arXiv:2302.07855v1 [math.CT] 15 Feb 2023

∞-范畴论能教给本科生吗?

EMILY RIEHL

摘要。21世纪初，将普通范畴论扩展到∞-范畴，是一项由 Joyal 和 Lurie 开创、许多人共同参与的卓越成就。遗憾的是，为解决这些结果内在的无穷同伦相干性问题所需的技术论证，使得非专家难以学习这套理论。本文概述了两个旨在缩小∞-范畴论与普通范畴论之间差距的研究计划。第一个计划利用∞-范畴与范畴作为对象所在的范畴之间的相似性，为标准范畴论定理提供“形式化”证明。第二个计划则更具推测性，探索以与同伦类型论密切相关的新“单值”基础来研究∞-范畴。

目录

1. 路径的代数 1
2. 数学中的∞-范畴 3
3. ∞-范畴的形式理论 5
4. ∞-范畴的综合理论 11
参考文献 14

1. 路径代数

通过考察一个性质良好的拓扑空间 X 的路径，也就是从标准单位区间 $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ 到 X的连续函数，来探究这个空间是很自然的。但X中的路径构成了什么结构呢?

首先，路径构成一个有向图的边，其顶点是X中的点：路径$p\colon I \to X$ 定义了一个从点$p(0)$到点$p(1)$的态射。此外，这个图是自反的；每个点$x \in X$ 处的常值路径 refl_x 定义了一个指定的自箭头。

能否为这个自反有向图赋予范畴结构？为此，自然的做法是将从x 到y 的路径p 与从y 到z 的路径q 视为连续映射，将它们拼接起来，也就是连接这两条路径，然后通过同胚$I \cong I \cup_{1=0} I$ 重新参数化，使每条路径都以两倍速度遍历：

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend right, "p*q"'] & I \cup_{1=0} I \arrow[r, "p\cup q"] & X \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

日期： 16年2月。本文为作者发表于《美国数学学会会刊》一文的版本，并扩充了参考文献列表。Tim Campion、Maru Sarazola、Mike Shulman、Dominic Verity 和 Jonathan Weinberger 对本文的早期草稿提出了有益建议；John Bourke 则建议将绝对提升图重新命名为相对伴随。根据 Steven Sam 和三位匿名审稿人的意见，本文又作了进一步改进。作者还感谢美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-1652600 和 DMS-2204304、美国陆军研究办公室通过 MURI 资助项目 W911NF-20-1-0082、美国空军科学研究办公室通过项目编号 FA9550-21-1-0009，以及西蒙斯基金会奖学金提供的支持。

但是，复合运算 $*$ 不满足结合律，也不满足单位律。一般而言，给定一条从z到w的路径r，复合路径$(p*q)*r$和$p*(q*r)$并不相等：虽然它们在X中的像相同，但参数化方式不同。不过，它们是基点同伦的，也就是说，存在连续函数$h\colon I\times I\to X$，使得

$$h(-,0):=(p*q)*r,\quad h(-,1):=p*(q*r),\quad h(0,-):=\mathrm{refl}_x,\quad \text{and}\quad h(1,-):=\mathrm{refl}_w,$$

我们可以用（$p*q$）$*r\simeq p*$（$q*r$）来概括这种情形。类似地，路径 $p*\mathrm{refl}_y\simeq\mathrm{refl}_x*p\simeq p$彼此都基点同伦，但并不相等（除非 p 是常值路径）。

路径在基点同伦意义下也可逆：对于任意从x 到y的路径 $p\colon I\to X$，其反向道路$p^{-1}\colon I\to X$由与翻转自同构$I\cong I$复合定义，构成一个在基点同伦意义下的逆：$p*p^{-1}\simeq\mathrm{refl}_x$以及$p^{-1}*p\simeq\mathrm{refl}_y$。这些观察启发了下面的定义：

定义 1.2. 对于空间X，基本群胚 π_1X 是如下范畴：

- 对象是X 中的点，并且
- 态射是X中路径的基点同伦类

其中复合由拼接定义，恒等态射由常值路径定义，逆由反向路径定义。

空间 X 的基本群胚回答了一个与最初提出的问题略有不同的问题，它描述的是X中基点同伦类的路径所形成的结构。路径本身构成了某种弱群胚，其中的复合并非唯一。事实上，给定从x 到 y 的路径p，以及从y 到z的路径q，X 中的复合由任意一条路径s 表示，使得存在基点同伦h，见证$p*q\simeq s$。这里，基点同伦h定义了一个从实心 2-单形到X 的连续函数，其沿边界三角形的限制是由三条路径粘合而成的映射：

$$\begin{array}{ccc}\partial\Delta^2 & \xrightarrow{(p,q,s)} & X\\ \downarrow & \nearrow_{h} & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

尽管多值复合运算通常性质不佳，但这里的运算具有某种同伦唯一性：两个此类复合的见证同伦可以通过将它们粘合起来——借助（1.1）这一构造的高维类比——定义一个同伦 $s\simeq p*q\simeq t$。这表明，由连接x 和 y 和 z 的路径所形成的三角形的填充见证同伦，或许可以有益地视为复合数据的一部分。因此，p 和 q 的复合路径空间定义如下：

定义 1.3。设空间 X 中有可复合路径 p 和 q，则 p 和q 的复合路径空间是连续映射 h 的子空间 $\mathrm{Comp}(p,q)\subset\mathrm{Map}(\Delta^2,X)$，其中映射 $h\colon\ \Delta^2\to X$ 在边界角上的限制为 $p\cup q$：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Comp}(p,q) & \hookrightarrow & \mathrm{Map}(\Delta^2,X)\\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}}\\ * & \xrightarrow{p\cup q} & \mathrm{Map}(I\cup_{1=0}I,X)\end{array}\tag{1.4}$$

以下观察可以加强路径复合的同伦唯一性：

定理 1。5。 对于空间 X 中任意可复合路径 p 和 q，复合路径空间 $\mathrm{Comp}(p,q)$ 是可缩的。

那么，X 中的路径构成什么呢？我们已经看到，它们构成一个弱群胚，其复合律虽是多值的，但在同伦意义下是唯一的。事实上，这个弱范畴是一个无限维范畴。平行路径 s 和 t 之间的基点同伦 $h : I \times I \to X$ 本身也可以视为路径 $h : I \to \mathrm{Map}(I, X)$，它连接空间 Map(I , X) 中的点 s 和 t；定理 1.5 同样适用于此，而这些观察还可以迭代推广到更高维的同伦。空间 X 中的点、路径和高阶路径汇集成一个弱无限维范畴——在其中，各层级路径的弱复合与恒等相互作用[1]——且所有态射都是弱可逆的。这种结构称为一个 ∞-群胚 [L3]。

