arXiv:2302.07913v1 [math.LO] 15 Feb 2023

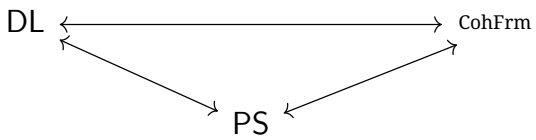
Heyting 框架与 Esakia 对偶

G. BEZHANISHVILI、L. CARAI 和 P. J. MORANDI

Abstract. 我们引入 Heyting 框架范畴，并证明它与 Heyting 代数范畴等价，且与 Esakia 空间范畴对偶等价。这为 Heyting 代数的 Esakia 对偶提供了一个帧论视角。我们还将这些结果推广到布劳威尔代数和 Brouwer 半格的情形：通过引入相应的布劳威尔框架范畴，扩展上述等价和对偶等价。这为布劳威尔代数和 Brouwer 半格的广义 Esakia 对偶提供了一个帧论视角。

1. 引言

20 世纪 70 年代初，两个重要的对偶定理相继确立：Priestley 针对有界分配格提出了一个对偶定理 [15, 16]，Esakia 则针对 Heyting 代数提出了一个对偶定理 [9] 。在这两种情形中，对偶结构都是特殊的紧致有序空间，分别称为 Priestley 空间和 Esakia 空间。正如 Cornish 所指出的 [7], ，Priestley 对偶与有界分配格的 Stone 对偶密切相关 [19]。由于 Stone 对偶空间是谱空间，这为从帧论角度研究 Priestley 对偶开辟了道路。事实上，有界分配格范畴 DL 与相干框架范畴 CohFrm 等价，而相干框架恰好是谱空间的开子集所构成的框架 [13, p. 65]。根据 [7],，谱空间范畴 Spec 与 Priestley 空间范畴 PS 同构。因此，我们得到以下连接分配格、相干框架和 Priestley 空间的图表。DL 与 CohFrm 之间的箭头表示等价，另外两条箭头表示对偶等价，且该图表在自然同构意义下交换（详见第 2 节）。



由于 Esakia 对偶是 Priestley 对偶的一个受限版本，因此自然可以为其提供一种与上述 Priestley 对偶方法相似的框架论方法。为此，我们引入 Heyting 框架的概念。为说明该定义的合理性，我们回顾一下：若框架 L 的紧元集合 $K(L)$ 是 L 的有界子格，则称框架 L 为相干的。由于每个框架都是 Heyting 代数，我们定义：若 K的 L L 是 L的 Heyting 子代数，则称 L 为 Heyting 框架。显然，Heyting 框架是相干框架。我们将证明，上述有界分配格、相干框架与 Priestley

2020 年数学主题分类。06D20；06D22；18F70；06E15。关键词和短语：Heyting 代数；Esakia 对偶；相干框架；代数框架；布劳威尔代数；Brouwer 半格。

空间之间的对应关系，限制后仍是 Heyting 代数、Heyting 框架与 Esakia 空间之间的同一对应关系。

在两个海廷框架之间，有各种自然的态射 α： $L \to M$ 可供考察。如果我们考虑相干框架同态（即将紧元映射为紧元的框架同态），所得范畴是 CohFrm 的一个全子范畴。但这类态射没有考虑海廷蕴涵。因此，我们还考察那些在 $K(L)$ 上保持蕴涵的相干框架同态，以及那些在整个 L 上保持蕴涵的相干框架同态。此外，我们还考虑完备格同态以及完备Heyting同态。由此得到若干海廷框架范畴。对于每一种范畴，我们都描述相应的 Esakia 空间范畴和海廷代数范畴。这就产生了所需的关于 Esakia 对偶的框架理论方法，其中涉及各种自然的态射。

我们还为布劳威尔代数 [5] 和 Brouwer 半格 [4]的广义 Esakia 对偶提供了一种框架理论方法。我们回顾一下：布劳威尔代数是可能没有底元的海廷代数，而 Brouwer 半格是可能没有并的布劳威尔代数。布劳威尔代数的对偶空间是带基点的 Esakia 空间，而布劳威尔半格的对偶空间是带基点广义 Esakia 空间。我们将海廷框架的概念扩展为布劳威尔框架和布劳威尔算术框架。这要求我们使用代数框架和算术框架，而不是相干框架。为了使代数框架的紧元 L 构成布劳威尔半格，我们需要在 $K(L)$上使用对偶序。因此，我们定义代数框架 L为布劳威尔框架，当且仅当其对偶 $K(L)^d$ 是一个布劳威尔半格。由于 $K(L)^d$ 上的蕴涵会转化为 $K(L)$ 上的余蕴涵，因此再讨论 $K(L)^d$ 是 L 的布劳威尔子半格便不再有意义，因为余蕴涵可能不存在于 L上。

我们证明，对于布劳威尔半格的广义 Esakia 对偶，布劳威尔框架所起的作用与 Esakia 对偶中的海廷框架相同；而布劳威尔算术框架对于布劳威尔代数与带基点的 Esakia 空间也起着类似的作用。最后，我们讨论关于 Heyting 框架的结果与相应的布劳威尔框架结果之间的关系。

2. Preliminaries

我们先简要介绍 Priestley 对偶 [15, 16]。设 X 是一个偏序集。对于 $S \subseteq X$，我们记

$$\uparrow S = \{x \in X : s \leq x \text{ for some } s \in S\} \text{ and } \downarrow S = \{x \in X : x \leq s \text{ for some } s \in S\}.$$

如果 $S = \{s\}$ 是单元素集，我们就简记为 $\uparrow s$ 和 $\downarrow s$。若 S 满足 $\uparrow S = S$，则称其为上集；若满足 $\downarrow S = S$，则称其为下集。Priestley 空间是一个偏序集 X，配备紧拓扑并满足普里斯特利分离公理：若 $x \not\leq y$，则存在闭开上集 U，使得 $x \in U$ 且 $y \notin U$。Priestley 态射是连续的保序映射。令 PS 为 Priestley 空间及 Priestley 态射构成的范畴。再令 DL 为有界分配格及有界格同态构成的范畴。

定理 2.1（Priestley 对偶）。分布格与偏序集对偶等价。

建立 Priestley 对偶的反变函子构造如下。对于 Priestley 空间 X，令 ClopUp(X) 为 X 的闭开上集构成的有界分配格。反变函子 ClopUp : 偏序集 $\to$ 分布格将 $X \in$ 偏序集映到 ClopUp(X)，并将偏序集态射 $f\colon X \to Y$ 映到有界格同态 f^{-1} : ClopUp(Y) $\to$ ClopUp(X)。对于 $A \in$ 分布格，令 X_A 为 A 的素滤子集合，按包含关系排序，并赋予以 $\{\varphi(a) \setminus \varphi(b) : a, b \in A\}$ 为基的拓扑，其中 $\varphi\colon A \to \wp(X_A)$ 是 Stone 映射 $\varphi(a) = \{x \in X_A : a \in x\}$。于是 X_A 是一个 Priestley 空间，反变函子 pf : 分布格 $\to$ 偏序集将 $A \in$ 分布格映到 X_A，并将分布格态射 $h\colon A \to B$ 映到 $h^{-1}\colon X_B \to X_A$。

Esakia 对偶 [9]是 Priestley 对偶的一个受限版本。我们回顾一下，Esakia 空间是一个 Priestley 空间 X，其中每个既开又闭的 U都满足 $\downarrow U$ 为既开又闭。Esakia 态射是一个连续映射 $f\colon X \to Y$，满足对每个 $y \in Y$，都有 $\downarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(\downarrow y)$。[1]令 ES 为 Esakia 空间及 Esakia 态射构成的范畴。我们还回顾一下，Heyting 代数是一个有界分配格 A，其中 $\wedge$ 具有满足 $a \wedge c \leq b$ 当且仅当$c \leq a \to b$的剩余 $\to$。运算 $\to$ 通常称为蕴涵。令 HA 为 Heyting 代数及 Heyting 代数同态构成的范畴。

定理 2.2（Esakia 对偶）。HA 与 ES 对偶等价。

注意，HA 是 DL 的非全子范畴，ES 是 PS 的非全子范畴；Esakia 对偶则是通过限制建立 Priestley 对偶的反变函子 pf 和 ClopUp 而得到的。

下面的引理在 Esakia 对偶中是众所周知的，之后将会用到（参见例如 [8, 定理 4.2 和 4.3]）。

引理 2.3。

(1) Priestley 空间 X 是 Esakia 空间，当且仅当 ClopUp(X) 是 Heyting 代数；在此情况下，$U, V \in$ ClopUp(X) 的蕴涵由 $U \to V = X \setminus \downarrow(U \setminus V)$ 计算得到。(2) 设 X, Y 为 Esakia 空间，且 $f\colon X \to Y$ 一个 PS 态射。以下条件等价：(a) f 是一个 ES-态射。(b) 对于每个 Y的闭开子集 U，都有 $f^{-1}(\downarrow U) = \downarrow f^{-1}(U)$。($c$) f^{-1} 是一个海廷同态。

我们回顾一下（参见例如 [14, 第 10] 页）：框架是满足无限分配律 $a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s$ 的完备格 L：对每个 $S \subseteq L$ 都有 $s \in S\}$。如果 $a \leq \bigvee S$ 蕴涵 $a \leq \bigvee T$ 对某个有限的 $T \subseteq S$ 成立，则称元素 $a \in L$ 为紧的。令 $K(L)$ 表示 L的紧元集合。那么，$K(L)$ 是 L的并半格。若 $K(L)$ 在 L 中并稠密（即 L 中的每个元素都是紧元的并），则称 L 是代数的；若 L 是代数的，并且此外 $K(L)$ 是 L的有界子格，则称 L 是相干的。

