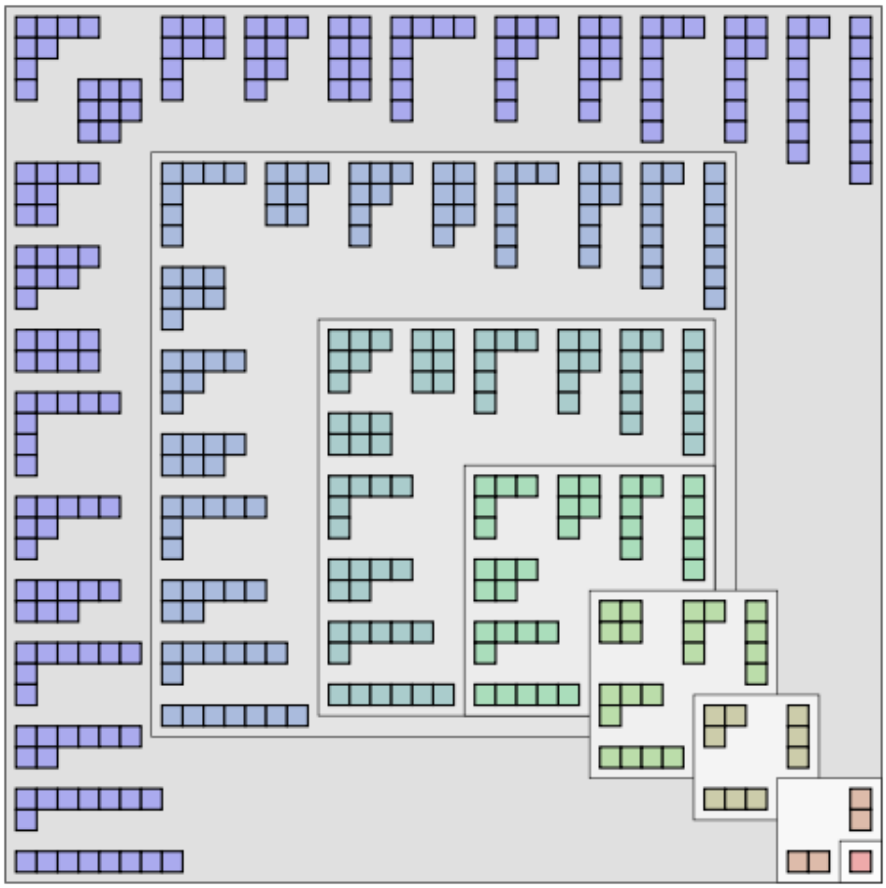
arXiv:2302.07971v1 [math.RT] 15 Feb 2023

杨图与经典群

John Baez 数学系 加州大学河滨分校 2023年2月17日 根据 *ThisWeek'sFinds* 的“week157”



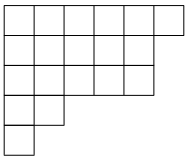
图片作者：R. A. Nonenmacher，知识共享署名-相同方式共享 4.0

数学和物理学常常借助对称性 来简化问题。在这一领域，有两类图经常出现：Dynkin图和杨图。研究具有许多反射对称性的形状时，首先会遇到Dynkin图，例如晶体和柏拉图立体。后来人们发现，它们在许多其他方面也很有用，比如对单李群及其表示进行分类。那么杨图呢？杨图对于研究群表示也很重要，但适用的群类范围较窄，即“经典”群。经典群的表示广泛应用于量子物理学，从粒子物理学、核物理学和原子物理学，一直到化学。因此，杨图不仅美观，而且实用。

我的目标是解释杨图如何用于分类经典群的表示。我不会证明太多，只会勾勒其中的思路。首先，我会解释经典群和群表示。不过在此之前，我应该先说明什么是杨图。

杨图

下面是一个杨图的例子：

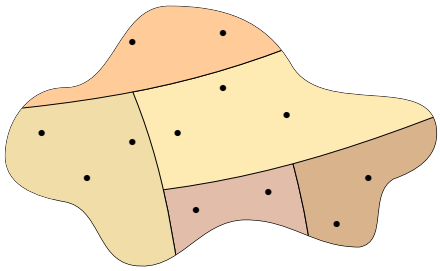


这里的所有信息都可以用每一行中的方格数来表示：

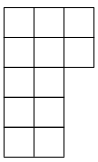
$$6 \geq 5 \geq 5 \geq 2 \geq 1$$

因此，我们可以将一个**杨图** 定义为一个由自然数组成的有限序列 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k > 0$。我们称 k 为**行数**，称 n_1 为**列数**。我们称 n_i 为第 i列中的**方格** 数，而 $n = \sum_i n_i$ 为方格总数。

含有 n 个方格的杨图可以按同构分类 n 元集合的划分。例如，下面这个划分：

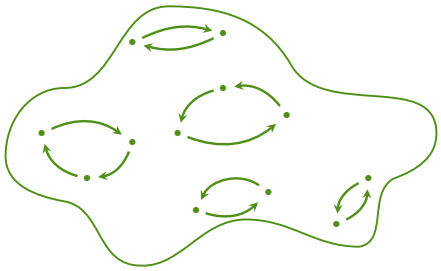


得到这个杨图，其中各行列出了每个部分所含的点数：



但是，杨图并不记录我们集合中的哪个点属于哪个部分，因此杨图只对“同构意义下”的分拆进行分类。

含有 n 个方格的杨图也可以按照同构来分类 n 元集合上的置换。例如，这个置换：



给出了我们刚才看到的同一个杨图。但任何与之同构的置换都会给出相同的杨图。

究竟什么是“同构的置换”？我们来看一个例子。集合 $\{1,\dots,n\}$ 上的置换构成 **对称群** S_n。假设我们有一个任意置换 $g \in S_n$，如下所示：

$$
\begin{aligned}
1 &\to 2\\
2 &\to 4\\
3 &\to 3\\
4 &\to 1\\
5 &\to 6\\
6 &\to 5\\
7 &\to 7
\end{aligned}
$$

注意，1 映射到 2，2 映射到 4，而 4 又映射回 1。同样，5 映射到 6，而 6 又映射回 5。数字 3 立即映射到自身，7 也是如此。无论从哪里开始，我们最终总会回到起点。因此，我们的置换由若干个循环组成：

$$(1,2,4)(5,6)(3)(7)$$

这个“循环分解”完整地描述了该置换。为简化书写，我们总是按长度递减的顺序写出这些循环。我们还会把每个循环中最小的数字写在最前面。

现在，假设我们用另一个置换 h 共轭我们的置换 g。这样就得到置换 hgh^{-1}。它的循环分解与 g 的循环分解相比如何？看起来非常相似！例如，它可能是这样的：