同伦假设。 由 路径构成的基本 ∞-群胚 $\pi_\infty X$ ， X 包含了空间所有高阶同伦群的数据，这些信息称为该空间的 同伦类型 。在一封写给 Quillen [G], 的著名信件中，Grothendieck 阐述了他的 同伦假设，提出基本 ∞-群胚构造定义了同伦类型与 ∞-群胚之间的等价。Grothendieck 的设想是，这一结果应当能针对当时正在发展的各种 ∞-群胚模型得到证明，不过也有人用这一论题来 定义一个 ∞-群胚为一种同伦类型。

不过，将同伦假设朴素地解释为同伦类型集合与 ∞-群胚集合之间存在双射，甚至解释为 空间的同伦范畴[2] 与 ∞-群胚的同伦范畴之间存在等价，仍有些令人不满足。令人失望之处在于，空间和 ∞-群胚最自然的身份都是弱无限维范畴中的对象，其中标准态射还需辅以高维弱可逆态射。因此，对同伦假设更有力的表述是：空间的 ∞-范畴与 ∞-群胚的范畴等价，[3] 所以现在我们必须说明什么是∞-范畴。

2。数学中的 ∞-范畴

在过去几十年里， ∞-范畴——具有弱无限维结构，且一维以上的态射弱可逆的范畴——已逐渐进入数学的某些领域。在导出代数几何中，环的导出范畴如今被理解为链复形 1-范畴的商范畴，而一种称为“稳定性”的 ∞-范畴性质，则解释了导出范畴所具有的三角结构 ∞ [L6, §1.1]。在数学物理中，Atiyah 的拓扑量子场论已被“向上扩展”，从而定义了不同 ∞-范畴之间的函子 [F]。[4] ∞-范畴也出现在表示论的朗兰兹纲领 [FS] 和辛几何 [NT] 等领域。抽象同伦论中的 Quillen 模范畴[Q] 如今被理解为 ∞-范畴的表示。

普通范畴“为数学理论勾勒出一个模板”，其中对象充当“名词”，态射充当“动词”。这一比喻由 Mazur 提出 [M]。随着对象

[1]众所周知，Gordon、Power 和 Street 对弱三维范畴的定义，光是陈述就要占六页。[2]同伦类型可以理解为空间的同伦范畴中的对象同构类。空间的同伦范畴是将空间与连续函数构成的范畴对弱同伦等价进行局部化后得到的范畴；弱同伦等价是指那些在所有同伦群上都诱导出同构的函数。[3]事实上，Quillen 早已针对 Kan 复形模型证明了这一结果的一个版本，适用于 ∞-群胚 [Q],但当时人们对此还没有如此清晰的认识。[4]Lurie 所说的“完全扩展”拓扑量子场论也会“向下扩展”，因而可以将其理解为对象之间的函子，这些对象是 (∞, n)-范畴，其中指标余边界直至维度 n （含该维度）都具有不可逆态射。这里，我们将“∞-范畴”一词专用于“$(\infty, 1)$-范畴”；这类范畴只有在底层维度 [L5]上才有不可逆态射。

数学家研究的问题日益复杂，可能就需要一种更强大的语言学模板，才能充分描述他们的自然栖息地——其中包含形容词、副词、代词、介词、连词、感叹词等等——由此引出了 ∞-范畴的概念。与普通1-范畴一样， ∞-范畴也有对象和态射，不过此时它们被视为“1维”变换。额外的语言色彩来自态射之间的高维可逆态射——例如链同伦或微分同胚——以及这些态射之间的更高阶态射，并一直如此延续下去。

这些领域的研究者可能会如何学习这项关于 ∞-范畴的新技术？而 ∞-范畴论最终又该如何提炼，才能成为我们能够合理地教授给未来高年级本科生的内容？

文献中的一些趣闻。Boardman 和 Vogt 最初引入了 ∞-范畴，用来描述同伦相容图表之间的同伦相容自然变换的复合结构 [BV]。Joyal 首先提出“范畴论中的大多数概念和结果都可以推广到 [∞-范畴]”，并率先发展了标准范畴概念的 ∞-范畴类比[J1, J2]。随后，Lurie 发展了 ∞-范畴论的多个方面，这些内容是他撰写导出代数几何论文所需的 [L1, L2]。他的著作[L4, L6] 和在线教材 Kerodon [L7] 是了解这项技术的主要参考资料，而 Cisinski、Groth、Hinich、Rezk 等人撰写的著作则为这一领域提供了其他入门途径[C, Gr, H, R3]。

如果进一步深入阅读关于 ∞-范畴的文献，很快就会发现一些有趣的现象：

(i) 尤其是在介绍这一主题的演讲或系列讲座中， ∞-范畴的定义往往会被延后；即使给出了定义，这些定义也未必一致。

这些彼此竞争的定义被称为 模型 ，用于描述 ∞-范畴。它们是布尔巴基风格的数学结构，以集合和函数为基础定义，用来表示带有弱复合律的无限维范畴，其中所有维数高于一的态射都是弱可逆的。按出现顺序，这些模型包括单纯范畴、拟范畴、相对范畴、*Segal* 范畴、完备 *Segal* 空间以及 *1*-复形集，每种模型都伴有一系列自然出现的例子 [A、Be]。

(ii) 为定义 ∞-范畴的关键概念并证明相关基本结果，人们已经投入了大量工作；但有时，这些工作后来会从另一种模型出发重新开展。

例如， [KV] 开篇写道：

> 近年来， ∞-范畴，或更正式地说，（∞，1）-范畴，出现在数学的各个领域。例如，它们已成为几何朗兰兹问题中的必要组成部分。在其著作 [L4、L6] Lurie 以拟范畴的语言发展了∞-范畴理论，并将普通范畴论的许多结果推广到了这一框架。

在其著作[R1] 中，Rezk 引入了另一种 ∞-范畴模型，并将其称为完备 Segal 空间。这一模型具有某些优势。例如，它可以推广到（∞，*n*）-范畴（见 [R2]）。

> 将普通范畴论的结果推广到完备 Segal 空间的框架中是很自然的。在本文中，我们对 Yoneda 引理进行了这一推广。

（iii）或者，作者完全不选择任何模型，而是以“与模型无关”的方式开展工作。

其中一个例子出现在前驱 [L1] 到 [L4]中，它完全避免了选择一个 ∞-范畴模型：

我们将在 §1 开始，对 ∞-范畴理论作非正式回顾。这一主题的基础有许多不同的处理方式，各有其独特的优缺点。这里我们不打算特别选取其中某一种基础，而是尝试解释其中涉及的思想，以及如何运用这些思想。我们希望这能让更多读者读懂本文；而专家则可以根据自己偏好的框架，补全我们论述中省略的细节。

