Set $t_k := \alpha$.

结束循环

算法 2：微分空间 X 上采用 Armijo 回溯线搜索的最速下降法

Remark 2.24。算法 2 应用于 [**25**] 中的一个示例。有关该算法的更多详情，请参阅相关论文。

迄今为止，该算法尚无收敛性证明。若能给出收敛性证明，将对微分学界和优化界都极有意义。未来还需开展微分优化理论研究，以将形状优化推广到微分学框架中。

3. 关于映射空间

3.1. 关于 ILB 框架。本小节考察一类非常特殊的 Fr´échet 李群：它们是巴拿赫李群的射影极限，作为无限维李群，其坐标图和图册也具有射影极限性质。术语方面，我们主要依据 [**72**] 。

首先必须指出，当我们为 Fr´échet 空间/流形赋予由 Fr´échet 无限可微参数化构成的微分学时，Fr´échet 意义下的无限可微性等价于微分学意义下的光滑性。我们在此建立的框架限制更多，但也更简单，因此比 [**72**] 中完整定义的框架更容易理解。下文中，缩写 ILB 意为“Banach 空间的逆极限”。

Definition 3.1（ILB 流形与丛）。
(1) 以 Fr´echet 空间 F 为模型的 Fr´echet 流形 M 是一个 ILB 流形，当且仅当

• 存在一个 Banach 空间序列 (B_n)，满足：– $\forall n \in \mathbb{N}$, B_{n+1} 是 B_n的一个子集，并且在 B_n的拓扑下稠密；此外， B_{n+1} 的闭单位球是 B_n. 的闭单位球的一个紧子集；– F 作为拓扑向量空间，是序列 (B_n)的射影极限。在这些假设下，$(F,(B_n)_{n\in\mathbb{N}})$称为 ILB 向量空间。

• 存在一族巴拿赫流形 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中对每个 n，都存在一个光滑且稠密的嵌入 $M_{n+1} \hookrightarrow M_n$；并且存在一个定义在 M_0 上的巴拿赫图册，其对每个 n 的限制都是 M_n 上的一个图册。

(2) 两个 ILB 流形 M 和 N 之间的 ILB 映射 f，是一个光滑映射 f: $M \to N$，以及一族光滑映射 $\{f_n\colon M_n \to N_n\}$，满足 f，并且所有 f_n 都与所有包含映射 $M \hookrightarrow M_{n+1} \hookrightarrow M_n$ 和 $N \hookrightarrow N_{n+1} \hookrightarrow N_n$ 交换。(3) ILB 主丛是两个 ILB 流形 $(\pi\colon P \to M,\ \pi_n\colon P_n \to M_n)$ 之间的 ILB 映射，且对每个 n，映射 $\pi_n\colon P_n \to M_n$ 是一个主 G_n-丛，其中 G_n 是一个巴拿赫李群。(4) 两个 ILB 主丛 $\pi\colon P \to M$ 和 $\pi'\colon P' \to$ 之间的 ILB 映射 FM'，若对每个 n，$F_n\colon P_n \to P'_n$ 都是一个（G_n- 等变的）丛映射，则称其为 ILB 丛映射。注意，F 诱导出一个 ILB 映射 $M \to M'$。若一个 ILB 丛映射存在逆 ILB 丛映射，则它是 ILB 丛同构。

当用希尔伯特空间序列替代巴拿赫空间序列时，我们在定义中将 ILB 替换为 ILH（希尔伯特空间的逆极限）。下面通过该设定的两个动机性例子来说明这一框架。为此，我们考虑一个配备固定有限图册的光滑紧致无边流形

$$\{\phi_k : O_k \subset \mathbb{R}^m \to M\}_{k\in\mathbb{N}_N}.$$

EXAMPLE 3.2. $C^r(M,\mathbb{R}^n)$ 的 r–次连续可微映射空间，配备范数

$$||f||_{r,\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}_N}} = \sup_{k\in\mathbb{N}_N}\sup_{i\in\mathbb{N}_r}\sup_{x\in M}||D^i f\circ\phi_k||_{L^i(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}$$

是 $C^r(M,\mathbb{R}^n)$ 上的一个巴拿赫范数，并且在拓扑意义上不依赖于图册 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}_N}$. 的选择。于是，序列 $(C^r(M,\mathbb{R}^n))_{r\in\mathbb{N}}$ 以 $C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 为其射影极限。

现在考虑 N 一个 n–维（局部紧且旁紧）的黎曼流形。根据 [**36**], 指数映射，在 E 上逐点为 $C^0(M,N)$ 定义一个图册，其定义域位于 $C^0(M,\mathbb{R}^n)$ 中；通过限制定义域，该图册在 $C^r(M,N)$ 上定义了一个以 $C^r(M,\mathbb{R}^n)$ 为模型的光滑巴拿赫流形结构，其中 $r \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. 这定义了一个 ILB 流形。此外，如果我们将$G$ 替换为一个有限维李群，就得到一个 ILB 李群。

沿用上一个例子中的记号。总存在一个从 N 到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 的光滑嵌入，例如 [**32**]。现在假设这是一个黎曼嵌入，也就是说，N 上的黎曼度量是 $\mathbb{R}^{2n+1}$. 上的黎曼（欧几里得）度量的拉回。我们还假设 M 是黎曼的。

因此，对于 M上的黎曼体积 dx ，空间 $L^2(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 定义为 $C^\infty(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 关于范数

$$||f||_{L^2}=\int_M f^2dx$$

是一个希尔伯特空间。此外，若 Δ 是作用在 M 上的（正）拉普拉斯算子，则可以将 $s\in\mathbb{R}$ 的索伯列夫空间 $H^s(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 定义为 $C^\infty(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 关于范数的完备化

$$||f||_{H^s}=\int_M\left((1+\Delta)^{s/2}f\right)^2dx,$$

其中，实数次幂 $(1+\Delta)^s$ 被定义为算子（当 $s>0$ 时无界），其特征值为 $(1+\lambda_u)^s$ ，对应于 Δ 中特征值为 $\lambda_u\geq 0$. 的特征向量 u 。为完整起见，我们还需回顾， Δ 可延拓为作用在 $L^2(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 上的无界、自伴且正的算子，并具有光滑特征向量；这说明取 $(1+\Delta)$ 的实数次幂为何如此容易。根据这些定义，所谓索伯列夫嵌入定理的一个特例是：

Theorem 3.3. 包含映射 $H^{s+k}(M,\mathbb{R}^{2n+1})\subset C^k(M,\mathbb{R}^{2n+1})$，定义为$\forall s>m/2$，是一个有界映射，并且 $H^{s+k}(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 是 $C^k(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 的稠密子集，关于 C^k–拓扑。

现在我们可以转向第二个例子，再次以 [**36**] 为主要参考，并由 [**72**] 补充。

Example 3.4. 令 $s>m/2$. 该集合

$$H^s(M,N)=H^s(M,\mathbb{R}^{2n+1})\cap C^0(M,N)$$

是一个以 $H^s(M,\mathbb{R}^n)$ 为模型的（光滑）希尔伯特流形，而这一族在 $C^\infty(M,N)$ 上定义了 ILH 结构。 $H^s(M,N)$ 上的图册是 $C^0(M,N)$ 上图册的限制，其中坐标图由 N. 上的指数映射逐点定义。因此， $H^s(M,N)$ 也是 $H^s(M,\mathbb{R}^{2n+1})$ 中 $C^\infty(M,N)$ 的闭包。

在这两个例子之后，我们需要强调这样一个事实：有些例子中，Fr´echet／巴拿赫流形的精细性质需要更加仔细地处理。例如，可以参见 [**88**] 中定义的路径流形。

现在我们转向微分学应用于 ILB 空间情形的第一个要点。为此，我们考虑一个 ILB 空间 $(F,(B_n)_{n\in\mathbb{N}})$。线性群 $GL(B_n)$ 是巴拿赫李群，这是由巴拿赫代数 $L(B_n)$上的隐函数定理直接得出的，该代数由 B_n 上的有界线性映射构成；而例 1.37 则说明，对 $GL(F)$ 使用微分学似乎更为自然，即使它不同于从 $L(F)$ 的函数微分学继承而来的子集微分学。