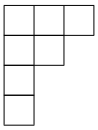
$$(2,7,6)(1,3)(4)(5)$$

循环的数量相同，而且每个循环的长度也与之前相同。唯一改变的是每个循环中的数字。这些数字通过置换 h 被重新排列。

简而言之，当我们共轭一个置换时，唯一保持不变的是这样一种图形：写下它的循环分解，然后将每个循环中的具体数字涂去，就像这样：

$$(\square,\square,\square)(\square,\square)(\square)(\square)$$

如果我们把每个循环写成一行方格，就得到一个杨图：



经典群，以及一个经典幺半群

那么，什么是经典群？和音乐作曲家一样，并没有一份精确的群列表能够算作“经典”。但一般来说，经典群应由保持某个向量空间上良好几何结构的线性变换组成。一些很好的例子是：

- **一般线性群** GL($N, \mathbb{C}$)，由 $\mathbb{C}^N$的所有可逆线性变换组成，换言之，即所有行列式非零的 $N \times N$ 复矩阵。
- **特殊线性群** SL($N, \mathbb{C}$)，由 $\mathbb{C}^N$ 上所有行列式为 1 的线性变换组成。
- **酉群** U(N)，由 $\mathbb{C}^N$上的所有酉线性变换组成。
- **特殊酉群** SU(N)，由 $\mathbb{C}^N$ 上所有行列式为 1 的酉线性变换组成。

这些是 经典群中的巴赫、海顿、莫扎特和贝多芬。所有四
都可以通过杨图进行分
借助杨图进行分类。
我们也可以把它视为一个荣誉经典群，尽管它是用一个集合而非向量空间来定义的：

- 对称群 S_n，由集合 $\{1, \ldots, n\}$ 的所有置换组成。

这个群的表示也可以用杨图来分类——正如我们将看到的， S_n 在整个故事中扮演着举足轻重的角色。

还有另一位关键角色，其表示也由杨图分类。它堪称“经典幺半群”：

- **全线性幺半群** End($\mathbb{C}^n$)，由 $\mathbb{C}^N$的所有线性变换构成，换句话说，就是所有的 $N \times N$ 矩阵。

幺半群是一个集合，具有结合乘法和单位元，但不一定有逆元。这里，我把 End($\mathbb{C}^n$) 构造成一个幺半群，其乘法是变换的复合——用通俗的话说，也就是矩阵乘法。这个幺半群如此经典，以至于人们甚至不称它为幺半群！这或许要归咎于人们偏爱群、排斥其他幺半群的普遍偏见。正如我们将看到的，全线性幺半群有点像作曲家帕莱斯特里纳：他虽不被视为古典作曲家，却为我们称作古典音乐的乐曲奠定了基础。

表示

如果群没有作为某种事物的对称性而发挥作用，就会显得很可悲。幺半群也有同样的感受——甚至更糟，因为它们没有群那么受人喜爱。这就是我们应该研究群和幺半群的表示的原因。幺半群的同态，例如 $\rho\colon M \to N$，是一个满足以下条件的函数

$$\rho(mm') = \rho(m)\rho(m') \text{ for all } m, m' \in M \text{ and } \rho(1) = 1.$$

幺半群 M 在向量空间 V 上的**表示**是一个同态

$$\rho\colon M \to \mathrm{End}(V)$$

其中，End(V)由 V上的所有线性变换构成，并通过复合构成一个幺半群。表示使我们可以取一个元素 $m \in M$，让它作用于向量 $v \in V$，从而得到一个新向量 $\rho(m)v$，并且满足

$$\rho(mm')v = \rho(m)\rho(m')v \text{ and } \rho(1)v = v.$$

这样一来，我们的幺半群终于发挥作用了，不再只是闷闷不乐地待在那里！

不过，单独存在的表示仍然很孤独。为了解决这个问题，我们定义给定幺半群的表示之间的态射，由此得到一个完整的表示范畴 。给定两个表示 $\rho\colon M \to \mathrm{End}(V)$ $\sigma\colon M \to \mathrm{End}(W)$，从第一个到第二个的**态射** 是一个线性映射 $f\colon V \to W$，满足

$$f(\rho(m)v) = \sigma(m)f(v)$$

对所有 $v \in V$都成立。也就是说，先作用再映射，与先映射再作用相同。由于在这个等式中， f 从外部移到了内部，表示的态射也称为**交织算子**。

同构只是一个有逆的态射，而表示之间的同构通常也称为**等价**。除了按“同构”对表示进行分类之外，我们在这里不会过多讨论范畴：进行这种分类时，我们不区分同构的表示。不过，一次性研究幺半群的整个表示范畴，是深入理解表示论的好方法。

最简单的表示是在有限维向量空间上的表示——因此，从现在起：

我们默认所讨论的所有向量空间都是有限维的，无需特别说明！

与其试图研究所有有限维表示，我将把重点放在“不可约”表示上，它们是构成更复杂表示的基本单元。例如，在粒子物理学中，我们用不可约表示来描述基本粒子。幺半群在向量空间 V 上的表示 ρ 若**不可约**，则意味着 V 没有任何在所有变换 $\rho(m)$下均不变的子空间，除了 $\{0\}$ 和 V 本身以外。“不可约表示”这个说法有点拗口，因此我们也简称它们为**不可约表示**。

为什么不可约表示如此重要？可以说，对我们而言，“不可分解”表示甚至更为重要。给定幺半群的两个表示，记作 $\rho\colon M \to \mathrm{End}(V)$ 和 $\rho'\colon M \to \mathrm{End}(V')$，则在 $V \oplus V'$ 上有一个表示，称为它们的 **直和**：

$$\rho \oplus \rho'\colon M \to \mathrm{End}(V \oplus V')$$

由.....给出

$$(\rho \oplus \rho')(m)(v, v') = (\rho(m)v, \rho'(m)v').$$

如果一个表示不与零维表示和自身之外的表示直和同构，那么它就是**不可分解**的。通过归纳论证，我们可以证明每个表示都是不可分解表示的直和。也就是说，我们可以把任意表示拆分成更小的部分，直到每一部分都无法再进一步拆分。

显然，任何不可约表示都是不可分解的。反过来则不总是成立。不过，对于我们在这里要讨论的所有幺半群以及表示类型，不可分解性都等价于不可约性！而且，由于“不可约表示”是个很方便的说法，我们将讨论不可约性，而不是不可分解性。

