广义主丛与商栈

ELENA CAVIGLIA

Abstract. 我们考虑在一个具有所有拉回和终对象的位点中，对通常的主丛概念进行内部化。我们运用这一概念，在这一抽象背景下，通过配备等变态射的主丛范畴预层，显式构造商预栈。随后我们证明，若该位点是子典范的，且其底层范畴满足一些温和条件，则这些商预栈满足叠意义下的下降条件。

arXiv:2302.07852v2 [math.CT] 5 Jun 2023

Contents

1. 引言2. 广义主丛 3. 广义商预栈 1
4. 广义商栈 参考文献 4
8
18
29

1. Introduction

拓扑空间和光滑流形上的主丛最初是在几何和拓扑学中研究的（参见 [13], [7] 或 [20]）。多年来，主丛的概念沿着不同方向得到了推广。Kock 在 [10] 研究了广义纤维丛，并引入了一个在具有有限逆极限的任意范畴中都有意义的概念；而 Nikolaus、Schreiber 和 Stevenson 则在 [16]研究了格罗滕迪克拓扑斯中的主丛概念，甚至包括无限维情形。

本文考虑一种内部化的主丛概念，只要底层范畴具有所有拉回和一个终对象，它就适用于任意位点。标准概念中的拓扑群在这里变为该范畴的一个群对象，而局部平凡态射的概念则通过考虑沿位点的格罗滕迪克拓扑中某个覆盖族的态射进行拉回来实现内部化。这种内部化的概念在 Grothendieck 的工作中已基本出现（参见 [4] 和[3]），Sati 和 Schreiber 也在 [18] 中使用了类似概念。当位点是 $(\mathcal{T}op\ \ std)$ 时，这一内部概念与经典概念一致，其中 $\mathcal{T}op$ 是紧生成豪斯多夫拓扑空间（及其间连续映射）构成的范畴，std 是标准格罗滕迪克拓扑，即一个拓扑空间的覆盖族与其开覆盖相同。此外，代数几何背景下的主丛（参见 [11] 或 [15]）也是这一概念的实例。

日期：2023年6月6日。2020年数学主题分类：18F20、18F10、18C40、14A20、18F15。关键词和短语：主丛、商栈、分类栈、典范拓扑。1

我们认为，这种内部概念的主要优势之一是，它或许能够使我们在几何和数学物理的新背景下运用主丛这一丰富而重要的理论。

主丛的重要性还在于，它们是通过同伦拉回由分类空间分类的对象（参见[13]），也是通过 2-拉回由分类叠分类的对象。分类叠是商栈这一极其重要概念的特例。通常认为，商栈是作用群胚预层的栈化（经典参考文献可参见 Laumon 和 Moret- Bailly 所著的 [11] ），不过，文献中也有一种显式构造：它使用由主丛及其到固定空间的等变映射组成的群胚预层；这种构造见于代数情形和可微情形（例如分别参见 [15] 和 [5] ）。本文在内在语境中进行同样的构造，以定义商预叠。随后，我们证明这些对象是定义良好的伪函子。这些商预叠与经典商叠的一个关键区别在于，在我们的情形中，预叠取值于范畴 ，而不一定取值于$\mathcal{G}pd$；经典商栈则是群胚叠。这是因为一般的格罗滕迪克拓扑并不总能与范畴的态射良好相容，具体含义见注3.2。

由于经典商预栈总是叠，自然会让人想知道内部的商预栈是否也如此。这个问题的答案似乎是否定的，但本文并未给出证明。不过，我们找到了足够的抽象条件，能够保证这些广义商预层栈按照叠的意义满足下降。这就是本文主要结果的内容：

定理 1.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有拉回和终对象的余完备范畴，并且拉回保持余极限。再设 τ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个次典型格洛腾迪克拓扑，且 $X, G \in \mathcal{C}$ 带有一个群对象 G 。则商预层栈 $[X/G]$ 是一个叠。

请注意，对范畴$\mathcal{C}$所要求的条件并不苛刻。事实上，所有具有终对象的局部笛卡尔闭范畴都满足这些条件。因此，我们有许多可以应用这一结果的背景，例如所有余完备拟拓扑斯（见[17]），其中包括颇有意思的微分拓扑空间情形（按 [19] 的意义），以及所有余完备初等拓扑斯。为了证明这一出现在第 4 节、作为定理 4.5的定理，我们证明当所考虑的拓扑是典范拓扑时，商预层栈是一个叠。为此，我们使用 Lester 在 [12] 中引入的典范拓扑的基。

定理 1.1 的证明在技术上相当繁琐，尤其是要证明每个下降数据都是有效的；为了避免更复杂的技术细节，我们需要使用筛的语言，而不是覆盖族的语言。我们回顾一下这个实用的下降数据定义版本，它想必广为人知，但我们未能找到相关参考文献。

定义 1.2. 设 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}_{\mathrm{op}} \to$ 范畴 是一个预叠，并设 S是 $Y \in \mathcal{C}$上的一个筛。 S 上的下降数据（关于 $\mathcal{F}$ ）是指：对 S 中的每个态射 $Z \xrightarrow{f} Y$，指定一个对象 $W_f \in \mathcal{F}(Z)$；并且对每一对可复合态射 $Z' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$（满足 $f \in S$），指定一个同构 $\varphi^{f,\,g}$: $g^* W_f \xrightarrow{\simeq} W_{g\circ f}$，使得对于态射 $Z'' \xrightarrow{h} Z' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$

满足 $f \in S$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} h^*(g^*W_f) & \xrightarrow{h^*\varphi^{f,g}} & h^*(W_{f\circ g}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{f\circ g,h}} \\ (g\circ h)^*(W_f) & \xrightarrow[\varphi^{f,g\circ h}]{} & W_{f\circ g\circ h}. \end{array}$$

如果存在一个对象 $W \in \mathcal{F}(Y)$，并且对每个态射 $Z \xrightarrow{f} Y \in S$，都存在一个同构，则称该下降数据是有效的

$$\psi^f \colon f^*(W) \xrightarrow{\simeq} W_f$$

使得对于满足 $f \in S$ 的态射 $Z' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$，下图是交换的

$$\begin{array}{ccc} g^*(f^*(W)) & \xrightarrow{g^*\psi^f} & g^*(W_f) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{f,g}} \\ (f\circ g)^*W & \xrightarrow{\psi^{f\circ g}} & W_{f\circ g}. \end{array}$$

对我们而言，叠是满足下降条件至等价意义下的伪函子（例如参见 [15]），定义如下：

定义 1.3. 预叠 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$ 是叠，当且仅当满足以下条件：

- 对于 $\mathcal{F}$ 的每个下降数据，它都是有效的；- （态射的粘合）给定覆盖族 $\mathcal{U} = \{f_i\colon U_i \to U\}_{i\in I}$、$\mathcal{F}(U)$ 中的对象 x 和 y，以及对每个 $i \in I$，在 $\mathcal{F}(U_i)$ 中的态射 $\varphi_i\colon x|_{U_i} \to y|_{U_i}$，使得对每个 $i,\ j \in I$ $\varphi_i|_{U_{ij}} = \varphi_j|_{U_{ij}}$，都存在一个态射 $\eta\colon x \to y$，满足$\eta|_{U_i} = \varphi_i$；- （粘合的唯一性）给定覆盖族 $\mathcal{U} = \{f_i\colon U_i \to U\}_{i\in I}$、$\mathcal{F}(U)$中的对象 x和 y，以及态射 $\varphi,\psi\colon x \to y$，使得对每个 $i \in I$ $\varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i}$，则 $\varphi = \psi$。

众所周知，在经典情形下，主 G丛的同构类与系数取 G 的第一上同调群之间存在一一对应（关于这一事实的证明，见[8] ）；我们相信，在本文的广义框架中可以证明一个类似但更强的结果，同时考虑两边的不仅是对象，还有完整的范畴结构。该结果以及本文所述理论的二维版本，都是作者目前正在进行的工作。

本文概述。在第2节中，在回顾范畴的群对象语境下作用和等变态射的概念之后，我们构造一个内群在拉回上的作用；已知参与拉回的两个态射各自源对象上的作用（构造2.4）。这一特定作用是将主丛的概念内化所必需的，并将在全文中多次使用。此外，我们引入位点上的局部平凡态射的概念（定义2.7），并用它

来定义主丛及其间的态射（定义2.8和2.9）。本节最后指出，这一概念确实推广了拓扑空间上的经典主丛概念。第3 节专门讨论广义商预叠的定义（定义3.1）。本节的一项关键结果是，广义主丛在拉回下稳定（命题3.3），这对于证明我们对商预叠的定义是恰当的至关重要（命题3.4）。本文最后一节（第4节）开篇回顾有关典范拓扑的一些有用结果。随后，我们证明本文的主要结果（定理4.5）：在对底层范畴作出某些温和假设的条件下，商预叠相对于任意亚典范拓扑都是栈。

2. Generalized principal bundles

设 $\mathcal{C}$ 是一个具有拉回和终对象 T 的范畴，并设 τ 是其上的格罗滕迪克拓扑。本节将考察 X上的主 G丛，其中 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，而 G 是 $\mathcal{C}$中的一个内群。

首先，我们回顾以下众所周知的定义：作用：C 中的一个内群在该范畴的另一个对象上的作用，以及等变态射（参见 Grothendieck 的[4] 以及 Heckmann 和 Hilton 的[1] 和 [2]，作为经典参考文献）。

定义 2.1. 设 G 是 $\mathcal{C}$ 中的一个内群，并设 X 是 $\mathcal{C}$中的一个对象。G 在 X 上的作用是一个态射

$$x\colon G\times X\to X$$

使得下列图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times X & \xrightarrow{\mathrm{id}_G\times x} & G\times X \\ \downarrow{\scriptstyle m\times\mathrm{id}_X} & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ G\times X & \xrightarrow[x]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T\times X & \xrightarrow{e\times\mathrm{id}_X} & G\times X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ X & \xrightarrow[\mathrm{id}_X]{} & X, \end{array}$$

其中 T 是$\mathcal{C}$的终对象，$m\colon G\times G\to G$ 是 G 的内乘法，而 $e\colon T\to G$ 是 G 的内部单位元。

定义 2.2. 设 G 是$\mathcal{C}$中的一个群对象，它以作用 $x\colon G\times X\to X$ 和 $y\colon G\times Y\to Y$ 分别作用于$\mathcal{C}$中的对象 X 和 Y。一个 G-等变态射$f\colon X\to Y$ 是$\mathcal{C}$中的一个态射，并且满足下图交换：

$$\begin{array}{ccc} G\times X & \xrightarrow{x} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G\times Y & \xrightarrow[y]{} & Y. \end{array}$$

注 2.3. 请注意，当源对象和目标对象都赋予 G 的平凡作用时，$\mathcal{C}$中的每个态射都是 G-等变的。鉴于此，当未指定作用时，我们总是将$\mathcal{C}$ 中的对象视为赋予 G 的平凡作用。

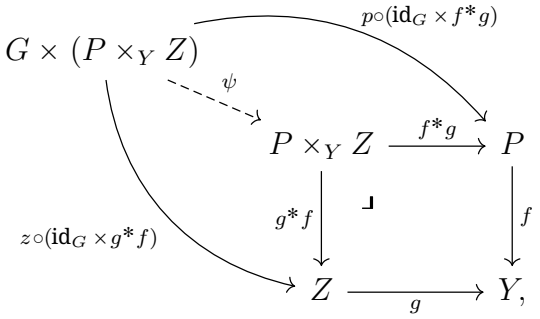
现在我们描述如何在已知 G 对两个态射定义域的作用时，为 $\mathcal{C}$中两个态射的拉回定义 G 的作用。本文将广泛使用这一作用。

构造 2.4. 设 G 是 $\mathcal{C}$ 中的一个群对象，它以作用 $p\colon G\times P\to P$ 作用于 $P\in\mathcal{C}$，以作用 $y\colon G\times Y\to Y$ 作用于 $Y\in\mathcal{C}$，并以作用 $z\colon G\times Z\to Z$ 作用于 $Z\in\mathcal{C}$；再设 $f\colon P\to Y$ 和 $g\colon Z\to Y$ 是 G-等变态射。

那么，考虑拉回方形

$$\begin{array}{ccc} P\times_Y Z & \xrightarrow{f^*g} & P \\ {\scriptstyle g^*f}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow[g]{} & Y. \end{array}$$

我们要定义 G 在拉回 $P\times_Y Z$ 上的作用，可以利用态射 ψ 来实现：$G\times(P\times_Y Z)\to P\times_Y Z$ 该态射由拉回 $P\times_Y Z$ 的泛性质诱导，如下图所示