这一问题在早期关于 ILB 空间的研究中已得到强调。事实上，在 [**72**], H. Omori 考虑了这些空间

$$\mathcal{L}_n=\cap_{k=0}^n L(B_k)$$

并在.....上调用“自然微分”

$$\mathcal{L}_\infty=\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{L}_k$$

以及在.....上

$$G\mathcal{L}_\infty=\cap_{n\in\mathbb{N}}GL(B_k).$$

显然，根据目前的知识水平， $G\mathcal{L}_\infty$ 无法配备任何以 $\mathcal{L}_\infty$ 为模型的图册；也就是说，我们无法使用现有技术明确构造出任何此类图册，

因此，将例如联络的定义扩展到 ILB 框架需要进行许多细化，这些细化可在 [**89**]中找到。

在微分学的语境下，我们可以通过以下结果以另一种方式考察$G\mathcal{L}_\infty$ 的光滑性：

THEOREM 3.5. [**51**] 设 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列巴拿赫李群，关于 $\subset$递减，且包含映射均为光滑映射。那么 $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 是一个正则 Fr ¨olicher 李群。

显然，此定理适用于 $G\mathcal{L}_\infty$.

3.2. 具有非紧源的映射。我们首先假设 E 是一个典型纤维为 V. 的向量丛。先考虑固定的局部截面 s，它属于 $E,^{-}$，其定义域为（开）集 D. 。对于 M 的任意开子集，只要满足 $O \subset D$，求值映射就是光滑的。由于 M 是旁紧的，因此可以定义一个光滑映射 ϕ : $M \to \mathbb{R}_+$，使得

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in O \\ 0 & \text{if } x \notin D \end{cases}$$

因此，谈论相对于局部截面的光滑性，与谈论相对于全局截面的光滑性是一样的。出于相同的理由，可以假设 M 是黎曼的。结合 E 上存在局部平凡化这一事实，我们希望刻画 E 的光滑截面上的所有拓扑，记作 $C^\infty(M,E)$，使得求值映射

$$\mathrm{ev} : (x,s) \in M \times C^\infty(M,E) \mapsto \mathrm{ev}_x(s) = s(x) \in E$$

是连续的；此外，对于 M 的开子集 U 上的 E 的一个给定局部平凡化 $E|_U \sim U \times V$，以及 $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$，映射

$$\mathrm{ev}_U^{(\alpha)} : (x,s) \in M \times C^\infty(M,E) \mapsto \mathrm{ev}_{U,x}^{(\alpha)}(s) = D_x^\alpha s \in L^\alpha(\mathbb{R}^m, E)$$

是连续的。为此，较弱拓扑是通过映射族 $\left\{\mathrm{ev}, \mathrm{ev}_U^{(\alpha)}\right\}$. 在 $C^\infty(M,E)$ 上诱导的拉回拓扑。要证明该拓扑与下述拓扑一致，是一个标准练习：设 M 中有一族局部有限的开子集 $\{U_i \,|\, i \in I\}$，且 E 在这些开子集上是平凡的；该拓扑由半范数 $||.||_{\alpha,K}$ 定义，其中指标为 $\alpha \in \mathbb{N}$，并且 M 的紧子集为 K；对于 $s \in C^\infty(M, E)$，这些半范数定义为

$$||s||_{0,K} = \sup_{x\in K} ||s(x)||$$

并且，对于 $\alpha > 0$,

$$||s||_{\alpha,K} = \sup \left\{ \sup_{x\in K\cap U_i} ||D^\alpha s(x)|| \,|\, U_i \cap K \neq \emptyset \right\}.$$

换言之，这是截面 s 在 M. 的任意紧子集 K 上各阶导数的一致收敛拓扑。采用这一拓扑时，不假设 S 上存在全局估计。

现在假设 E 是一个纤维丛，其典型纤维 F 是维数为 k. 的光滑（有限维）流形。令 $\{V_j \,|\, j \in J\}$. 为 F 的一个局部有限开覆盖，使得每个开域 V_j 在 F.中都具有紧闭包。根据 F上的所选图册，每个 V_j 都与 $\mathbb{R}^k$. 中的一个开子集 $\tilde{V}_j$ 相对应。令$U_i \times F$为 E.的一个局部平凡化，则在每个$^{-1}(V_j) \subset U_i \times C^\infty(U_i, F)$上，可以考虑由半范数$|.||_{\alpha,K}$ 定义的距离$d_{i,j,K,\alpha}$，其作用于定义域位于 V_j 内、值位于 F 中的（局部）光滑

截面。顺便一提，对于使 $\left\{\text{ev}、\text{ev}_U^{(\alpha)}\right\}$构成一族连续映射的较弱拓扑， $C^\infty(M,E)$ 是一个可度量化拓扑空间。然而，如果 M 不是紧的，那么实际上不存在任何图册能使 $C^\infty(M,N)$在此拓扑下成为一个流形；这与前文所述 M 为紧集时的情形相反。为了解决这个问题，有两种方法:

- 考虑 M 的一个紧子集穷尽序列，记作 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，并指出 $C^\infty(M,E)$ 的拓扑是递增族 Fr´échet 流形拓扑的归纳极限

$$\{C^\infty(K_n, E|_{K_n}) \,|\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

- 考虑 $C^\infty(M,E)$ 上的 Fr¨olicher 结构，使得喷射映射

$$j^k : f \in C^\infty(M,E) \to J^k(M,E),\ \text{for } k \geq 1$$

and

$$j^\infty : f \in C^\infty(M,E) \to J^\infty(M,E)$$

光滑（关于射流空间的基本定义，参见 [**26**] ，或见下一节）。

$C^\infty(M,N)$ 上还存在其他更强的拓扑。为了避免过于不完整，我们必须在此提及光滑惠特尼拓扑 [**26**], ，它同样基于喷射空间；在该拓扑下， $C^\infty(M,N)$ 是一个完备局部凸光滑流形[**42**]。

3.3. 非紧源的喷流及偏微分方程几何理论旁论。遵循 [**59**, 附录 2], 的内容, $C^\infty(M,E)$上的结构可扩展至 $J^k(M,E)$ 和 $J^\infty(M,E)$。为此，我们考虑一个有限维纤维丛 E ，其典型纤维为 F （其中 $\dim(F) = n$），基底是维数为 m 的光滑流形 M，该流形可以是非紧的。在讲述过程中，我们还考虑 E 在 M. 的一个开子集 U 上的一般平凡化 $\varphi : U \times F \to E$ 。流形 M 是自变量的空间 x_i, $1 \leq i \leq n$，典型纤维则是因变量的空间 u^α, $1 \leq \alpha \leq m$。读者可以假设丛 π 就是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$: 尽管我们是在局部工作，看起来仿佛把一切都“平凡化”了，但由于我们关注微分方程及其解的性质，几何实际上非常不平凡，正如下文所示。

设 $s_1(x_i) = (x_i, s_1^\alpha(x_i))$ 和 $s_2(x_i) = (x_i, s_2^\alpha(x_i))$ 是定义在 M 中点 $p = (x_i)$ 附近的丛 $E \to M$ 的两个局部截面。若 s_1 和 s_2 在 $p \in M$ 处的 k 阶相同，则称它们在该点处的阶数一致；也就是说，截面 s_1 和 s_2 的 s_1、 s_2 以及所有不超过 k 阶的偏导数在 p 处都相同。这一概念在 E 的局部截面上确定了一个与坐标无关的等价关系。我们用 $j^k(s)(p)$ 表示截面 s 在 p 处的等价类，并将该等价类称为 s 在 p 处的 k–喷射。