S_n

令人惊讶的是，杨图可以用来分类我列出的全部五种经典群的不可约表示，至少是其中“良好”的那些：GL(N，$\mathbb{C}$)，SL(N，$\mathbb{C}$)，U(N)，SU(N) 和 S_n；此外还包括经典幺半群 End($\mathbb{C}^N$)。让我概述一下具体做法。我们将从对称群 S_n 开始，它们是所有群中最重要的。

记住，我已经说明了 S_n 中置换的共轭类与含有 n 个方格的杨图相对应。现在我想对 S_n 的不可约表示做同样的事情。这很有意思，原因如下：对于任意有限群，不可约表示的数量都与群元素共轭类的数量相同！但一般来说，不可约表示与共轭类之间并不存在自然的一一对应。群 S_n 恰好在这方面特别好。

首先，我应该告诉你一些适用于任何有限群的事实。设 G 是一个有限群。那么，G 只有有限多个不可约表示，并且它们都是有限维的。G 的每个有限维表示都是这些不可约表示的若干份直和。

为了研究这些不可约表示，令 $\mathbb{C}[G]$ 表示由 G 的元素构成的形式线性组合空间。由于利用 G 中的乘法可以将其赋予代数结构，因此这称为 G 的 **群代数**。经过一些计算可以证明，$\mathbb{C}[G]$ 同构于一个分块对角矩阵代数。例如，$\mathbb{C}[S_3]$ 同构于如下形式的矩阵代数：

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

其中 $*$ 项可以是任意复数。由于矩阵通过矩阵乘法作用于向量，我们可以利用这一点得到 $\mathbb{C}[G]$ 的许多表示，因而也得到 G 的许多表示——每个分块对应一个表示。而且，这个方法给出了 G 的全部不可约表示！例如，S_3 有两个一维不可约表示，分别来自上面矩阵中的两个 1×1 分块；还有一个二维不可约表示，来自 2×2 分块。

事实上，我们实际上可以将这些不可约表示构造为 $\mathbb{C}[G]$ 的子空间。一种方法是在 $\mathbb{C}[G]$ 中找到这样的元素：某个块的对角线上只有一个 1，其余位置全为零，如下所示：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{p_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{p_2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{p_3}$$

如果我们能找到这些元素，那么在右侧乘以它们就会投影到 $\mathbb{C}[G]$ 的各个子空间上，即

$$\{ap_i \mid a \in \mathbb{C}[G]\}.$$

这些子空间将是 G 的不可约表示，这一点可以根据我们对 $\mathbb{C}[G]$ 的描述来验证：它是一个分块对角矩阵代数。

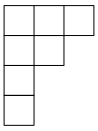
我们如何在 $\mathbb{C}[G]$ 中找到这些对象 p_i？这可得费一番功夫！不过，首先请注意：

- 它们是 **幂等元**：$p_i^2 = p_i$。
- 它们是 **极小的**：如果 p_i 是两个幂等元之和，那么其中一个必为零。
- 它们是 **互相分离的**：如果 $i \neq j$，那么对所有 $a \in \mathbb{C}[G]$，都有 $p_i a p_j = 0$。

事实上，它们构成了一个尽可能大的、彼此分离的极小幂等元集合：其数量等于不可约表示的数量 G——或者等价地，等于 G 中共轭类的数量。

要进一步讨论，我们需要更深入地了解我们的群 G。现在，我将令 G 为 S_n，并告诉你如何得到彼此分离的极小幂等元。每个含有 n 个方格的杨图都会对应一个这样的幂等元！由于 S_n 中的共轭类数量与含有 n个方格的杨图数量相同，这意味着我们得到了一个规模尽可能大的集合。

具体做法如下。假设我们有一个含有 n 个方格的杨图，就像这样：



然后，我们可以像这样用从 1 到 n的数字填入其中：

1	2	3
4	5	
6		
7		

S_n 中有一类置换称为**行置换**，它们只置换杨图每一行中的数字。还有一类置换称为**列置换**，它们只置换每一列中的数字。

我们可以在 $\mathbb{C}[S_n]$ 中构造一个幂等元 p_S，对所有行置换进行对称化。具体来说，将所有行置换相加，再除以行置换的数量，即可得到 p_S：

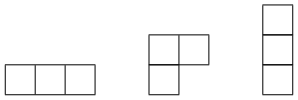
$$p_S = \frac{1}{|R|} \sum_{\sigma \in R} \sigma \in \mathbb{C}[S_n]$$

其中 R 是行置换的集合。类似地，我们可以在 $\mathbb{C}[S_n]$ 中构造一个幂等元 p_A，对所有列置换进行反对称化。我们通过将所有偶 列置换之和减去所有奇 列置换之和，再除以列置换的总数，得到 p_A：

$$p_A = \frac{1}{|C|} \sum_{\sigma \in C} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[S_n]$$

其中 C 是列置换的集合。现在精彩的部分来了：除一个常数因子外， $p_A q_A$是 $\mathbb{C}[S_n]$中的一个极小幂等元！更棒的是，这个过程对 $\mathbb{C}[S_n]$的分块矩阵描述中的每个块都恰好给出一个极小幂等元。这一点完全不是显而易见的——要证明它需要付出相当大的努力——但它正是将 n格杨图与 S_n的表示联系起来的关键事实。

例如，考虑 $n = 3$。这种情况下有 3 个杨图：



所以 S_3 有 3 个不可约表示，印证了我之前说过的一点。对于这个又长又扁的图



列置换都是平凡的，因此极小中心幂等元就是 p。也就是说，它只进行“对称化”：将 S_3 中所有 3! 个置换相加，再除以 3!。最终它在

$$\mathbb{C}[S_3] \cong \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

中给出一个 块，因而得到 S_3 的一个一维表示。这就是 **平凡表示**，其中 S_3 的每个元素都在 $\mathbb{C}$ 上作用为恒等算子。每个幺半群都有平凡表示。

对于这个又高又瘦的图



行置换都是平凡的，因此极小幂等元就是 q。也就是说，它只进行“反对称化”：将所有 3! 个置换乘以各自的符号后相加，再除以 3!。这给出 S_3 的另一个一维表示：**符号表示**，其中每个置换都在 $\mathbb{C}$ 上作用为乘以其符号。

剩下的 3 格杨图



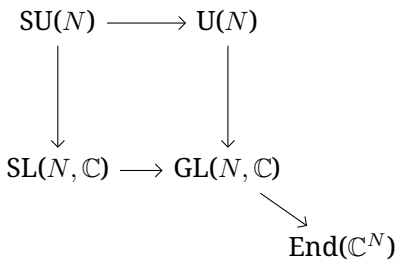
稍微复杂一些。它给出了一个极小幂等元，将行对称化和列反对称化以更有趣的方式结合起来。这给出了 S_3 的二维表示。