其中外层方形是交换的，因为它可以通过拼接交换方形得到，如下所示

$$\begin{array}{ccccc} G\times(P\times_Y Z) & \xrightarrow{\mathrm{id}_G\times f^*g} & G\times P & \xrightarrow{p} & P \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times g^*f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G\times Z & \xrightarrow{\mathrm{id}_G\times g} & G\times Y & \xrightarrow{y} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle z} & & & & \| \\ Z & & \xrightarrow[g]{} & & Y, \end{array}$$

右上方的方块是交换的，因为 f 是等变的；下方的方块是交换的，因为 g 是等变的。

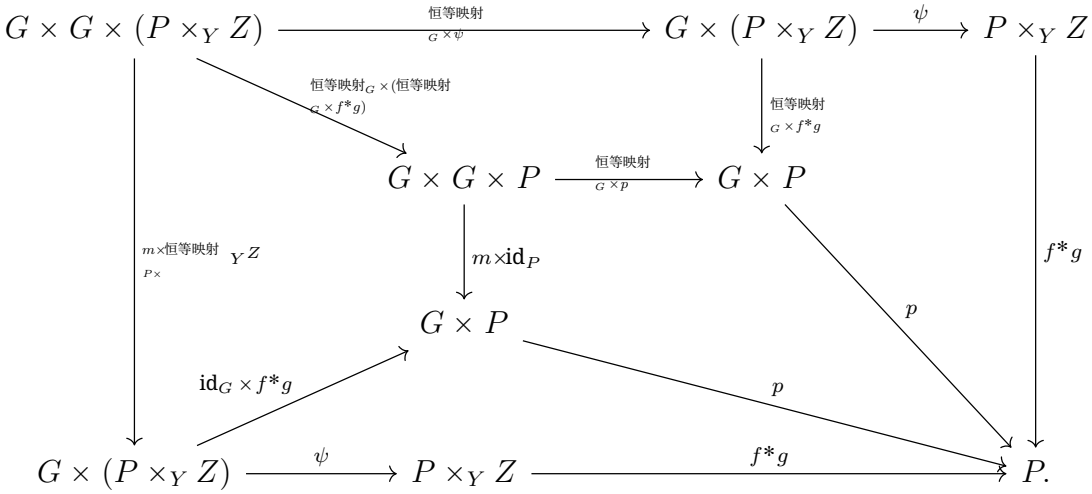
命题 2.5. 态射 $\psi\colon G\times(P\times_Y Z)\to P\times_Y Z$ 由构造 2.4 定义，是 G 在 $P\times_Y Z$ 上的作用。

证明。为了证明 ψ 是一个作用，我们需要证明以下图表交换：

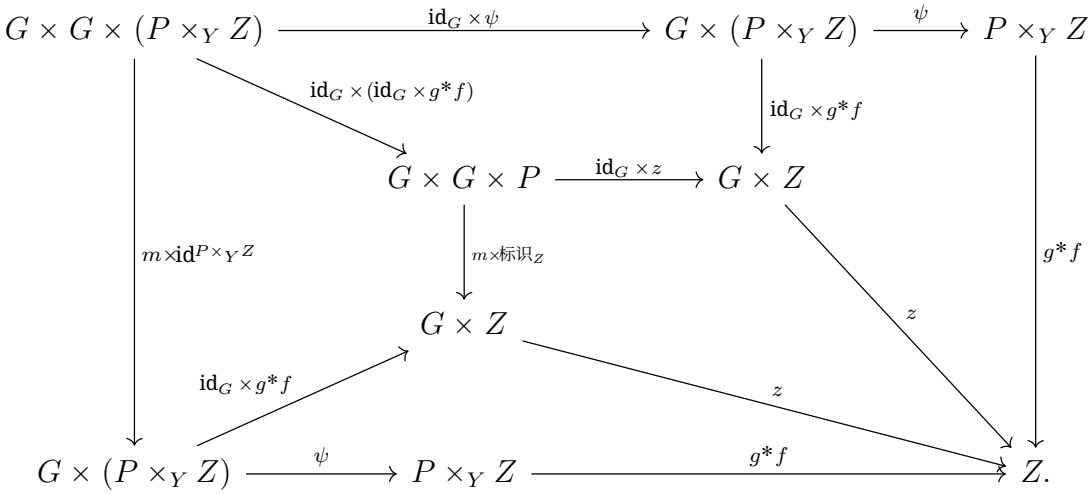
$$\begin{array}{ccc} G\times G\times(P\times_Y Z) & \xrightarrow{\mathrm{id}_G\times\psi} & G\times(P\times_Y Z) \\ {\scriptstyle m\times\mathrm{id}_{P\times_Y Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ G\times(P\times_Y Z) & \xrightarrow[\psi]{} & P\times_Y Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T\times(P\times_Y Z) & \xrightarrow{e\times\mathrm{id}_{P\times_Y Z}} & G\times(P\times_Y Z) \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ P\times_Y Z & \xrightarrow[\mathrm{id}_{P\times_Y Z}]{} & P\times_Y Z. \end{array}$$

为此，我们将使用拉回 $P\times_Y Z$ 的泛性质。

我们从左侧的图表出发，并考虑与 f^*g 的后合成，因此需要证明 $f^*g \circ \psi \circ (\mathrm{id}_G \times \psi) = f^*g \circ \psi \circ (m \times \mathrm{id}_{P \times_Y Z})$。这可由下面的交换图证明

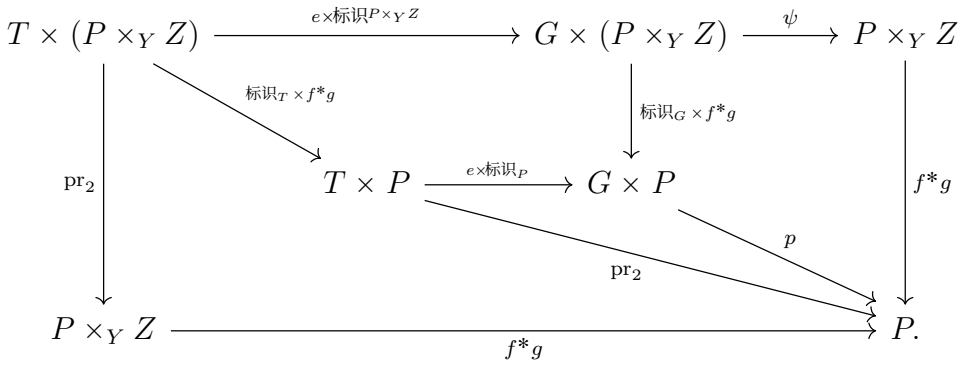


同理，我们需要证明 $g^*f \circ \psi \circ (\mathrm{id}_G \times \psi) = g^*f \circ \psi \circ (m \times \mathrm{id}_{P \times_Y Z})$，这可由交换图证明

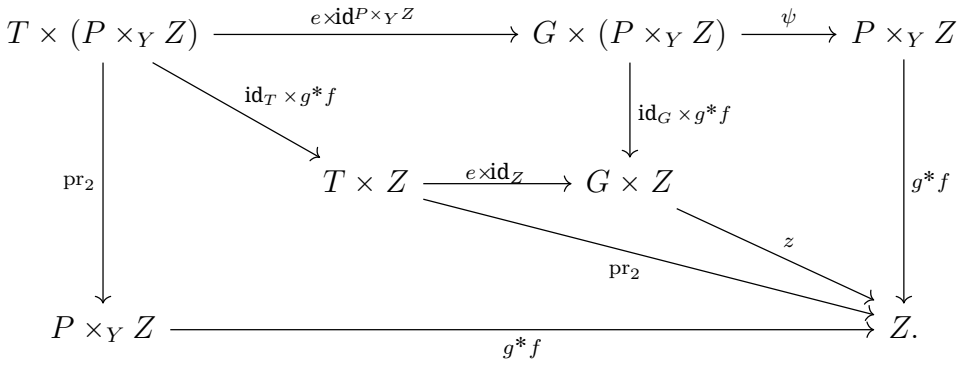


根据拉回 $P \times_Y Z$ 的泛性质，我们得出所要求的第一个作用性质成立。为了证明第二个性质也成立，我们再次使用拉回 $P \times_Y Z$ 的泛性质。

下图表明 $f^*g \circ \psi \circ e \times \mathrm{id}_{P \times_Y Z} = f^*g \circ \mathrm{pr}_2$:



类似地，下图表明 $g^*f \circ \psi \circ e \times \mathrm{id}_{P\times_Y Z} = g^*f \circ \mathrm{pr}_2$:



因此，我们得出结论： $\psi \circ e \times \mathrm{id}_{P\times_Y Z} = \mathrm{pr}_2$，所以作用的第二个性质对 ψ成立。□

注记 2.6. 注意，命题 2.4 的结果可以视为以下事实的推论： G-作用是单子 $G \times -$ 的代数，而单子函子会创建所有存在的极限。Sati 和 Schreiber 在 [18]. 中对拓扑空间采用了这种方法

为了在这一更一般的背景下引入主丛的概念，我们需要定义相对于 $\mathcal{C}$ 上固定的格罗滕迪克拓扑的局部平凡态射。

定义 2.7. 设 $g\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{C}$中的一个态射。若存在一个覆盖 $\{f_i\colon U_i \to X\}_{i\in I}$，使得对于 X 的每个 $i \in I$，拉回

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X U_i & \xrightarrow{g^*f_i} & Y \\ {\scriptstyle f_i^*g}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle g} \\ U_i & \xrightarrow[f_i]{} & X \end{array}$$

同构于 $G \times U_i$，且该同构

$$\varphi_i\colon Y \times_X U_i \to G \times U_i$$

是 G-等变的，即

$$\begin{array}{ccc} G \times (Y \times_X U_i) & \xrightarrow{\psi_i} & Y \times_X U_i \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_G \times \varphi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} \\ G \times (G \times U_i) & \xrightarrow[\theta_i]{} & G \times U_i, \end{array}$$

其中，作用 $\theta_i\colon G\times(G\times U_i) \to G\times U_i$ 是典范同构$G \times (G \times U_i) \xrightarrow{\sim} G \times U_i$ 与内乘法 $m : G \times G \to G$ 的复合，而 G 上的作用 $\psi_i\colon G \times (Y \times_X U_i) \to Y \times_X U_i$ 按构造 2.4中的方式定义。

现在我们可以给出本节的主要定义了。

定义 2.8. 设 G 是位点 $(\mathcal{C}\ \tau)$ 中的一个内群，且 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象。 X 上的一个主 G-丛是一个 G-等变局部平凡态射 $\pi_P\colon P \to X$，其中 $\mathcal{C}$ 中的对象 P 配备了一个作用 $p\colon G \times P \to P$。

定义 2.9. 设 $\pi_P\colon P \to X$ 和 $\pi_Q\colon Q \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 中 X 上的主 G-丛。从 $\pi_P\colon P \to X$ 到 $\pi_Q\colon Q \to X$ 的主 G-丛态射 φ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射$\varphi\colon P \to Q$，满足

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & Q \\ & {\scriptstyle \pi_P}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi_Q} & \\ & X. & \end{array}$$

记号。 X 上的主 G丛及其之间的主丛态射构成一个范畴，我们将其记作$\mathcal{B}un_G(X)$。

注记 2.10。考虑范畴$\mathcal{T}op$，它是紧生成 Hausdorff 拓扑空间的范畴，而 std 是其标准拓扑，即一个空间的覆盖是通常的开覆盖（以空间中开集的包含映射作为态射）。在此背景下，我们对主丛的定义与通常的定义一致。

请注意，到目前为止，我们并不需要将自身限制在只考虑紧生成 Hausdorff 空间上；但我们之所以这样选择，一方面是因为这个范畴比所有拓扑空间组成的范畴性质良好得多，另一方面是因为这样我们可以将定理 4.5 应用于 $(\mathcal{T}op\ std)$，因为拉回在该范畴中保持余极限。

3. Generalized quotient prestacks

本节中，我们将在内部语境下使用传统构造，明确构造位点上的商预栈。随后我们将证明它们是定义良好的伪函子。为此，我们还将证明定义 2.8 中引入的主丛在拉回下保持稳定。

现在，我们已经准备好在本文的语境下明确构造商预栈。这一构造遵循一种广为人知的方法，该方法见于文献中关于域上的概形的情形（例如参见 [15] 第 28 页）以及可微情形（例如参见 [5] 中的例 1.5）。

定义 3.1. 设$\mathcal{C}$ 是一个具有拉回和终对象的范畴，且 τ 是其上的一个格罗滕迪克拓扑。再设 X 是$\mathcal{C}$ 中的一个对象，并设 G 是$\mathcal{C}$中的一个群对象，它以作用 $x\colon G \times X \to X$ 作用于 X。商预栈

$$[X/G]\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$$

定义如下：

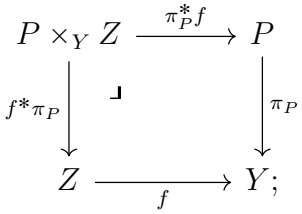
- 对于每个对象 $Y \in \mathcal{C}$，我们将 $[X/G](Y)$ 定义为如下范畴：其对象为满足以下条件的对 (P,α)：$\pi_P\colon P \to Y$是一个在 Y 上的主 G-丛，且 $\alpha\colon P \to X$ 是一个 G-等变态射；其从对象 (P,α) 到对象 (Q,β) 的态射为主 G-丛的态射 $\varphi\colon P \to Q$，满足