DEFINITION 3.6. E 的 k 阶喷射丛是空间

$$J^k E = \bigcup_{p\in M} J^k(p)\ ,$$

其中， $J^k(p)$表示局部截面 s 在 p处的所有 k阶喷流 $j^k(s)(p)$构成的集合。

喷射丛 J^kE 具有自然的流形结构；它纤维化于 $J^lE(l<k)$之上，也纤维化于 M之上： J^kE上的局部坐标为$(x_i,u_0^\alpha,u_{i_1}^\alpha,u_{i_1i_2}^\alpha,\dots,u_{i_1\dots i_k}^\alpha)$，其中

$$u_0^\alpha(j^k(s)(p))=s^\alpha(p)\,,\quad u_i^\alpha(j^k(s)(p))=\frac{\partial s^\alpha}{\partial x_i}(p)\,,\quad u_{i_1i_2}^\alpha(j^k(s)(p))=\frac{\partial^2 s^\alpha}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(p)\,,$$

等等，其中 $j^k(s)(p)\in J^kE$ 和 $(x^i)\mapsto(x^i,s^\alpha(x^i))$ 是等价类 $j^k(s)(p)$ 中任意一个局部截面。在这些坐标下，投影映射 $\alpha^k:J^kE\to M$ （源映射）可分解为一个投影映射 $\pi^k:J^k(E)\to E$；对于此前定义的局部一般平凡化 φ，其中 $E\sim U\times F$局部地成立，$\pi^k=\alpha^k\times\beta^k$，其中 β^k 是局部目标映射。此外，投影 $\pi_l^k\colon J^kE\to J^lE,\,l<k$ 以显然的方式定义。例如，π_M^k 就是 $(x_i,u_0^\alpha,u_{i_1}^\alpha,\dots,u_{i_1\dots i_k}^\alpha)\mapsto(x_i)$。再具体说明一点：对于 $p\in E$，$(\pi_k)^{-1}(p)$ 是一个以.....为模型的向量空间

$$\bigoplus_{i=1}^k L^i(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$$

其中，$L^i(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ 是从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$. 的 i–线性对称映射空间。因此，$J^k(M,E)$ 可以理解为：

- 一个以 E 为底空间、典型纤维为 $\bigoplus_{i=1}^k L^i(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ 的有限维向量丛
- 一个以 M 为底空间、典型纤维为.....的有限维纤维丛

$$F\times\left(\bigoplus_{i=1}^k L^i(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\right).$$

关于 k–喷流性质的详细论述可见 [**26**]。

E 的任意局部截面 $s:(x_i)\mapsto(x_i,s^\alpha(x_i))$ 都可唯一提升为 J^kE 的一个局部截面 $j^k(s)$，称为 s 的 kth 延拓。用坐标表示，$j^k(s)$ 是截面

$$j^k(s)=\left(x_i,s^\alpha(x_i),\frac{\partial s^\alpha}{\partial x_{i_1}}(x_i),...,\frac{\partial^k s^\alpha}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(x_i),...\right)\,.$$

无穷喷射丛 $\pi_M^\infty:J^\infty E\to M$ 是喷射丛塔

$M\leftarrow E\cdots\leftarrow J^kE\leftarrow J^{k+1}E\leftarrow\cdots$ 在标准投影 $\pi_l^k\colon J^kE\to J^lE,\,k>l$ 下的逆极限。这里需要明确，我们考虑的是逆极限，而不是归纳极限。也就是说，与 $J^k(M,E)$（它是以 E 为底空间的有限维向量丛）相比，取逆极限后，我们同样得到 $J^\infty(M,E)$，它是以 E 为底空间、典型纤维为形式级数的向量丛

$$\sum_{i=1}^{+\infty}L^i(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n).$$

我们通过序列对空间 $J^\infty E$ 进行局部描述

$$(x_i,u^\alpha,u_{i_1}^\alpha,...,u_{i_1i_2\dots i_k}^\alpha,...)\,,\quad 1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_k\le n\,, \tag{3.1}$$

这些序列由有限阶喷射丛 J^kE 上的标准坐标得到。

极限 $J^\infty E$ 是一个拓扑空间：$J^\infty E$ 上的拓扑的一组基由所有形如 $(\pi_k^\infty)^{-1}(W)$ 的集合构成，其中 W 是 J^kE 的一个开子集。我们希望将 $J^\infty E$ 视为一个流形，这至少需要是一个无限维流形/我们需要在这一新背景下重新定义所有标准的微分几何概念，参见 [**3, 4**]:

令 π_k^∞: $J^\infty E \to J^k E$ 表示从 $J^\infty E$ 到 $J^k E$的典范投影。若函数 f: $J^\infty E \to \mathbb{R}$ 可经由有限阶喷射丛分解，即若存在某个光滑函数 f_k: $J^k E \to \mathbb{R}$使得 $f = f_k \circ \pi_k^\infty$，则称其为光滑函数。$J^\infty E$ 上的实值光滑函数也称为微分函数，参见 [**70**]。

这种光滑性的概念与 Fr¨olicher 空间的概念相一致，其中，生成函数集 $\mathcal{F}_0$ 用于定义哪些映射的集合是光滑的。此外，将 $\sum_{i=1}^{+\infty} L^i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 的典型纤维视为 $J^\infty(M, E)$ over E上的向量丛，由于每个 $L^i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 都是有限维的，因此很容易证明，$\sum_{i=1}^{+\infty} L^i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 是一个 Fr´echet 空间，并配备半范数

$$||.||_i = ||.||_{L^i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \circ \pi_i$$

其中 π_i: $\sum_{i=1}^{+\infty} L^i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to L^i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 是典范投影。

当尝试定义切空间 $TJ^\infty(M, E)$ 时，自然会考虑 $\mathcal{F}_0$. 上的所有导子 X 。在这一非常特殊的情形下，将导子 X 限制到 $C^\infty(J^k(M, E)\ \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_0$，由于 $J^k(M, E)$ 是一个有限维流形，因此将 X 限制到 $J^k(M, E)$ 后，可以表示为 $J^k(M, E)$ 上的一个（经典）向量场；通过逆极限过程，$TJ^\infty(M, E)$ 也是该序列的逆极限

$$TJ^1(M, E) \leftarrow ... \leftarrow TJ^k(M, E) \leftarrow ...$$

这表明，Olver 对 $TJ^\infty(M, E)$ 的定义与 Fr´echet 流形 $J^\infty(M, E)$ 的切空间的标准定义一致。

这些结构有助于讨论偏微分方程，即沿着例如 [**27**] 中所述思路，将其理解为偏微分关系。事实上，形如 $A(u) = 0$ 的基本偏微分方程，其中 A 是一个 k 阶线性微分算子，涉及一个解 u 及其直到 k 阶的偏导数，因此可以编码为 $\Xi(j^k(u)) = 0$，其中

$$\Xi : J^k(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

是一个光滑映射。大多数值得关注的非线性偏微分方程也同样如此，但空间 $\Xi^{-1}(0)$ 可能带有许多“奇异性”，如下述基于一个非线性微分方程的非线性例子所示:

EXAMPLE 3.7. 当 $\Xi(x, y, y') = x\cos(y)\sin(4y')$ 时，子集 $\Xi^{-1}(0)$ 有无穷多个奇异点。假设我们将 $\mathcal{E}$ 限制在正则点的一个邻域 U 内。我们会得到的解 $x \mapsto (x, y(x))$ 只是常数解或仿射解；根据对 U 的选择，我们可能会丢失信息。现在，解可以扩展为 $\Xi^{-1}(0)$ 上的分段仿射解（因而也只是分段光滑解）。

奇点几何问题需要一种广义定义方法，来定义微分几何对象。

现在，让我们考虑偏微分方程 $\Xi = 0$ in $J^k(M, E) \subset J^\infty(M, E)$。按照例 3.7，期望我们在此称为沿着 [**59**, 附录 2], 的零点集的对象具有光滑流形结构，可能有些过于乐观；该零点集是$\Xi^{-1}(0)$的子集。因此，在经典文献中，人们会引入轨迹，即 $J^k(M, E)$ 的一个光滑子流形，其值域包含于 $\Xi^{-1}(0)$ 中。通常，这个轨迹可以通过从欧几里得空间的一个开子集 O 到 $J^k(M, E)$ 的唯一嵌入来定义。这使得我们能够定义切向