框架之间的映射 $\alpha\colon L \to M$ 若 α 保持有限交和任意并，则称为框架同态。令 AlgFrm 为由代数框架及保持紧元的框架同态构成的范畴（即，$a \in K(L)$ 蕴含 $\alpha(a) \in K(M)$）。再令 CohFrm 为 AlgFrm 的全子范畴，由相干框架构成。

[1]映射 $f\colon X \to Y$ 满足后一条件的偏序集之间的映射通常称为 p-态射或有界态射。

定理 2.4. [13,p. 65] 分布格等价于 CohFrm。

建立这一等价的函子构造如下。函子 $\mathscr{J}$: DL $\to$ CohFrm 将 $A \in$ DL 映射到其理想所构成的框架 $\mathscr{J}(A)$，并将 DL-态射h : $A \to B$ 映射到 CohFrm-态射 h^* : $\mathscr{J}(A)$ $\to$ $\mathscr{J}(B)$，其定义为 $h^*(I) = \downarrow h[I]$。函子 $\mathscr{K}$: CohFrm $\to$ DL 将 $L \in$ CohFrm 映射到其有界子格 $K(L)$，并将 CohFrm-态射 α : $L \to M$ 映射到其在 $K(L)$ 上的限制。

由于框架恰好是完备海廷代数（例如参见 [10, 第 12] 页），$A \in$ DL 的理想框架是一个 Heyting 代数。我们将使用 $\mathscr{J}(A)$ 上蕴涵的如下刻画。

引理 2.5. 设 $A \in$ DL。那么 $\mathscr{J}(A)$ 上的蕴涵按以下公式计算

$$I \to J = \{a \in A : a \wedge b \in J \ \forall b \in I\} = \{a \in A : \downarrow a \cap I \subseteq J\}.$$

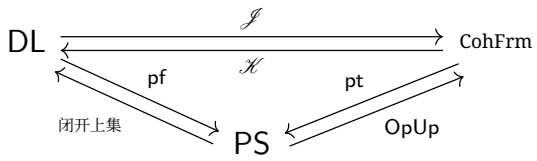
证明。由于第二个等式显然成立，我们只验证第一个等式。令$E = \{a \in A :$ $a \wedge b \in J \ \forall b \in I\}$。由于 $A \in$ 分布格，显然可得 $E \in \mathscr{J}(A)$。我们证明 $E = I \to J$。为此，必须证明 E 是满足$I \cap E \subseteq J$的 A 的最大理想。为证明 $I \cap E \subseteq J$，令 $a \in I \cap E$。则 $a \in I$ 且 $a \in E$。后者意味着对所有 $b \in I$，都有 $a \wedge b \in J$。特别地，由于 $a \in I$，我们有 $a = a \wedge a \in J$。因此，$I \cap E \subseteq J$。为证明 E是这样的最大理想，令 $N \in \mathscr{J}(A)$，其中 $I \cap N \subseteq J$。任取 $a \in N$和 $b \in I$。则 $a \wedge b \in I \cap N \subseteq J$，所以 $a \in E$。因此，$N \subseteq E$，从而$I \to J = E$。□

由于 DL 与 CohFrm 等价，且与 PS 对偶等价，因此 CohFrm 与 PS 对偶等价。建立这一对偶等价的反变函子可按如下方式构造。设 $X \in$PS。由于 ClopUp(X) 的理想构成的框架同构于 X 的开上集构成的框架 OpUp(X)（例如，见 [17, 第 54] 页或 [1, 第 385] 页），反变函子 OpUp : PS $\to$ CohFrm 将 $X \in$ PS 映到 OpUp(X) $\in$ CohFrm，并将 PS-态射 f : $X \to Y$映到 CohFrm-态射 f^{-1} : OpUp(Y) $\to$ OpUp(X)。

为描述反变函子 pt : CohFrm $\to$PS，我们回顾（例如，见 [14, 第 13] 页）：框架 L 的一个点是一个完全素滤子 P（也就是说，P 是一个滤子，满足$\bigvee S \in P$蕴含 $S \cap P \neq \varnothing$）。令 pt($L$) 为 L 的点集。对于每个 $a \in L$，令$\zeta(a) = \{P \in$ pt(L) : $a \in P\}$。众所周知（例如，见 [14,第 15] 页），$\tau = \{\zeta(a) : a \in L\}$是 pt($L$) 上的一个拓扑。设 $L \in$ CohFrm。则 (pt(L) τ) 是一个谱空间（例如，见 [13,第 65] 页），而 (pt(L) $\pi, \subseteq$) 是相应的 Priestley 空间，其中 π是 τ 的补片拓扑（例如，见 [7]）。反变函子 pt : CohFrm $\to$ PS 将 $L \in$ CohFrm 映到 Priestley 空间 (pt(L) $\pi, \subseteq$)，并将 CohFrm-态射 α : $L \to M$映到 α^{-1} : pt(M) $\to$ pt(L)。

对于 $L \in$ CohFrm，$K(L)$ 的素滤子的 Priestley 空间 (pt(L) $\pi, \subseteq$) 与 pf($K(L)$) 在 PS 中同构。此同构通过将 L 的每个点 P 映射到 $P \cap K(L)$，并将 $K(L)$ 的每个素滤子 F 映射到其在 L 中的上集 $\uparrow F$ 而得到。因此我们得到以下著名结果，它从帧论视角阐释了 Priestley 对偶：

定理2.6。DL 与 CohFrm 之间存在范畴等价，CohFrm 与 PS 之间存在对偶等价，并且以下图表在自然同构意义下交换。



由于 Esakia 对偶是 Priestley 对偶的一个受限版本，因此自然可以将定理2.6限制到海廷代数范畴 HA。随后，PS 也相应限制为 ES。在下一节中，我们将引入海廷框架范畴 HeytFrm，并说明它对 HA 和 ES 所起的作用，与 CohFrm 对分布格和 PS 所起的作用相同。

3. Heyting frames

定义3.1。 如果 L a Heyting 框架满足 $K(L)$ 是 L 的 Heyting 子代数，我们就称它为 Heyting 框架。

由于 $K(L)$ 是 Heyting 子代数意味着 $K(L)$ 是 L 的有界子格，因此我们看到每个 Heyting 框架都是相干框架。

定理 3.2. 设 L 是一个相干框架。那么， L 是 Heyting 框架，当且仅当 L 的有界子格 $K(L)$ 是一个 Heyting 代数。

证明。正向蕴涵显然。对于反向蕴涵，设 $\to$ 是 L 上的蕴涵。由于有界子格 $K(L)$ 是 Heyting 代数，它有一个蕴涵 $\to'$。只需证明，对于每个 a， $b \in K(L)$ 都有 $a \to b = a \to' b$。因为$a \wedge (a \to' b) \leq b$，所以有 $a \to' b \leq a \to b$。为证明反向不等式，由于 L 是相干的， $a \to b = \bigvee\{k \in K(L) : k \leq a \to b\}$。设 $k \in K(L)$ 且 $k \leq a \to b$。因为$a \wedge (a \to b) \leq b$，所以有 $a \wedge k \leq b$，于是 $k \leq a \to' b$。因此， $a \to b \leq a \to' b$，等式便成立。由此， L 是一个 Heyting 框架。□

由于每个 $A \in$ DL 都同构于 $K(\mathscr{J}(A))$，因此由定理 3.2 立即得到:

推论 3.3. 设 $A \in$ DL。那么， A 是 Heyting 代数，当且仅当 $\mathscr{J}(A)$ 是 Heyting 框架。

接下来我们给出 Heyting 框架的对偶刻画。

定理 3.4.

(1) 若 $X \in$PS，则 X 是 Esakia 空间，当且仅当 OpUp(X) 是 Heyting 框架。

(2) 若 $L \in$ CohFrm，则 L 是 Heyting 框架，当且仅当 pt(L) 是 Esakia 空间。

证明。(1) 设 $X \in$PS。根据引理 2.3(1)， X 是 Esakia 空间，当且仅当 ClopUp(X) 是 Heyting 代数。由于 ClopUp(X) 是相干框架 OpUp(X) 的紧元集合，由定理 3.2 可知， X 是 Esakia 空间，当且仅当 OpUp(X) 是 Heyting 框架。

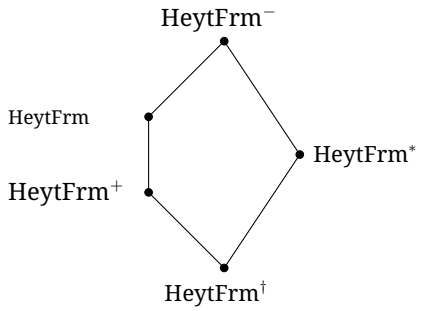
(2) 设 $L \in$ CohFrm。对偶化引理 2.3(1)，可得 $A \in$分布格是 Heyting 代数，当且仅当 pf(A) 是 Esakia 空间。因此， $K(L)$ 是 Heyting 代数，当且仅当 pf($K(L)$) 是 Esakia 空间。由于 pt(L) 与 pf($K(L)$) 序同胚（见定理2.6 前的一段），由定理 3.2 可得， L 是 Heyting 框架，当且仅当 pt(L) 是 Esakia 空间。□

由此，我们得到 Heyting 代数、海廷框架与 Esakia 空间之间的一一对应关系。接下来，我们考察 Heyting 框架之间的各种态射。

定义 3.5。

(1) 令 $\mathbf{HeytFrm}^-$ 为由海廷框架及相干框架同态构成的范畴。(2) 令 HeytFrm 为由海廷框架及相干框架同态构成的范畴，其中这些同态在紧元上的限制是 HA 态射。(3) 令 $\mathbf{HeytFrm}^+$ 为由海廷框架及保持蕴涵的相干框架同态构成的范畴。(4) 令 $\mathbf{HeytFrm}^*$ 为由海廷框架及保持紧元的完备格同态构成的范畴。(5) 令 $\mathbf{HeytFrm}^\dagger$ 为由海廷框架及保持紧元的完备海廷同态构成的范畴。

