$\mathbb{Z}[i]$ 中 $A^5 + B^5 = C^5 \pm 1$的解

D. FOSSE，理学硕士，物理学
dominique.fosse@a3.epfl.ch

arXiv:2302.07858v1 [math.HO] 9 Feb 2023

引言 在 [1], 中，我们展示了如何从拉马努金恒等式出发，推导出 $A^3+B^3 = C^3 \pm 1$ 的无穷多个整数解：

$$(a^2 + 7ab - 9b^2)^3 + (2a^2 - 4ab + 12b^2)^3 = (2a^2 + 10b^2)^3 + (a^2 - 9ab - b^2)^3$$

我们将对方程 $A^5 + B^5 = C^5 \pm 1$进行类似处理；代价是，所提出的解为高斯整数，而非自然数。令 $i^2 = -1$，我们考虑：

$$g(x) := (x^2 + 2ax - 2a^2)^5 + (ix^2 - 2ax + 2ia^2)^5$$

直接得到 $g(x) = g(-x)$，因此 g 为偶数，这意味着：

$$(x^2 + 2ax - 2a^2)^5 + (ix^2 - 2ax + 2ia^2)^5 = (x^2 - 2ax - 2a^2)^5 + (ix^2 + 2ax + 2ia^2)^5 \tag{1}$$

当（a， x）$\in \mathbb{Z}^2$由此得到 $A^5 + B^5 = C^5 + D^5$ 的高斯整数解，这是一个很好的起点 .

使用经典的线性递推关系 我们来考虑以下线性递推关系， $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+2} = -2F_{n+1} + 2F_n \qquad F_0 := 0,\, F_1 := 1 \tag{2}$$

这可以用经典的线性代数求解：

$$F_n = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\left(-1+\sqrt{3}\right)^n - \left(-1-\sqrt{3}\right)^n\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

由此，我们通过直接计算得到：

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 &= \frac{2^n}{6}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} + 2(-1)^n\right)\\
F_{n+1}F_n &= \frac{1}{12}\left(\left(-1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(-1-\sqrt{3}\right)^{2n+1} - (-2)^{n+1}\right)\\
F_{n+2}F_n &= \frac{2^n}{6}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} + 4(-1)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

由此，我们特别得到

$$F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = 2^n(-1)^n \tag{4}$$

将 $F_{n+1} := x$ 和 $F_n := a$ 代入方程 (1)，得到：

$$\begin{aligned}
A_n :=& F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_n - 2F_n^2\\
=& \frac{2^n}{3}\left((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n + (-1)^n\right) \qquad (5)\\
B_n :=& iF_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + 2iF_n^2\\
=& \frac{2^n}{6}\left((-1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n - (1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + 2(-1)^n\right) + i\frac{2^n}{6}\left((3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n + (3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n\right) \qquad (6)\\
C_n :=& iF_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_n + 2iF_n^2\\
=& \frac{2^n}{6}\left((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n - 2(-1)^n\right) + i\frac{2^n}{6}\left((3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n + (3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n\right) \qquad (7)\\
d_n :=& F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n - 2F_n^2
\end{aligned}$$

因此，方程（1）变为 $A_n^5 + B_n^5 = C_n^5 + d_n^5$。现在，

$$\begin{aligned} d_n = F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n - 2F_n^2 &= F_{n+1}^2 - F_n\left(-2F_{n+1} + 2F_n\right) \\ &= F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} \qquad \text{using equation (2)} \\ &= 2^n(-1)^n \qquad \text{using equation (4)} \end{aligned}$$

取 $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$，由方程 (5)、(6) 和 (7) 可轻松计算得出：

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} A_n z^n &= \frac{4z^2+1}{(2z+1)(4z^2-8z+1)} \\ \sum_{n\geq 0} B_n z^n &= \frac{-4z}{(2z+1)(4z^2-8z+1)} + i\left(\frac{1-2z}{4z^2-8z+1}\right) \\ \sum_{n\geq 0} C_n z^n &= \frac{4z}{(2z+1)(4z^2-8z+1)} + i\left(\frac{1-2z}{4z^2-8z+1}\right) \end{aligned}$$

而且这满足 $A_n^5 + B_n^5 = C_n^5 + 2^{5n}(-1)^n \implies \left(\frac{A_n}{2^n}\right)^5 + \left(\frac{B_n}{2^n}\right)^5 = \left(\frac{C_n}{2^n}\right)^5 + (-1)^n$。令 $x := 2z$ 和 $\forall n \in \mathbb{N}$,$a_n := \frac{A_n}{2^n}$, $b_n := \frac{B_n}{2^n}$ 和 $c_n := \frac{C_n}{2^n}$。因此

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} a_n x^n &= \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-4x+1)} \\ \sum_{n\geq 0} b_n x^n &= \frac{-2x}{(x+1)(x^2-4x+1)} + i\left(\frac{1-x}{x^2-4x+1}\right) \\ \sum_{n\geq 0} c_n x^n &= \frac{2x}{(x+1)(x^2-4x+1)} + i\left(\frac{1-x}{x^2-4x+1}\right) \\ &\implies a_n^5 + b_n^5 = c_n^5 + (-1)^n \end{aligned}}$$

例如，

$$\begin{aligned} n := 1 &\implies 3^5 + (-2+3i)^5 = (2+3i)^5 - 1 \\ n := 2 &\implies 13^5 + (-6+11i)^5 = (6+11i)^5 + 1 \\ n := 3 &\implies 47^5 + (-24+41i)^5 = (24+41i)^5 - 1 \end{aligned}$$

参考文献

[1] Michael D. Hirschhorn，拉马努金的一个惊人恒等式，《数学杂志》第 *68* 卷第 *3* 期 （1995年6月），第 199–201 页。