下面用一种更具体的方式来描述这个表示。你可以把 S_3 看作等边三角形的对称性。若在平面上绘制这样一个以原点为中心的三角形，那么该三角形的每种对称性都会给出 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换，换句话说，就是一个 2×2 实矩阵。但你也可以把它看作一个复 2×2 矩阵！这个技巧定义了一个同态ρ： $S_3 \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$，这就是我们的表示。

End($\mathbb{C}^N$)

我们可以继续思考杨图和对称群的表示 S_n 很久很久。人们毕生都在研究这些！不过，在我们变得太老之前，来看看杨图如何给另外四个经典群提供表示。

其实最好从全线性幺半群 End($\mathbb{C}^N$) 开始，因为这四个经典群都包含在其中。确实，我们有如下的幺半群同态，它们全都由包含映射给出：



每当你有一个幺半群同态 $f\colon M \to M'$，以及一个 M' 的表示，比如 $\rho\colon M' \to$End(V)，就可以将它们复合，从而得到一个 M 的表示。因此，End($\mathbb{C}^N$) 的表示可以给出我列出的四个经典群的表示——实际上，我们正是通过这种方式来获得这些经典群的不可约表示。

那么，让我们试着理解幺半群 End($\mathbb{C}^N$) 的表示。首先，它在 $\mathbb{C}^N$ 上有一个表示，称为**典范表示**，其中每个变换都以显而易见的方式作用于 $\mathbb{C}^N$ 中的向量。换句话说，这个表示就是恒等同态 1: End($\mathbb{C}^N$) $\to$End($\mathbb{C}^N$)。这实际上是一个不可约表示。

我们如何得到 End($\mathbb{C}^N$) 的其他不可约表示？从已有表示得到新表示的一种方法是对它们取张量积。如果我们有任意幺半群的两个表示 $\rho\colon M \to$End(V)、$\rho'\colon M \to$End(V')，就能得到一个称为 $\rho\otimes\rho'$ 的新表示，其定义为

$$\begin{array}{rcl} \rho\otimes\rho'\colon M & \to & \mathrm{End}(V)\otimes\mathrm{End}(V') \cong \mathrm{End}(V\otimes V') \\ m & \mapsto & \rho(m)\otimes\rho(m'). \end{array}$$

因此，我们可以将 End($\mathbb{C}^N$) 的典范表示与自身反复取张量积，比如取 n 次，从而得到一个作用在

$$\underbrace{\mathbb{C}^N\otimes\mathbb{C}^N\otimes\ldots\otimes\mathbb{C}^N}_{n\text{ copies}}$$

这个新表示没有任何理由必定是不可约的。但我们可以试着把它分解成不可约的部分。最简单的方法，就是寻找这样的部分：当我们置换 n 个 $\mathbb{C}^N$ 时，它们以良好的方式变换。用物理学的术语来说，我们有一个带有 n 个指标的张量空间，可以寻找由这样的张量构成的子空间，使它们在置换指标时按照指定的方式变换。例如，其中会有一个由“全对称”张量构成的子空间，这些张量在置换指标时完全不变；还会有一个由“全反对称”张量构成的子空间，每当交换两个指标时，这些张量都会改变符号，等等。

不过，要明确“等等”具体指什么，我们需要杨图！毕竟，它们描述了置换群的所有表示。

其运作方式如下。这个空间

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n} = \underbrace{\mathbb{C}^N\otimes\mathbb{C}^N\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^N}_{n\text{ copies}}$$

不仅是 End($\mathbb{C}^N$) 的一个表示；它还是 $\mathbb{C}[S_n]$ 的一个表示，这一表示来自对 n 因子的置换。而且，这两个幺半群的作用彼此可交换！通过直接计算即可轻松看出这一点。

接下来，我们已经看到，每个 n 格杨图 Y 都会在$\mathbb{C}[S_n]$中给出一个极小幂等元。它作为算子作用于 $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$，记作

$$p_Y : (\mathbb{C}^N)^{\otimes n} \to (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}.$$

这个算子的像是某个子空间

$$L = \{p_Y v \mid v \in (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}\} \subseteq (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}.$$

但实际上，End($\mathbb{C}^N$) 在 $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ 上的作用会保留这个子空间 L_Y。因此， L_Y成为 End($\mathbb{C}^N$) 的一个表示。所以，我们从杨图 Y 得到了 End($\mathbb{C}^N$) 的一个表示！

为了说明 L_Y 在 End($\mathbb{C}^N$) 的作用下保持不变，我们利用 End($\mathbb{C}^N$) 与 $\mathbb{C}[S_n]$ 的作用彼此可交换这一事实。假设我们有一个属于 L的向量，比如 $p_Y v$。那么对于任意算子$T \in$ End($\mathbb{C}^N$)，都有

$$T p_Y v = p_Y T v$$

所以它属于 L_Y。

这都不难。真正精彩之处在于， L_Y 总是 End($\mathbb{C}^N$) 的一个不可约 表示。这就没那么显而易见了！归根结底，原因在于：$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ 上的线性变换中，与来自 End($\mathbb{C}^N$) 在这个空间上的表示的所有变换都可交换的，恰好就是来自 $\mathbb{C}[S_n]$ 的那些。这是一个称为“舒尔-外尔对偶”的结果的一半。虽然这里用不上，但我还是忍不住要提一下另一半。它说：$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ 上的线性变换中，与来自 $\mathbb{C}[S_n]$ 在这个空间上的表示的所有变换都可交换的，恰好就是来自 End($\mathbb{C}^N$) 的那些。

如你所见，这里涉及一些相当复杂的数学。无论如何，每个杨图都会给出 End($\mathbb{C}^N$) 的一个不可约表示。让我们通过几个例子来看看这是如何实现的。

如果我们取 $n = 3$，那么 S_3 作用于

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes 3} = \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$$

因此，我们从 3 格杨图得到 End($\mathbb{C}^N$) 的一些不可约表示。正如我们所见，那个横长而扁的杨图



给出一个仅仅执行“对称化”的极小幂等元。因此，它在**秩 3 的对称张量**空间上给出 End($\mathbb{C}^N$) 的一个不可约表示：

$$S^3(\mathbb{C}^N) = \Big\langle \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes v_{\sigma(3)} \;\Big|\; v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^N \Big\rangle$$