显然，我们有以下范畴包含关系。由于这五个范畴的对象相同，每个包含关系都是宽包含。图中的每个包含关系都是严格的，并且 $\mathbf{HeytFrm}^*$ 与 HeytFrm 和 $\mathbf{HeytFrm}^+$ 不可比较，这将由相应 Esakia 空间范畴的类似结果推出（见例 3.10）。



接下来我们引入相应的 Esakia 空间范畴。我们回顾（例如，见 [12,第 94] 页），拓扑空间的一个可构造子集是形如$U \setminus V$的集合的有限并，其中 U、V为开集。类比之下，我们为 Esakia 空间引入如下概念。

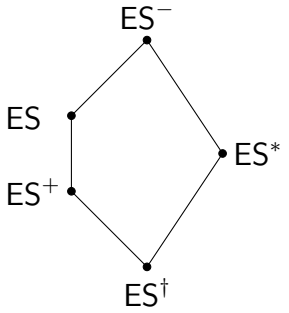
定义 3.6. 设 X 是一个 Esakia 空间。若子集 $E \subseteq X$ 是形如 $U \setminus V$ 的集合的有限并，其中U、V 是开上集，则称 E 为 X 的 Esakia可构造子集，或简称 E-可构造子集。

定义 3.7.

(1) 令 $\mathbf{ES}^-$ 为由 Esakia 空间和 Priestley 态射构成的范畴。(2) 令 ES 为由 Esakia 空间和 Esakia 态射构成的范畴。(3) 令 $\mathbf{ES}^+$ 为由 Esakia 空间和满足 $f(\downarrow \mathrm{cl} E) = \downarrow \mathrm{cl} f^{-1}(E) f^{-1}$的 Priestley 态射构成的范畴，其中该条件对每个 E-可构造子集 E均成立。(4) 令 $\mathbf{ES}^*$ 为由 Esakia 空间和满足 $f(\downarrow \mathrm{cl} D) = \downarrow \mathrm{cl} f^{-1}(D) f^{-1}$的 Priestley 态射构成的范畴，其中该条件对每个下集 D均成立。(5) 令 $\mathbf{ES}^\dagger$ 为由 Esakia 空间以及既是 $\mathbf{ES}^+$ 又是 $\mathbf{ES}^*$-态射的映射构成的范畴。

注 3.8。由于 $\downarrow$、cl 和 f^{-1} 保持有限并，在 $\mathbf{ES}^+$ 的定义中，我们可以假设 $E = U \setminus V$，其中 U、V为开上集。

由此得到以下范畴的宽包含关系。唯一不显然的包含关系是 $\mathbf{ES}^+$ 是 ES 的宽子范畴。我们将在引理 3.9 中证明这一点。



引理 3.9。$\mathbf{ES}^+$ 是 ES 的宽子范畴。

证明。设 $f: X \to Y$ 是一个 $\mathbf{ES}^+$-态射。为证明 f 是一个 ES-态射，根据引理 2.3(2)，只需证明对于每个既开又闭子集 U of Y，都有 $f^{-1}(\downarrow U) = \downarrow f^{-1}(U)$。由于 $\{C \setminus D: C, D \in \mathbf{ClopUp}(Y)\}$ 是 Y上的拓扑的一个基，且 U是既开又闭的，因此它是有限个 $U_i \setminus V_i$的并，其中 $U_i, V_i \in \mathbf{ClopUp}(Y)$。因此， U是 E-可构造的，故

$$f^{-1}(\downarrow U) = f^{-1}(\downarrow \mathsf{cl} U) = \downarrow \mathsf{cl} f^{-1}(U) = \downarrow f^{-1}(U)$$

因为 f 是一个 $\mathbf{ES}^+$-态射。 □

在下一个例子中，我们将证明上图中的每个包含关系都是真包含关系，并且 $\mathbf{ES}^*$ 与 ES 和 $\mathbf{ES}^+$ 不可比较。本节稍后得到的对偶结果将表明，相应的海廷框架范畴也具有相同性质。

例 3.10。

(1) 令 $X_1 = \{x, y\}$ 为满足 $x < y$ 的二元链。我们将 X_1 视为具有离散拓扑的 Esakia 空间。定义 $f: X_1 \to X_1$ 为 $f(x) = f(y) = x$。于是 f 保序。因此，对于 X_1 的每个下集 D， $f^{-1}(D)$ 都是一个下集。由于 X_1 上的拓扑是离散拓扑，这意味着 f 是一个 $\mathbf{ES}^*$-态射。然而，f 不是 ES-态射，因为 $f^{-1}(\downarrow y) = X_1$，但 $\downarrow f^{-1}(y) = \varnothing$。因此，$\mathbf{ES}^*$ 不是 ES 的子范畴。由于 $\mathbf{ES}^+$ 是 ES 的宽子范畴，且 $\mathbf{ES}^*$ 是 $\mathbf{ES}^-$ 的宽子范畴，因此 $\mathbf{ES}^*$ 不是 $\mathbf{ES}^+$ 的子范畴，而 ES 是 $\mathbf{ES}^-$ 的真宽子范畴。

(2) 令 E 和 O 分别为偶自然数集和奇自然数集。令 $X_2 = \mathbb{N} \cup \{\infty_E, \infty_O\}$ 为离散空间 $\mathbb{N}$ 的双点紧化，其中 ∞_E 是 E 的极限点，而 ∞_O 是 O 的极限点。我们还令 $X_3 = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为 $\mathbb{N}$ 的单点紧化。显然， X_2 和 X_3 是 Stone 空间，因此它们是具有平凡序的 Esakia 空间。定义 $f: X_2 \to X_3$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$， $f(n) = n$，并且 $f(\infty_E) = f(\infty_O) = \infty$。由于 f 连续且序是平凡的， f 显然是一个 ES- 态射。另一方面，

$$f^{-1}(\downarrow \mathsf{cl} E) = f^{-1}(\mathsf{cl} E) = f^{-1}(E \cup \{\infty\}) = E \cup \{\infty_E, \infty_O\}$$

尽管 $\downarrow \mathrm{cl} f^{-1}(E) = \mathrm{cl}(E) = E \cup \{\infty_E\}$。因此，由于 E 是 E-可构造的，f 不是 ES$^+$-态射。故 ES$^+$ 是 ES 的真宽子范畴。

(3) 令 $X_4 = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为离散空间 $\mathbb{N}$ 的单点紧化。在 X_4 上定义 $\leq$：$u \leq v$ 当且仅当 $u = v$ 或 $v = \infty$。容易验证，X_4 是一个 Esakia 空间。回想 (1) 中的 X_1，定义 $f: X_1 \to X_4$，使得 $f(x) = 0$ 且 $f(y) = \infty$。显然，f 是一个 ES- 态射。显然，$\mathbb{N}$ 是 X_4 的一个下集，且 $\downarrow \mathrm{cl}\mathbb{N} = X_4$。因此，$f^{-1}(\downarrow \mathrm{cl}\mathbb{N}) = X_1$。但是 $f^{-1}(\mathbb{N}) = \{x\}$，所以 $\downarrow \mathrm{cl} f^{-1}(\mathbb{N}) = \{x\}$。于是，$f$ 不是 ES*-态射。因此，ES 和 ES* 互不可比。由于 ES 是 ES$^-$ 的一个宽子范畴，因此 ES* 是 ES$^-$ 的真宽子范畴。

接下来证明 f 是一个 ES$^+$-态射。设 $W = U \setminus V$，其中 U、V 是 X_2的开上集。若 $\infty \in W$，则 $\downarrow \mathrm{cl} W = X_2$，所以 $f^{-1}(\downarrow \mathrm{cl} W) = X_1$。此外，$y \in f^{-1}(W)$，因此 $\downarrow \mathrm{cl} f^{-1}(W) = X_1$。若 $\infty \notin W$，则 W必为有限下集。因此，$f^{-1}(\downarrow \mathrm{cl} W)$为 $\{x\}$或 $\varnothing$，具体取决于 $0 \in W$是否成立。同理，$\downarrow \mathrm{cl} f^{-1}(W)$为 $\{x\}$或 $\varnothing$，所以根据注 3.8，f是一个 ES$^+$-态射。因此，ES$^+$ 和 ES* 也互不可比。

(4) 由 (1) 和 (3) 可知，ES† 是真宽子范畴，同时也是 ES* 和 ES$^+$的真宽子范畴。

接下来我们引入相应的 Heyting 代数范畴。令 HA$^-$ 为 DL 的全子范畴，其对象为 Heyting 代数。以下结论可直接由 DL 与 CohFrm 的等价、CohFrm 与 PS 的对偶等价以及定理 3.4 得出。

定理 3.11. HA$^-$ 与 HeytFrm$^-$ 等价，并且与 ES$^-$对偶等价 .