空间、微分形式以及 $\{\Xi = 0\}$上的其他对象，不过对于它们在整个空间 $\Xi^{-1}(0)$ 上的全局定义，论证实际上略显不严谨。直到[**59**] 在微分学的语境下。事实上，子集微分学以一种自然的方式在零点集上定义了微分学结构，从而完善了由 $\Xi^{-1}(0)$ 给出的微分空间这一主要基本例子的几何学基本框架，沿用了 [**60**]的思路。

REMARK 3.8. 喷流空间也有助于对联络及其推广进行另一种定义，参见 [**41**], , 而将微分学应用于高阶联络或许也是可行的。此处篇幅有限，无法进一步阐述理论的这一方面。

3.4. 低正则性映射。下文中，我们考虑一个$\mathcal{M}$ 复系数代数，其矩阵厄米积为 $(A, B) \mapsto tr(AB^*)$。若不会引起混淆，我们将此矩阵范数记为 $||.||$，必要时也记为$||.||_{\mathcal{M}}$。现在，我们按照 [**52**]的思路，将例 **3.4** 中的构造扩展如下。

DEFINITION 3.9. 设 $s \in \mathbb{R}$，设 M 是一个无边界紧黎曼流形，并设 N 是嵌入于 $\mathcal{M}$. 中的一个黎曼流形。我们将$H^s(M,N)$定义为 $C^\infty(M,N)$在 $H^s(M,\mathcal{M})$中的完备化。

我们指出，此处并未假设条件 $s < \dim(M)/2$。这意味着当 $s \leq dim(M)/2$ 时，$H^s(M; \mathcal{M})$ 上的微分结构较弱，可如下理解，从而以一种直接的方式推广 [**52**]：

PROPOSITION 3.10. $H^s(M,N)$ 是一个微分空间，配备从 $H^s(M,\mathcal{M})$ 继承的子集微分学。

现在考虑一个由矩阵构成的紧致连通李群 G。

对于 $s > \dim(M)/2$，众所周知， $H^s(M,G)$ 是一个希尔伯特李群。文献中研究最广泛的是 $M = S^1$ 的情形，也就是环空间或环群，参见例如 [**78**]。使得 $H^s(S^1,G)$ 不再是希尔伯特流形、也不再是群的最大 Sobolev 阶数是 $s = 1/2$.

PROPOSITION 3.11. 设 $s \leq 1/2$。那么 $H^s(S^1,G)$ 和 $H^s_0(S^1,G)$ 是 Fr ¨olicher 空间。

从几何角度来看，这一命题完善了经典框架，其中度量的研究是关键，参见例如 [**19**, **78**], ; 从形状分析的角度来看，亦是如此，参见例如 [?]。

3.5. 微分同胚群是正则的.....还是不是? 设 M 是一个局部紧的非紧流形，不受任何限制地假设其为黎曼流形，并配备其 n´ebuleuse 微分学。我们赋予微分同胚群 $\mathrm{Diff}(M)$ 导数在任意阶上于 M 的每个紧子集上一致收敛的拓扑，通常称为 C^∞–紧开拓扑，或 [**32**] 中的弱拓扑。传统上，$\mathrm{Vect}(M)$ 被视为 $\mathrm{Diff}(M)$ 的李代数，但 [**42**, 第 43 节.1] 表明，这在很大程度上取决于 $\mathrm{Diff}(M)$ 的拓扑。事实上，[**42**, 第 43 节.1]中描述的向量场李代数是紧支撑向量场的李代数，它并非（完整的）李代数 $\mathrm{Vect}(M)$。在另一种情形下，当 M 紧致时，$\mathrm{Vect}(M)$ 是 $\mathrm{Diff}(M)$ 的李代数，可由大森正则性定理 [**71**, **72**] 得到。

并在 [**12**] 中得到恢复。众所周知，Diff(M) 在 $C^\infty(M,\mathbb{R})$ 上的无穷小作用会生成向量场，可将其视为一阶微分算子。向量场上的括号定义为

$$(X,Y)\in \mathrm{Vect}(M)\mapsto [X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X,$$

其中 ∇ 是 $TM.$ 上的 Levi-Civita联络。这是一个李括号，在 Diff(M) 的伴随作用下保持不变。此外，Diff(M) 上的紧开拓扑在 Vect(M) 上生成相应的 $C^\infty-$紧开拓扑。对于 Diff(M) 上的函数微分学而言，该拓扑本身就是 $D-$拓扑。根据 [**48**,定义 **1.13** 和定理 **1.**14], ，赋予 C^∞ 紧开拓扑的 Vect(M) 是一个 Fr´echet 向量空间，并且李括号是光滑的。此外，我们认为有必要指出，求值映射

$$T^*M\times Vect(M)\to\mathbb{R}$$

将 Vect(M) 分离。因此，Diff(M) 是一个微分学李群，符合 [**48**, 定义 **1.13** 和定理 **1.**14] 的标准。

令 F 为光滑映射 $f\in C^\infty(]0;1[;\mathbb{R})$ 构成的向量空间。我们为 F 配备以下半范数：

对于每个（n， k）$\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$,

$$||f||_{n,k}=\sup_{\frac{1}{n+1}\le x\le\frac{n}{n+1}}|D_x^k f|.$$

这是一个 Fr´échet 空间，其拓扑是光滑紧开拓扑，即紧开微分学的 $D-$拓扑。令

$$\mathcal{A}=\{f\in C^\infty(]0;1[;]0;1[)|\lim_{x\to1}f(x)=1\wedge\lim_{x\to0}f(x)=0\}.$$

最后，我们定义

$$\mathcal{D}=\{f\in\mathcal{A}|\inf_{x\in]0;1[}f'(x)>0\}.$$

$\mathcal{D}$ 是开区间 $]0$上的微分同胚的一个可缩集合； $1[$ 对于函数复合而言，它是一个（代数）群。对于函数微分学，映射的复合和求逆都是光滑的。遗憾的是， $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{A}.$ 中不是开集。因此，我们无法证明它是一个 Fr´échet 李群。然而，考虑由 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{D}$ 上诱导的光滑微分学，求逆是光滑的。因此， $\mathcal{D}$ （仅仅）是一个微分学李群。

根据 [**54**], ，我们可以陈述：

Theorem 3。12. $\mathcal{D}$ 是一个非正则的 Fr¨olicher 李群。

接下来，我们根据 [**54**]，给出第一个定理的一个推论，说明非紧无边流形的微分同胚群不具有正则性。

Theorem 3.13. *$Diff(M)$ is a non-regular Frölicher Lie group.*

Remark 3.**14.** 在这一陈述中，正如我们之前所说，Diff(M) 配备了一种拓扑，在部分文献中称为弱拓扑。它似乎是从 Fr¨olicher 结构继承而来的最弱拓扑之一，能够使求值映射连续且光滑。这与 Diff(M) 上存在的大量流形结构形成鲜明对比；对于这些结构，Diff(M) 是正则的 [**42, 43**]。因此，正如前文所述的环空间情形，几何与拓扑在很大程度上取决于所选的几何结构。

3.6. 有限与无限三角剖分的几何。文献中对三角剖分这一概念本身的理解略有混乱。可以这样定义：

- 流形 M中的参数化光滑三角剖分，或

  DEFINITION 3.15. M 的光滑三角剖分是一个族 $\tau = (\tau_i)_{i\in I}$，其中 $I \subset \mathbb{N}$ 是有限或无限的指标集合，每个 τ_i 都是一个光滑映射 $\Delta_n \to M$，并且满足：(1) $\forall i \in I, \tau_i$ 是（光滑）嵌入，即一个光滑单射映射，使得 $(\tau_i)_*(\mathcal{P}(\Delta_n))$ 也是 $\tau_i(\Delta_n)$作为 M.的子集时的子集微分学；(2) $\bigcup_{i\in I} \tau_i(\Delta_n) = M$.（覆盖）；(3) $\forall (i,j) \in I^2, \tau_i(\Delta_n) \cap \tau_j(\Delta_n) \subset \tau_i(\partial\Delta_n) \cap \tau_j(\partial\Delta_n)$。（沿边界相交）；(4) $\forall (i,j) \in I^2$，使得 $D_{i,j} = \tau_i(\Delta_n) \cap \tau_j(\Delta_n) \neq \emptyset$，对于 $D_{i,j}$的每个 $(n-1)$-面，“过渡映射”“$\tau_j^{-1} \circ \tau_i$”: $\tau_i^{-1}(F) \to \tau_j^{-1}(F)$ 都是仿射映射。

