arXiv:2302.08028v1 [math.OA] 16 Feb 2023

计算分类强自吸收 C-代数向量丛的上同调群

MARIUS DADARLAT、JAMES E. MCCLURE 和 ULRICH PENNIG

ABSTRACT. 以强自吸收C^*-代数 D 为纤维的 C^*-代数局部平凡丛 $D\otimes\mathcal{K}$，定义在有限 CW复形 X 上，构成群 $E^1_D(X)$；该群是上同调理论 $E^*_D(X)$ 的首群。本文通过将这些群表示为普通上同调和连通 K-理论的形式来计算它们。为了比较 C^*-代数版本的$gl_1(KU)$与其经典对应物，我们还为复周期拓扑 K-理论的单位谱建立了一个唯一性结果。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 表示 K-理论及其局部化的对称环谱 4 2.1. 强自吸收 C^*-代数 4 2.2. 对称谱 KU^D 5 2.3. KU^D 的单位谱 7 2.4. 连通 K 理论 8 3. K-理论的单位元与丛的分类 9 3.1. 分裂结果 10 3.2. 比较 $E^1_{\mathcal{Z}}(X)$与 $bsu^1_{\otimes}(X)$并证明定理 A 15 4. 作为交换 S-代数的K-理论及其单位元 16 4.1. 局部化、连通 K-理论、 $bsu_{\oplus}$ 和 $bsu_{\otimes}$ 17 5. K-理论谱的 gl_1 唯一性 18 5.1. 范畴变换。19 5.2. 障碍理论。20 5.3. S-模 $\Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}]$ 21 5.4. 从 $\Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}]$ 到 KU 和 G的等价。22 5.5. $\mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}]$ 23的乘积映射 5.6. 引理 5.6 的证明 23 参考文献 25

1. INTRODUCTION

C^*代数的连续场自然出现，因为它们对应于拓扑学意义下的 C^*代数向量丛 [9]。任何具有豪斯多夫本原谱 X 的 C^*代数，都是定义在 X上的简单 C^*代数连续场 [25], [22]。更重要的是，连续场在多个领域中被用作灵活的工具： E理论 [12], 、切群胚的变形

J.E.McC. 感谢上帝使他的工作得以完成。

流形 [11], [1], 严格变形量子化 [52], [39], Novikov猜想和鲍姆–康尼斯猜想, [37], [30], [60], 表示论和指标理论 [28], [29]。

紧空间 X 上的连续场的特别良好例子可以表示为局部平凡丛 $E \to X$ 的连续截面 $C(X, E)$, 其纤维同构于一个固定的 C^*-代数 A。这类向量丛通过使用 1-余循环 γ_{ij}: $U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(A)$, 将基空间 X 的一个开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$ 上的平凡丛 $U_i \times A$ 粘合而构造出来。在紧豪斯多夫空间 X 上, 这样的两个局部平凡丛 E 和 F 当且仅当它们的截面 C^*-代数 $C(X, E)$ 和 $C(X, F)$ 通过一个 $C(X)$-线性 $*$-同构而同构时, 才彼此同构。该性质的证明是丛理论 [14]中的一个初等练习。

正如通过 1-余循环的描述所表明的, 局部平凡丛（其纤维为 A ）的同构类的分类可以归结为对 X 上的主 $\mathrm{Aut}(A)$-丛按同构进行分类, 进而归结为计算从 X 到分类空间 $B\mathrm{Aut}(A)$ 的映射的同伦类。在没有额外结构的情况下, 分类空间的同伦型通常极难确定, 而诸如 $[X, B\mathrm{Aut}(A)]$ 这样的同伦集的计算则无法实现。然而, 当 $A = D\otimes\mathcal{K}$时, 情况发生了相当大的变化, 其中D 属于强自吸收 C^*-代数这一类（见第 2.1 节）, 而 $\mathcal{K}$ 表示作用在无限维可分希尔伯特空间上的紧算子。在此情形下, $\mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K})$ 结果是一个无限循环空间, 这不仅意味着 $E^1_D(X) := [X, B\mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K})]$ 是一个阿贝尔群, 即广义上同调理论 $E^*_D(X)$ 的 1-群, 而且意味着它适用于稳定同伦论的方法, [19], [18]。