接下来，我们证明 HeytFrm 与 HA 等价，因此与 ES 对偶等价。为此，我们需要以下引理。回顾一下，对于 $A \in$ 分布格，$\mathscr{J}(A)$ 的紧元恰好是 $a \in A$ 的主理想 $\downarrow a$。我们还回顾，对于 DL-态射h：$A \to B$，框架同态 h^*：$\mathscr{J}(A) \to \mathscr{J}(B)$ 由 $h^*(I) = \downarrow h[I]$ 给出。

引理 3.12. 设 h：$A \to B$ 是海廷代数之间的一个 DL-态射。那么，h 是海廷同态，当且仅当 h^* 保持紧元的蕴涵。

证明。设 $a, b \in A$。由于 A 是海廷代数，根据引理 2.5，

$$\begin{aligned} \downarrow a \to \downarrow b &= \{x \in A : x \wedge y \leq b \ \forall y \in \downarrow a\} \\ &= \{x \in A : x \wedge a \leq b\} = \downarrow (a \to b). \end{aligned}$$

由于 h是保序的，$h[\downarrow x] \subseteq \downarrow h(x)$，因此对于每个 $x \in A$，都有 $\downarrow h[\downarrow x] = \downarrow h(x)$。于是，利用 $\downarrow a \to \downarrow b = \downarrow (a \to b)$，我们得到

$$h^*(\downarrow a \to \downarrow b) = h^* \downarrow (a \to b) = \downarrow h[\downarrow (a \to b)] = \downarrow h(a \to b).$$

另一方面，类似的计算可得

$$h^*(\downarrow a) \to h^*(\downarrow b) = \downarrow h[\downarrow a] \to \downarrow h[\downarrow b] = \downarrow h(a) \to \downarrow h(b) = \downarrow (h(a) \to h(b)).$$

因此，

$$\begin{aligned} h^*(\downarrow a \to \downarrow b) = h^*(\downarrow a) \to h^*(\downarrow b) \ &\text{iff} \ \downarrow h(a \to b) = \downarrow (h(a) \to h(b)) \\ &\text{iff} \ h(a \to b) = h(a) \to h(b). \end{aligned}$$

因此， h 是海廷同态，当且仅当 h^* 保留紧元的蕴涵。 □

由引理 2.3(2)可知，若 f 是 Esakia 空间之间的 Priestley 态射，则 f 是 Esakia 态射，当且仅当 f^{-1} 保持闭开上集上的蕴涵。我们将这一事实与引理 3.12 一同使用，以证明定理 3.11 中的等价和对偶等价限制后可得定理 3.14。为此，我们注意到以下内容：

注 3.13. 若 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$是某个等价或对偶等价的一部分，且 $\mathscr{C}'$（分别为 $\mathscr{D}'$）是 $\mathscr{C}$ （分别为 $\mathscr{D}$）的子范畴，那么要证明 F 限制后构成 $\mathscr{C}'$与 $\mathscr{D}'$之间某个等价或对偶等价的一部分，只需验证以下三个条件。

(1) 若 $A \in \mathscr{C}$，则 $A \in \mathscr{C}'$当且仅当 $F(A) \in \mathscr{D}'$。(2) 若 f是 $\mathscr{C}$中的一个态射，则 f是 $\mathscr{C}'$中的一个态射，当且仅当 $F(f)$是 $\mathscr{D}'$中的一个态射。(3) $\mathscr{C}$中连接 $\mathscr{C}'$ 内对象的同构是 $\mathscr{C}'$中的同构；对于$\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}'$，情况也相同。

本注也将用于证明定理 3.16 和 3.21，以及推论 3.18、3.24 和 3.26。

定理 3.14. HeytFrm 与 HA 等价，并与 ES 对偶等价。 .

证明. 我们首先证明 HeytFrm 与 HA 等价。显然，注 3.13 的条件 (1) 得到满足，因为 HeytFrm 是 $\mathrm{HeytFrm}^-$ 的宽子范畴，而 HA 是 HA^- 的宽子范畴。引理 3.12 表明，海廷代数之间的 DL-态射 h 是 HA 态射，当且仅当它是 HeytFrm 态射。因此，条件 (2) 得到满足。由我们所考虑的所有框架范畴和海廷代数范畴中的同构都是偏序集同构这一事实可知，条件 (3) 也得到满足。因此，定理 3.11 的等价限制为 HA 与 HeytFrm 之间的等价。

接下来我们证明 ES 与 HeytFrm 对偶等价。显然，条件 (1) 成立。由引理 2.3(3) 可知，Esakia 空间之间的 PS 态射 f 是 ES 态射，当且仅当 $f^{-1}\colon \mathrm{ClopUp}(Y) \to \mathrm{ClopUp}(X)$ 是 HA 态射；这等价于$f^{-1}\colon \mathrm{OpUp}(Y) \to \mathrm{OpUp}(X)$ 是 HeytFrm 态射。因此，条件 (2) 得证。所有我们所考虑的 Priestley 空间与 Esakia 空间范畴中的同构都是序同胚（即偏序集同构与同胚），由此可知条件 (3) 也成立。因此，定理 3.11 中 ES^- 与 $\mathrm{HeytFrm}^-$ 之间的对偶限制为 ES 与 HeytFrm 之间的对偶。□

不仅考虑在紧元上保持蕴涵的框架同态，也考虑 HA 态射，这是很自然的做法。由此得到 Esakia 对偶的一个受限版本，下面我们将对此进行描述。为此，我们回顾一下（例如，参见 $[10,$ 第 $16]$ 页）：若 X 是一个拓扑空间，则 X 的开子集框架中的蕴涵定义为

$$U \to V = X \setminus \mathsf{cl}(U \setminus V).$$

若 X 是一个 Priestley 空间，则 $\mathrm{OpUp}(X)$ 恰好是相应谱拓扑的开集框架。由于谱拓扑中的闭包为 $\downarrow\mathsf{cl}$（例如，见 $[1,$ 引理 6.5(1)$]$），

OpUp(X) 中的蕴涵由下式给出

$$U \to V = X \setminus {\downarrow}\mathsf{cl}(U \setminus V). \tag{1}$$

引理 3.15. 设 $f\colon X \to Y$ 是 Esakia 空间之间的 Priestley 态射。当且仅当对于 Y的每个 E- 可构造子集 E，都有 $f^{-1}\colon \mathrm{OpUp}(Y) \to \mathrm{OpUp}(X)$ 是一个 HA 态射。

证明. 设 U, V是 Y的开上集。由公式（1），

$$f^{-1}(U \to V) = f^{-1}(Y \setminus {\downarrow}\mathsf{cl}(U \setminus V)) = X \setminus f^{-1}{\downarrow}\mathsf{cl}(U \setminus V)$$

and

$$f^{-1}(U) \to f^{-1}(V) = X \setminus {\downarrow}\mathsf{cl}(f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)) = X \setminus {\downarrow}\mathsf{cl} f^{-1}(U \setminus V).$$

因此，当且仅当对于满足 $U, V \in \mathrm{OpUp}(Y)$ 的每个 $E = U \setminus V$，都有 $f^{-1}{\downarrow}\mathsf{cl}E = {\downarrow}\mathsf{cl} f^{-1}E$，$f^{-1}$才保持蕴涵。由于 f^{-1}、$\downarrow$和 cl 保持有限并，当且仅当对于 Y的每个 E-可构造子集 E，都有 f^{-1}是一个 HA 态射。□

定理 3.16. $\mathrm{HeytFrm}^+$ 与 ES^+对偶等价。

证明。引理 3.15 表明，Priestley 态射 $f\colon X \to Y$ 是 ES^+-态射，当且仅当 $f^{-1}\colon \mathrm{OpUp}(Y) \to \mathrm{OpUp}(X)$ 是 $\mathrm{HeytFrm}^+$-态射。因此，$\mathrm{HeytFrm}^-$ 与 ES^- 之间的对偶性限制为 $\mathrm{HeytFrm}^+$ 与 ES^+ 之间的对偶性。□

定义3.17。令 HA^+ 为 HA^- 的宽子范畴，其态射 $h\colon A \to B$ 具有以下性质：$h^*\colon \mathscr{J}(A) \to \mathscr{J}(B)$ 是一个 HA 态射。

由引理 3.12 可知，HA^+ 是 HA 的宽子范畴。作为定理 3.11 和 3.16 的直接推论，我们得到：

推论 3.18。$\mathrm{HeytFrm}^+$ 等价于 HA^+，并且与 ES^+ 对偶等价。

众所周知，拓扑空间之间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 是开映射，当且仅当 f^{-1} 对 Y 的所有子集都与闭包算子交换（例如参见 [18, 第 99–100] 页）。由于 Priestley 空间的谱拓扑中的闭包是 $\downarrow$cl，引理 3.15 的条件表明，f^{-1} 与 Y 的 E-可构造子集上的谱闭包算子交换。我们给出一个例子，说明这样的映射在 X 和 Y 的谱拓扑中可能不是开映射。

例 3.19. 设 $X = \{*\}$ 是一个单点空间，X_4 是例 3 中讨论的单点紧化。定义 $f\colon X \to X_4$，使得 $f(*) = \infty$。那么 f 是一个 ES-态射，但不是开映射，因为 ∞ 不是 X_4 的谱拓扑中的孤立点。另一方面，注意到 X 是离散的，且 X_4 的开上集既开又闭。因此，E 的每个 E-可构造子集 X_4 都是既开又闭的。于是，由引理 2.3(2)，

$${\downarrow}\mathsf{cl} f^{-1}(E) = {\downarrow} f^{-1}(E) = f^{-1}({\downarrow}E) = f^{-1}({\downarrow}\mathsf{cl}E).$$

因此，f 满足引理 3.15 的条件。

接下来，我们将关注保持任意交的同态。

引理 3.20. 设 $f\colon X \to Y$ 是 Priestley 空间之间的 Priestley 态射。那么， $f^{-1}\colon \mathrm{OpUp}(Y) \to \mathrm{OpUp}(X)$ 保持任意交，当且仅当对于 Y 的任意下集 D， $f^{-1}{\downarrow}\mathrm{cl}D = {\downarrow}\mathrm{cl}f^{-1}D$。