- 或非参数化的光滑三角剖分，这类三角剖分只考虑三角剖分中的光滑单纯形在 M 中标准单纯形的像。

对于开域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，通常会限制为仿射三角剖分：对每个 $k \in \mathbb{N}_n$，$(n-k)-$维面都位于 $\mathbb{R}^n$ 的 $(n-k)-$维仿射子空间中；在参数化情形下，嵌入是仿射映射（的限制）。

3.6.1. 与固定三角剖分相关的微分学。事实上，固定的三角剖分流形上存在许多微分学，更一般地说，CW复形上也存在许多微分学。最早描述的微分学见于 [**67, 68**]，比 [**14**], 早很多年（例如参见 [**39, 44, 45**]）；其他方法仍在发展中。每种方法都有其自身的技术价值。这里我们选取一种适合我们需求的方法。首先给出 [**53**] 中的一个引理，并将其改编自 [**67, 76, 77**] 中所谓的粘合结果，以适用于我们所关注的情形。

LEMMA 3.16. 假设 X 是一个拓扑空间，并且存在一个 Fr¨olicher 空间族 $\{(X_i, \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i)\}_{i\in I}$，以及连续映射$\phi_i$： $X_i \to X$. 。那么，我们可以在 X 上通过以下方式定义 Fr¨olicher 结构：

$$\mathcal{F}_{I,0} = \{f \in C^0(X, \mathbb{R}) | \forall i \in I, \quad f \circ \phi_i \circ \mathcal{C}_i \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\},$$

定义由族 $\mathcal{F}_{I,0}$ 和 $\mathcal{F}_I = \mathcal{F}(\mathcal{C}_I)$ 生成的轮廓。

设 M 为维数为 n. 的光滑流形。

$$\Delta_n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} | x_0 + ... + x_n = 1\} \tag{3.2}$$

为标准 $n-$ 单纯形，配备其子集微分学。利用前面提到的 Boman 定理，很容易证明该微分学是反身的，因此我们可以将其称为 Fr¨olicher 空间（Δ_n、$\mathcal{F}_{\Delta_n}$、$\mathcal{C}_{\Delta_n}$），并将其关联的反身微分结构记为 $\mathcal{P}(\Delta_n)$。在这些条件下，我们为三角剖分流形（M、τ）配备 Fr¨olicher 结构（$\mathcal{F}_I$、$\mathcal{C}_I$），该结构由光滑映射τ_i 生成，应用引理 3.16 可得。以下结果由$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$的构造得到：

THEOREM 3.17. *The inclusion $(M, \mathcal{F}, \mathcal{C}) \to M$ is smooth.*

3.6.2. 三角剖分空间的几何。现在，我们将充分展开一种基于 [**53**]中所述备注的方法。为此，将 Ω 的三角剖分空间本身视为一个 Fr¨olicher 空间，而使有限元方法收敛的三角剖分网格将作为函数 f，出现在参数集合 Q. 中。下面我们将逐步描述三角剖分空间上的 Fr¨olicher 结构。顺便一提，

在这些条件下，我们为三角剖分流形 (M,τ) 配备一个 Fr¨olicher 结构 $(\mathcal{F}_I,\mathcal{C}_I)$，该结构由光滑映射 τ_i 生成，应用引理 3.16 即可得到。以下关于 [**55**] 的结果可由 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$ 的构造得到：

THEOREM 3.18. *The inclusion* $(M,\mathcal{F},\mathcal{C}) \to M$ *is smooth.*

REMARK 3.19. $\mathcal{F}_I$ 中的映射可以直观地视为一些分片光滑映射 $M \to \mathbb{R}$，它们沿三角剖分的 1-骨架属于 C^0 类。我们还证明了 $\mathcal{C}_I \subset \mathcal{P}_\infty(M)$。$\mathcal{C}_I$ 的一些特征元素可理解为这样的路径：它们在三角剖分中各单形定义域的内部是光滑的（按经典意义），并且在穿过三角剖分的 1-骨架时满足一些更严格的条件。例如，在 1-骨架处（局部）驻定的路径属于 $\mathcal{C}_I$.

REMARK 3.20. 在尝试从三角剖分定义 Fr¨olicher 结构时，也可以考虑

$$\mathcal{C}_{I,0} = \left\{\gamma \in C^0(\mathbb{R},M) \,|\, \forall i \in I, \forall f \in C_c^\infty(\phi_i(\Delta_n),\mathbb{R}), f\circ\gamma \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$$

其中，$C_c^\infty(\phi_i(\Delta_n)\ \mathbb{R})$ 表示 $\phi_i(\Delta_n)$中支集为 $\phi_i(\Delta_n)$ 的紧支撑光滑函数 $M \to \mathbb{R}$。然后定义

$$\mathcal{F}_I' = \{f : M \to \mathbb{R} \,|\, f\circ\mathcal{C}_{I,0} \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\}$$

and

$$\mathcal{C}_I' = \{C : \mathbb{R} \to M \,|\, \mathcal{F}_I'\circ c \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\}.$$

我们在这里得到另一种构造，但它并未将$M \to \mathbb{R}$ 已经提到的映射 δ_k 理解为光滑映射 $M \to \mathbb{R}$ 。

现在，让我们固定指标集合 I，并固定一个所谓的模型三角剖分τ. 。这一术语的合理性基于两个想法：

- 预见到接下来的构造，这个模型三角剖分 τ 将用于定义一个细化三角剖分序列。这是我们在有限元方法中细化过程的“起始三角剖分”。
- 将 τ 改为 $g\circ\tau$，其中 g 是一个微分同胚，我们得到另一个模型三角剖分，它仅仅具有与 τ. 相同的性质。但每个“起始”三角剖分都不能通过微分同胚变换一个固定的三角剖分而得到。例如，在 2-球面上，四面体三角剖分 τ_1 和八面体三角剖分 τ_2 分别生成两个细化三角剖分序列，并且存在一个拓扑障碍，使得无法通过球面的微分同胚作用将 τ_1 改为 τ_2 。

我们将 $\mathcal{T}_\tau$ 记为 M 的三角剖分 τ' 的集合，其中相应的一维骨架与 τ 的 1-骨架（在 Fr¨olicher 范畴中）微分同胚。集合 $\mathcal{T}_\tau$ 包含但并不限于 τ 在微分同胚群作用下的轨道。事实上，可以对每个单纯形进行重新参数化，并使其在边界处具有恰当的兼容性。直观地说，重新参数化不必在通常意义上光滑，

尤其是在“跨越单纯形边界”时。这一选择的动机在于，我们认为 Fr¨olicher 结构对下文定义的有限元方法很有用。

DEFINITION 3.21. 由于 $\mathcal{T}_\tau \subset C^\infty(\Delta_n, M)^I$，我们可以为 $\mathcal{T}_\tau$赋予子 Fr¨olicher 结构，换言之，即在 $\mathcal{T}_\tau$ 上赋予 Fr¨olicher 结构，其生成族 $\mathcal{C}$由 $C^\infty(\Delta_n, M)^I$中位于 $\mathcal{T}_\tau$.的轮廓构成

我们将三角剖分的全空间 $\mathcal{T}$定义为类型为 $\mathcal{T}_\tau$的空间的不交并，并赋予不交并 Fr¨olicher 结构。采用这一记号后，在下文中，只要不会引起歧义， $\mathcal{T}_\tau$ 中的三角剖分都配备一组固定的指标 I （这对于 $\mathcal{T}$是不可能固定的）。现在我们需要描述细化三角剖分的过程，并定义一个三角剖分序列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 。现在可以考虑细化算子，它将单纯形 Δ_n 划分为一个三角剖分。