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & Q \\ & {\scriptstyle \alpha}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \beta} & \\ & X; & \end{array}$$

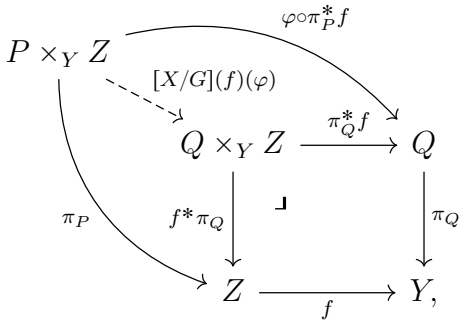
- 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $f\colon Z \to Y$，函子

$$[X/G](f)\colon [X/G](Y) \to [X/G](Z)$$

将
– 将对象 $(P,\alpha) \in [X/G](Y)$ 映射到一对 $(P \times_Y Z, \alpha \circ \pi_P^* f)$，其中 $P \times_Y Z$ 是拉回



– 将态射 $\varphi\colon (P,\alpha) \to (Q,\beta)$ 映射到态射 $[X/G](f)(\varphi)$，该态射由拉回的泛性质定义，如下图所示

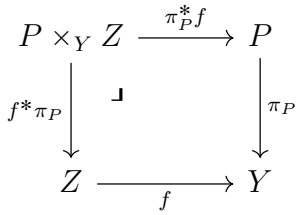


其中，最大的方块是交换的，因为 φ 是 G-等变的。

注 3.2. 虽然经典商预栈的取值在 $\mathcal{G}pd$ 中，但对于刚刚引入的商预栈，这一点未必成立。这是因为在一般位点上，不一定总能先局部地（在某个覆盖上）定义态射，再利用这些局部定义来定义整体态射。关于拓扑空间上的主丛之间的态射总是同构这一事实的经典证明（例如参见 [14],命题 2.1) strongly rely on this special property of the site $(\mathcal{T}op\ std)$。

为了证明 $[X/G]$ 定义良好且是一个预叠（即取值于 范畴的伪函子），我们需要以下结果。

命题 3.3。设 $\pi_P\colon\ P \to Y$ 是 Y 上的一个主 G-丛。那么，由以下拉回方形给出的拉回 $P \times_Y Z$



是 Z 上的一个主 G-丛，并带有态射 $\pi_{P\times_Y Z}\colon = f^*\pi_P$。

证明。 我们首先考虑作用 $\psi\colon\ G \times (P \times_Y Z) \to P \times_Y Z$ 的 G 在拉回 $P \times_Y Z$ 上的作用，该拉回按照构造 2.4中的定义。

我们注意到，态射 $\pi_{P\times_Y Z}$是 G-等变的，因为这个方块

$$\begin{array}{ccc} G\times(P\times_Y Z) & \xrightarrow{\psi} & P\times_Y Z \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_G\times f^*\pi_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*\pi_P} \\ G\times P & \xrightarrow[p]{} & P, \end{array}$$

根据 ψ的定义，它是交换的。

现在我们需要证明 $\pi_{P\times_Y Z}$是局部平凡的。

由于 $\pi_P\colon\ P\to Y$是一个主 G-丛，因此存在一个覆盖 $\mathcal{V}=\{g_i\colon\ V_i\to Y\}_{i\in I}$，使得对每个 $i\in I$，拉回

$$\begin{array}{ccc} P\times_Y V_i & \xrightarrow{\pi_P^* g_i} & P \\ {\scriptstyle g_i^*\pi_P}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \pi_P} \\ V_i & \xrightarrow[g_i]{} & Y \end{array}$$

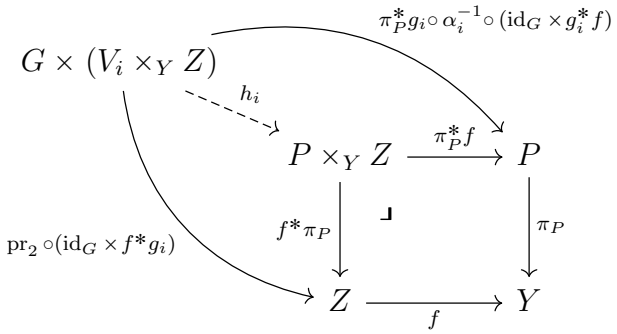
同构于 $G\times V_i$，且同构 $\alpha_i\colon\ P\times_Y V_i\to G\times V_i$是 G-等变的（这里 G 在 $P\times_Y V_i$ 上的作用按构造2.4定义）。因此，我们可以利用覆盖 $\mathcal{V}$的 Y定义族 $\mathcal{U}=\{f^*g_i\colon V_i\times_Y Z\to Z\}_{i\in I}$根据格罗滕迪克拓扑的定义，它是 Z的一个覆盖。为了利用这个覆盖证明 $\pi_{P\times_Y Z}$是局部平凡的，我们需要证明，对于每个 $i\in I$，都存在一个同构

$$\varphi_i\colon (P\times_Y Z)\times_Z (V_i\times_Y Z)\to G\times(V_i\times_Y Z).$$

等价地，我们需要证明 $G\times(V_i\times_Y Z)$ 满足拉回 $(P\times_Y Z)\times_Z(V_i\times_Y Z)$的泛性质。为此，我们定义一个态射

$$h_i\colon G\times(V_i\times_Y Z)\to P\times_Y Z$$

对于每个 $i\in I$，如下面的图表所示

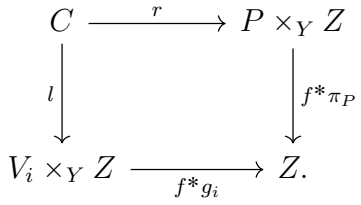


并且我们要证明，$G\times(V_i\times_Y Z)$ 连同态射 $h_i\colon\ G\times(V_i\times_Y Z)\to P\times_Y Z$和 pr_2: $G\times(V_i\times_Y Z)\to V_i\times_Y Z$ 满足拉回 $(P\times_Y Z)\times_Z(V_i\times_Y Z)$的泛性质。首先，我们需要证明下图是交换的:

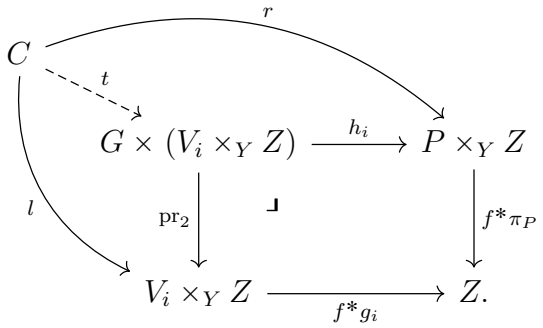
$$\begin{array}{ccc} G\times(V_i\times_Y Z) & \xrightarrow{h_i} & P\times_Y Z \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*\pi_P} \\ V_i\times_Y Z & \xrightarrow[f^* g_i]{} & Z. \end{array}$$

这是成立的，因为我们可以将一个由 h_i 的定义给出的交换方形与一个显然交换的方形粘合，从而得到这个方形。

现在令 C 为$\mathcal{C}$ 中的一个对象，并配备两个态射 $r\colon C \to P \times_Y Z$ 和$l\colon C \to V_i \times_Y Z$，使得



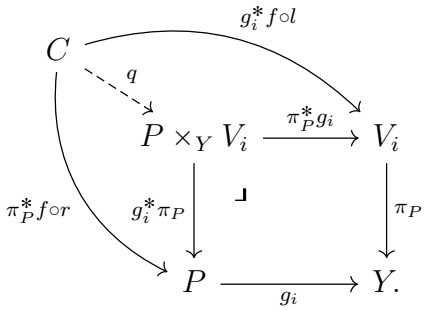
我们需要证明存在唯一的态射 $t\colon C \to G \times (V_i \times_Y Z)$，使得



我们定义

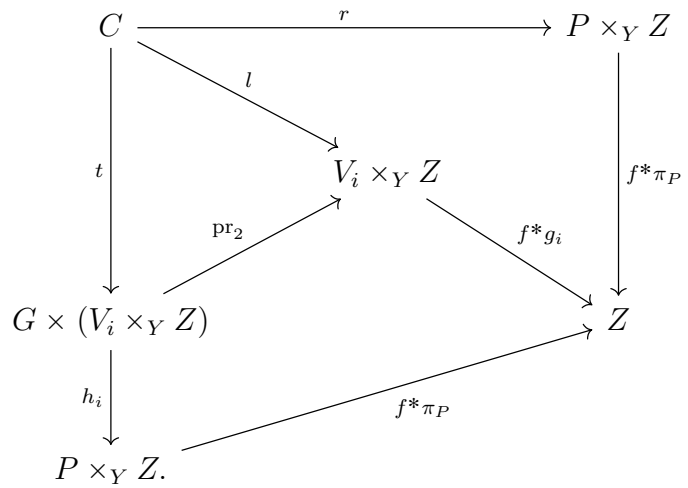
$$t := (\mathrm{pr}_1 \circ \alpha_i \circ q) \times l,$$

其中 $q\colon C \to P \times_Y V_i$ 是由 $P \times_Y V_i$的泛性质给出的态射，如下图所示：

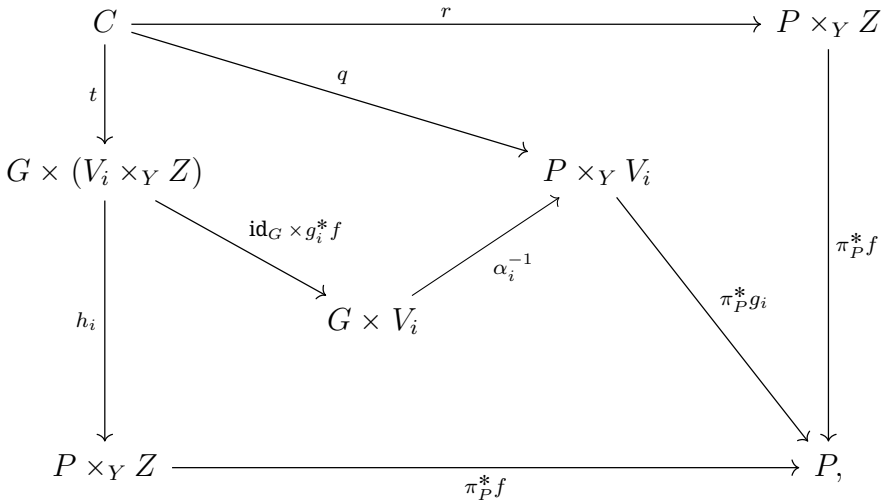


显然 $\mathrm{pr}_2 \circ t = l$，因此只需证明 $h_i \circ t = r$。为此，我们使用拉回 $P \times_Y Z$ 的泛性质。考察与 $f^*\pi_P$ 的后合成，