要为一个 ∞-范畴给出统一定义，根本障碍在于，我们传统的、以集合为基础的数学基础并不真正适合用于推理 ∞-范畴：在 ∞-范畴数据中，集合并不显眼，尤其是当 ∞-范畴只能在等价意义下得到良好定义时——涉及不同模型时，情况必然如此。若只考虑到等价，ff所涉及的 ∞-范畴与普通范畴一样，并没有定义良好的对象集。从本质上说， ∞-范畴是将所有集合都替换为 1-群胚的 ∞-范畴。范畴有元素集，而 ∞-范畴有元素的 ∞-群胚；范畴有态射的同态集，而 ∞-范畴有群胚化的 ∞映射空间。[5] 将有向图变为范畴的公理，是用集合论语言表达的：范畴具有一个复合函数，并满足用带等号的一阶逻辑表达的公理。类比而言， ∞-范畴中的复合可以理解为 ∞-群胚之间的态射，但这类态射不再定义函数，因为同伦类型没有作为底层的点集。[6] 这就是为什么 ∞-范畴没有典范模型。

重新构想 ∞-范畴论的基础。尽管存在这些微妙之处，我们仍可以对 ∞-范畴进行严谨且模型无关的推理，而不必深陷于特定模型的组合脚手架。§3 中介绍的框架大幅简化了 ∞-范畴的基础核心理论，不过目前其适用范围仍不及借助模型证明的结果总集。

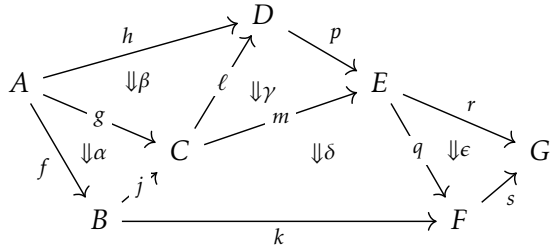
然而，目前最先进的方法采用的证明技巧对非范畴论学家而言并不熟悉，因此无法纳入本科课程。结尾的 §4 描述了一个更具推测性的未来愿景：届时，数学基础的改进将使我们能够把唯一性诠释为可缩性，并自动确保所有构造在等价下保持不变。

3. ∞-范畴的形式理论

在标志着范畴论诞生的论文《自然等价的一般理论》中，艾伦伯格和麦克莱恩指出，范畴、函子和自然变换可以组合成一个 2-范畴 CAT [EM]。这一结果的要旨在于，自然变换可以按 2维的多种方式进行复合：“垂直地”沿着边界函子，或“水平地”沿着边界范畴。

[5]“大” ∞-范畴也存在，其行为类似于大 1-范畴。[6]类似的考量促使 Scholze 等人使用术语“灵魂”（指“空间”的“灵魂”）作为 ∞-群胚 [CS，§1]。

更一般地，Power 证明，任意由方向相容的函子和自然变换构成的粘贴图表都有唯一的复合[P]。



上述例子中的粘贴复合定义了范畴A 与G 之间的一个自然变换，该变换从函子rph 到函子skf；它可分解为原子自然变换 α、β、γ、δ、ϱ的须化的垂直复合：例如，该复合可分解为$rp\beta$，继之以$r\gamma g$，继之以ϵmg，继之以$sqm\alpha$，再继之以$s\delta f$，总共有8 种可能性。Power 定理指出，粘贴复合是良定义的。

类似地，在行为良好的 ∞-范畴模型中：

命题 3。1 (Joyal, Riehl–Verity)。 ∞-范畴、 ∞-函子和 ∞-自然变换共同构成一个笛卡尔闭的 2-范畴 ∞-CAT。

这一结果最初由 Joyal 在准范畴模型中观察到 [J2]。由于准范畴范畴是笛卡尔闭的，它在自身上富集，从而定义了一个 $(\infty, 2)$-准范畴范畴。准范畴的 2-范畴是通过一个商化过程获得的：对每个同态准范畴施加从范畴到准范畴的（神经）包含的左伴随，将其映为其同伦范畴。其他“行为良好”的模型——包括完备 Se- gal 空间、Segal 范畴，以及其他的 1-复杂集——同样是笛卡尔闭的，因此类似的构造定义了一个完备 Segal 空间的 2-范畴，等等。[7] 为采取一种“模型无关”的观点，请注意这些 2-范畴全都 双等价，或者说，在适用于 2-范畴论 [RV2，§E.2] 的意义下“相同”。

令人惊讶的是，许多专家可能没想到， ∞-范畴基础理论中相当一部分内容都可以在 2-范畴 ∞-CAT 中发展。这些内容可称为形式范畴论，因为它们涉及等价、伴随、极限和余极限等范畴概念的定义，而这些概念都可以在任意 2-范畴内部定义。在 2-范畴 CAT 中，这些概念还原为经典 1-范畴论中的概念；而在 2-范畴 ∞-CAT 中，它们则特化为 ∞-范畴论中的正确概念。[8] 因此，对于涉及这些概念的核心基础理论，只需加上前缀“∞–” [RV2，§2-4]，普通范畴论便可扩展到 ∞-范畴。

等价与伴随。以下定义适用于任意笛卡尔闭 2-范畴，例如 ∞-CAT。

定义 3.2. ∞-范畴之间的等价由以下内容给出：

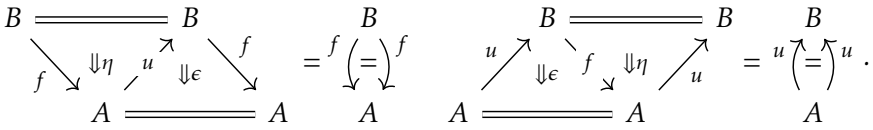
- 一对 ∞-范畴A 和B，
- 一对 ∞-函子$g\colon A \to B$ 和$h\colon B \to A$，以及
- 一对可逆的 ∞-自然变换 $\alpha\colon \mathrm{id}A \cong hg$，以及 $\beta\colon gh \cong \mathrm{id}B$。

[7]虽然在给定模型中“∞-范畴”和“∞-函子”的含义通常很清楚，但“∞-自然变换”则不那么显而易见；它们可以理解为环境 $(\infty, 2)$-范畴中 2-胞的等价类。[8]这一论述的技术部分涉及证明，此处引入的“综合”或“形式”概念与拟范畴模型 [RV2, §F]中先前定义的“解析”概念相一致。但我们建议尚未熟悉某种 ∞-范畴模型的解析理论的人先学习这些定义。