DEFINITION 3.22. 设 $m \in \mathbb{N}$，其中 $m \geq 3$. 令

$$\mu = \{\mu_i : \Delta_n \to \Delta_n \,|\, i \in \mathbb{N}_m \}$$

Δ_n 是 $\tau \in \mathcal{T}$. 的光滑三角剖分。于是我们定义

$$\mu(\tau) = \{f_i \circ \mu_i \,|\, i \in \mathbb{N}_m \text{ and } \tau = (f_i)_{i\in I}\}.$$

如果 μ 满足以下条件，则称其定义了一个细化映射： $\forall n \in \mathbb{N}^*$， $\mu^n(\tau)$ 是一个三角剖分。

根据此定义，如果 τ 是 M. 的三角剖分，则 $\mu(\tau)$ 显然是 M 的三角剖分。定义中施加的条件确保细化映射将一个三角剖分映射为另一个三角剖分；也就是说，如果 τ 是一个三角剖分，那么 $\mu(\tau)$ 也是一个三角剖分。所需的关键条件是，在 $\mu(\tau)$ 中添加到 tau 的新 0-顶点必须彼此匹配。

DEFINITION 3.23. 设 $\tau \in \mathcal{T}$. 。我们将细化后的三角剖分序列 $\mu^{\mathbb{N}}(\tau) = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 定义为

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tau_0 & = & \tau \\ \tau_{n+1} & = & \mu(\tau_n) \end{array} \right.$$

PROPOSITION 3.24. 映射

$$\mu^{\mathbb{N}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$$

是光滑的（其中 $\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ 配备了无限乘积 Fr ¨olicher 结构）。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界连通开子集，并假设边界 $\partial\Omega = \Omega - \Omega$ 是一条多边形曲线。由于 $\mathbb{R}^n$ 是一个向量空间，我们可以考虑仿射三角剖分空间：

$$\mathrm{Aff}\,\mathcal{T}_\tau = \{\tau' \in \mathcal{T}_\tau | \forall i, \tau'_i \text{ is (the restriction to } \Delta_n \text{ of) an affine map } \}.$$

我们以定义 $\mathcal{T}$ 的相同方式，通过不交并从 Aff $\mathcal{T}_\tau$ 定义 Aff $\mathcal{T}$。我们在 Aff($\mathcal{T}_\tau$) 和 Aff($\mathcal{T}$) 上赋予其子集微分学。这里沿用上一条引理中的记号。

THEOREM 3.25. 令

$$c : \mathbb{R} \to \mathrm{Aff}(\mathcal{T}_\tau)$$

是 Aff($\mathcal{T}_\tau$) 上的一条路径。接下来

$$c \text{ is smooth } \Leftrightarrow \forall (i,j) \in I \times \mathbb{N}_{n+1}, t \mapsto x_j(c(t)_i) \text{ is smooth.}$$

Proposition 3.26. 设 μ 是 Δ_n. 的一个固定仿射三角剖分。映射 $\mu^{\mathbb{N}}$ 限制为从 Ω 的仿射三角剖分集合到 Ω 的仿射三角剖分序列集合的光滑映射。

3.7. ILB 框架中的微分学与隐函数。我们采用以下记号，参照标准文献 [**72**] 并沿用 [**56**]的思路：设 $\mathbf{E} = (E_\infty, (E_i)_{i\in\mathbb{N}})$ 和 $\mathbf{F} = (F_\infty, (F_i)_{i\in\mathbb{N}})$ 为两个 ILB 向量空间。设 O_0 是 $E_0 \times F_0$中 (0,0) 的一个开邻域，设 $\mathbf{O} = (O_i)_{i\in I}$，其中 $O_i = O_0 \cap (E_i \times F_i)$，对于 $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

现在沿用 [**55**], 的思路，我们提出一种微分学方法来处理 [**56**] 的主要结果，现将其回顾如下。为此，我们考虑一个C^∞类函数 f_0，使得

(1) $f_0(0;0) = 0$
(2) $D_2 f_0(0;0) = Id_{F_0}$.

此外，假设 f_0 限制为 C^∞–映射 $f_i : U_i \times V_i \to F_i$，并定义一个 ILB 映射

$$\mathbf{f} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}.$$

let

$$U_\infty = E_\infty \cap U_0 \quad \text{and} \quad V_\infty = V_0 \cap F_\infty.$$

此处我们不作任何其他假设，这与经典的 Nash-Moser 定理形成对比；在经典定理中，还需要额外的范数估计。 [**29**] 在这些较弱的条件下，可以陈述如下 [**56**, 定理 2.2]:

Theorem 3.27. 存在一个非空定义域 $D_\infty \subset U_\infty$，它可能不是 U_∞中的开集，以及一个函数

$$u_\infty : D_\infty \to V_\infty$$

使得

$$\forall x \in D_\infty, \quad f_\infty(x; u_\infty(x)) = 0.$$

此外，存在一个序列（c_i）$_{i\in\mathbb{N}} \in$（$\mathbb{R}_+^*$）$^{\mathbb{N}}$ 以及一个 Banach 空间 B_{f_∞}，使得

- $B_{f_\infty} \subset E_\infty$ *(as a subset)*
- *the canonical inclusion map* $B_{f_\infty} \hookrightarrow E_\infty$ *is continuous*

它是下述范数的定义域（并赋予该范数）：

$$||x||_{f_\infty} = \sup\left\{\frac{||x_i||}{c_i} | i \in \mathbb{N}\right\}.$$

于是 D_∞ 包含 $\mathcal{B}$，即 B_{f_∞}.的单位球（半径为 1，中心为 0）

在 [**56**], 中，隐函数的正则性问题仍未解决，因为定义域 D_∞ 先验上并非 O_∞. 中的开集。这种正则性的缺失导致将弗罗贝尼乌斯定理的经典证明推广到这一情形时遇到了关键障碍。 [**55**] 主要通过以下结果填补了这一空缺:

Theorem 3.28. 设

$$f_i : O_i \to F_i, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

设为一个映射族，令 u_∞ 为定义在定义域 D_∞ 上的隐函数，如定理 3.27 所述。那么，存在一个定义域 D，使得 $\mathcal{B} \subset D \subset D_\infty$，且函数 u_∞ 在 D. 的子集微分学下是光滑的。

同样，我们可以引用同一参考文献中的相应弗罗贝尼乌斯定理：

THEOREM 3.29. 设

$$f_i : O_i \to L(E_i, F_i), \quad i \in \mathbb{N}$$

为一组满足以下条件的光滑映射：

$$i > j \Rightarrow f_j|_{O_i} = f_i$$

并且，

$$\forall (x,y) \in O_i, \forall a, b \in E_i$$
$$(D_1 f_i(x,y)(a))(b) + (D_2 f_i(x,y))(f_i(x,y)(a))(b) =$$
$$(D_1 f_i(x,y)(b)(a) + (D_2 f_i(x,y))(f_i(x,y)(b))(a).$$

那么， $\forall (x_0, y_0) \in O_\infty$，存在一个微分空间子空间 D，它包含 (x_0, y_0)，以及一个光滑映射 $J : D \to F_\infty$，使得

$$\forall (x,y) \in D, \quad D_1 J(x,y) = f_i(x, J(x,y))$$

并且，如果 D_{x_0} 是 $\{(x,y) \in D \,|\, x = x_0\}$ 中 (x_0, y_0) 的连通分支，

$$J_i(x_0, .) = Id_{D_{x_0}}.$$

此外，存在一个序列 $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ 以及一个 Banach 空间 B_{f_∞}，使得

- $B_{f_\infty} \subset E_\infty \times F_\infty$ *(as a subset)*
- *the canonical inclusion map* $B_{f_\infty} \hookrightarrow E_\infty \times F_\infty$ *is continuous*

它是以下范数的定义域（并赋予该范数）：

$$||x||_{f_\infty} = \sup \left\{ \frac{||x||_{E_i \times F_i}}{c_i} | i \in \mathbb{N} \right\}.$$