证明。框架同态 f^{-1} 保持任意交，当且仅当对于 Y 的每族开上集 $\{U_\alpha\}$ ，有

$$f^{-1}\left(\bigwedge U_\alpha\right) = \bigwedge f^{-1}(U_\alpha).$$

我们回顾一下，包含在集合 $E \subseteq Y$ 中的最大上集是 $\Box E = Y \setminus {\downarrow}(Y \setminus E)$，这里采用方框记号，这在模态逻辑中很常见（例如参见 [6]）。由于在每个 Priestley 空间中，闭集的下集是闭集（例如参见 [17, 命题 2.6]），如果 E 是开集，那么 $\Box E$ 是开集。因此， $\bigwedge U_\alpha = \Box(\mathrm{int}\bigcap U_\alpha)$。于是，

$$f^{-1}\left(\bigwedge U_\alpha\right) = f^{-1}\left(\Box\,\mathsf{int}\bigcap U_\alpha\right)$$

and

$$\bigwedge f^{-1}(U_\alpha) = \Box\,\mathsf{int}\bigcap f^{-1}(U_\alpha) = \Box\,\mathsf{int}f^{-1}\left(\bigcap U_\alpha\right).$$

由于在每个 Priestley 空间中，点的下集是闭集，上集恰好是开上集的交。因此，对于 Y 的每个上集 U， f^{-1} 保持交当且仅当 $f^{-1}(\Box\mathrm{int}U) = \Box\mathrm{int}f^{-1}(U)$。这当且仅当 $f^{-1}(Y \setminus {\downarrow}\mathrm{cl}(Y \setminus U)) = X \setminus {\downarrow}\mathrm{cl}(X \setminus f^{-1}(U))$，而这又当且仅当 $f^{-1}{\downarrow}\mathrm{cl}(Y \setminus U) = {\downarrow}\mathrm{cl}(X \setminus f^{-1}(U)) = {\downarrow}\mathrm{cl}f^{-1}(Y \setminus U)$。由于 Y 的每个下集 D 都可表示为某个 Y 的上集 U 的形式，结论得证。□

定理 3.21. $\mathbf{HeytFrm}^*$ 与 $\mathbf{ES}^*$对偶等价。

证明。由引理 3.20 可知，Priestley 态射 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathbf{ES}^*$-态射，当且仅当 $f^{-1}\colon \mathrm{OpUp}(Y) \to \mathrm{OpUp}(X)$ 是 $\mathbf{HeytFrm}^*$-态射。因此，$\mathbf{HeytFrm}^-$ 与 $\mathbf{ES}^-$ 之间的对偶性限制为 $\mathbf{HeytFrm}^*$ 与 $\mathbf{ES}^*$之间的对偶性。□

注 3.22. 由例 3 和定理 3.21 可知，$\mathbf{HeytFrm}^+$ 与 $\mathbf{HeytFrm}^*$不可比较。当我们限制到次拟合海廷框架时，情况发生了变化；我们回顾（例如，参见 [14, 第 73] 页），框架 L 是次拟合的，当且仅当对于满足 $a \not\leq b$的 a、$b \in L$ ，存在 $c \in L$ 满足 $a \vee c = 1$ 和 $b \vee c \neq 1$。事实上，如果 L、M 是海廷框架，且 L 是次拟合的，那么由 [14, 命题 V.1.8] 可知，每个 $\mathbf{HeytFrm}^*$-态射 $\alpha : L \to M$ 都是 $\mathbf{HeytFrm}^+$-态射。

定义 3.23. 令 $\mathbf{HA}^*$ 为 $\mathbf{HA}^-$ 的宽子范畴，其态射 $h\colon A \to B$ 还满足以下性质： $h^*\colon \mathscr{J}(A) \to \mathscr{J}(B)$ 是一个完备格同态。

由定理 3.11 和 3.21 可立即得到:

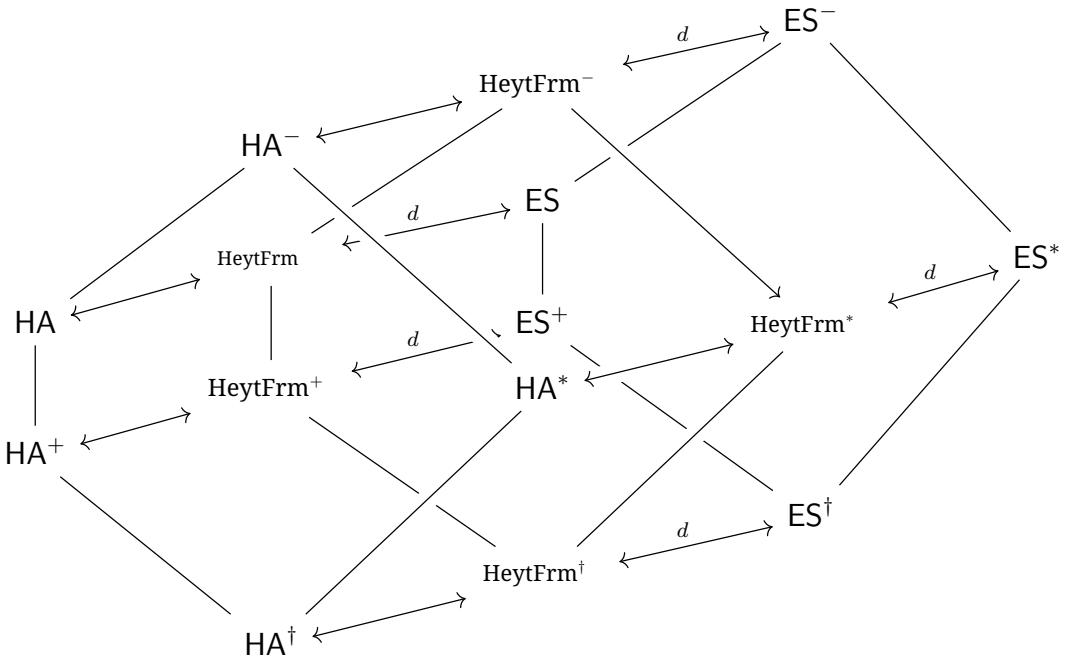
推论 3.24. $\mathbf{HeytFrm}^*$ 等价于 $\mathbf{HA}^*$ ，并与 $\mathbf{ES}^*$ 对偶等价。

定义 3.25. 令 $\mathbf{HA}^\dagger = \mathbf{HA}^+ \cap \mathbf{HA}^*$。

结合推论 3.18 和 3.24 可得:

推论 3.26。$\mathbf{HeytFrm}^\dagger$ 与 $\mathbf{HA}^\dagger$ 等价，并与 $\mathbf{ES}^\dagger$对偶等价。

由此，我们得到如下图示，其中涉及本节讨论的海廷代数、海廷框架和 Esakia 空间的各个范畴及其等价与对偶等价。未标注的箭头表示等价，标有 d 的箭头表示对偶等价。



4. Brouwerian frames

在本节最后，我们将说明如何把上一节的结果推广到布劳威尔半格和布劳威尔代数。回顾一下，交半格是一个偏序集 A，其中所有有限交都存在。特别地，A 有顶元，但 A 可能没有底元。如果 $a \wedge b \leq c$ 蕴涵存在 $a' \geq a$和 $b' \geq b$，使得 $a' \wedge b' = c$，则称交半格是分配的。交半格同态是保持有限交（包括顶元）的交半格之间的映射。令 DMS 为分配 meet 半格及交半格同态构成的范畴。

定义 4.1. 设 A是一个交半格。

(1) 如果 A 具有蕴涵运算 $\to$，且满足 $x \leq a \to b$ 当且仅当 $a \wedge x \leq b$，则称其为布劳威尔半格或蕴涵半格。令 BrwMS 为布劳威尔半格及保持有限交和蕴涵的映射构成的范畴。(2) 如果布劳威尔半格 A还满足 A是一个格，则称其为布劳威尔代数。令 BrwA 为布劳威尔代数及布劳威尔半格同态构成的范畴，并要求这些同态还保持 $\vee$。

请注意，BrwA 是 BrwMS 的一个非全子范畴。此外，每个 Brouwer 半格都是分配 meet-半格。因此，BrwMS 是 DMS 的一个非全子范畴。

我们首先将 Esakia 对偶推广到布劳威尔代数。为此，我们需要研究带基点的 Esakia 空间。

定义 4.2。带基点的 Esakia 空间是一个有序对 (X, m)，其中 X 是一个 Esakia 空间，且 m 是 X 的唯一最大元。令 PES 表示带基点的 Esakia 空间及 Esakia 态射构成的范畴。

注意，若 (X, m) 和 (Y, n) 是带基点的 Esakia 空间，且 $f\colon X \to Y$是一个 Esakia 态射，则 $f(m) = n$。Esakia 对偶可推广到布劳威尔代数，如下所示：

定理 4.3. [5,定理 3.2] BrwA 与 PES 对偶等价。

注 4.4. 建立 Esakia 对偶的反变函子需要稍作修改。具体而言，对于带基点的 Esakia 空间 (X, m)，我们将其对应到 X 的非空闭开上集所构成的布劳威尔代数（等价地，X 中包含 m的那些闭开上集）。此外，对于布劳威尔代数 A，我们将其对应到带基点的 Esakia 空间 (X, m)，其中 X 是 A 的素滤子集合与 A的并集，而 A 是 X的唯一最大 m。函子对态射的作用与 Esakia 对偶中的相同。

接下来，我们将 Esakia 对偶推广到 Brouwer 半格。带基点的 Priestley 空间是一个二元组 (X, m)，其中 X 是一个 Priestley 空间，且 m 是 X的唯一最大元。设 X_0 是 $X \setminus \{m\}$的一个固定子集。若 $X_0 \setminus U$在 $X \setminus U$中共尾（即 $X \setminus U \subseteq {\downarrow}(X_0 \setminus U)$），则称 U是 X 的可容许子集。令 $\mathscr{A}(X)$ 表示 X的可容许闭开上集所成的集合。对于$x \in X$，定义 $\mathscr{I}_x = \{U \in \mathscr{A}(X) : x \notin U\}$。