定义 3.3。 ∞-范畴之间的伴随由以下内容给出：

- 一对 ∞-范畴 A 和B,
- 一对 ∞-函子 $u\colon A \to B$ 和 $f\colon B \to A$, 以及
- 一对 ∞-自然变换 $\eta\colon \mathrm{id}_B \Rightarrow uf$和 $\epsilon\colon fu \Rightarrow \mathrm{id}_A$

使得下列粘贴恒等式成立：



f通常写作 $A \; B\bot$ ，表示f是u的左伴随，而u是其右伴随；其中u作为单位 η 和余单位ϵ 的数据被隐去。

采用从 2-范畴文献中“现成取用”的定义有许多优点，其中之一是，标准的 2-范畴证明可以直接用于证明以下关于 ∞-范畴之间伴随的事实。[9]

命题 3.4 ([RV2, 2.1.9])。 以下范畴之间的伴随可以复合： ∞-范畴

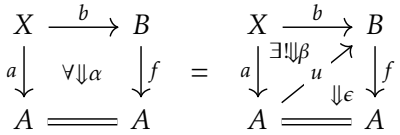


f命题 3.5 ([RV2, 2.1.10])。 给定一个伴随 $A \; B\bot$ 在 ∞-范畴之间，以及一个函子-u子 $f'\colon B \to A$, f'是 u 的左伴随，当且仅当存在一个自然同构 $f \cong f'$。

命题 3.6 ([RV2, 2.1.12])。 任何等价都可以通过替换其中一个自然同构而提升为伴随等价。

相对伴随。伴随中的单位和余单位在 2-范畴 ∞-CAT 中满足一个泛性质，下面我们将以余单位 ϵ 为例进行探讨：$fu \Rightarrow \mathrm{id}_A$。给定任意 ∞-函子$a\colon X \to A$和$b\colon X \to B$，与$\epsilon$粘合可定义一个双射，建立起 ∞-自然变换$\alpha\colon fb \Rightarrow a$与 $\beta\colon b \Rightarrow ua$之间的对应。任意 $\alpha\colon fa \Rightarrow b$都可经由唯一的 $\beta\colon b \Rightarrow ua$分解，如下图所示：

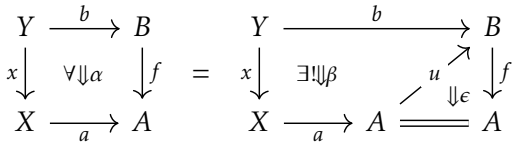
(3.7)



也就是说，(u,ϵ) 这一对定义了 id_A 经由 f的绝对右提升。事实上，当且仅当 (u 是f的左伴随，且余单位为 ϱ时，(u,ϱ) 才定义了 id_A 经由 f[RV2, 2。3。7]。

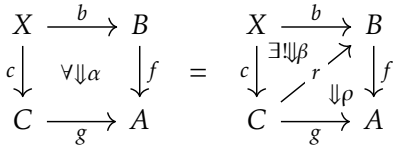
[9]不那么显而易见的是，对于 ∞-范畴论而言，这些定义是“正确的”。对于等价，这一点在任何模型中都很容易看出。对于伴随，情况则相当微妙，其中涉及这样一个事实：定义3。3 中列举的低维数据足以唯一确定一个完整的“同伦相干伴随”，其选择空间可缩 [RV1]。

伴随的余单位 ϱ 的任一分量 ϱa 都满足一个类似于 (3。7) 的泛性质：



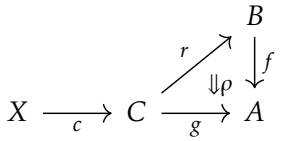
这表明 $(ua, \epsilon a)$ 定义了 a 经由 f 的绝对右提升。受这些例子的启发，通用 ∞-函子 $g\colon C \to A$ 经由 $f\colon B \to A$ 的绝对右提升 (r, ρ)，可以视为表明 r 是 g 相对于 f 的右伴随，其部分余单位为 ρ。

定义 3.8。给定具有共同陪域的 ∞-函子 $g\colon C \to A$ 和 $f\colon B \to A$，函子 $r\colon C \to B$ 及 ∞-自然变换 $\rho\colon fr \Rightarrow g$ 定义了 g 经由 f 的绝对右提升，或者说 f 相对于 g 的右伴随；若与 ρ 粘合后，会在下方所示的 ∞-自然变换之间诱导出一个双射：

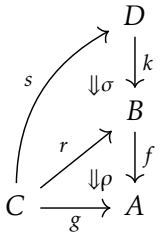


以下引　　理关于相对右伴随的论述具有直接的 2-范畴论证明　　：

引理 3.9 ([RV2, 2.3.6])。若 (r, ρ) 是 $f : B \to A$ 相对于 $g : C \to A$ 的右伴随，则对于任意 $c : X \to C$，$(rc, \rho c)$ 是 f 相对于 gc 的右伴随。



引理 3.10 ([RV2, 2.4.1])。假设 (r, ρ) 是相对于 $f\colon B \to A$ 的右伴随，且 $g\colon C \to A$。那么，对于任意由 ∞-函子和 ∞-自然变换构成的图表

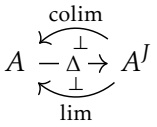


(s, σ) 是相对于 r 的 k 的右伴随，当且仅当 $(s, \rho \cdot f\ \sigma)$ 是相对于 g 的 fk 的右伴随。

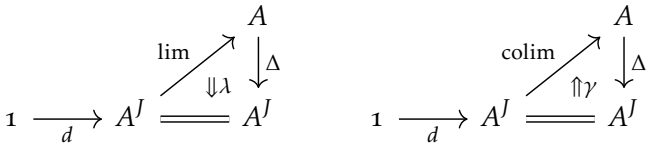
极限和余极限。相对伴随可用于定义取值于 ∞-范畴 A 且以另一个 ∞-范畴 J 为指标的图表的极限和余极限。作为笛卡尔闭 2-范畴，∞-CAT 包含一个终端 ∞-范畴 1，它存在唯一的 ∞-函子 $! : \mathrm{J} \to 1$，该函子来自任意其他 ∞-范畴 J。映射 $\mathrm{a} : 1 \to \mathrm{A}$ 从终端 ∞-范畴到另一个 ∞-范畴的映射，定义了 ∞-范畴 A 中的元素。[10] 利用笛卡尔闭结构，任意图表 $\mathrm{d} : \mathrm{J} \to \mathrm{A}$ 都定义了 ∞-范畴中 J 形图表的一个元素 $\mathrm{d} : 1 \to \mathrm{A}^{J}$。用唯一函子 $!\colon \mathrm{J} \to 1$ 做指数运算，得到常值图表函子 $\Delta\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}^{J}$，它将 A 中的一个元素映射为以该元素为值的常值 J 形图表。