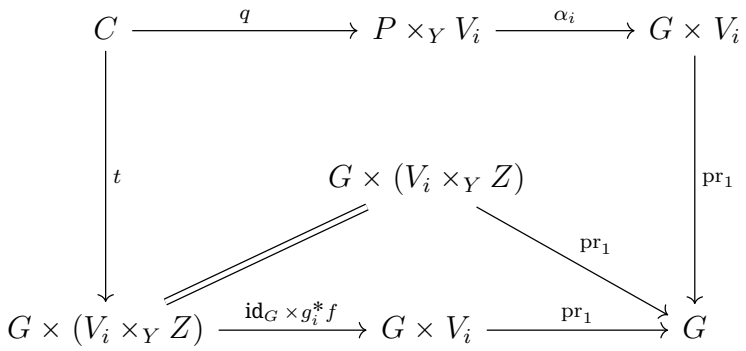
我们得到以下交换图：

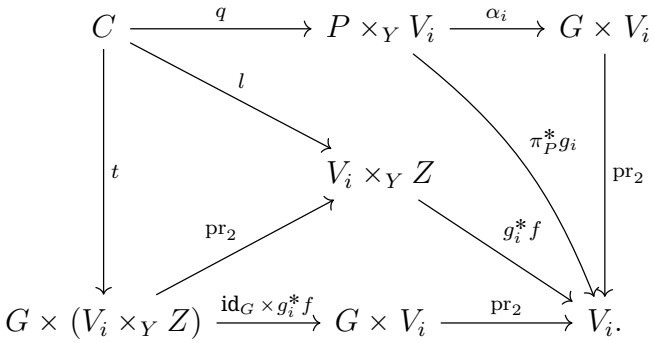


另一方面，与 $\pi_P^* f$ 的后合成给出以下交换图：



其中，除左上方的图表外，所有内部图表都按定义交换；左上方的图表之所以交换，是因为 $G \times V_i$ 具有积的泛性质，并且我们有以下交换图

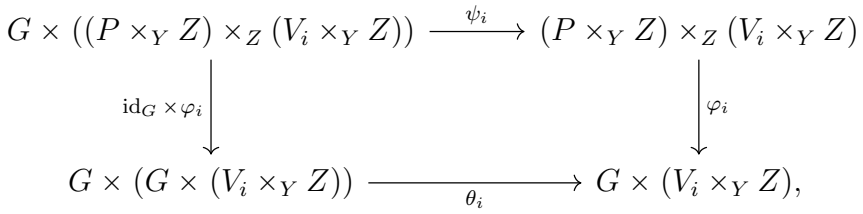




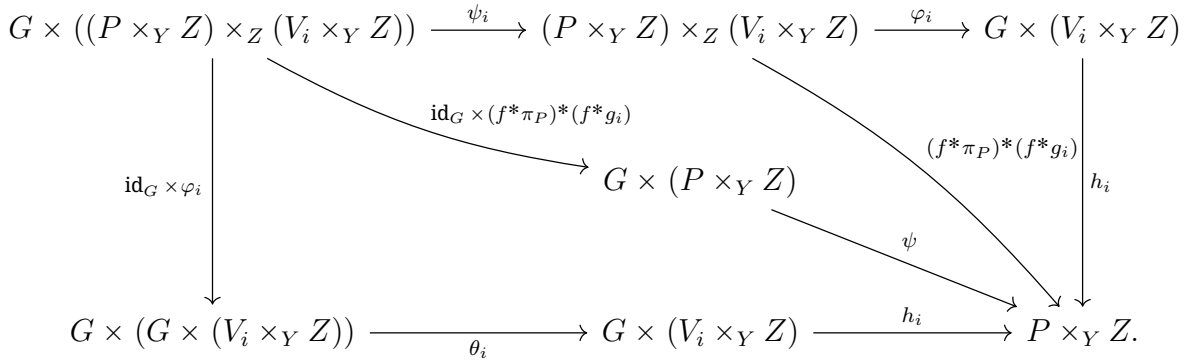
因此，我们已证明 $G \times (V_i \times YZ)$ 满足拉回$(P \times_Y Z) \times_Z (V_i \times_Y Z)$ 的泛性质，所以存在一个同构

$$\varphi_i \colon (P \times_Y Z) \times_Z (V_i \times_Y Z) \to G \times (V_i \times_Y Z).$$

现在我们必须证明 φ_i is G-等变，即证明以下图表是交换的

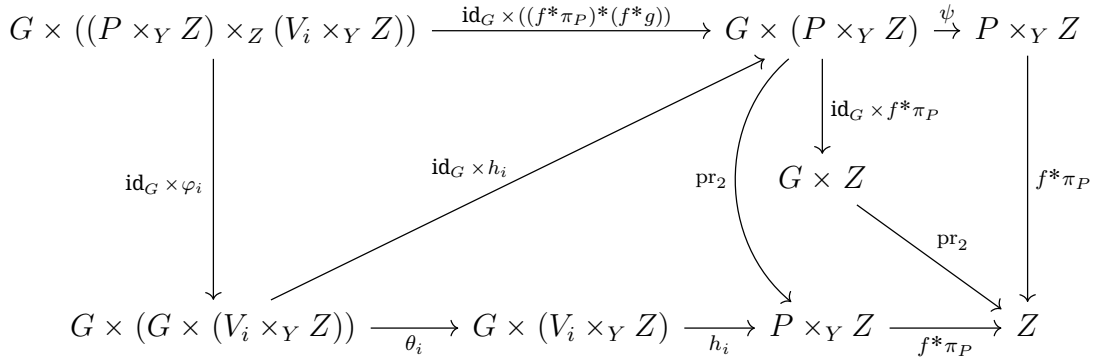


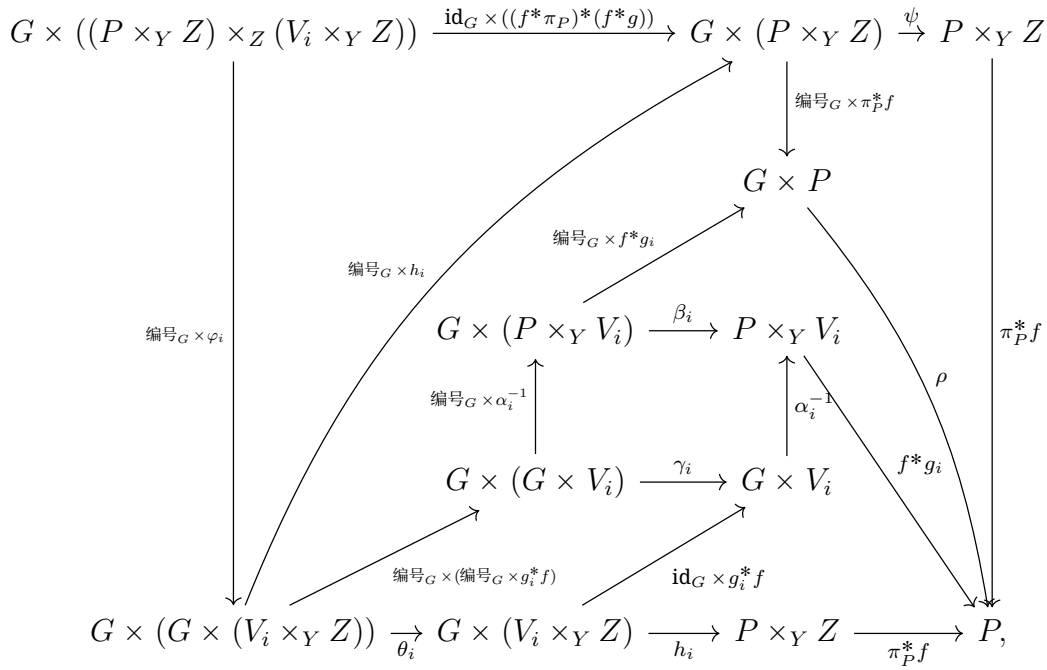
其中 ψ_i: $G \times ((P \times_Y Z) \times_Z (V_i \times_Y Z)) \to (P \times_Y Z) \times_Z (V_i \times_Y Z)$ 是使用构造 2.4定义的作用。我们希望利用 $G \times (V_i \times_Y Z)$ 满足的拉回的泛性质，因此我们开始考虑与 h_i 的后合成，并得到以下图表：



根据 ψ_i 和φ_i 的定义，中间和右侧的图表是交换的，因此只需证明左侧的图表是交换的。为此，我们可以利用 $P \times_Y Z$的泛性质。下面的交换图表表明，以下两者的

与 $f^*\pi_P$和 $\pi_P^* f$进行后合成均可行:





其中

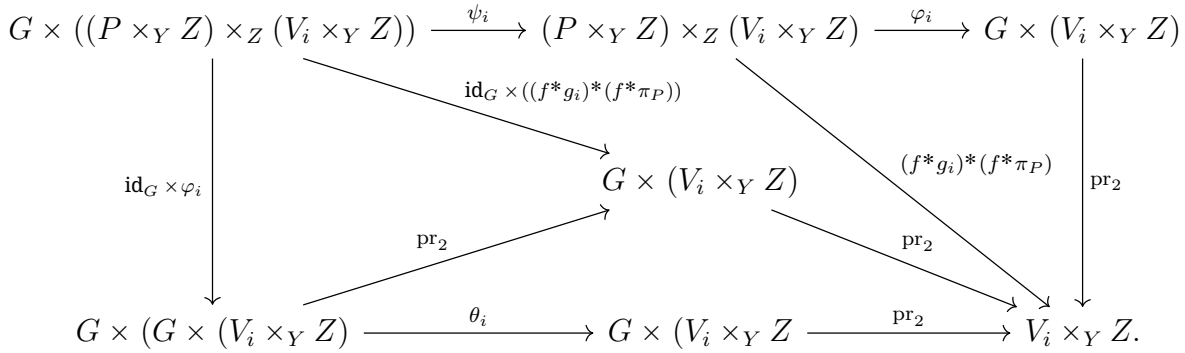
$$\beta_i \colon G \times (P \times_Y V_i) \to P \times_Y V_i$$

是由构造 2.4 给出的作用，且

$$\gamma_i : G \times (G \times V_i) \to G \times V_i$$

是 G 在积 $G \times V_i$ 上的内积作用。

现在我们考虑与 pr_2 的后合成，并得到以下交换图表



这表明 φ_i 是 G-等变的，因此我们已经证明 $\pi_{P\times_Y Z}\colon P\times_Y Z\to Z$ 是 Z 上的主 G-丛。□

现在我们可以证明商预层栈 $[X/G]$ 是一个伪函子（例如，参见 [15] 关于伪函子的定义）。

Prop命题 3.4. 定义 $[X/G]$ 3.1 中的商预层栈是一个伪函子 .

证明。$[X/G]$在对象上的良定义性由前面的命题和直接观察可得。

设 $f\colon Z\to Y$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。我们需要证明该指派

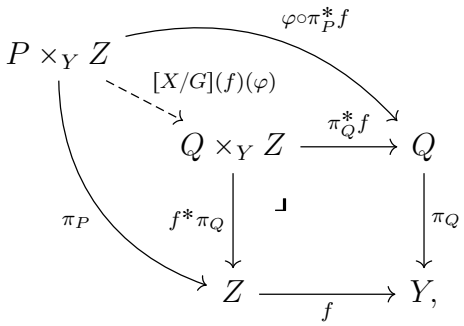
$$[X/G](f)\colon [X/G](Y)\to [X/G](Z)$$

定义 3.1 中的内容构成一个函子。

设 (P,α) 是 $[X/G](Y)$中的一个对象。由命题 3.3，我们有 $P\times_Y Z$ 是一个主 G-丛，其底空间为 Z，态射为 $\pi_P\times_Y Z := f^*\pi_P$。此外，态射$\alpha\circ\pi_P^* f\colon P\times_Y Z\to X$ 是 G-等变的，因为下图交换

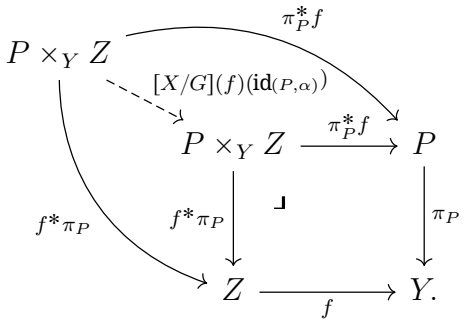
$$\begin{array}{ccc}
G\times(P\times_Y Z) & \xrightarrow{\psi} & P\times_Y Z \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times\pi_P^* f} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_P^* f} \\
G\times P & \xrightarrow{p} & P \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\
G\times X & \xrightarrow[x]{} & X,
\end{array}$$

其中 ψ 是 G 在拉回 $P\times_Y Z$ 上的作用，其定义如构造 2.4中所述。于是我们已证明 $(P\times_Y Z,\alpha\circ\pi_P^* f)$ 是 $[X/G](Y)$ 中的一个对象，因此 $[X/G](f)$ 在对象上定义良好。为了证明它在态射上也定义良好，我们需要证明，给定一个态射 $\varphi\colon (P,\alpha)\to(Q,\beta)$ 在 $[X/G](Y),$ 中，由拉回的泛性质给出的态射 $[X/G](f)(\varphi)$ 如下面的图表所示



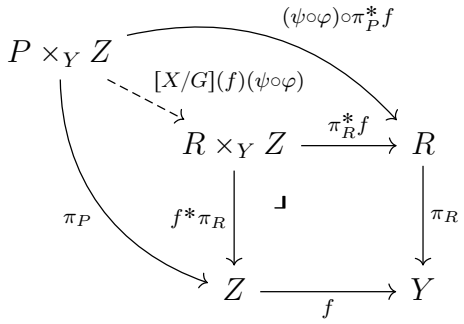
是 $[X/G][Z]$ 中的一个态射。但根据定义，这一点显然成立，因此只需证明 $[X/G](f)$ 保持恒等态射和复合。

设 $(P、\ \alpha)$ 是 $[X/G](Y)$ 的一个对象。那么，态射 $[X/G](f)(\mathrm{id}_{(P,\ \alpha)})$ 是满足下图交换的唯一态射