定义 4.5。

(1) 带基点广义 Priestley 空间是一个三元组 (X, X_0, m)，满足：(a) (X, m) 是一个带基点的 Priestley 空间；(b) X_0 是 $X \setminus \{m\}$的共尾稠密子集；(c) 当且仅当 $\mathscr{I}_x$ 非空且有向时，$x \in X_0$；(d) 当且仅当 $(\forall U \in \mathscr{A}(X))(x \in U \Rightarrow y \in U)$ 时，$x \leq y$。(2) 带基点的广义 Esakia 空间是一个带基点广义 Priestley 空间，其中若$U, V \in \mathscr{A}(X)$，则 ${\downarrow}(U \setminus V)$ 是既开又闭的。

注 4.6. 设 (X, X_0, m) 是一个带基点的广义 Esakia 空间。仿照 [4,定义 3.4], ，若子集 E 满足 $E = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i \setminus V_i)$，其中每个 $U_i, V_i \in \mathscr{A}(X)$，则称其为 X 的 Esakia 闭开集，或简称 E-闭开集。由定义 4.5(2)容易看出，每个 E-闭开集 E都是闭开集 ${\downarrow}E$。然而，X 的闭开集并非个个都是 E-闭开集。因此，带基点的广义 Esakia 空间未必是 Esakia 空间（见 [4, 例 3.9]）。

设 $R \subseteq X \times Y$是集合 X 与 Y之间的一个关系。对于 $U \subseteq Y$，我们沿用模态逻辑中的标准记法，写作 $\Box_R U = \{x \in X : R[x] \subseteq U\}$。

定义 4.7.

(1) 设 X, Y 是带基点的广义 Priestley 空间。广义 Priestley 态射是满足以下条件的关系 $R \subseteq X \times Y$：(a) 若 $x \not R y$，则存在 $U \in \mathscr{A}(Y)$，使得 $R[x] \subseteq U$ 且 $y \notin U$；(b) 若 $U \in \mathscr{A}(Y)$，则 $\Box_R U \in \mathscr{A}(X)$。(2) 令 PGPS 为带基点的广义 Priestley 空间及广义 Priestley 态射所构成的范畴。

(3) 若 X, Y 是带基点的广义 Esakia 空间，则当满足以下条件时，广义 Priestley 态射 $R \subseteq X \times Y$ 是广义 Esakia 态射：每当 $x \in X$ 且 $y \in Y_0$ 满足 xRy 时，就存在 $z \in X_0$，使得 $x \leq z$ 且 $R[z] = {\uparrow}y$。(4) 令 PGES 为带基点的广义 Esakia 空间及广义 Esakia 态射所构成的范畴。

注 4.8。PGPS 和 PGES 中的复合并非通常意义上的关系复合。对于广义 Priestley（分别为 Esakia）态射 $R \subseteq X \times Y$和 $S \subseteq Y \times Z$，复合$S * R \subseteq X \times Z$ 定义如下：

$$x(S * R)z \iff (\forall U \in \mathscr{A}(Z))(x \in \Box_R \Box_S U \implies z \in U)$$

对所有 $x \in X$ 和 $z \in Z$ 均成立（见 [3, 第 106] 页）。

显然，PGES 是 PGPS 的非全子范畴，Priestley 对偶性和 Esakia 对偶性可推广到分配半格和 Brouwer 半格，如下所示：

定理 4.9。

(1) [3,定理 6.9] DMS 与 PGPS 对偶等价。(2) [4,定理 4.4] BrwMS 与 PGES 对偶等价。

注释 4.10。定理 4.9 在 [3, 4] 中针对有界的分配半格和 Brouwer 半格得到了证明。由于这一限制，无需处理带基点空间。当底元不存在时，才需要使用带基点空间。 [2] 对分配交半格详细讨论了这一点，而类似的方法同样适用于 Brouwer 半格。

注释 4.11。反变函子 $\mathscr{A}$：PGPS $\to$ DMS 将 $X \in$ GPS 映射到 $\mathscr{A}(X)$，并将一个 PGPS 态射 $R \subseteq X \times Y$映射为 $\Box_R$： $\mathscr{A}(Y) \to \mathscr{A}(X)$。为定义反变函子 $\mathscr{X}$：DMS $\to$ PGPS，令 $A \in$ DMS。我们回顾一下， A 的滤子 F 称为最优滤子，是指由a_1、……、$a_n \notin F$和 $\bigcap_{i=1}^{n} {\uparrow}a_i \subseteq {\uparrow}c$可以推出 $c \notin F$。等价地，若 D是 A 的分配包络（参见例如 [3, 第 3]节），则 F 是最优滤子，当且仅当对于某个 D 的素滤子P，有 $F = P \cap A$ （[3, 命题 4.8]）。令 Opt(A) 表示 A 的最优滤子集合，Pr(A) 表示 A的素滤子集合。于是 Pr(A) $\subseteq$ Opt(A)。置 $X_A =$ Opt(A) $\cup \{A\}$，按包含关系对其排序，并令其拓扑由以下方式给出：

$$\{\varphi(a) : a \in A\} \cup \{\varphi(b)^c : b \in A\}$$

构成该拓扑的一个子基，其中 $\varphi(a) = \{x \in X_A : a \in x\}$。[2] 于是， $\mathscr{X}(A) := (X_A,$ Pr(A) $A)$ 是一个带基点广义 Priestley 空间。若 $h: A \to B$ 是一个 DMS- 态射，则 $\mathscr{X}(h) = R_h$，其中 xR_hy 当且仅当 $h^{-1}(x) \subseteq y$。函子 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{X}$ 给出了 PGPS 与 DMS 之间的定理 4.9(1) 中的对偶等价，该等价进一步限制为定理 4.9(2) 中的对偶等价。

[2]由于对每个 $a, b \in A$，都有 $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$，子基 $\{\varphi(a) : a \in A\} \cup \{\varphi(b)^c : b \in A\}$ 生成了基 $\{\varphi(a) \cap \varphi(b_1)^c \cap \cdots \cap \varphi(b_n)^c : a, b_1, \ldots, b_n \in A\}$. 然而，与分配格的情形不同，我们不能用一个 $\varphi(b)^c$ 来替代有限交 $\varphi(b_1)^c \cap \cdots \cap \varphi(b_n)^c$，因为 A 不是格。

接下来，我们将分配格和蕴涵半格与代数框架联系起来。设 A 是一个分配交半格。由于 A 不是格，与其研究 A的理想，不如研究 A的滤子。设 $\mathscr{F}(A)$ 为 A 的滤子按包含关系构成的偏序集。那么， $\mathscr{F}(A)$ 是一个代数框架，其紧元是 A的主滤子。但由于 $a \leq b$ 当且仅当 $\uparrow a \supseteq \uparrow b$，我们有 A 同构于 $K(\mathscr{F}(A))$ 的序对偶 $K(\mathscr{F}(A))^d$。

若 $h: A \to B$ 是交半格同态，我们可以定义 $\mathscr{F}(h): \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(B)$，使得 $\mathscr{F}(h)(F) = \uparrow h[F]$。注意，一般而言， $\mathscr{F}(h)$ 保持任意并，但未必是框架同态。要使 $\mathscr{F}(h)$ 成为框架同态，我们还需要对 h 加上两个条件。回顾一下，交半格 A 的素滤子是 $\mathscr{F}(A)$ 的一个 meet-素元。

定义 4.12。 [2, 定义 5.15] 令 $\mathbf{DMS_P}$ 为分配 meet 半格及交半格同态 $h: A \to B$ 所构成的范畴，其中的同态还满足：

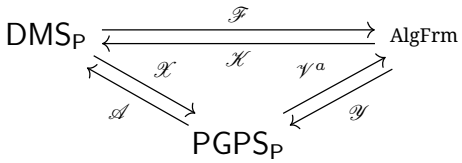
(1) h保持所有已存在的有限并。(2) 对每个 B 的素滤子 P，
$h^{-1}(P)$ 都是 A 的素滤子。

满足上述两个条件的交半格同态，对应于相应广义 Priestley 空间之间的特殊函数：

定义 4.13. 令 $\mathbf{PGPS_P}$ 为带基点广义 Priestley 空间及保序映射 $f: X \to Y$ 所成的范畴，其中映射满足

(1) $U \in \mathscr{A}(Y) \Longrightarrow f^{-1}(U) \in \mathscr{A}(X)$.
(2) $f[X_0] \subseteq Y_0$.