[10] 我们发现，与其称 ∞-范畴 A 中的“对象”为“对象”（而 ∞-范畴 A 本身是 ∞-CAT 的一个对象），这种说法更不容易引起混淆。

定义 **3.11**。 ∞-范畴 A 存在 J形极限，当且仅当常值图表函子 $\Delta\colon A \to A^J$ 存在右伴随；若常值图表函子存在左伴随，则该范畴存在 J形余极限：

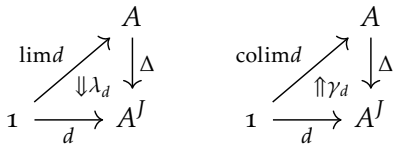


伴随的余单位 $\lambda : \Delta \dashv$ 极限函子 lim 的伴随单位 $\gamma : \dashv \Delta$ 伴随 colim $\dashv \Delta$ 刻画了极限锥和余极限锥；考察它们在图表$d\colon 1 \to A^J$处的分量时，最容易看出这一点。由引理 3.9，右伴随和左伴随限制后定义了相对伴随：



这些观察使我们能够推广定义 3.11 ，以表达单个图表的极限或余极限的泛性质，即使在极限函子和余极限函子不存在的情形下也是如此。

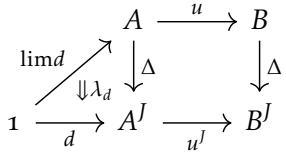
定义 **3.12.** 图表 $d\colon J \to A$ 在 ∞-范畴之间存在极限，当且仅当 Δ 在d 处有相对右伴随；存在余极限，当且仅当 Δ 在d处有相对左伴随，这由绝对提升图刻画：



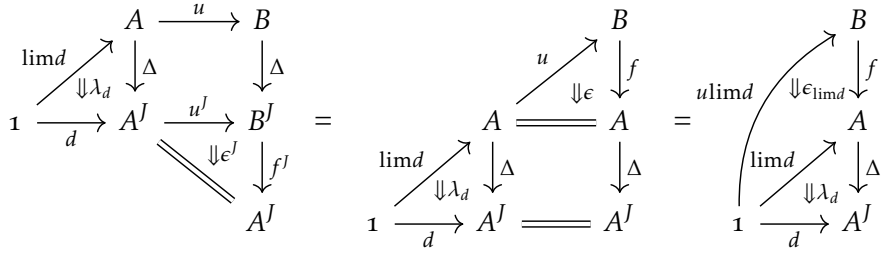
Th这里给出一个经典定理的 ∞-范畴版本的简单形式化证明：

定理 3。13。 右伴随保持极限，左伴随保持余极限 *s.*

证明。 考虑定义3。 3 中的一个伴随，以及定义 3。12。要证明右伴随保持这个极限，我们必须证明



定义了一个相对右伴随。根据引理 3.10，只需证明，将它与由伴随 $f_J \dashv u^J$ 的余单位 ϵ^J 在 d 处的分量所编码的相对右伴随粘合后，结论仍成立，如左下图所示：



根据笛卡尔闭 2-范畴中指数对象的 2-函子性，$f^J \Delta = \Delta f$和 $\epsilon^J \Delta = \Delta \epsilon$。因此，上方左侧展示的粘贴图表等于上方中央展示的图表，而后者又等于上方右侧的图表。这个右侧图表是相对右伴随的粘合复合，根据引理 3.10。□

泛性质。定义3.3 和 3.12 并未表达 ∞-范畴中伴随以及余极限/极限之间伴随的完整泛性质。这些性质还需要由 2-范畴 ∞-CAT 承载的额外结构，即对于任意一对 ∞-函子 f : B → A 和 g : C → A，都存在逗号 ∞-范畴。逗号 ∞-范畴是一个 ∞-范畴 $\mathrm{Hom}_A(f,g)$，它配备了如下左图所示的典范函子和一个 ∞-自然变换，由如下右图所示的 ∞-范畴的拉回构成：

(3.14)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(f,g) & \xrightarrow{\mathrm{dom}} & B \\ {\scriptstyle \mathrm{cod}}\downarrow & \Downarrow\phi & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow[g]{} & A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(f,g) & \xrightarrow{\phi} & A^2 \\ {\scriptstyle (\mathrm{cod},\mathrm{dom})}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{cod},\mathrm{dom})} \\ C\times B & \xrightarrow[g\times f]{} & A\times A \end{array}$$

虽然 $\mathrm{Hom}_A(f,g)$ 作为 ∞-CAT 中对象的泛性质，弱于范畴论中逗号对象的标准概念，但仍有：

定理 3.15 ([*RV2*, 3.5.8])。∞-函子 $f : B \to A$ 关于 $g : C \to A$ 存在右伴随 $r : C \to B$，当且仅当存在一个在 $C \times B$ 上的等价：

$$\mathrm{Hom}_A(f,g) \simeq_{C\times B} \mathrm{Hom}_B(B,r).$$

当定理 3.15 应用于 $f : B \to A$ 和恒等$_A$时，它特化为：

推论 3.16 ([*RV2*, 4.1.1])。一个 ∞-函子 $f : B \to A$ 有右伴随 $u : A \to B$，当且仅当 $\mathrm{Hom}_A(f, A) \simeq_{A\times B} \mathrm{Hom}_B(B, u)$。

当定理 3.15 应用于 $\Delta : A \to A^J$ 和 $d : 1 \to A^J$ 时，它特化为：

推论 3.17 ([*RV2*, 4.3.1])。图表 $d : J \to A$ 有一个极限 $l : 1 \to A$，当且仅当 $\mathrm{Hom}_{A^J}(\Delta, d) \simeq_A \mathrm{Hom}_A(A, l)$。

这里，逗号 ∞-范畴 $\mathrm{Hom}_{A^J}(\Delta,\mathrm{d})$ 定义了 d 上锥的 ∞-范畴。∞-范畴 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{A}, \mathrm{l})$ 有一个终端元素 $\mathrm{id}_\ell : 1 \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{A}, \mathrm{l})$，它定义了唯一函子 $! : \mathrm{Hom}_A(\mathrm{A}, \mathrm{l}) \to 1$ 的右伴随。通过等价 $\mathrm{Hom}_{A^J}(\Delta, \mathrm{d}) \simeq_A \mathrm{Hom}_A(\mathrm{A}, \mathrm{l})$，我们看到极限锥在锥的 ∞-范畴中是终端的。事实上，d 存在极限，当且仅当锥的∞-范畴存在一个终端元素 [RV2, 4.3.2]。