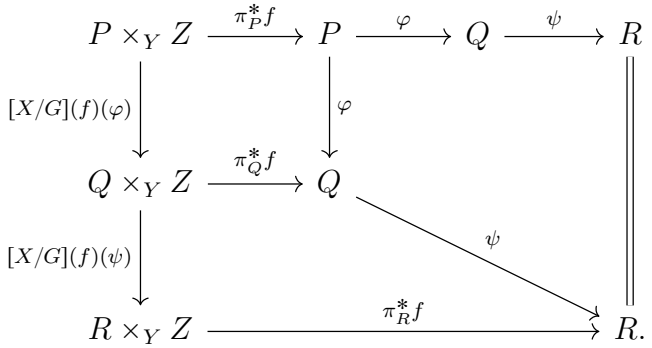


但是，态射 $\mathrm{id}_{(P\times_Y Z,\ \mathrm{id}_{(P,\ \alpha)}\circ\pi_P^*f)}$：$P\times_Y Z\to P\times_Y Z$也使该图表交换，因此 $[X/G](f)(\mathrm{id}_{(P,\ \alpha)})=\mathrm{id}_{(P\times_Y Z,\ \mathrm{id}_{(P,\ \alpha)}\circ\pi_P^*f)}$，由此我们证明了 $[X/G](f)$保持恒等态射。

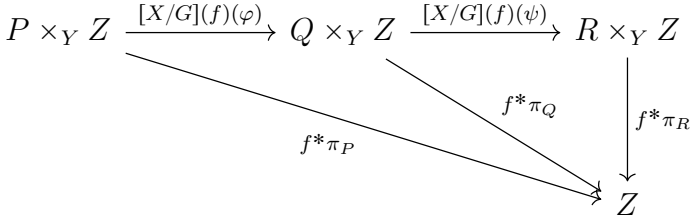
现在设 $\varphi\colon (P,\alpha)\to(Q,\beta)$ 和 $\psi\colon (Q,\beta)\to(R,\delta)$ 是 $[X/G](Y)$ 中的态射。态射 $[X/G](f)(\psi\circ\varphi)$ 是唯一一个使下图交换的态射



因此，要证明等式 $[X/G](f)(\psi\circ\varphi)=[X/G](f)(\psi)\circ[X/G](f)(\varphi)$，只需证明复合态射 $[X/G](f)(\psi)\circ[X/G](f)(\varphi)$ 也使该图表交换。注意到，态射 $[X/G](f)(\psi)\circ[X/G](f)(\varphi)$ 使上述图表的上方三角形交换，因为我们有如下交换图



最后，态射 $[X/G](f)(\psi)\circ[X/G](f)(\varphi)$ 使该图表的下方三角形交换，因为下图是交换图



因此我们已经证明了 $[X/G](f)$ 保复合。这就完成了证明： $[X/G](f)$ 是一个函子。为了证明 $[X/G]$ 是一个预叠，我们现在需要证明它具有伪函子性。设 Y 是$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$的一个对象。我们需要证明存在一个可逆自然变换

$$\iota_Y\colon [X/G](\mathrm{id}_Y) \to \mathrm{id}_{[X/G](Y)}\,.$$

给定 $(P,\alpha)\in[X/G](Y),$，我们将$(\iota_Y)_{(P,\ \alpha)}\colon (P\times_Y Y,\alpha\circ\pi_P^*\mathrm{id}_Y)\to(P,\alpha)$定义为从 $P\times_Y Y$到 P的唯一同构；该同构存在，是因为它们都是对(π_P,id_Y)这一对的拉回。接下来很容易验证 ι_Y是一个自然变换。

现在设 $g\colon W\to Z$和 $f\colon Z\to Y$是$\mathcal{C}$中的态射。我们需要证明存在一个可逆自然变换

$$\varepsilon_{f,g}\colon [X/G](f\circ g)\to[X/G](g)\circ[X/G](f).$$

给定 $(p,\alpha)\in[X/G](Y),$，我们定义

$$(\varepsilon_{f,g})_{(P,\alpha)}\colon (P\times_Y W,\alpha\circ\pi_P^*(f\circ g))\to((P\times_Y Z)\times_W Z,\alpha\circ\pi_P^*f\circ\pi_{P\times_Y Z}^*g)$$

为从 $P\times_Y Z$ 到 $(P\times_Y Z)\times_W Z$ 的唯一同构（两者都是对$(\pi_P,f\circ g)$这一对的拉回）。直接验证可知，$(\varepsilon_{f,\ g})_{(P,\ \alpha)}$是 $[X/G][W]$中的一个态射，而$\varepsilon_{f,\ g}$是一个自然变换这一事实，随即由拉回的伪函子性得出。这证明了 $[X/G]$ 是一个预叠。□

证明。要证明 $[X/G]$ 是一个预叠，我们需要证明它是一个伪函子。设 Y 是$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$的一个对象。我们需要证明存在一个可逆自然变换

$$\iota_Y\colon [X/G](\mathrm{id}_Y) \to \mathrm{id}_{[X/G](Y)}\,.$$

给定 $(P,\alpha)\in[X/G](Y),$，我们将$(\iota_Y)_{(P,\ \alpha)}\colon (P\times_Y Y,\alpha\circ\pi_P^*\mathrm{id}_Y)\to(P,\alpha)$定义为从 $P\times_Y Y$到 P的唯一同构；它之所以存在，是因为二者都是对(π_P,id_Y)这一对的拉回。接下来直接验证可知， ι_Y是一个自然变换。

现在令 $g\colon W\to Z$ 和 $f\colon Z\to Y$ 为 $\mathcal{C}$中的态射。我们需要证明存在一个可逆自然变换

$$\varepsilon_{f,g}\colon [X/G](f\circ g)\to[X/G](g)\circ[X/G](f).$$

给定 $(p、\ \alpha)\in[X/G](Y),$，我们定义

$$(\varepsilon_{f,g})_{(P,\alpha)}\colon (P\times_Y W,\alpha\circ\pi_P^*(f\circ g))\to((P\times_Y Z)\times_W Z,\alpha\circ\pi_P^*f\circ\pi_{P\times_Y Z}^*g)$$

作为从 $P\times_Y Z$ 到 $(P\times_Y Z)\times_W Z$ 的唯一同构（它们都是对 $(\pi_P、\ f\circ g)$的拉回）。不难验证，$(\varepsilon_{f,\ g})_{(P,\ \alpha)}$是 $[X/G][W]$中的一个态射；而$\varepsilon_{f,\ g}$是一个自然变换，这一事实则由拉回的伪函子性得出。这证明了 $[X/G]$ 是一个预叠。□

与拓扑情形类似，我们可以考虑 $[T/G]$ 的特殊情形，其中T是 $\mathcal{C}$的终对象，因此以 T为目标的态射由此唯一确定，且范畴 $[T/G](Y)$与 $\mathcal{B}un_G(Y)$同构。

定义 3.5. 设$\mathcal{C}$是一个具有终对象 T 的范畴，且 G 是$\mathcal{C}$中的一个群对象。预叠 $[T/G]$ 称为分类叠，记作 $\mathcal{B}G$。
注 3.6. 若考虑赋予标准拓扑的范畴$\mathcal{T}op$，则终对象是单点空间，而$\mathcal{T}op$ 上的分类栈就是拓扑群通常意义下的分类栈。

4. Generalized quotient stacks

本节将证明：若范畴$\mathcal{C}$是余完备的，且拉回保持余极限，并且拓扑 τ 是次典范的，那么上一节定义的商预叠就是叠。为证明这一重要结果，我们将说明这些商预叠满足关于典范拓扑的叠所要求的粘合条件。

首先，我们回顾范畴上的典范拓扑的定义（参考文献见[12]）。

定义 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴。范畴 $\mathcal{C}$ 上的典范拓扑 κ 是 $\mathcal{C}$ 上的最细格罗滕迪克拓扑，使得 $\mathcal{C}$ 的每个可表预层都是位点 $(\mathcal{C}\ \kappa)$上的层。若格罗滕迪克拓扑 τ包含于 κ，则称其为次典范的；也就是说，$\mathcal{C}$的每个可表预层都是位点 $(\mathcal{C}\ \tau)$上的层。

典范拓扑中筛的一种非常有用的刻画已在 [9] 中提及，并由 Lester 在 [12]中进行了详细研究。Lester 证明，典范拓扑由所有泛余极限筛构成，其含义见下述定义。

定义 4.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，且 X 是 $\mathcal{C}$的一个对象。若筛 S 在 X 上满足 $X = \mathrm{colim}_S \mathrm{dom}$，则称其为余极限筛，其中 $\mathrm{dom} : \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$是定义域函子。此外，若对于 $\mathcal{C}$中的每个态射 $f\colon Y \to X$，筛 f^*S 在 Y 上都是余极限筛，则称 S 为泛余极限筛。

在 [12], 中，Lester 还在范畴 $\mathcal{C}$ 余完备、具有所有拉回且拥有稳定不交余积这一假设下，给出了典范拓扑的一组基。结果如下：

定理 4.3（[12]）。设 $\mathcal{C}$ 是一个余完备范畴，具有稳定不交余积和所有拉回。那么，族 $\{f_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ 属于 $\kappa(X)$，当且仅当态射

$$\coprod_{i\in I} f_i : \coprod_{i\in I} Y_i \to X$$

是一个泛有效满射（即 $\coprod f_i$ 是其核对的余等化子，并且沿 $\mathcal{C}$ 中任意态射对 $\coprod f_i$ 作基变换所得的 $_{i\in I}$也具有相同性质）。$_{i\in I}$

在陈述本节的主定理之前，我们先回顾一个简单且广为人知的事实，它将在定理的证明中发挥作用：
引理 4.4. 设 $F, G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$为函子，且 $\gamma\colon G \Rightarrow F$为一个自然变换。考虑 $C \in \mathcal{C}$。若 $\left\{F(i) \xrightarrow{f_i} C\right\}_{i\in I}$是 C上的 F的余锥，则 $\left\{G(i) \xrightarrow{f_i\circ\gamma_i} C\right\}_{i\in I}$是 C上的 G 的余锥。

证明。利用 γ的自然性即可直接得出。 □

现在我们可以证明本节的主定理了。

定理 4.5. 设$\mathcal{C}$ 是一个具有拉回和终对象、且拉回保持余极限的余完备范畴。再设 τ 是$\mathcal{C}$上的次典型格洛腾迪克拓扑，且 $X, G \in \mathcal{C}$ 满足 G 是一个群对象。那么，商预层栈 $[X/G]$ 是一个叠。

注 4.6. 注意，任何具有终对象的余完备局部笛卡尔闭范畴都满足该定理的假设。例如，按照 [17]的定义，任何余完备拟拓扑斯都满足该定理的假设。这包括所有余完备初等拓扑斯，也包括其他有趣的情形，例如余完备海廷代数（参见 [6]）以及 Souriau 最初于 [19]中引入的微分拓扑空间范畴。

证明。我们将证明，当$\mathcal{C}$ 上采用典范拓扑κ 时， $[X/G]$是一个叠；由此可知，只要所考虑的拓扑是亚典范的，它就是一个叠，因为相对于固定亚典范拓扑的主丛，同时也是 $(\mathcal{C}\ k)$ 中的主丛。

为了证明 $[X/G]$是一个叠，我们将证明三个粘合条件都成立。

考虑典范拓扑 κ下 Y的一个覆盖族 $\mathcal{U} = \{f_i\colon\ U_i \to Y\}_{i\in I}$。

令 $(P、\ \alpha)$、$(Q、\ \beta) \in [X/G](Y)$，并对每个 $i \in I$，令 $\varphi_i\colon\ (P、\ \alpha)\big|_{U_i} \to (Q、\ \alpha)\big|_{U_i}$为$\mathcal{C}$中的一个态射，使得对每个 $i、\ j \in I$，都有 $\varphi_i\big|_{U_{ij}} = \varphi_j\big|_{U_{ij}}$（其中 U_{ij} 由 f_i和 f_j的拉回给出）。我们要证明存在一个态射 $\eta\colon\ (P、\ \alpha) \to (Q、\ \beta)$，使得对每个 $i \in I$，都有 $\eta\big|_{U_i} = \varphi_i$。

令 K 为如下给出的拉回

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\gamma_1} & \coprod_{i\in I} P \times_Y U_i \\ {\scriptstyle\gamma_2}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \coprod_{i\in I}\pi_P^* f_i} \\ \coprod_{i\in I} P \times_Y U_i & \xrightarrow[\coprod_{i\in I}\pi_P^* f_i]{} & P \end{array}$$

并考虑态射

$$\delta := \coprod_{i\in I}(\pi_Q^* f_i \circ \varphi_i)\colon \coprod_{i\in I} P \times_Y U_i \to Q.$$

此外，我们注意到，由于拉回在$\mathcal{C}$ 中保余极限，且 $\coprod f_i$ 是一个普适有效满射，因此态射 $\coprod \pi_P^* f_i$ 是一个有效满射，所以$_{i\in I}$以下是一个余等化子图表

$$K \underset{\gamma_2}{\overset{\gamma_1}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I} P \times_Y U_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I}\pi_P^* f_i} P.$$