定理 4.14. [2,Thm. 5.18] $\mathbf{DMS_P}$ 与 AlgFrm 等价，与 $\mathbf{PGPS_P}$ 对偶等价，并且下图在自然同构意义下交换。



注 4.15. 我们简要介绍上图中的函子。

• 反变函子 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{A}$ 在注释 4.11 中有描述。

• 协变函子 $\mathscr{F}: \mathbf{DMS_P} \to \mathbf{AlgFrm}$ 将 $A \in \mathbf{DMS_P}$ 映射到由 A 的滤子构成的框架 $\mathscr{F}(A)$；对于 $\mathbf{DMS_P}$-态射 $h: A \to B$ 到 $\mathscr{F}(h)$，其映射为 $\mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(B)$，由 $\mathscr{F}(h)(F) = \uparrow h[F]$ 给出。协变函子 $\mathscr{K}$ 将 $L \in \mathbf{AlgFrm}$ 映射到 $K(L)^d$；对于 AlgFrm- 态射 $\alpha: L \to M$，其映射为其在 $K(L)^d$ 上的限制，其中 $K(L)^d$ 是 $K(L)$ 的序对偶。函子 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{K}$ 给出了 $\mathbf{DMS_P}$ 与 AlgFrm 之间的等价。

• 为了描述反变函子 $\mathscr{V}^a: \mathbf{PGPS_P} \to \mathbf{AlgFrm}$，对于 $X \in \mathbf{PGPS}$，令 $\mathscr{V}^a(X)$ 为 X 的可容许闭上集集合，并按反向包含排序。于是 $\mathscr{V}^a$ 将$X \in \mathbf{PGPS_P}$ 映到 $\mathscr{V}^a(X)$，并将 $\mathbf{PGPS_P}$-态射 $f: X \to Y$ 映到 $f^{-1}: \mathscr{V}^a(Y) \to \mathscr{V}^a(X)$。为了描述反变函子 $\mathscr{Y}: \mathbf{AlgFrm} \to \mathbf{PGPS_P}$，我们回顾伪素元和素元的概念。若 L 是一个框架且 $1 \neq p \in L$，则 p 是（交）素元

若 a、$b \in L$ 和 $a \wedge b \leq p$ 蕴含 $a \leq p$ 或 $b \leq p$。此外，若 a_1、……、$a_n \in L$ 满足 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \ll p$，则对于某个 i，p 是伪素元，其中 $\ll$ 是 L 上的远低于关系（例如参见 [11, 第 49] 页）。令 $PP(L)$ 和 $P(L)$ 分别为 L 的伪素元集合和素元集合。我们令 $Y_L = PP(L) \cup \{1\}$，赋予其从 L 继承的序，并用以下子基赋予其拓扑

$$\{\uparrow k \cap Y_L : k \in K(L)\} \cup \{(\uparrow l)^c \cap Y_L : l \in K(L)\}.$$

于是函子 $\mathscr{Y}$ 将 $L \in$ AlgFrm 映射到 $\mathscr{Y}(L) := (Y_L, P(L), 1)$。为描述 $\mathscr{Y}$ 对态射的作用，设 $\alpha : L \to M$ 是一个 AlgFrm 态射。那么它有如下右伴随 $r : M \to L$：

$$r(b) = \bigvee \{a \in L : \alpha(a) \leq b\},$$

并将 α 映射到 r。函子 $\mathscr{V}^a$ 和 $\mathscr{Y}$ 给出 $\mathsf{PGPS_P}$ 与 AlgFrm 之间的对偶等价。

注 4.16. 由定理 4.14 可知，$\mathscr{X} \circ \mathscr{K}$ 与 $\mathscr{Y}$ 自然同构。这意味着，L 的素元对应于 $K(L)^d$ 的素滤子，而 L 的伪素元对应于 $K(L)^d$ 的最优滤子。众所周知（例如参见 [14, 第 13-14] 页），L 的素元对应于 L 的点。另一方面，伪素元对应于我们称为 L 的“伪点”的对象，其定义如下。U 的非空上集（其中 L ）称为伪点，如果

- $\bigvee S \in U$ 蕴含 $S \cap U \neq \varnothing$;
- a_1、……、$a_n \in U$ 和 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \ll b$ 蕴含 $b \in U$。

定义 4.17。

(1) 令 $\mathsf{BrwMS_P}$ 为布劳威尔半格与同时也是 $\mathsf{DMS_P}$-态射的 BrwMS-态射所构成的范畴。

(2) 令 $\mathsf{BrwA_P}$ 为 $\mathsf{BrwMS_P}$ 的全子范畴，由布劳威尔代数组成。

我们现在可以引入本节的关键概念：布劳威尔框架。这些框架对于布劳威尔半格所起的作用，与 Heyting 框架对于 Heyting 代数所起的作用相同。

定义 4.18。

(1) 若代数框架 L a 满足 $K(L)^d$ 是 Brouwer 半格，我们就称其为布劳威尔框架。(2) 令 BrwFrm 为一个范畴，其对象是布劳威尔框架，态射是满足以下条件的 AlgFrm-态射 $\alpha : L \to M$：对于每个 $a, b \in K(L)$，$\alpha(a \to b) = \alpha(a) \to \alpha(b)$，其中两个蕴涵分别在 $K(L)^d$ 和 $K(M)^d$ 中计算。

注4.19。我们没有定义3.1的类似概念，因为颠倒序关系后，蕴涵会变成余蕴涵，而余蕴涵在框架中可能不存在。

定义4.20. 令 $\mathsf{PGES_P}$ 为带基点的广义 Esakia 空间范畴，其态射为 $\mathsf{PGPS_P}$-态射 f，满足：若 $x \in X$、$y \in Y_0$，且 $f(x) \leq y$，则存在 $z \in X_0$，使得 $x \leq z$ 且 $y = f(z)$。

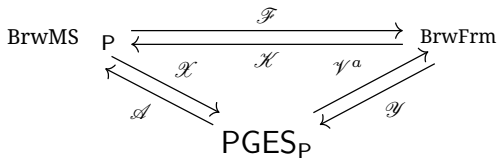
我们证明，定理 4.14 中的函子限制后，给出 $\mathbf{BrwMS_P}$ 与 BrwFrm 之间的等价，以及 BrwFrm 与 $\mathbf{PGES_P}$ 之间的对偶等价。为此，我们需要以下引理，它由 [3, 4]推出。需要稍加注意，因为这些论文只讨论有界情形，而我们并不假设底元存在。尽管如此，相关证明仍可推广到我们更一般的情形。

引理 4.21.

(1) 设 X 是一个带基点的广义 Priestley 空间。那么， X 是带基点的广义 Esakia 空间，当且仅当 $\mathscr{A}(X)$ 是一个 Brouwer 半格。(2) 设 X, Y 是带基点的广义 Esakia 空间，且 $f: X \to Y$ 是一个 $\mathbf{PGPS_P}$-态射。那么， f是一个 $\mathbf{PGES_P}$-态射，当且仅当对每个 $U, V \in \mathscr{A}(Y)$，都有 $f^{-1}(U \to V) = f^{-1}(U) \to f^{-1}(V)$。

证明。(1) 由 [4, 命题 3.7] 和 [3, 定理 5.13]推出；(2) 由 [4, 命题 4.1、4.3、引理 4.8]推出。□

定理 4.22. $\mathbf{BrwMS_P}$ 与 BrwFrm 之间存在范畴等价，BrwFrm 与 $\mathbf{PGES_P}$之间存在对偶等价，并且下图在自然同构意义下交换，其中的函子是定理 4.14 中相应函子的限制。



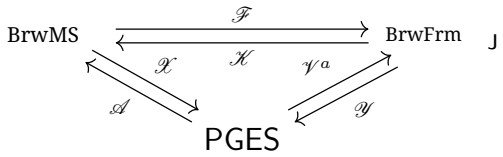
证明。我们证明， $\mathscr{F}$、$\mathscr{K}$限制后给出 $\mathbf{BrwMS_P}$ 与 BrwFrm 之间的等价。若$A \in \mathbf{DMS_P}$, 则由于 $A \cong K(\mathscr{F}(A))^d$，我们看到 $\mathscr{F}(A) \in$ BrwFrm 当且仅当 $A \in \mathbf{BrwMS_P}$。接下来，设 $h: A \to B$ 是布劳威尔半格之间的一个 $\mathbf{DMS_P}$-态射。那么， h 是一个 $\mathbf{BrwMS_P}$-态射，当且仅当它保持蕴涵；而这又当且仅当 $\mathscr{F}(h)$ 是一个 BrwFrm-态射，这再次由同构 $A \cong K(\mathscr{F}(A))^d$和 $B \cong K(\mathscr{F}(B))^d$得出。最后，布劳威尔半格之间的 $\mathbf{DMS_P}$-同构显然是 $\mathbf{BrwMS_P}$- 同构；类似地，布劳威尔框架之间的 AlgFrm- 同构是 BrwFrm- 同构。因此，根据注 3.13， $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{K}$ 限制后给出 $\mathbf{BrwMS_P}$ 与 BrwFrm 之间的等价。

接下来证明， $\mathscr{V}^a$、$\mathscr{Y}$的限制给出了 $\mathbf{PGES_P}$ 与 BrwFrm 之间的对偶等价。设 $X \in \mathbf{PGPS_P}$。由引理 4.21(1)， $X \in \mathbf{PGES_P}$ 当且仅当 $\mathscr{A}(X) \in \mathbf{BrwMS_P}$。根据 [2, 引理 4.4],$\mathscr{V}^a(X)$ 是一个代数框架，且 $K(\mathscr{V}^a(X))^d = \mathscr{A}(X)$。因此， $\mathscr{A}(X) \in \mathbf{BrwMS_P}$ 当且仅当$\mathscr{V}^a(X) \in$ BrwFrm。于是， $X \in \mathbf{PGES_P}$ 当且仅当 $\mathscr{V}^a(X) \in$ BrwFrm。设 $f: X \to Y$是带基点广义 Esakia 空间之间的一个 $\mathbf{PGPS_P}$-态射。由于 $K(\mathscr{V}^a(Y))^d = \mathscr{A}(Y)$，引理 4.21(2) 表明， f是一个 $\mathbf{PGES_P}$-态射，当且仅当对于每个 U， $f^{-1}(U \to V) = f^{-1}(U) \to f^{-1}(V)$ $V \in K(\mathscr{V}^a(Y))$。因此， f是一个 $\mathbf{PGES_P}$-态射，当且仅当 f^{-1} 是一个 BrwFrm-态射。显然，带基点广义 Esakia 空间之间的 $\mathbf{PGPS_P}$-同构也是 $\mathbf{PGES_P}$-同构。因此， $\mathscr{V}^a$ 和 $\mathscr{Y}$的限制给出了 $\mathbf{PGES_P}$ 与 BrwFrm 之间的等价。