其中，尖括号表示取所有这种形式的向量的线性组合。类似地，这个高而窄的杨图



给出一个“反对称化”的极小幂等元。因此，它给出了 End($\mathbb{C}^N$) 在秩 3**反对称张量**空间上的一个不可约表示：

$$\Lambda^3(\mathbb{C}^N) = \Big\langle \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes v_{\sigma(3)} \;\Big|\; v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^N \Big\rangle.$$

这一切 用其他数字替换 3 时，效果也一样。另一个有 3 个方格的杨图



则更棘手。要得到它相差一个常数因子的极小幂等元，你需要先对这里这些数字的列置换进行反对称化：



然后再对行置换进行对称化。接着，将所得的 $\mathbb{C}[S_3]$ 中的元素作用于所有向量 $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$，并取所有结果的线性组合。我本可以写出公式，但你大概不会觉得有趣。在数学中，有些事情亲自做比看别人做更有意思。

想想这个过程是如何运作的，你会发现我们得到的一些不可约表示有点无聊。如果一个杨图有超过 N 行，我们就要对 $\mathbb{C}^N$ 中超过 N 个向量的张量积进行反对称化，而结果总是零。因此，这类杨图给出 End($\mathbb{C}^N$) 的零维表示。我们可以忽略它们。事实上，大多数人都规定零维表示不算不可约表示，就像数字 1 不是质数一样。今后我们也这么做吧。

采用这一约定后，每个至多有 N 行的杨图都对应 End($\mathbb{C}^N$) 的一个不可约表示。而且它们各不相同：也就是说，不同的至多有 N 行的杨图对应非同构表示。

至多有 N 行的杨图能给出 End($\mathbb{C}^N$) 的所有不可约表示吗？可惜不能。假设我们有一个 End($\mathbb{C}^N$) 的表示 ρ，它来自某个杨图。设它作用在某个向量空间 L 上。若我们为 L 选取一组基，就可以把每个线性变换 $\rho(x)$: $L \to L$ 写成一个矩阵；你可以验证， $\rho(x)$ 的矩阵元都是原矩阵 $x \in$ End($\mathbb{C}^N$) 的矩阵元的多项式。因此，我们称 ρ 是一个多项式表示</style}；由此可见，杨图只能给出 End($\mathbb{C}^N$) 的多项式表示。

因此，只要你找到 End($\mathbb{C}^N$) 的一个不是多项式表示的不可约表示，就能知道杨图无法给出 End($\mathbb{C}^N$) 的所有不可约表示。而这样的不可约表示并不难找。例如，考虑这个表示

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & \operatorname{End}(\mathbb{C}^N) & \to & \operatorname{End}(\mathbb{C}^N) \\ & T & \mapsto & \overline{T} \end{array}$$

它对 $N \times N$ 矩阵的每个条目取复共轭。除此之外还有很多。

不过，以下结论也相当不错：End($\mathbb{C}^N$) 的每个多项式不可约表示都来自一个杨图。事实上，这些对象之间存在一一对应：

- End($\mathbb{C}^n$) 的多项式不可约表示，按同构分类

- 有 $\leq N$ 行的杨图。

因此，我们说，行数至多为 N 的杨图刻画End($\mathbb{C}^N$)的多项式不可约表示。这一非凡事实构成了杨图与经典群表示之间的基本联系。让我们看看如何运用它。

GL($N, \mathbb{C}$)

让我们从最大的经典群——一般线性群GL($N, \mathbb{C}$)——开始。考虑它到End($\mathbb{C}^N$)中的包含映射：

$$\mathrm{GL}(N, \mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$$

将这个包含映射与End($\mathbb{C}^N$)的任意多项式不可约表示复合，就得到GL($N, \mathbb{C}$)的一个表示。事实上，它是一个不可约表示。我们并未得到GL($N, \mathbb{C}$)的全部不可约表示，但得到了所有多项式不可约表示：也就是说，那些矩阵元是关于其所依赖的元素 $g \in$ GL($N, \mathbb{C}$)的矩阵元的多项式的表示。

此外，由于GL($N, \mathbb{C}$)在End($\mathbb{C}^n$ 中稠密，且多项式函数连续，End($\mathbb{C}^N$)的不同多项式不可约表示会给出GL($N, \mathbb{C}$)的不同多项式不可约表示。更妙的是，每个多项式不可约表示都来自End($\mathbb{C}^n$)。运用这些想法以及先前关于End($\mathbb{C}^N$)表示的结果，我们可以证明以下对象之间存在一一对应：

- GL($N, \mathbb{C}$) 的多项式不可约表示，按同构分类
- 有 $\leq N$ 行的杨图。

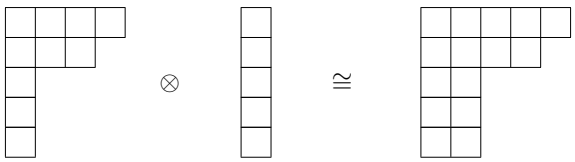
更好的是，GL($N, \mathbb{C}$) 的每个多项式表示都可以写成多项式不可约表示的直和。

然而，GL($N, \mathbb{C}$) 有很多非多项式不可约表示：不仅有来自 End($\mathbb{C}^N$) 的非多项式不可约表示，还有其他的。原因是，GL($N, \mathbb{C}$) 中的矩阵行列式非零，因此我们可以构造涉及行列式倒数的表示，而这不是多项式。

GL($N, \mathbb{C}$) 的一维不可约表示将每个矩阵 g 映射为 det(g)，称为**行列式表示**。这是一个多项式不可约表示，因此它必定来自某个杨图。事实上，它来自一个高而窄的杨图，只有一列、 N 行，例如：



当 $N = 5$ 时。如果我们有一个由杨图得到的 GL(N， $\mathbb{C}$) 的任意不可约表示，将其与行列式表示作张量积，会得到一个新的不可约表示，其对应的杨图增加了一个包含 N 行的列，如下所示：



不过，GL(N, $\mathbb{C}$) 还有一个一维不可约表示，它将 $g \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ 映射为 $\det(g)^{-1}$。这被称为行列式表示的**逆**表示，既因为显而易见的原因，也因为将它与行列式表示作张量积后会得到平凡表示。由于 $\det(g)^{-1}$ 不是 g 的矩阵元的多项式，因此这不是多项式表示。但它仍然是一个**代数表示**：其矩阵元是 g 的矩阵元的有理函数。

代数表示是在代数几何中最自然的一类表示。事实上，GL(N, $\mathbb{C}$) 是 $\mathbb{C}$ 上的**线性代数群**：也就是说，它是复数域上仿射代数簇范畴中的一个群。人们谈到线性代数群的表示时，通常指的是代数表示。