那么 D_∞ 包含 B_{f_∞}.的单位球（半径为 1、中心为 0），即 $\mathcal{B}$

参考文献

[1] ALBEVERIO, S., DALETSKII, A., AND LYTVYNOV, E. 构型空间上微分形式的拉普拉斯算子。 *Journal of Geometry and Physics 37*, 1-2 (2001), 15–46. [2] ALBEVERIO, S., KONDRATIEV, Y., LYTVYNOV, E., AND US, G. 带标记构型空间上的分析与几何。Heyer, Herbert（编）等，《无限维调和分析》。第二届日德研讨会论文集，京都大学，日本，1999年9月20日至24日。班贝格：D. u. M. Gr¨ abner(2000), 1-39. [3] ANDERSON, I. 变分双复形导论。 *Contemp. Math.* **132** (1992), 51-73.
[4] ANDERSON,
I. AND KAMRAN N. *Conservation Laws and the Variational Bicomplex for , , ,* vol. . *Second-Order Scalar Hyperbolic Equations in the Plane* 41 1995
施普林格 · 荷兰 ( ), 135–144.[5] BAUER, M.,
HARMS AND MICHOR *Journal* , P., , *of Geometric Mechanics 3* 4 2011 389 438
P. 曲面形状空间上的索伯列夫度量。, ( ), – . [6] BAUER, M., HARMS, P., AND MICHOR, P. 形状空间上的索伯列夫度量，II：加权索伯列夫度量与近似局部度量。 *Journal of Geometric Mechanics 4*, 4 (2012), 365– 383.[7] BERGMANN, R., HERZOG, R., LOAYZA, E., AND WELKER, K. 形状优化：先做什么，优化还是离散化？偏微分方程约束问题的优缺点。载于
Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (2019)，威立。[8] CANARUTTO, D.;
Gauge Field Theory in Natural Geometric Language: A revisitation of mathematical notions of quantum physics 牛津大学出版社 (2020) [9] CHEN, K.-T. 迭代路径积分。 *Bull. Am. Math. Soc.* **83** (1977), 831–879.

[10] Cherenack, P. 弗勒里歇空间在宇宙学中的应用。( ), 63–91.[11] Cherenack, P. ¨ *J. Categorical* 弗勒 *Structures* **1 2** 2000
里歇空间与微分空间：宇宙学序论，-( )，重印于：Kozma, L.（编）等，《微分几何新进展》。微分几何学术讨论会论文集，匈牙利德布勒森，2000年7月25日至30日。德布勒森：德布勒森大学数学与信息学研究所，85-94 (2001)。[12] Christensen, J., and Wu, E. 微分空间的切空间与切丛。
Cahiers de Topologie et Geométrie Différentielle Catégoriques 57, 1 (2016), 3–50.
[13] Christensen, J. D., Sinnamon, G., and Wu, E. 微分空间的D-拓扑。
Pacific Journal of Mathematics **272** no 1 (2014), 87-110. [14] Christensen, J. D. and Wu E. *New York J.* , , 微 *Math.***20** 2014 1269 1303
分空间的同伦理论。( ), - . [15] Christensen, J. D., and Wu, E. 微分学中的外丛。
Israel J. Math. to appear.[16] Cootes, T., Taylor, C., Cooper, D., and Graham, J. 主动形状模型——训练与应用。 *Computer Vision and Image Understanding* **61** no 1 (1995), 38–59.
[17] Droske, M., and Rumpf, M. 图像形态的多尺度联合分割与配准。
IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **29** no 12 (2007), 2181–2194.
[18] Dugmore, B., and Ntumba *Quaestiones Mathe-* , P. *maticae* **30** 2007 67 83
关于弗勒里歇空间的切锥。( ), – . [19] Freed, D. 环群的几何 /。 *J. Differ. Geom.* **28** No. 2 (1988), 223-276. . [20] Frölicher, A. *Smooth structures*, vol. 962 of *Lect. Notes Math. bf*. 施普林格柏林海德堡，Gummersbach, 1982, pp. 69–81. [21] Frölicher, A., and Kriegl, A. *Linear spaces and differentiation theory* 威立 (1988) [22] Fuchs, M., Jüttler, B., Scherzer, O., and Yang, H. 基于弹性变形的形状度量。
Journal of Mathematical Imaging and Vision **35** no 1 (2009), 86–102. [23] Gangl, P., Langer, U., Laurain, A., Meftahi, H., and Sturm, K. 受非线性磁静力学约束的电动机形状优化。B1002–B1025. [24] Glockner, H.; 与无限维向量丛和泊松向量空间相关的微分学若干方面。 *Axioms* **11** no 5 (2022), articleID 221. [25] Goldammer, N.; Welker, K.; 通过推广黎曼概念，探索微分空间上的优化技术。预印本。[26] Golubitsky, M.;, Guillemin, V.;
Stable mappings and their singularities. Graduate Texts in Mathematics. 14. (1973).
[27] Gromov, M. *Partial Differential Relations.* 数学及其边界领域成果。第三辑／现代数学专题系列。施普林格，德国柏林，(2010)。[28] Hafner, B. J., Zachariah, S. G., and Sanders, J. E. 利用主成分表征三维解剖形状：在胫骨近端上的应用。 *Medical and Biological Engineering and Computing* **38**, 1 (2000), 9–16. [29] Hamilton, R. S. Nash和Moser反函数定理。 *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* **7** 1 1982 65 222 no ( ), – . [30] Hintermüller, M., and Laurain, A. 受椭圆型变分不等式约束的最优形状设计。1015–1047.[31] Hintermüller, M., and Ring, W. 用于图像分割的二阶形状优化方法。442–467.
[32] Hirsch, M. W. *Differential Topology*, 第1版。 *Graduate Texts in Mathematics.* (1997)。
[33] Iglesias-Zemmour, P. *Diffeology*, vol. 185 of *Mathematical Surveys and Monographs.* 美国数学学会 (2013). [34] Iglesias-Zemmour, P., Karshon and Zadka *Transactions* , Y., , *of the American Mathematical Society* **362** 2010 2811 2831
M. 作为微分空间的轨形。( ), – . [35] Ismagilov, R. *Representations of infinite-dimensional groups.* 数学专著译丛。美国数学学会 (1996)。[36] Eells, J.; 整体分析的框架 *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** 751-807 (1966) [37] Kendall, D. 形状流形、Procrustes度量与复射影空间。 *Bulletin of the London Mathematical Society* **16** 2 1984 81 121 no ( ), – .

[38] Khesin, B., and Wendt *Ergebnisse der* , R. 无限维群的几何。 , Springer ( )。[39] Kihara, H.; 微分空间的模型范畴。 *Journal of Homotopy and Related Structures* **14** 2019 51 90 ( ) - 。

[40] Kilian, M., Mitra and Pottmann *ACM* , N., , H. 形状空间中的几何建模。 no ( ), # – 。[41] Kolar, I., Michor, P., and Slovak, J. *Natural operations in differential geometry*。Springer (2010)。[42] Kriegl, A., and Michor 53 *Mathematical Surveys and Monographs* 1997

P. *The Convient Setting of Global Analysis*, vol. of 。美国数学学会 ( )。[43] Kriegl, A., Michor, P. W., and Rainer, A. 微分同胚群的奇异动物园。 $\mathbb{R}^n$. *Annals of Global Analysis and Geometry* **47** (2014), 179–222。[44] Kuribayashi, K. 微分空间的单纯上链代数。 *Indagationes Mathematicae* **31** 6 2020 934 967 no ( ), - 。

[45] Kuribayashi, K. 微分学中两个德拉姆复形的比较。 *Proceedings of the American Mathematical Society* **149** 11 2021 4963 4972 no ( ), - 。

[46] Kurtek, S., Klassen, E., Ding, Z., and Srivastava, A. 用于三维对象形状分析的新型黎曼框架。载于 *2010 IEEE Computer Society Conference on ComputerVision and Pattern Recognition* (2010), IEEE。[47] Laubinger, M. Fr¨olicher群的李代数。 *Indag. Math. (N.S.)* **21**, 3-4 (2011), 156– 174。[48] Leslie, J. 关于某些广义可对称化Kac-Moody李代数的微分学群实现。 *Journal of Lie Theory* **2** (2003)。[49] Ling, H., and Jacobs *IEEE Transactions* , D. 使用内距离进行形状分类。 , ( ), – 。[50] Magnot, J.-P. ´ ´ *C. R.* 无限维情形下联络的全纯纤维的微分学。 no ( ), - 。[51] Magnot, J.-P. 微分拓扑丛上的Ambrose-Singer定理与KP方程的完全可积性。 *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **10** no 9 (2013) Article ID 1350043。[52] Magnot, J.-P.; 关于环空间的几何与拓扑的评注 $H^s(s^1, n)$, 对于 $s \leq 1/2$。 *Int. J. Maps Math.* **2**, no 1 (2019), 14-37。[53] Magnot, J.-P. 三角剖分空间上的微分与优化三角剖分。 *Journal of Physics: Conference Series* **738** 2016 012088 ( ) article ID ..