根据定理 4.14，可知该图表在自然同构意义下交换。

□

注 4.23. 若在定理 4.22 中将 $\mathsf{BrwMS_P}$ 替换为 BrwMS，并将 $\mathsf{PGES_P}$ 替换为 PGES，则我们需要弱化 BrwFrm-态射 $\alpha: L \to M$ 的概念，去掉 α 保有限交这一条件。若将由此得到的布劳威尔框架范畴记为 $\mathsf{BrwFrm_J}$（其中 J 表示保并），则得到定理 4.22 中图表的以下版本，该图表在自然同构意义下交换:



该证明是沿着 [2,Thm. 4.30] 的思路对定理 4.22 的证明作适当修改。

注 4.24。第 3 节中讨论的其他海廷框架范畴，在布劳威尔框架的情形下也有自然的推广。第 3 节中的等价与对偶等价，因而也推广为涉及相应的布劳威尔框架范畴。

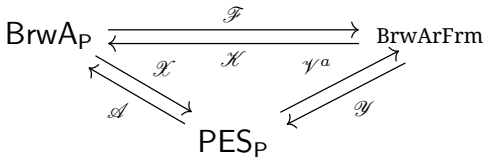
接下来我们研究与布劳威尔代数相对应的布劳威尔框架。回顾一下（例如，见 [11, p. 117]），代数框架 L 是算术的，当且仅当 $a,b \in K(L)$ 蕴含 $a \wedge b \in K(L)$。

定义 4.25。令 BrwArFrm 为 BrwFrm 的全子范畴，其对象是布劳威尔算术框架。

定义 4.26。令 $\mathsf{PES_P}$ 为 PES 的宽子范畴，其态射 $f: (X,m) \to (Y,n)$ 满足 $f^{-1}(\{n\}) = \{m\}$。

注 4.27。对于带基点的 Esakia 空间 (X,m)，若令 $X_0 = X \setminus \{m\}$，则 (X, X_0, m) 是带基点的广义 Esakia 空间。因此，我们可以将 $\mathsf{PES_P}$ 视为 $\mathsf{PGES_P}$ 的全子范畴。

定理 4.28。定理 4.22 中的函子限制后表明，$\mathsf{BrwA_P}$ 等价于 BrwArFrm，并与 $\mathsf{PES_P}$对偶等价。因此，下图在自然同构意义下交换。

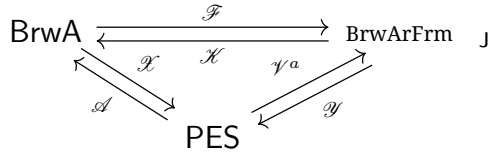


证明。设 $L \in$ BrwArFrm。我们证明 $\mathscr{Y}(L) \in \mathsf{PES_P}$。为此，只需证明$PP(L) \subseteq P(L)$。设 $p \in PP(L)$，且 $a,b \in L$ 满足 $a,b \not\leq p$。由于 L 是代数框架，存在 $k,l \in K(L)$，使得 $k \leq a$，$l \leq b$，并且 $k,l \not\leq p$。由于 L 是算术的，$k \wedge l \in K(L)$。若 $a \wedge b \leq p$，则 $k \wedge l \ll p$。由于 $p \in PP(L)$，因此 $k \leq p$ 或 $l \leq p$。所得矛盾表明 $a \wedge b \not\leq p$，从而 $p \in P(L)$。

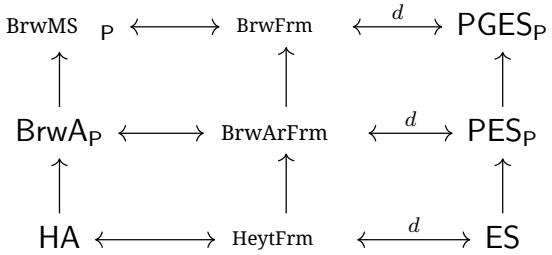
接下来设 $X \in \mathsf{PES_P}$。那么每个非空闭上集都是可容许的，因此，若 $U, V \in \mathscr{A}(X)$，则 $U \cup V \in \mathscr{A}(X)$，因为 $\mathscr{A}(X) = K(\mathscr{V}^a(X))^d$。这表明 $\mathscr{V}^a(X)$ 是算术的，从而 $\mathscr{V}^a(X) \in \mathsf{BrwArFrm}$。

同样容易看出，若 $L \in \mathsf{BrwFrm}$，则 $L \in \mathsf{BrwArFrm}$ 当且仅当 $\mathscr{K}(L) \in \mathsf{BrwA_P}$。因此，由于 $\mathsf{BrwA_P}$、BrwArFrm 和 $\mathsf{PES_P}$ 是 $\mathsf{BrwMS_P}$、BrwFrm 和 $\mathsf{PGES_P}$的全子范畴，结论由定理 4.22 得出。□

注 4.29. 与注 4.23 中一样，若将 $\mathsf{BrwA_P}$ 替换为 BrwA，并将 $\mathsf{PES_P}$ 替换为 PES，则必须将 BrwArFrm 替换为 $\mathsf{BrwArFrm_J}$，才能得到以下在自然同构意义下交换的等价与对偶等价图：



结合定理 3.14、4.22 和 4.28，我们得到以下在自然同构意义下交换的图：



当标签 d 出现时，水平箭头表示等价或对偶等价。除 HeytFrm 实际上并非 BrwArFrm 的子范畴（见下文）外，垂直箭头表示全子范畴。中间一行的等价和对偶等价是顶行的等价和对偶等价的限制。底行的情形略有不同：若 $L \in \mathsf{HeytFrm}$，则我们使用 $K(L)$，而非$K(L)^d$。类似地，若 $X \in \mathsf{ES}$，我们使用 X 的开上集，而非闭上集（按反向包含排序）。

如果我们不使用 HeytFrm，而是使用这样一个范畴：其对象是满足 $K(L)^d$ 为 Heyting 代数的布劳威尔算术框架，其态射为 BrwArFrm-态射，那么我们将得到一个既是 BrwArFrm 的全子范畴、又与 HeytFrm 等价的范畴。换言之，如果我们不使用 Esakia 空间的开上集框架，而是使用闭上集框架（按反向包含排序），那么我们将得到一个范畴，它等价于 BrwArFrm 的一个全子范畴，而该全子范畴又与 HeytFrm 等价。

References

[1] G. Bezhanishvili、N. Bezhanishvili、D. Gabelaia 和 A. Kurz，《分配格与海廷代数的双拓扑对偶》，《数学结构与计算机科学》20（2010年），第3期，359–393页。[2] G. Bezhanishvili、L. CARAI 和 P. J. MORANDI，《从半格的庞特里亚金对偶导出 Priestley 对偶及其推广》，已投稿。可见 https://arxiv.org/abs/2207.13938，2022年。

[3] G. Bezhanishvili 和 R. Jansana，《分配 meet 半格的 Priestley 风格对偶》，Studia Logica 98（2011年），第1–2期，83–122页。[4] ———，《蕴涵半格的 Esakia 风格对偶》，Appl. Categ. Structures 21（2013年），第2期，181–208页。[5] G. Bezhanishvili、T. Moraschini 和 J. G. Raftery，《剩余结构簇中的满态射》，J. Algebra 492（2017年），185–211页。[6] A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev，《模态逻辑》，牛津逻辑指南丛书，第35卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1997年。[7] W. H. Cornish，《关于 H. Priestley 对有界分配格范畴的对偶》，Mat. Vesnik 12(27)（1975年），第4期，329–332页。[8] B. A. Davey 和 J. C. Galati，《海廷对偶的余代数观点》，Studia Logica 75（2003年），第3期，259–270页。[9] L. L. Esakia，《拓扑克里普克模型》，《苏联数学文献》15（1974年），147–151页。[10] ———，《海廷代数：对偶理论》，A. Evseev 从俄文译出，G. Bezhanishvili 和 W. Holliday 编。逻辑前沿丛书，第50卷，施普林格，2019年。[11] G. Gierz、K. H. Hofmann、K. Keimel、J. D. Lawson、M. Mislove 和 D. S. Scott，《连续格与域》，剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[12] R. Hartshorne，《代数几何》，数学研究生教材丛书，第52卷，施普林格出版社，纽约—海德堡，1977年。[13] P. T. Johnstone，《斯通空间》，剑桥高等数学研究丛书，第3卷，剑桥大学出版社，剑桥，1982年。[14]J. Picado 和 A. Pultr，《框架与局部：无点拓扑》，数学前沿丛书，Birkh¨auser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔，2012年。[15] H. A. Priestley，《通过有序斯通空间表示分配格》，《伦敦数学会会刊》2（1970年），186–190页。[16] ———，《有序拓扑空间与分配格的表示》，《伦敦数学会会报》（第3辑）24（1972年），507–530页。[17] ———，《有序集与分配格的对偶》，《序：描述与作用》（拉尔布雷勒，1982年），北荷兰数学研究丛书，第99卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1984年，第39–60页。[18] H. Rasiowa 和 R. Sikorski，《元数学的数学》，数学专著丛书，第41卷，Pa´nstwowe Wydawnictwo Naukowe，华沙，1963年。[19] M. H. Stone，《分配格与布劳威尔逻辑的拓扑表示》，Čas. Mat. Fys. 67（1937年），1–25页。

New Mexico State University
电子邮箱：guram@nmsu.edu

Universitat de Barcelona电子邮箱：
luca.carai.uni@gmail.com

New Mexico State University电
子邮箱：pmorandi@nmsu.edu