为了利用这个余等化子的泛性质构造一个态射 $\eta\colon\ P \to Q$，我们证明先前定义的态射 $\delta\colon$ $\coprod P \times_Y U_i \to Q$ 将 γ_1 和 $_{i\in I}\gamma_2$ 等化。由于拉回保余极限，我们有 K 与余积同构

$\coprod\coprod\coprod (P \times_Y U_i) \times_P (P \times_Y U_j)$ 因此，为了证明 δ 将 γ_1 和 γ_2等化，只需$^{i\in I j\in I}$证明：对于每个 $i \in I$ 以及每个 $j \in J$，下面的图表是交换的

$$\begin{array}{ccccc} (P \times_Y U_i) \times_P (P \times_Y U_j) & \longrightarrow & P \times_Y U_j & \xrightarrow{\varphi_j} & Q \times_Y U_j \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Q^* f_j} \\ P \times_Y U_i & \xrightarrow[\varphi_i]{} & Q \times_Y U_i & \xrightarrow[\pi_Q^* f_i]{} & Q. \end{array}$$

但这个图表的交换性可由以下事实推出：$\varphi_i\big|_{U_{ij}} = \varphi_j\big|_{U_{ij}}$，并利用 $(P \times_Y U_i) \times_P (P \times_Y U_i)$ 与 $(P \times_Y U_i) \times_{U_i} (U_i \times_Y U_j)$ 同构、$(Q \times_Y U_i) \times_P (P \times_Y U_i)$ 与 $(Q \times_Y U_i) \times_{U_i} (U_i \times_Y U_j)$ 同构。这表明 δ 使 γ_1 和 γ_2 成为余等化子，因此根据余等化子的泛性质，存在唯一的态射 $\eta\colon P \to Q$，使得

$$\begin{array}{ccccc} K & \underset{\gamma_2}{\overset{\gamma_1}{\rightrightarrows}} & \coprod_{i\in I} P \times_Y U_i & \xrightarrow{\coprod_{i\in I} \pi_P^* f_i} & P \\ & & & \searrow^{\delta} & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ & & & & Q. \end{array}$$

Let 现在我们来观察一个一般事实，它将在证明过程中多次用到 f.

注 4.7. 由于范畴 $\mathcal{C}$ 是余完备的，范畴 $[X/G](Y)$ 也是余完备的。事实上，给定 $[X/G](Y)$, 中的一个图表，其余极限可以这样构造：先在范畴 $\mathcal{C}$ 中取给定态射的定义域的余极限，再为其配备一个指向 Y 的态射和一个指向 X 的态射，这两个态射均由范畴 $\mathcal{C}$ 中余极限的泛性质诱导。

根据前面的备注，我们知道 η 是从 (P, α) 到 (Q, β) 的 G-丛态射。此外，等式 $\eta\big|_{U_i} = \varphi_i$ 成立，因为该图表

$$\begin{array}{ccc} P \times_Y U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & Q \times_Y U_i \\ & {\scriptstyle f_i^* \pi_P} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle f_i^* \pi_Q} & \\ & U_i & \end{array}$$

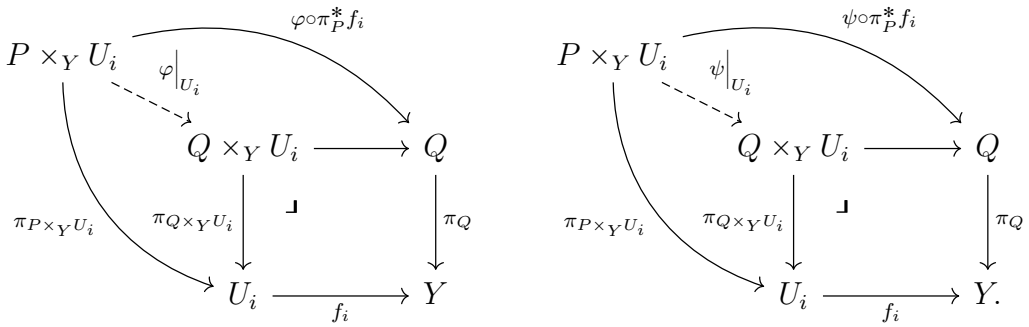
是交换的，因为 φ_i 是 U_i 上的 G-丛态射，并且该图表

$$\begin{array}{ccc} P \times_Y U_i & \xrightarrow{\pi_P^* f_i} & P \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ Q \times_Y U_i & \xrightarrow[\pi_P^* f_i]{} & Q \end{array}$$

根据 γ 和 η 的定义交换。
由此完成第一个粘合条件成立的证明。

现在设 $(P, \alpha), (Q, \beta) \in [X/G](Y)$，并设 $\varphi, \psi\colon (P, \alpha) \to (Q, \beta)$ 是态射，且对每个 $i \in I$ $\varphi\big|_{U_i} = \psi\big|_{U_i}$ 都成立。我们想证明，在这些假设下，我们

有 $\varphi = \psi$。根据定义， φ 和 ψ 的限制适配于以下交换图表



由于根据假设 $\varphi\big|_{U_i} = \psi\big|_{U_i}$，前面图表的交换性意味着，对于每个 $i \in I$

$$\varphi \circ \pi_P^* f_i = \psi \circ \pi_P^* f_i.$$

但由此我们可以得出 $\varphi = \psi$，因为态射 $\{\pi_P^* f_i\}_{i\in I}$ 是联合满态射，这是因为态射 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是联合正则满态射。
这表明第二个粘合条件成立。

接下来只需证明每个下降数据都是有效的，这是整个证明中最棘手的部分。为了证明这一最后条件，我们将使用筛来代替覆盖族，因为这样可以使证明稍微简单一些。

给定 Y 上的一个筛 S，对于 $[X/G]$ 的 S 上的下降数据，是指对 S 中的每个态射 $Z \xrightarrow{f} Y$，指定一个对象 $(W_f、\ \alpha_f) \in [X/G](Z)$，并且对每一对可复合态射

$$Z' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$$

带有 $f \in S$ 的一个同构

$$\varphi^{f,g} \colon g^*((W_f, \alpha_f)) \xrightarrow{\simeq} (W_{f\circ g}, \alpha_{f\circ g})$$

使得，给定态射

$$Z'' \xrightarrow{h} Z' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$$

带有 $f \in S$，以下图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} h^*(g^*((W_f, \alpha_f)) & \xrightarrow{h^*\varphi^{f,g}} & h^*((W_{f\circ g}, \alpha_{f\circ g}) \\ \wr\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{f\circ g,h}} \\ (g\circ h)^*((W_f, \alpha_f)) & \xrightarrow{\varphi^{f,g\circ h}} & (W_{f\circ g\circ h}, \alpha_{f\circ g\circ h}), \end{array}$$

其中，左侧的同构由 $[X/G]$ 是一个伪函子这一事实给出（根据命题 ?? 的证明中引入的记号，它是 $\varepsilon_{g,\ h}$ 的逆）。

如果存在一个对象 $(W、\ \alpha) \in [X/G](Y)$，并且对每个态射 $Z \xrightarrow{f} Y \in S$ 都存在一个同构，则该下降数据是有效的

$$\psi^f \colon f^*((W, \alpha)) \xrightarrow{\simeq} W_f$$

使得，给定态射

$$Z' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$$

对于 $f \in S$，下图交换

$$\begin{array}{ccc} g^*(f^*((W,\alpha)) & \xrightarrow{g^*\psi^f} & g^*((W_f,\alpha_f) \\ \wr\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{f,g}} \\ (f\circ g)^*((W,\alpha)) & \xrightarrow{\psi^{f\circ g}} & (W_{f\circ g},\alpha_{f\circ g}). \end{array}$$

记号。为方便起见，我们有时会将 $[X/G](Z)$ 中的态射与 $\mathcal{C}$ 中相应的态射等同起来，因此，例如，我们会将态射 ${}_{\varphi^{f,g}}$ 写作 $g^*W_f \xrightarrow{\varphi^f,{}^g} W_{f\circ g}$。

首先，我们要将下降数据给出的对应关系扩展为一个函子。由于筛 S 中的每个态射，都会根据其定义域被映射到不同丛范畴中的一个对象，我们需要将所有这些丛视为同一丛范畴中的对象。为此，我们可以将给定的丛与 S 中的起始态射作后复合，从而得到 $[X/G](Y)$ 的一个对象。

现在，我们要构造一个函子

$$\Lambda\colon S \to [X/G](Y)$$

因此，我们需要定义 S 中态射的作用。给定 S 中的两个对象 $Z \xrightarrow{f} Y$ 和 $P \xrightarrow{t} Y$，从 f 到 t 的态射就是 $\mathcal{C}$ 在 Y 上的切片范畴中的一个态射，也就是说，它是 $\mathcal{C}$ 中满足下列三角形交换条件的一个态射 $Z \xrightarrow{k} P$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{k} & P \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle t} & \\ & Y. & \end{array}$$

注意到 由于 $f = t\circ k$，我们将 $\Lambda(k)\colon (W_f,\alpha_f) \to (W_t,\alpha_t)$ 定义为如下复合态射

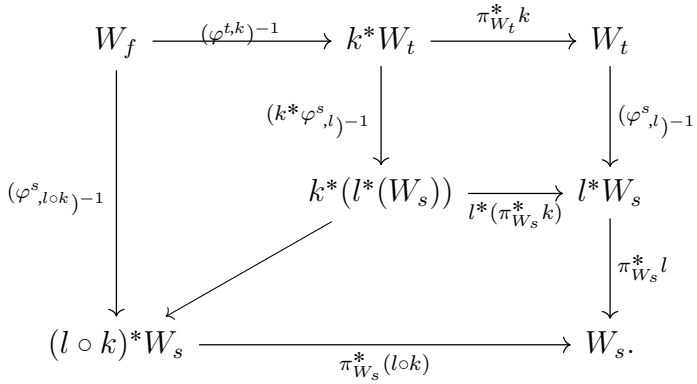
$$W_f \xrightarrow{(\varphi^{k,t})^{-1}} k^*W_t \xrightarrow{\pi^*_{W_t}k} W_t$$

并且我们观察到，这是 $[X/G](Y)$ 中的一个态射，因为下列图表可交换

$$\begin{array}{ccccc} W_f & \xrightarrow{(\varphi^{k,t})^{-1}} & k^*W_t & \xrightarrow{\pi^*_{W_t}k} & W_t \\ {\scriptstyle \pi_{W_f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k^*\pi_{W_t}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{W_t}} \\ Z & \xrightarrow{\mathrm{id}_Z} & Z & \xrightarrow{k} & P \\ & {\scriptstyle f}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle t} & \\ & & Y. & & \end{array}$$

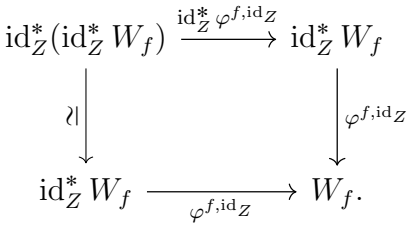
现在我们证明，如此定义的 Λ 是一个函子。

设 $Z \xrightarrow{f} Y$、$P \xrightarrow{t} Y$ 和 $Q \xrightarrow{s} Y$ 是 S 的对象，设 $Z \xrightarrow{k} P$ 和 $P \xrightarrow{l} Q$ 是它们之间的态射。于是，下图表明 $\Lambda(l \circ k) = \Lambda(l) \circ \Lambda(k)$:

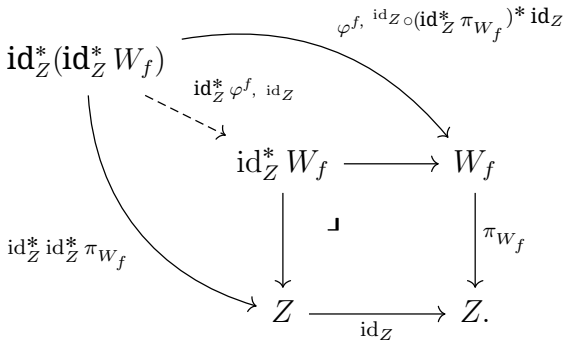


此外，若将 $Z \xrightarrow{f} Y \in S$ 和 id_Z 视为 S 中从 f 到其自身的态射，为了证明 $\Lambda(\mathrm{id}_Z) = \mathrm{id}_{\Lambda(Z)}$，我们需要证明 $\varphi^{\mathrm{id}_Z,\ f} = \pi^*_{W_f}\mathrm{id}_Z$。