我们能把这教给本科生吗？如果经典范畴论是本科数学课程中的标准课程，那么对这门学科特别感兴趣的学生或许会继续学习一些 2-范畴论，就像对代数特别感兴趣的学生，在开设相关课程时，或许会继续选修更专门的经典代数几何、代数数论或表示论课程。从这里开始，本文所述结果的证明并不太难。

但这些结果只涵盖了 ∞-范畴论的一小部分，而对于其余大多数内容，从 1-范畴推广到 ∞-范畴时，复杂性会有更大的跃升。考虑 Yoneda 引理可以最好地说明这一点；该引理在一个重要的特殊情形下表述如下：

定理 3.18 ([*RV2*, 5.7.1])。给定一个 ∞-范畴 A 以及元素 $a, b : 1 \to A$，∞-群胚 $\mathrm{Hom}_A(a, b)$ 等价于由函子 $\mathrm{Hom}_A(A,a) \to \mathrm{Hom}_A(A, b)$ 组成的、定义在 A 上的 ∞-群胚。

这个等价的一个方向很容易描述：从右到左的映射由在单位元 id 处求值来定义$_a$： $1 \to \mathrm{Hom}_A(a,a)$。逆等价定义了约内达嵌入，而众所周知，在构造 ∞-范畴论中，这很难做到，因为它需要为 A 配备一个同伦相干复合函数 [L4, §5。1。3]。

要进一步简化 ∞-范畴论，一种思路是让我们的基础系统承担更多工作。

4。一种 ∞-范畴的综合理论

为了说明替代基础所应满足的要求，我们先来看 ∞-范畴数据中“相同”的默认概念。在一个 ∞-范畴中，两个元素相同，当且仅当它们由底层 ∞-群胚中的一条路径连接；而平行态射相同，当且仅当它们由一个可逆的 2-胞腔连接，也就是说，它们在相应的映射空间中定义了一条路径。要使一个 ∞-范畴构造“定义良好”，它必须：

(i) 尊重由适当空间中的路径所编码的相同性概念；(ii) 尊重这些空间之间的等价，因为它们只有作为同伦类型才定义良好。

公理化相同性。在传统基础中，也有一条类似公理：数学构造或结果必须尊重由等式编码的相同性。定义一阶逻辑中二元关系“=”的公理如下：

- 自反性：对所有的 x，$x = x$ 为真。
- 同一者不可区分性：对于所有的 x,y 以及所有谓词 P，若 $x = y$，则 $P(x)$ 成立，当且仅当 $P(y)$ 成立 [Le]。

Martin-L¨of 的恒等类型也遵循类似规则，它们属于一种称为依赖类型论 [M-L] 的构造性数学替代基础框架。在这里，基本元素包括 N、GL_n(R) 和 Group 这样的类型，以及 $17 : \mathrm{N}$、$I^n : \mathrm{GL}_n$(R)、S_n : Group 这样的项；这些项可以依赖于一个任意上下文，其中的变量取自先前定义的类型（例如上文三个例子中出现的 n : N）。[11] 在传统基础中，数学结构以集合论的语言定义，而证明遵循一阶逻辑的规则。在依赖类型论中，数学构造与数学证明融为一体：二者都由适当类型中的项表示。环境类型描述正在构造的对象种类或正在证明的数学陈述，而上下文则描述构造的输入或定理的假设。

Martin-L¨of 的恒等类型规则包括：[12]

- 恒等类型构造：在含有两个变量 x,y：A 的上下文中，存在一个类型 $x =_A y$.

类型编码了具有数学意义的陈述或断言，因此，这条规则表示，当 x 和 y 是同一类型中的项时，探究它们是否可以相等是合理的。有些恒等类型，例如 $3 =_{\mathbb{N}} 4$，会是空的，因为项 3 和 4 无法相等，但该类型依然存在。

- 恒等引入：对于任意 x :A，都存在一个项 $\mathrm{refl}_x : x =_A x$。

类型中的项是类型所编码命题为真的见证，因此这条规则对应于自反性公理。

[11] 在形如“令……为……，则……”的数学陈述中，“令”之后的内容可能是在声明上下文中变量的名称，而该上下文由“为”之后的内容描述；“则”之后的内容最有可能是在该上下文中的一个类型或项。[12] 此处未列出的另一条规则，涉及该系统的计算行为。

- 恒等消去：给定任意依赖于项$Q(x,y,p)$的类型族，其中$x,y:A$且$p:x =_A y$，若要为所有x,y,p提供一族项$q_{x,y,p}:Q(x,y,p)$，只需为所有x提供一族项$d_x:Q(x,x,\mathrm{refl}_x)$。

Th这一规则蕴含莱布尼茨同一者不可辨识原理，此外还有更多内容：

定理 4。1 ([BG，Lu])。迭代恒等类型赋予任意类型一个 ∞-群胚结构，其中项是点，等同是路径，而高阶识别则编码同伦。

在低维情形下，类型 A 的迭代恒等类型上的 ∞-群胚结构提供：
- 函数 $(-)^{-1}:(x =_A y)\to(y =_A x)$，它们对调识别，
- 函数 $-*-:(x =_A y)\times(y =_A z)\to(x =_A z)$，它们复合识别，
- 高阶识别 $\mathrm{assoc}:(p*q)*r =_{x=_A w} q*r)$，存在于可复合的三元识别组之间

还有更多。这些项都是通过恒等消去规则，从恒等引入规则所提供的自反性项构造而成的。由于识别 $p:x =_A y$在 ∞-群胚 A 中定义了一条从 x 到 y 的路径，因此依赖类型论中的识别常被俗称为“路径”。

依赖类型论的同伦解释。依赖类型论的同伦解释于 21世纪初由 Awodey–Warren [AW] 和 Voevodsky [V], 在 Hofmann 和 Streicher 早期工作的基础上提出 [HS]。这一联系启发 Voevodsky 作出如下定义：

定义 4.2. 类型 A 是可缩的，当且仅当存在一个类型为

$$\Sigma_{x:A}\Pi_{y:A}x =_A y$$

这可以理解为“存在 $x:A$，使得对于所有 $y:A$，x 都可与 y识别”，其中所有量词都解释为要求对数据作出连续的指定。[13]

正如可缩空间可能包含不可数多个点，可缩类型也可能包含多个项。但由于可缩类型中的任意两个项都可以被认同，而且恒等消去意味着依赖类型论中的所有构造都尊重这种认同，因此该理论的表现就仿佛可缩类型只有一个项。

单值基础。 Martin-L¨öf 的依赖类型论是一种形式系统，其中所有构造都沿路径连续，这满足了我们的第一个期望。第二个期望，即在类型之间的等价下定义良好，在将 Voevodsky 的单价公理 加入依赖类型论后便得以满足，由此产生的形式系统称为同伦类型论 或单值基础[Ri，UF]。