因此，代数几何爱好者会很高兴地了解到，GL(N, $\mathbb{C}$) 的代数不可约表示都可以通过取一个多项式不可约表示，并与行列式表示的逆张量若干次来构造。由此可知，我们可以用一个行数少于 N 的杨图以及一个整数 k 来描述 GL(N, $\mathbb{C}$) 的任意代数不可约表示。杨图给出一个表示 ρ，接着我们在同一个空间上构造表示，其中 g 的作用为 $\det(g)^k \rho(g)$。如果 $k \geq 0$，这相当于在杨图上添加 k 个额外的列，每列有 N 行；不过，这一过程对 $k < 0$ 也有意义。我们得到以下对象之间的一一对应：

- GL($N, \mathbb{C}$) 的代数不可约表示，按同构分类
- 由一个有 $< N$ 行的杨图和一个整数组成的配对。

如果你愿意，可以把这样的配对看作一种特殊的杨图，它有 $\leq N$ 行，其中有 N 行的列数可以是任意整数——甚至可以是负数！

这就是不可约表示的情况，那么更一般的表示呢？情况再好不过了：GL($N, \mathbb{C}$) 的每个代数表示都是代数不可约表示的直和。

如果你还不喜欢代数几何，也可以把 GL($N, \mathbb{C}$) 看作一个**复李群**：复流形范畴中的一个群。谈到复李群 G 的表示时，我们通常指**复解析表示**：一个表示ρ: GL($N, \mathbb{C}$) $\to$ End(L)，使得 $\rho(g)$ 的矩阵元是 g 的矩阵元的复解析函数。幸运的是，对于 GL($N, \mathbb{C}$)，这些表示全都是代数的！约束$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ 如此强大，以至于任何复解析解实际上都是代数的。因此，我们关于 GL($N, \mathbb{C}$) 的代数表示所讲述的全部内容，同样适用于复解析表示。

SL($N, \mathbb{C}$)

我们也可以从杨图得到特殊线性群 SL($N, \mathbb{C}$) 的表示。任何至多有 N 行的杨图都会给出 End($\mathbb{C}^N$) 的一个代数不可约表示，再将它与包含映射复合

$$\mathrm{SL}(N, \mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$$

便得到 SL($N, \mathbb{C}$) 的一个代数不可约表示。通过这种方式，我们可以得到 SL($N, \mathbb{C}$) 的所有代数不可约表示。更妙的是，GL($N, \mathbb{C}$) 中那个令人头疼的麻烦——行列式表示——在 SL($N, \mathbb{C}$) 中变成了平凡表示。行列式表示的逆表示也一样。因此，我们在以下两者之间得到了一一对应：

- SL($N, \mathbb{C}$) 的代数不可约表示，按同构分类

- 行杨图。

此外，SL($N, \mathbb{C}$) 的每个代数表示都是代数不可约表示的直和。因此，SL($N, \mathbb{C}$) 的代数表示由$< N$ 行杨图的有限集分类。

这里我们将 SL($N, \mathbb{C}$) 视为线性代数群。我们也可以将其视为复李群。然而，它的所有复解析表示都是代数表示。因此，同样的分类也适用于这里。

U(N)

酉群 U(N) 与此前的经典群不同，因为定义酉性的方程涉及复共轭：

$$gg^* = 1$$

因此它不是 $\mathbb{C}$ 上的线性代数群。相反，它是 $\mathbb{R}$ 上的线性代数群。我们仍将研究它在复向量空间上的表示，但现在有趣的是**实代数表示**：其中 $\rho(g)$ 的矩阵元是 g 的矩阵元的实部和虚部的有理函数。

要得到 U(N) 的表示，利用我们关于 GL($N, \mathbb{C}$) 表示的知识会很方便。我们可以取 GL($N, \mathbb{C}$) 的任意代数不可约表示，并将其与包含映射复合

$$\mathrm{U}(N) \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$$

从而得到 U(N) 的实代数表示。结果是一个不可约表示，我们也由此得到 U(N) 在复向量空间上的所有实代数不可约表示。事实上，U(N) 的这些实代数不可约表示的分类，与 GL(N, $\mathbb{C}$) 的代数不可约表示的分类完全一致。因此，我们得到以下对象之间的一一对应：

- U(N) 在复向量空间上的实代数不可约表示，按同构分类
- 由一个含 $< N$ 行的杨图和一个整数组成的对。

此外，U(N) 的每个实代数表示都是实代数不可约表示的直和。

或者，我们也可以将 U(N) 视为一个**李群**：流形范畴中的一个群（普通的实流形，而非复流形）。对于李群，自然要研究**光滑表示**：其中 $\rho(g)$ 的矩阵元是 g 的矩阵元的光滑函数。或者，我们还可以进一步将 U(N) 视为一个纯粹的**拓扑群**：拓扑空间范畴中的一个群。对于拓扑群，自然要研究**连续表示**，其中 $\rho(g)$ 的矩阵元是 g 的矩阵元的连续函数。

但有一个非常好的事实：U(N) 的每个光滑表示都会自动成为实代数表示，而任何李群的每个连续表示也都会自动光滑！因此，考虑 U(N) 的光滑或连续不可约表示并不会增加一般性：它们都由一对对象分类，即一个具有 $< N$ 行的杨图和一个整数。

另一种变体也证明同样可行。在量子物理学中，我们使用希尔伯特空间上的酉表示。有限维希尔伯特空间——这里我们只考虑这种类型——就是带有内积的有限维复向量空间。群 G 在希尔伯特空间 H 上的**酉表示** 是一个表示 $\rho\colon G \to \mathrm{End}(V)$，满足每个变换 $\rho(g)$ 都是酉的。

事实证明，由于 U(N) 是紧的，我们可以任取一个连续表示 ρ: U(N) $\to$End(V)，在向量空间 V 上任取一个内积，然后将其沿着 $U(N)$ 的作用“取平均”，从而得到一个改进后的新内积，满足

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{for all } v, w \in V \text{ and } g \in \mathrm{U}(N).$$

这表明所有变换 $\rho(g)$ 都是酉的：

$$\rho(g)^* \rho(g) = 1.$$

因此， ρ 已提升为一个酉表示。

将这一点与我们已有的结果结合起来，可以证明以下对象之间存在一一对应关系：

- U(N) 的连续酉不可约表示（按同构分类）
- 由一个有 $< N$ 行的杨图和一个整数构成的数对。

此外，每 y U(N) 的连续酉表示是连续酉不可约表示的直和 s.