根据下降数据的相容条件，我们有如下交换图表



另一方面,根据定义，态射 $\mathrm{id}_Z^*\,\varphi^{f,\ \mathrm{id}_Z}$ 满足如下图表



C结合第一个图表和第二个图表的上方三角形，我们得到 n

$$\varphi^{\mathrm{id}_Z,f} = \pi^*_{W_f}\mathrm{id}_Z$$

这就证明了 Λ 是一个函子。

现在我们可以定义一对 $(W、\ \alpha)$，用以证明下降数据是有效的。我们定义

$$W\colon = \operatorname{colim}\Lambda$$

并且对每个 $f \in S$，我们称 $\sigma_f\colon W_f \to W$ 为余锥态射。考虑对每个 $f \in S$ 的态射 $\alpha_f\colon W_f \to X$，我们得到一个余锥，因此可以利用余极限的泛性质诱导出态射 $\alpha\colon W \to X$，它是满足以下条件的唯一态射:

对每个 $f \in S$，下列三角形交换

$$\begin{array}{ccc} W_f & \xrightarrow{\sigma_f} & W \\ & {\scriptstyle \alpha_f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \alpha} & \\ & X. & \end{array}$$

定义了这一对 (W, α)之后，证明的下一步是为每个 $(W$ 定义一个同构

$$\psi^f \colon f^*W \xrightarrow{\simeq} W_f$$

对每个 $f \in S$。

首先，我们注意到，在假设拉回保持$\mathcal{C}$中的余极限的条件下，有

$$f^*W = \operatorname{colim}(f^* \circ \Lambda)$$

其泛余锥由 $f^*\sigma_t$ 给出，对每个 $t \in S$ 都成立。这使我们能够利用余极限的泛性质导出同构 ψ^f，对每个 $f \in S$ 都成立。为此，我们需要定义一个余锥 $\left\{ f^*W_t \xrightarrow{\Sigma_t} W_f \right\}_{t \in S}$。

我们注意到，W_f 是 $(f^*t)^*W_f$ 的余极限，其中 t 在 S 中变化，其泛余锥由以下给出

$$(f^*t)^*W_f \xrightarrow{\pi^*_{W_f}(f^*t)} W_f$$

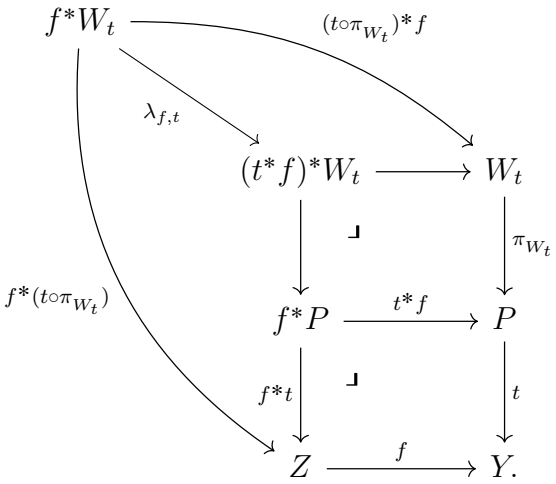
对每个 $t \in S$。因此，我们可以定义 $\Sigma_t \colon \ f^*W_t \to W_f$为

$$f^*W_t \xrightarrow{\theta_t} (f^*t)^*W_f \xrightarrow{\pi^*_{W_f}(f^*t)} W_f,$$

其中，θ_t 定义为以下复合态射:

$$f^*W_t \xrightarrow{\lambda_{f,t}} (t^*f)^*(W_t) \xrightarrow{\varphi^{t,t^*f}} W_{t \circ t^*f} \xrightarrow{(\varphi^{f,f^*t})^{-1}} (f^*t)^*(W_f),$$

其中，$\lambda_{f,\ t}$ 是由拉回 $(t^*f)^*W_t$ 的泛性质给出的同构，如下图表所示



S由于我们想要应用引理 4.4，因此需要证明存在一个函子

$$K \colon S \to [X/G](Y)$$

以及一个自然变换

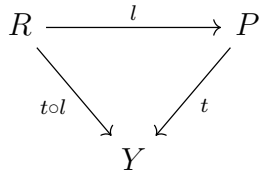
$$\Theta\colon \Lambda \circ f^* \Rightarrow K$$

其与 $t \in S$ 相关联的分量对于每个 $t \in S$ 都是 θ_t。

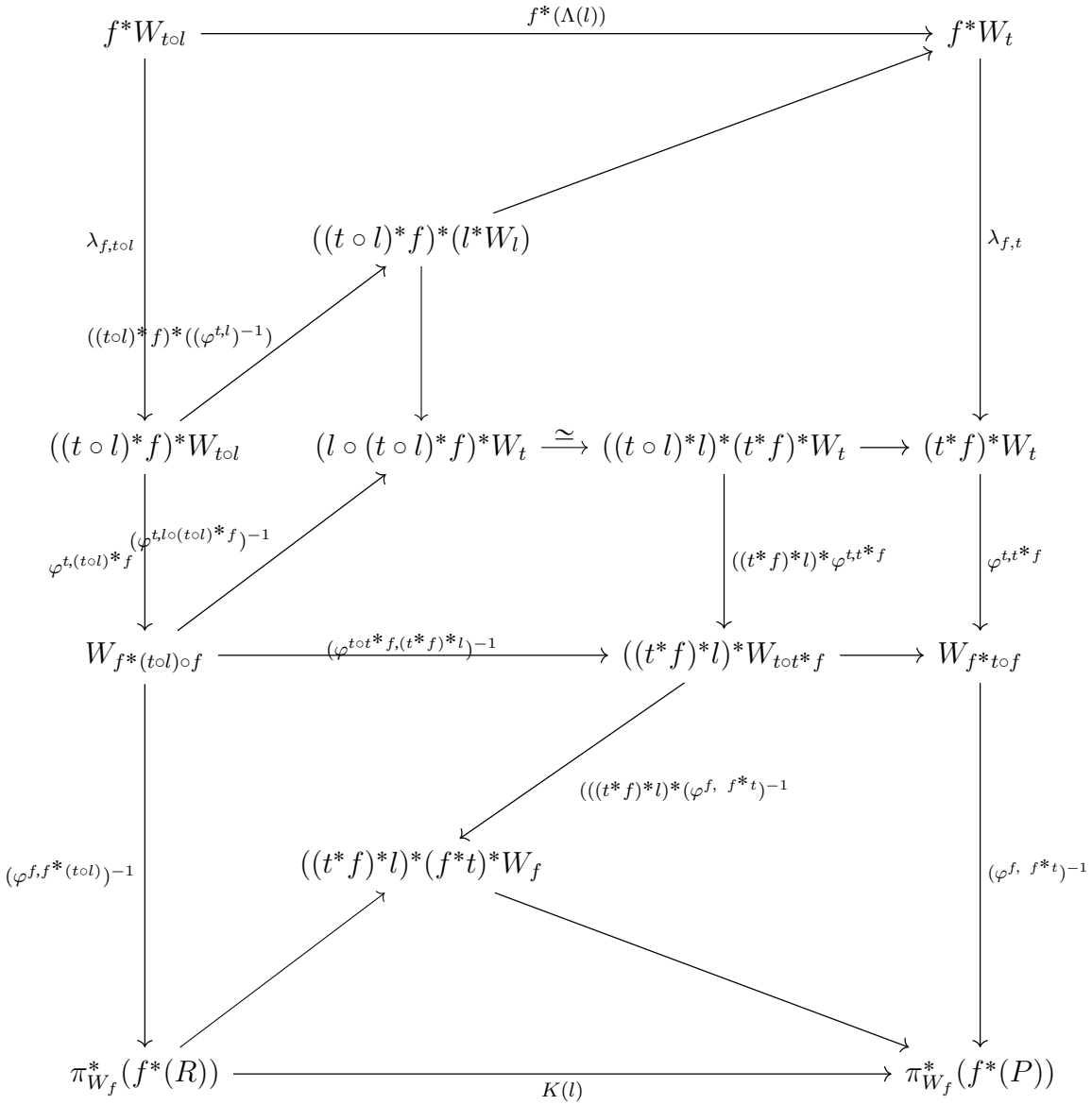
我们可以将所需的函子定义为

$$K = (\pi_{W_f})^* \circ f^* \circ \mathrm{dom}$$

并且，给定态射

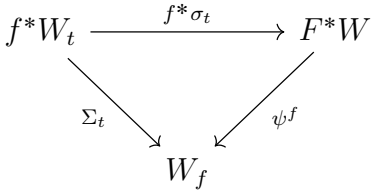


在 S 中，下方图表表明，对于每个 $t \in S$，$\Lambda \circ f^* \Rightarrow K$ 的分量 θ_t 构成一个自然变换 Θ。



注 4.8. 用于说明前一个图表可交换的大多数内部图表都是下降数据的相容图表。其余图表则由相关态射的显式定义给出。

根据引理 4.4，我们得到 $\left\{f^*W_t \xrightarrow{\Sigma_t} W_f\right\}_{t\in S}$ 是 W_f 的余锥，因此，利用余极限的泛性质，我们可以定义 ψ^f： $f^*W \to W_f$ 它是满足下图交换的唯一态射