[54] Magnot, J.-P. 非紧流形的微分同胚群并非正则。*Demonstratio Mathematica* **51** (2018), 8–16。

[55] Magnot, J.-P. 关于数值格式及函数方程弱解的微分几何。 *Nonlinearity* **33** (2020), 6835–6867。

[56] Magnot, J.-P. 无额外范数估计的射影极限情形下隐函数的定义域。 *Demonstratio Mathematica* **53** no 1 (2020), 112–120。[57] Magnot, J.-P., and Reyes, E. Kadomtsev–Petviashvili层次、mu-Lax分解与Fr¨olicher李群的适定性。 *Annales Henri Poincaré* **21** no 6 (2020), 1893-1945。[58] Magnot, J.-P. and Reyes E. *The Cauchy problem of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy* , , 。 *Structures, and infinite-dimensional groups in Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Volume 2; Norbert Euler and Maria Clara Nucci Editors*, CRC出版社 (2019), 382–414。[59] Magnot, J.-P., Reyes, E., and Rubtsov, V. 微分方程上的无限阶结构。预印本。[60] Magnot, J.-P., Reyes, E., and Vladimir, R. Fr¨olicher结构、微分空间与形式KP层次。即将发表于A. Vinogradov纪念会议论文集

[61] Magnot, J.-P., and Watts *Topology and its* , J. Milnor分类空间的微分学。 ( ), - 。[62] Michor, P., and Mumford, D. 子流形空间与微分同胚群空间上的测地距离消失。 *Documenta Mathematica* **10** (2005), 217–245。[63] Michor, P. and Mumford D. *J. Eur.* , , 平面曲线空间上的黎曼几何。 ( ), – 。[64] Michor, P., Mumford, D., Shah, J., and Younes, L. 具有显式测地线的形状空间度量。 *Rendiconti Lincei. Matematica E Applicazioni* **19** no 1 (2008), 25–57。

[65] Michor, P. W.; Mumford, D.; 使用哈密顿方法概述曲线空间上的黎曼度量。 *Applied and Computational Harmonic Analysis* **23** no 1 (2007), 74–113。[66] Mio, W., Srivastava and Joshi *International* , A., *Journal of Computer Vision* **73** 3 2006 307 324 , S.; 平面弹性曲线的形状。no ( ), – 。[67] Ntumba, P.; DW 复形及其底层拓扑空间。 *Quaest. Math.* **25**, no 1 (2002), 119–134。[68] Ntumba, P.; Sikorski与Fr .. *Demonstratio Mathematica* *[electronic only]* **38** 1 2005 207 221

olicher CW复形的比较。no ( ), – 。[69] Nägel, A., Schulz, V., Siebenborn, M., and Wittum, G.; 用于三维扩散过程结构化逆向建模的可扩展形状优化方法。79–88。[70] Olver, P. J. *Applications of lie groups to differential equations*。数学研究生教材。Springer, (2012)。 [71] Omori, H. 微分同胚群及其子群。 *Transactions of the American Mathematical Society* **179** 1973 85 122 ( ), – 。[72] Omori, H. *Infinite-dimensional Lie Groups*。数学专著译丛。美国数学学会 (1996)。 [73] Paganini, A. *Approximate Shape Gradients for Interface Problems*, vol. 166。11 2015, pp. 217–227。[74] Perperidis, D., Mohiaddin, R., and Rueckert, D. 心脏解剖结构四维统计图谱的构建及其在分类中的应用。载于 *Lecture Notes in Computer Science*, J. Duncan和G. Gerig编。Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 402–410。[75] Pervova, E. 微分拓扑向量伪丛。 *Topology and its Applications* **202** (2016) 269–300。[76] Pervova, E. 向量伪丛的微分拓扑拼接及其上的伪度量。*Topology and its Applications* **220** (2017)。[77] Pervova, E. 微分拓扑Clifford代数与Clifford模伪丛。 *Linear and Multilinear Algebra* **67** 9 2019 1785 1828 no. ( ), - 。[78] Pressley, A., and Segal, G. B. *Loop Groups*。牛津数学专著 (1988)。[79] Robart, T. 关于无限维情形下李子代数的可积性。no ( ), – 。[80] Rumpf, M., and Wirth *SIAM Journal on* , B. *Imaging Sciences* **2** 3 2009 800 833 一种非线性弹性形状平均方法。no ( ), – 。[81] Schmidt, S., Wadbro, E., and Berggren, M. 大规模三维声学号优化。 *SIAM Journal on Scientific Computing* **38** no 6 (2016), B917–B940。 [82] Schulz, V., and Siebenborn, M. 偏微分方程约束形状优化中曲面度量的计算比较。 *Computational Methods in Applied Mathematics* **16** (2015)。[83] Schulz, V., Siebenborn, M., and Welker, K. 基于Steklov–Poincar´e型度量的高效偏微分方程约束形状优化。 *SIAM Journal on Optimization* **26** (01 2016), 2800– 2819。[84] Siebenborn, M., and Welker, K. 形状空间优化中多重网格方法的计算方面。[85] Söhn, M., Birkner, M., Yan, D., and Alber, M. 基于器官变形主导特征模态的个体几何变化建模：实现与评估。 *Physics in Medicine and Biology* **50** 24 2005 5893 5908 no ( ), – 。[86] Souriau, J. 量子结构生成算法。 *Astérisque* **25** (1985), 64- 117 (2011)。[87] Stacey, A. 比较光滑学。 *Theory and Applications of Categories* **25** no4 (2011), 64–117。[88] Stacey, A. *Glasg. Math. J.* 分段 **59** 1 2017 27 59 光滑环空间的光滑结构。, ( ), – 。[89] Vassiliou, E. Dodson C. and Galanis G. *Geometry in a Frechet Context: A Projective* , , , , 。 *Limit Approach* **428** 伦敦数学学会讲义丛书。剑桥大学出版社，302页。(2016)。[90] Vincent, M. 微分拓扑微分几何。硕士论文，哥本哈根大学，(2008)。[91] Watts, J. 微分学、微分空间与辛几何，博士论文 (2012)。

[92] Welker, K. 形状优化的适当空间。 *Applied Mathematics and Optimization* **84** 2021 869 902 10 1007 00245 021 09788 2 ( )

Suppl. 1, S -S https://doi.org/ 。/s - - - .. [93] Wirth, B., Bar, L., Rumpf, M., and Sapiro, G. 形状空间中测地线的连续介质力学方法。 *International Journal of Computer Vision* **93** 第 3 期（2010），293–318。[94] Zolésio, J.-P. 移动区域控制、形状稳定化和变分管公式。在 *International Series of Numerical Mathematics*，K. Kunisch、J. Sprekels、G. Leuger-ing 和 F. Tr¨oltzsch 编。Birkh¨auser Basel，（2007），第 329–382 页。（Nico Goldammer）

Helmut-Schmidt-University / University of the Federal ArmedForces Hamburg, Holstenhofweg 85, 22043 Hamburg, Germany*Email address*: goldammer@hsu-hh.de（Jean-Pierre Magnot） LAREMA - UMR CNRS 6093, Université d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier 49045 Angers cedex 01 and Lycée Jeanne dArc 30 avenue de Grande Bretagne F-63000 Clermont-Ferrand http://orcid.org/0000-0002-3959-3443*Email address*:

jean-pierr.magnot@ac-clermont.fr（Kathrin Welker） TU Bergakademie Freiberg, Akademiestr. 6, D-09599 Freiberg,Germany*Email address*:
Kathrin.Welker@math.tu-freiberg.de