Voevodsky 的单值性将类型的两种相同性概念联系起来。在传统的依赖类型论中，类型可以编码为类型宇宙中的项。[14] 因此，对于属于某个宇宙 U 的类型 A,B，一种相同性概念由宇宙中的路径 $p:A =_{\mathcal{U}} B$ 给出。另一种相同性概念则源于将类型视为 ∞-群胚：对于任意 A 和 B，都有一个类型 $A \simeq B$，其中包含从 A 到 B 的（同伦）等价。[15] 根据恒等消去，要定义自然映射 $\mathrm{id\text{-}to\text{-}equiv}:A =_{\mathcal{U}} B\to A\simeq B$，只需定义 $\mathrm{refl}_A:A =_{\mathcal{U}} A$ 的像，我们将其取为

[13]可缩类型的定义用到了依赖类型论中的依赖对类型和依赖函数类型。类型为 $\Sigma x{:}A\Pi y{:}Ax =A\, y$ 的项给出一个项 $c:A$，即“收缩中心”，以及一个路径族 $pz:c =A\, z$，其中对所有 $z:A$ 都成立；这个路径族称为“收缩同伦”。[14]罗素悖论可以通过宇宙的累积层级来解决。[15]一个有趣的挑战是，定义一种类型，使其数据能够见证给定映射 $f:A\to B$ 是等价，并且只要该类型有元素，它就是可缩的 [UF, §4]。

恒等等价。单价公理 断言，对于所有类型A 和B，这个映射都是等价。

根据单值性，一个等价 $e : A \simeq B$ 会产生一条路径 $\mathrm{ua}(e) : A =_{\mathcal{U}} B$，随后可用它将任何涉及 A 的类型中的项传输到涉及B的相应类型中的项。因此，单值数学自动保持类型之间等价下的不变性。

∞-范畴与单值基础。 有人对 ∞-范畴理论进行了实验性探索 [RS、BW、Ba]，其所使用的是同伦类型论的一种扩展：每个类型 A 除了路径族 $A(x,y)$ 外，还具有一个态射族 $\mathrm{Hom}x =_A y$。这些类型由一种新的类型构造操作产生，该操作生成扩展类型；扩展类型的项是类型值图表，它们沿着“形状”的包含严格扩展给定图表（这些“形状”是嵌入有向立方体中的多胞体，而有向立方体则在严格区间理论中构造）[RS，§2-4]。扩展类型包括与下列对象的拉回类似的类型：1。4以及3。14。

该形式系统在完备 Segal 空间中具有语义 [RS，W]，因此它提供了一种严谨的方法，可以证明关于 ∞-范畴的定理，这些范畴的理解方式与传统基础中的一致。与此同时，在这种“单值”基础设定中处理 ∞-范畴的体验，更像是在传统基础中处理 1-范畴的体验。

建立这个形式系统需要花费一番功夫，要描述它在完备 Segal 空间中的解释则需要更多功夫；事实上，解决同伦相干性问题的艰巨工作就在这里。但一旦完成这些工作，就可以定义 ∞-范畴的概念；这无疑会让那些希望学习相关内容的本科生感到安心。[16] 这两条公理分别表达了 Rezk 模型 [R1] 的“Segal”条件和“完备性”条件。

定义 4。3([RS， 5。3，10。6])。一个 ∞-范畴 是一个类型 A，满足：

- 每一对可复合箭头都有唯一的复合，且
- 对于任意一对项 $x,y : A$，从A 中的路径到A 中的同构的自然映射$x =_A y \to x \cong_A y$ 是一个等价。

第一条公理中的“唯一性”是按照定义 4。2来理解的：它断言，与定义 1。3 类似的某个复合路径空间是可缩的——这是该形式系统中“唯一性”的默认含义。与由 (1。4) 定义的空间一样，复合路径空间中的一个项为复合关系提供了一个高维见证。一个复合函数

$$\circ : \mathrm{Hom}_A(y,z) \times \mathrm{Hom}_A(x,y) \to \mathrm{Hom}_A(x,z),$$

通过舍弃这些见证得到。与同伦类型论中的任何构造一样，这个函数尊重等同，因此定义良好。由这条公理可知，复合满足结合律和单位律，其中使用了典范恒等态射 $\mathrm{id}_x : \mathrm{Hom}_A(x,x)$。

第二条公理涉及 A 中的一类同构，其定义方式与类型之间等价的定义方式类似 [RS，§10]。

Yoneda 引理。 比较 ∞-范畴论中 Yoneda 引理的证明时，便能看到这一综合框架的优势： [RV2，5。7。1]以及 [RS， 9。1]。我们在定理 3。18 中讨论的同一特殊情形下，概述后者的证明。

定理 4.4 *([RS, 9.1])*。给定一个 ∞-范畴 A 以及元素 $a, b : 1 \to A$，类型 $Hom_A(a, b)$ 等价于纤维逐点函数的类型 $\Pi_{x:A} Hom_A(x,a) \to Hom_A(x,b)$。

定理之间的关键差异在于，定理 3。18 与定理 4。4 在于，在当前框架下，可以直接定义恒等映射处的求值映射的逆等价。逆

[16]请回想，在 2-范畴 ∞-CAT 中发展的形式化 ∞-范畴论，并未采用 ∞-范畴的具体定义。

等价将箭头 $f : \mathrm{Hom}_A(a, b)$ 映射为自然映射 $x \mapsto g \mapsto f \circ g : \Pi_{x:A}\mathrm{Hom}_A(x, a) \to \mathrm{Hom}_A(x, b)$。随后，通常的证明表明这些映射是逆等价。在一个方向上，这由识别 $f \circ \mathrm{id}_a = \mathrm{Hom}_A(a,b)\, f$ 给出，它表达了 ∞-范畴中的复合具有单位元这一事实。在另一个方向上，我们必须证明，纤维逐点映射 ϕ 与这样一个映射一致：其在 x 处的分量由 $g \mapsto \phi_a(\mathrm{id}_a) \circ g : \mathrm{Hom}_A(x, a) \to \mathrm{Hom}_A(x, b)$ 给出。根据单价公理的一个称为“函数外延性”的推论，只需证明 $\phi_a(\mathrm{id}_a) \circ g = \mathrm{Hom}_A(x,b)\ \phi_x(g)$。这源于纤维逐点映射自动具有“自然性”这一事实，从而得到识别 $\phi_a(\mathrm{id}_a) \circ g = \mathrm{Hom}_A(x,b)\ \phi_x(\mathrm{id}_a \circ g)$。由于函数 ϕ_x 保持识别 $\mathrm{id}_a \circ g = \mathrm{Hom}_A(x,a)\, g$，我们便得到所需的识别。