SU(N)

最后，我们来讨论特殊酉群 SU(N)。既然主要模式都已阐述，我们现在会加快速度——和往常一样，不做证明，但至少尽量让结论显得合理。正如 $GL(N, \mathbb{C})$ 有助于我们理解 U(N)，SL($N, \mathbb{C}$) 也有助于我们理解 SU(N)。归根结底，这是因为 U(N) 是复李群 GL($N, \mathbb{C}$) 的 “ 紧实实形式 ”，而 SU(N) 是 SL($N, \mathbb{C}$) 的紧实实形式。不过，要理解这一点，就需要比我们此处打算深入得多地探讨李理论。

我们可以取 SL($N, \mathbb{C}$) 的任意一个代数不可约表示，并将其与包含映射复合

$$\mathrm{SU}(N) \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$$

从而得到 SU(N) 的一个表示。这是一个实代数不可约表示，我们也可以通过这种方式得到 SU(N) 的所有实代数不可约表示。借助我们对 SL($N, \mathbb{C}$) 的代数不可约表示的分类，可以证明这些对象之间存在一一对应关系：

- SU(N) 的实代数不可约表示（按同构分类）
- 具有 $< N$ 行的杨图。

然后，通过前面针对 U(N) 提到的平均技巧，我们还可以得到以下两类对象之间的一一对应：

- SU(N) 的连续酉不可约表示（按同构分类）
- 具有 $< N$ 行的杨图。

此外，正如我们所预期的那样，无论是在实代数情形还是连续酉情形中，给定类型的每个表示都是该类型的不可约表示的直和。

总结与进一步方向

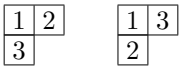
让我们总结一下目前所学的内容——并进一步补充几点。虽然我们研究的是定义在 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间上的表示，但大多数纯代数结果对任意零特征域都成立！非零特征的域表现大不相同；事实上， S_n 的不可约表示至今仍未在有限域上完成分类。不过，这里带勾号的条目在将 $\mathbb{C}$ 替换为任意零特征域后仍然成立：

✓ 的不可约表示由具有 n 个方格的杨图分类。✓ End($\mathbb{C}^N$) 的多项式不可约表示由具有 $\leq N$ 行的杨图分类。✓ GL(N, $\mathbb{C}$) 的多项式不可约表示由具有 $\leq N$ 行的杨图分类。✓ GL(N, $\mathbb{C}$) 的代数不可约表示由一对数据分类，该数据由一个具有 $< N$ 行的杨图和一个整数构成。✓ SL(N, $\mathbb{C}$) 的代数不可约表示由具有 $< N$ 行的杨图分类。

- SL(N, $\mathbb{C}$) 的解析不可约表示由具有 $< N$ 行的杨图分类。
- GL(N, $\mathbb{C}$) 的解析不可约表示由一对数据分类，该数据由一个具有 $< N$ 行的杨图和一个整数构成。
- U(N) 的实代数不可约表示由一对数据分类，该数据由一个具有 $< N$ 行的杨图和一个整数构成。
- U(N) 的连续酉不可约表示由以下配对分类：一个有 $< N$ 行的杨图和一个整数。
- SU(N) 的实代数不可约表示由有 $< N$ 行的杨图分类。
- SU(N) 的连续酉不可约表示由有 $< N$ 行的杨图分类。

不过，故事远没有结束！首先，我们可以用填入数字 $1, \ldots, n$ 的 n 格杨图（称为**杨表**）进行各种涉及经典群不可约表示的计算。

假设我们想求出与某个杨图对应的 S_n 不可约表示的维数。那么，只需数出形状为该形状的**标准杨表**的数量：也就是说，数字沿着任意一列向下或任意一行向右递增的杨表。例如，这种形状的标准杨表有两个：



所以这个杨图：



给出了 S_3 的一个二维不可约表示。

或者说：假设我们将两个不可约表示张量起来，并想把结果分解为不可约表示的直和，该怎么做？我们用杨表玩个小游戏，答案便会浮现出来。相关的

关键词是“小伍德–理查森规则”。或者说，假设我们有一个 S_n 的不可约表示，想知道将它限制到像 S_{n-1}这样的子群时，它如何分解为不可约表示；或者类似地，对于 SL(N, $\mathbb{C}$) 和 SL($N-1$, $\mathbb{C}$) 等，又该怎么做？这需要更多地摆弄杨表。这里一个相关的关键词是 “ 分支规则 ”。

先提醒你一下：关于这个主题的文献浩如烟海。杨图的组合学是个人人都研究过的领域，从严谨务实的化学家到满怀憧憬的范畴论学家，无不涉足其中。掌握这些内容需要穷尽一生，而我当然还没有做到。不过，哪怕只学一点也很有趣，所以不必太害怕。

其次，杨图也有助于研究其他一些经典群的表示，例如：

- 由 $\mathbb{R}^N$ 的所有正交线性变换组成的**正交群** O(N)。
- 由 $\mathbb{R}^N$ 的所有行列式为 1 的正交线性变换组成的**特殊正交群** SO(N)。
- 由 $\mathbb{R}^{2N}$ 的所有辛线性变换组成的**辛群** Sp($2N$)。

所有这些群都有一个显而易见的“典范表示”。通过取该表示的 n 次张量幂，并用来自杨图的 $\mathbb{C}[S_n]$ 中的极小幂等元作用于它，我们可以构造出其他表示。我刚才讲的故事稍作或较大改动后，也同样适用于这些其他群。

第三，我们可以对整个论述进行“q-变形”，将这些经典群中的任意一个替换为相应的“量子群”，并将 $\mathbb{C}[S_n]$ 替换为相应的“赫克代数”。这在拓扑量子场论和冯·诺依曼代数理论中非常重要。

第四，杨图与代数几何之间存在一些很好的联系，例如格拉斯曼流形的上同调的“舒伯特演算”。

第五，也是最后一点，杨图本身就是一个重要范畴中的对象！

要理解这一点，我们需要稍微退后一步。我们已经看到，杨图适合用来从已有表示得到新的表示。给定任意一个表示

$$\rho\colon M \to \mathrm{End}(V)$$

任意幺半群 M 的表示，以及任意杨图 Y，我们可以如下得到 M 的一个新表示。首先取 ρ 的 n 次张量幂，它是由以下方式定义的表示

$$\rho^{\otimes n}\colon M \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$$

定义为

$$\rho^{\otimes n}(m)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \rho(m)(v_1) \otimes \cdots \otimes \rho(m)(v_n).$$