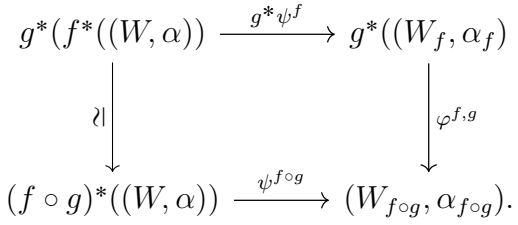


对于每个 $t \in S$。此外，由于对于每个 $t \in S$， θ_t 都是同构，因此 ψ^f 是同构。

要完成证明，只需证明给定态射

$$Z' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$$

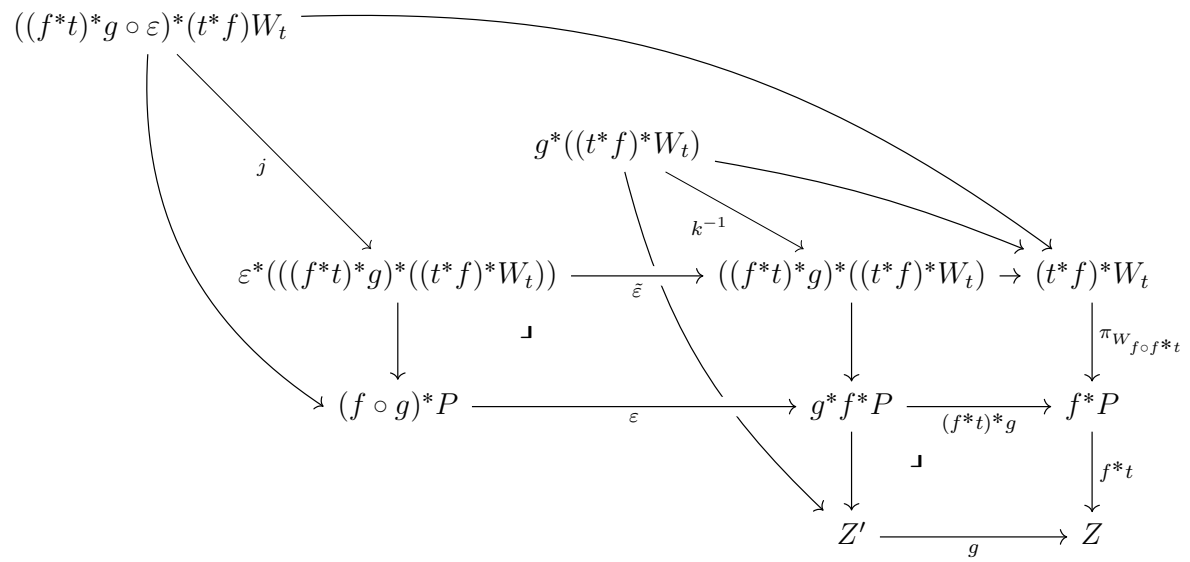
满足 $f \in S$ 时，下图交换

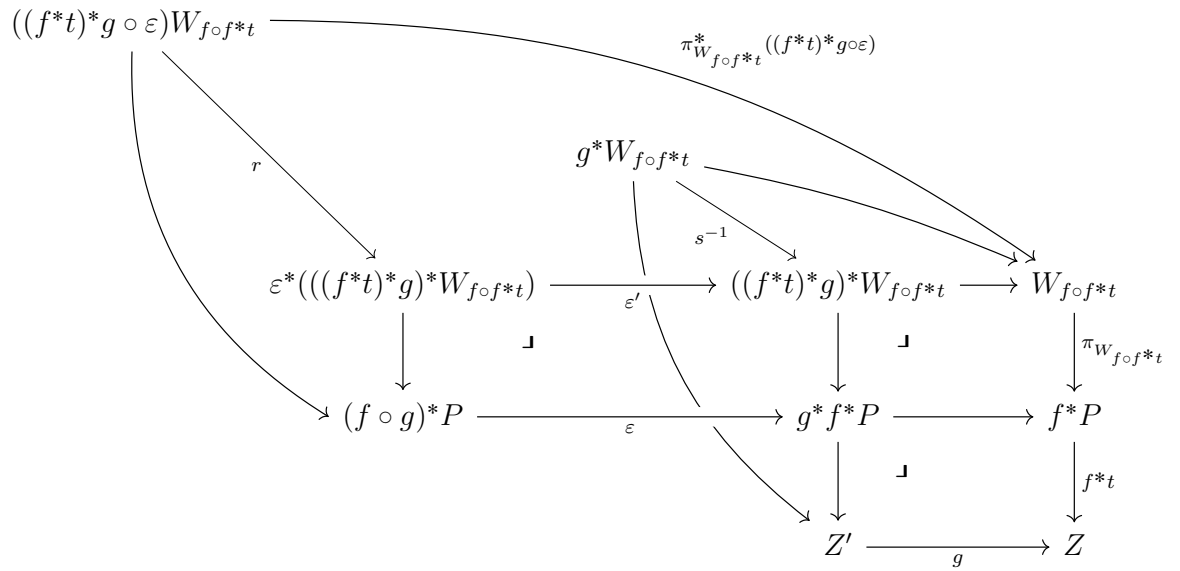


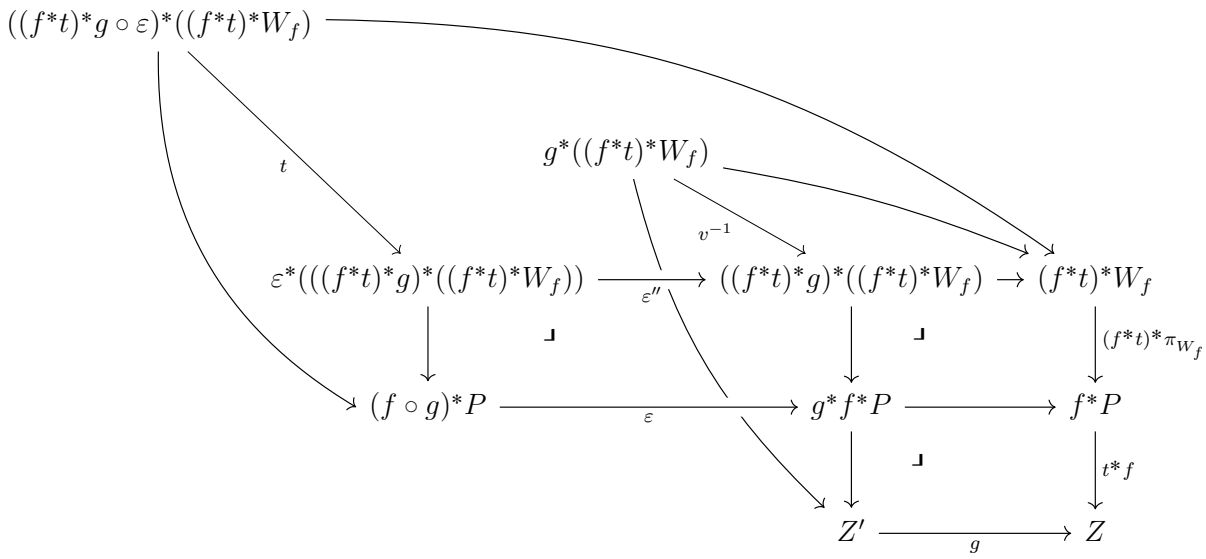
由于 $g^*(f^*(W))$ 是一个余极限，其泛余锥由下式给出

$$\left\{g(^*(f^*(W_t)) \xrightarrow{g^*f^*\sigma_t} f^*(f^*(W))\right\}_{t\in S},$$

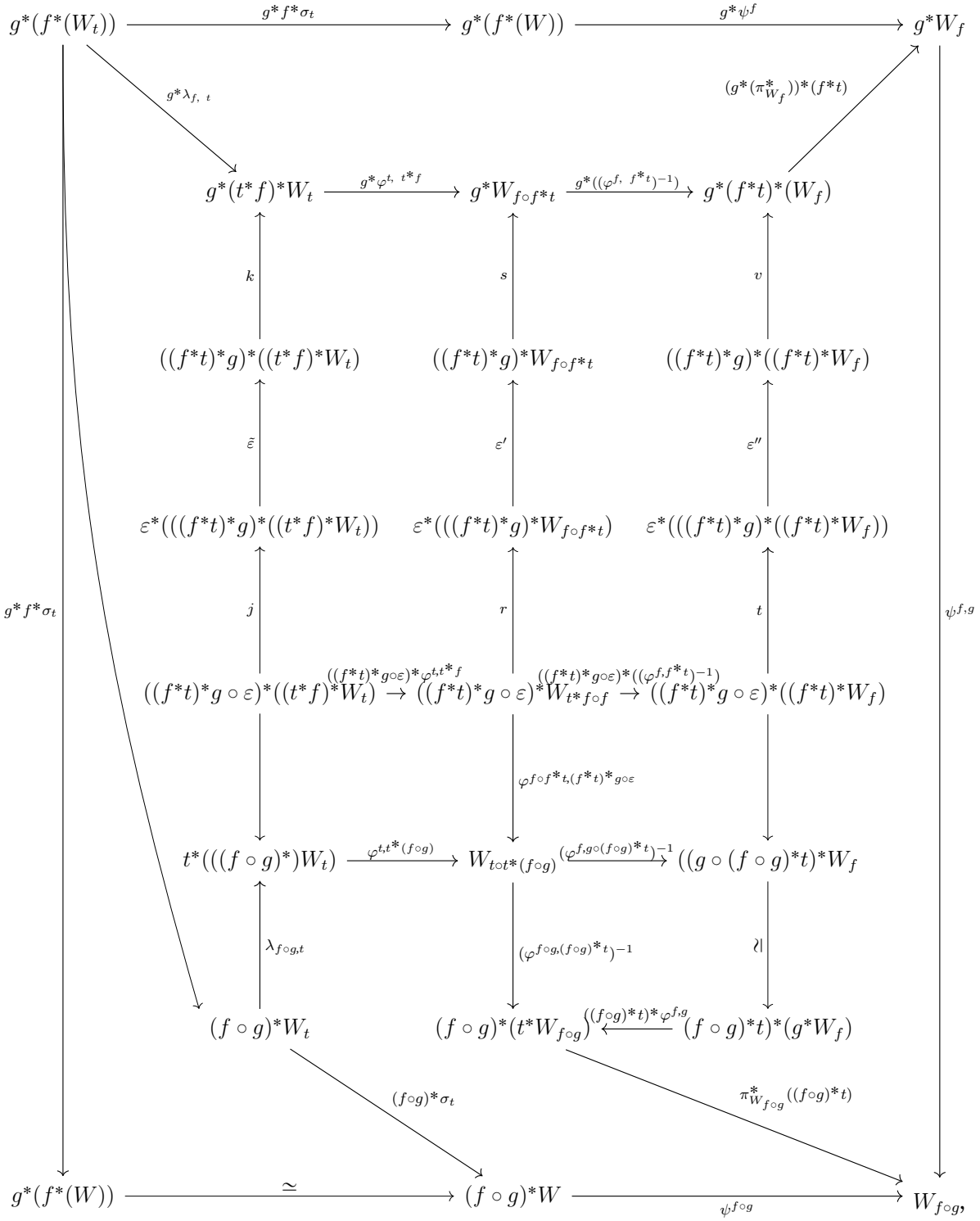
只需证明图表中的两条路径在与每个 $t \in S$ 复合后都相等。为此，我们需要考虑由拉回的泛性质给出、并按下列图表定义的一些同构：


$((f^*t)^*g \circ \varepsilon)^*(t^*f)W_t$
j
$g^*((t^*f)^*W_t)$
k^{-1}
$\varepsilon^*(((f^*t)^*g)^*((t^*f)^*W_t))$
$\tilde{\varepsilon}$
$((f^*t)^*g)^*((t^*f)^*W_t)$
$(t^*f)^*W_t$
$\pi_{W_{f\circ f^*t}}$
$(f \circ g)^*P$
ε
g^*f^*P
$(f^*t)^*g$
f^*P
f^*t
Z'
g
Z


$((f^*t)^*g \circ \varepsilon)W_{f\circ f^*t}$
$\pi^*_{W_{f\circ f^*t}}((f^*t)^*g\circ\varepsilon)$
r
$g^*W_{f\circ f^*t}$
s^{-1}
$\varepsilon^*(((f^*t)^*g)^*W_{f\circ f^*t})$
ε'
$((f^*t)^*g)^*W_{f\circ f^*t}$
$W_{f\circ f^*t}$
$\pi_{W_{f\circ f^*t}}$
$(f \circ g)^*P$
ε
g^*f^*P
f^*P
f^*t
Z'
g
Z


$((f^*t)^*g \circ \varepsilon)^*((f^*t)^*W_f)$
t
$g^*((f^*t)^*W_f)$
v^{-1}
$\varepsilon^*(((f^*t)^*g)^*((f^*t)^*W_f))$
ε''
$((f^*t)^*g)^*((f^*t)^*W_f)$
$(f^*t)^*W_f$
$(f^*t)^*\pi_{W_f}$
$(f \circ g)^*P$
ε
g^*f^*P
f^*P
t^*f
Z'
g
Z

那么，下面的图表展示了我们需要证明的内容：



其中所有内部图表要么由下降数据的相容条件给出，要么可以直接利用所涉及拉回的泛性质以及各种态射的定义证明其交换。□

致谢。我谨感谢审稿人提出的宝贵意见，以及关于本文与现有文献之间联系的建议。此外，我谨感谢我的导师 Frank Neumann 提供的宝贵建议和支持。

最后，我想感谢 Luca Mesiti 与我讨论有关下降数据概念的筛方法。

References

[1] B. Eckmann 和 P. J. Hilton。《一般范畴中的群状结构》。I. 乘法与余乘法。《数学年刊》，145:227–255，1962。[2] B. Eckmann 和 P. J. Hilton。《一般范畴中的群状结构》。II：等化子、极限、长度。III：原始范畴。《数学年刊》，151:150–186，1963。[3]A. Grothendieck。《下降技术与代数几何中的存在定理》。I. 一般理论。通过忠实平坦态射下降。载于《布尔巴基讨论班：1958/59—1959/60 年》，报告 169–204，布尔巴基讨论班第 5 卷。法国数学会，1960。报告：190。[4] A. Grothendieck。《代数几何中的构造技术与存在定理》III：商预概形。载于《布尔巴基讨论班：1960/61 年》，报告 205–222，布尔巴基讨论班第 6 卷。法国数学会，1961。报告：212。[5] J. Heinloth。《可微叠笔记》。载于哥廷根乔治·奥古斯特大学数学研究所：2004/2005 年冬季学期研讨会，第 1–32 页。哥廷根：哥廷根大学出版社，2005。[6] A. Heyting。《直觉主义逻辑的形式规则》。I、II、III。《普鲁士科学院会议报告》，物理—数学类，1930:42–56、57–71、158–169，1930。[7] D. Husemoller。《纤维丛》。施普林格纽约出版社，第 [2版，1975。[8] P. Ion 和 J. Serre。《伽罗瓦上同调》。施普林格数学专著。施普林格柏林海德堡出版社，2001。[9] P. T. Johnstone。《大象素描》。拓扑斯理论纲要。II，牛津逻辑指南第 44 卷。牛津：克拉伦登出版社，2002。[10] A. Kock。《一般范畴中的纤维丛》。《纯粹与应用代数杂志》，56(3):233–245，1989。[11] G. Laumon 和 L. Moret-Bailly。《代数叠》，数学及其边界成果第 39 卷，第 3 辑。柏林：施普林格，2000。[12]C. Lester。《典范格罗滕迪克拓扑及其同伦类比》。https://arxiv.org/abs/1909.03188，2019。[13] J. W. Milnor 和 J. D. Stasheff。《特征类》。《数学年刊研究丛书》第 76 号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1974。[14] S. A. Mitchell。《主丛与分类空间笔记》。2006。[15] F. Neumann。《代数叠与向量丛模空间》。IMPA讲义，2011。[16] T. Nikolaus、U. Schreiber 和 D. Stevenson。《主无穷丛：一般理论》。《同伦及相关结构杂志》，10:749–801，2015 年 12 月。[17] J. Penon。《关于拟拓扑斯》。《范畴拓扑与微分几何笔记》，18:181–218，1977。[18] H. Sati 和 U. Schreiber。《等变主无穷丛》，2022。[19] J. M. Souriau。《微分群》。载于《数学物理中的微分几何方法》，普罗旺斯地区艾克斯和萨拉曼卡会议论文集，1979 年，《数学讲义》836，91–128（1980），1980。[20] N. Steenrod。《纤维丛的拓扑学》（PMS-14）。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1951。

School of Computing and Mathematical Sciences, University of Leicester电子邮箱地址：ec363@leicester.ac.uk