事实上，[RS，9。5] 证明了 Yoneda 引理的一个推广，这一推广最初是在该形式系统中发现的，后来又在传统基础中得到证明 [RV2，5。7。2]

结论。要让本科生学习 ∞-范畴论，仍有许多重大的技术问题需要解决，但我希望未来这门学科不会像今天这样令人望而生畏。

参考文献

[A] O. Antol´ın Camarena，《$(\infty, 1)$-范畴世界概览》。第 15–62 页，载于：B´arcenas, N.、Galaz- Garc´ıa, F. 和 Rocha, M. M.（编），《海外墨西哥数学家：近期贡献》。当代数学，第 657卷。美国数学会，2016。4[AW] S. Awodey 和 M.A. Warren，《恒等类型的同伦论模型》，《剑桥哲学学会数学学报》，146，2009，45–55。12[Ba] C. Bardomiano Mart´ınez，《合成 ∞-范畴的极限与余极限》，2022，arXiv:2202。12386 13[BG] B. van den Berg、R. Garner，《类型是弱 ω-群胚》，《伦敦数学学会学报》，102（2），2008，370–394。12[Be] J. E. Bergner，《$(\infty, 1)$-范畴的同伦理论》，伦敦数学学会研究文本 90，剑桥大学出版社，2018。4[BV] J.M. Boardman、R.M. Vogt，《拓扑空间上的同伦不变代数结构》，《数学讲义》347，1973。4[BW] U. Buchholtz 和 J. Weinberger，《合成纤维化（∞,1）-范畴论》，2021，arXiv:2105。01724 13[CS] K. ˇCesnavi˘cius 和 P. Scholze，《平坦上同调的纯性》，2021，arXiv:1912。10932 5[C] D.-C. Cisinski，《高阶范畴与同伦代数》，剑桥高等数学研究，第 180卷，剑桥大学出版社，2019。4[EM] S. Eilenberg 和 S. Mac Lane，《自然等价的一般理论》。《美国数学会汇刊》，58，1945，231–294。5[FS] L. Fargues 和 P. Scholze，《局部朗兰兹对应的几何化》，2021，arXiv:2102。13459 3[F] D. Freed，《配边假设》，《美国数学会通报》，50（1），2013，57–92。3[Gr] M. Groth，《∞-范畴短期课程》，2015，arXiv:1007。2925 4[G] A. Grothendieck，《追寻层叠》，1983，arXiv:2111。01000 3[H] V. Hinich，《无穷范畴讲义》，2018，arXiv:1709。06271 4[HS] M. Hofmann、T. Streicher，《类型论的群胚解释》，载于 G. Sambin、J. Smith（编），《Martin-L¨of 类型论二十五年》，牛津大学出版社，1998，83–111。12[J1] A. Joyal，《拟范畴与 Kan 复形》，《纯粹与应用代数学报》175（1–3），2002，207–222。4[J2] A. Joyal，《拟范畴理论及其应用》，《高阶范畴中的单纯方法高级课程》，第 2卷，Centre de Recerca Matem´atica，2008。4，6[KV] D.A. Kazhdan 和 Y. Varshavsky，《完备 Segal 空间的米田引理》，《函数分析及其应用》，48（2），2014，3–38。4[Le] G.W. Leibniz，《形而上学论》，1686。11[Lu] P.L. Lumsdaine，《从内涵类型论得到的弱 ω-范畴》，载于：Curien, PL.（编），《带类型λ演算及其应用》，TLCA 2009。《计算机科学讲义》5608，2009。12[L1] J. Lurie，《关于 ∞-拓扑斯》，2003，arXiv:0306109。4[L2] J. Lurie，《导出代数几何》，麻省理工学院博士论文，2004。4[L3] J. Lurie，《什么是 ∞-范畴》，《美国数学学会会刊》，55（8），2008，949–950。3[L4] J. Lurie，《高阶拓扑斯理论》，数学年刊研究丛书 170，普林斯顿大学出版社，2009。4，11[L5] J. Lurie，《拓扑场论的分类》，2010，www.math.ias.edu/~lurie/papers/cobordism.pdf3

[L6] J. Lurie，《高等代数》，2017，www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。3，4[L7] J. Lurie，《Kerodon》，2023，kerodon.net 4[M-L] P. Martin-L¨of，《类型的直觉主义理论：谓词部分》，载于：H. E. Rose、J. C. Shepherdson（编），《逻辑讨论会'73》，《逻辑讨论会论文集》，逻辑基础研究丛书 80，73–118，1975。11[M] B. Mazur，《何时一个事物等于另一个事物？》载于 B. Gold 和 R. Simons（编），《证明及其他困境》，MAA Spectrum，《美国数学协会数学丛书》，华盛顿特区，2008，221–241。3[NT] D. Nadler 和 H.L. Tanaka，《拉格朗日余边界的一个稳定无穷范畴》，《数学进展》，366，2020，107026。3[Q] D. Quillen，《同伦代数》，《数学讲义》43，施普林格，1967。3[P] A.J. Power，《一个 2-范畴粘合定理》，《代数学杂志》，129，439–445，1990。6[R1] C. Rezk，《同伦理论的一个模型》，《美国数学会汇刊》353（3），2001，973–1007。4，13[R2] C. Rezk，《弱 n-范畴的笛卡尔表示》，《几何与拓扑》14（1），2010，521–571。4[R3] C. Rezk，《拟范畴导论》，2022，faculty.math.illinois.edu/~rezk/quasicats.pdf 4[RS] E. Riehl 和 M. Shulman，《合成 ∞-范畴的一种类型论》，《高阶结构》1（1），116–193，2017。13，14[RV1] E. Riehl 和 D. Verity，《同伦相容伴随与单子的形式理论》，《数学进展》，286，2016，802–888。7[RV2] E. Riehl 和 D. Verity，《∞-范畴论要素》，剑桥高等数学研究 194，2022，xvii+763页，elements-book.github.io/elements.pdf。6，7，8，10，13，14[Ri] E. Rijke，《同伦类型论导论》，2022，arXiv:2212。11082 12[UF]《同伦类型论：数学的单值基础》，单值基础项目，高等研究院，2013。12[V] V. Voevodsky，《关于同伦 λ-演算的一篇很短的札记》，2009，www.math.ias.edu/~vladimir/Site3/Univalent Foundations files/Hlambda short current.pdf 12[W] J. Weinberger，《扩展类型的严格稳定性》，2022，arXiv:2203。07194。13

约翰斯·霍普金斯大学数学系，3400 北查尔斯街，巴尔的摩，马里兰州 21218电子邮件地址：eriehl@jhu.edu