群 S_n 也作用于 $V^{\otimes n}$，因此来自 Y 的 $\mathbb{C}[S_n]$ 中的极小幂等元给出了一个幂等算子

$$p_Y\colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$$

然后取 p_Y 的像。由于 M 和 S_n 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用可交换，这个像是 $V^{\otimes n}$ 的一个子空间，并且在所有变换 $\rho(m)$（其中 $m \in M$）下保持不变。因此，它给出了 M 的一个表示。我们将这个新的表示称为 $Y(\rho)$。

由于从旧表示构造新表示的过程完全是系统化的，它应该是一个函子。确实如此！存在一个范畴 Rep(M)，其对象是 M 的表示，对象之间配有通常的态射。存在一个从这个范畴到其自身的函子，记作

$$Y\colon \mathsf{Rep}(M) \to \mathsf{Rep}(M),$$

它将每个表示 ρ 映射到 $Y(\rho)$。这个函子称为**舒尔函子**。

Schur 函子也适用于表示范畴以外的范畴。粗略地说，Schur 函子可以作用于满足以下条件的任何范畴：

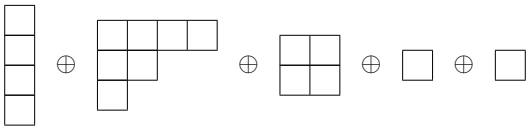
- 我们可以对态射 $f, g\colon x \to y$ 取线性组合，这些态射连接任意两个对象 x 和 y，
- 我们可以对对象取直和与张量积，
- 对任意对象 x，对称群 S_n 作用于 $x^{\otimes n}$，并且
- 我们可以投影到任意幂等态射 $f\colon x \to x$ 的像上。

这些条件可以精确表述，而我逐渐开始把满足这些条件的范畴称为“2-刚性范畴”。因此，对于任意 2-刚性范畴 R 和任意杨图 Y，我们都得到一个舒尔函子

$$Y_{\mathsf{R}}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}.$$

(Now 我现在更谨慎地指出，这个舒尔函子取决于范畴 R .)

有一种很好的方式来理解这里发生的事情。存在一个 2-环 Schur，其对象是杨图的形式有限直和，如下所示：



这个 2-环 Schur 在 2-环理论中扮演着特殊角色：它是“由一个对象生成的自由 2-环”。这个对象就是单框杨图：



这是什么意思？粗略地说，对于任意 2-刚性范畴 R 和任意对象 $r \in \mathsf{R}$，都存在唯一的函子（更准确地说，是一个 2-环映射）

$$F\colon \mathsf{Schur} \to \mathsf{R}$$

它将单框杨图映到 r：

$$F(\square) = r.$$

这个函子 F 必须将每个杨图 Y 映射到 R 中的某个对象。这个对象是什么？它就是将对应于 Y 的舒尔函子应用于 r 的结果：

$$F(Y) = Y_{\mathsf{R}}(r).$$

尽管这些想法看起来极其抽象，但它们十分优美，而且事实证明，它们有助于阐明杨图理论中的许多主题——更多详情请参阅相关文献。

参考文献

我快速浏览了许多内容，但没有详细解释。根据这些笔记，我在爱丁堡大学所作的讲座或许能有所帮助：

- John C. Baez，关于数学物理中的 This Week's Finds 的讲座，第 1–3 讲。

但仍有许多细节尚未涉及。那么，怎样才能真正学会这些内容呢？

如果你有一定耐心，能够接受老派术语，我建议你回头阅读这本关于经典群的经典著作：

- 赫尔曼·韦伊，《经典群、它们的不变量与表示》，普林斯顿大学出版社 s, Prin顿，1997年。

韦尔为本书创造了"经典群"这一术语。本书于1939年首次出版。他的文笔优美，不过提醒你，这本书并不适合用来快速学习杨图。

如果你想找一本面向物理学家、易于阅读，同时又证明了所有关键结果的书，那就非这本莫属：

- 艾琳薇罗娜·申斯特德，《群论在量子力学中的应用》 *s*, NEO 出版社，皮克斯岛缅因州邮政信箱32号。

我上大学时，一位女友送了我一本，但直到很久以后，我才意识到这是一本多么出色的书。遗憾的是，它已经绝版了！真该有人重印这本珍品。与此同时，这里还有另一本涵盖杨图及其在物理学中应用的书：

- Shlomo Sternberg，《群论与物理学》，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。

这两本书，尤其是后者，都介绍了杨图在粒子物理学中的应用，例如盖尔曼著名的"八重道"；它基于这样一种假设：上、下夸克与奇夸克之间存在SU(3)对称性。

接下来还有更高阶的教材，适合当你对杨图的痴迷愈发严重时阅读。就组合方面而言，以下这些书不错：

- Gordon Douglas James 和 Adalbert Kerber，《对称群的表示论》，艾迪生-韦斯利，马萨诸塞州雷丁，1981年。
- Bruce Eli Sagan，《对称群：表示、组合算法与对称函数》，施普林格，柏林，2001年。

若想以更具概念性的方式学习表示论，并将杨图置于更广阔的背景中，不妨阅读以下书目：

- William Fulton 和 Joe Harris，《表示论：入门课程》，施普林格，柏林，1991年。
- Roe Goodman 和 Nolan R. Wallach，《经典群的表示与不变量》，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。

最后，这本数学上颇为深奥的书，能让你真正动手研究杨图：

- William Fulton，《杨表：表示论与几何中的应用》，剑桥大学出版社，剑桥，1997 年。

如果你想了解李群，有很多好书可供选择。下面按内容从浅入深的大致顺序列出几本：

- Brian Hall，李群、李代数与表示，施普林格，柏林，2003年。
- J. Frank Adams，李群讲义，芝加哥大学出版社，芝加哥，2004年。
- Sigurdur Helgason，微分几何、李群与对称空间，学术出版社，纽约，1979年。

- Daniel Bump，李群，施普林格，柏林，2004年。

Fulton 和 Harris 的书以有限群表示的介绍开篇，尤其是 S_n，并且有一章讲杨图。关于线性代数群，可以参考这本书：

- James S. Milne，仿射群概形基础理论。

最后，本文阐明了范畴 Schur（其对象是杨图的形式有限直和）如何成为由一个对象生成的自由 2-刚性范畴：

- John C. Baez、Joe Moeller 和 Todd Trimble，舒尔函子与范畴化的复合运算 m.

存在一种已知的方法，可以复合杨图的形式直和，称为“复合运算”；我们使用 2-环 Schur 来研究复合运算。

致谢

我感谢 Leverhulme信托基金提供奖学金，使我得以在爱丁堡大学数学学院围绕这一主题举办系列讲座；也感谢 Tom Leinster 促成此事。我感谢 James Dolan、Joe Moeller 和 Todd Trimble 与我多次讨论杨图。