值得注意的是, $E^1_D(X)$ 上源自 $B\mathrm{Aut}(D\otimes\mathcal{K})$ 的无穷循环空间结构的群运算, 与由 $D\otimes\mathcal{K}$-向量丛的张量积所诱导的运算一致。这促成了广义 Dixmier-Douady 理论。值得指出的是, 若 $D = \mathbb{C}$, 则 $E^1_{\mathbb{C}}(X) \cong H^3(X, \mathbb{Z})$ 是经典 Dixmier-Douady 类的所在。强自吸收 C^*- 代数 [57] 是可分的含幺 C^*-代数 D , 其定义在于一项它们与复数 $\mathbb{C}$共有的关键性质。具体而言, 存在一个同构 $D \to D \otimes D$, 它与映射 $d \mapsto d \otimes 1_D$ [21], [61] 酉同伦。任一强自吸收 C^*-代数 D 不是稳定有限的, 就是纯无限的。后一条件等价于 $D \cong D \otimes \mathcal{O}_\infty$, 其中 $\mathcal{O}_\infty$ 是无限 Cuntz 代数。得益于分类理论 [62] 的近期进展, 我们如今已完整列出所有满足 KK-理论中的普适系数定理（简称 UCT）的强自吸收 C^*-代数。

本文的主要目标是计算 UCT 类中所有强自吸收 C^*-代数 D 的群 $E^1_D(X)$。更准确地说, 我们利用连通 K-理论和普通上同调群来表示 $E^1_D(X)$ 及其变体。这个问题本身就很有趣, 而且与高阶扭曲 K 理论 [50], 有直接联系; 此外, 以下近期进展也为我们提供了进一步的研究动机: Izumi 在 [33], [34] 提出的一个猜想, 最近经由 Meyer [48] 以及 Gabe 和 Szab´o [26] 的合作研究得以证明。该猜想断言, 对于一个可数无挠可 amenable 群 G 和一个 Kirchberg 代数 D, G 在 $D \otimes K$ 上的外作用的余循环共轭类, 与主 $\mathrm{Aut}(D \otimes K)$-向量丛在分类空间 BG 上的同构类之间存在双射; 也就是说, 它们对应于同伦类集合 $[BG, B\mathrm{Aut}(D \otimes K)]$。

由此可知, 如果 BG 具有有限 CW 复形模型, 并且 D 是满足 UCT 的强自吸收 Kirchberg 代数, 那么 G 在 $D \otimes K$ 上的外作用的协循环共轭类集合关于张量积运算构成一个群, 并且该群同构于 $E^1_D(BG)$。此外, 下面将说明如何计算这个群。

令 $k^*(X)$ 表示空间 X的复连通 K理论。对于具有骨架 X_i、 $\widetilde{k}^i$的有限带基点 CW 复形 X，$X \cong \widetilde{K}^i(X, X_{i-2})$，特别是 $k^5(X) \cong K^1(X, X_3)$，参见命题 2.2。对于素数集 $P \neq \emptyset$，考虑 C^*-代数 $M_P = \bigotimes_{p\in P} M_p(\mathbb{C})^{\otimes\infty}$ 及其理论环 $\mathbb{Z}_P = \bigotimes_{p\in P} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$，将其视为 $\mathbb{Q}$ 的子环。我们的主要结果如下：

定理 A. 设 X 是一个有限 CW 复形，且 P 是一个非空的素数集合。存在同构

(a) $E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong H^3(X,\mathbb{Z}) \oplus k^5(X)$。（b） $E^1_{M_P}(X) \cong H^1(X,(\mathbb{Z}_P)^\times_+) \oplus H^3(X,\mathbb{Z}_P) \oplus k^5(X,\mathbb{Z}_P)$（c） $E^1_{\mathcal{O}_\infty}(X) \cong \big(H^1(X,\mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X,\mathbb{Z})\big) \oplus k^5(X)$。（d） $E^1_{M_P\otimes\mathcal{O}_\infty}(X) \cong H^1(X,(\mathbb{Z}_P)^\times_+) \oplus \big(H^1(X,\mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X,\mathbb{Z}_P)\big) \oplus k^5(X,\mathbb{Z}_P)$

$H^1(X;\,\mathbb{Z}/2) \times H^3(X,\mathbb{Z}_P)$ 上的（扭曲）乘法定义如下：

$$(w,\tau)\cdot(w',\tau') = (w+w', \tau+\tau'+\beta_P(w\cup w')) \tag{1}$$

对于 $w, w' \in H^1(X,\mathbb{Z}/2)$ 和 $\tau,\tau' \in H^3(X,\mathbb{Z}_P)$，其中 β_P: $H^2(X,\mathbb{Z}/2) \to H^3(X,\mathbb{Z}_P)$ 是 Bockstein 同态 β与系数映射 $H^3(X,\mathbb{Z}) \to H^3(X,\mathbb{Z}_P)$ 的复合。(c) 中的乘法与 (1) 中的完全相同，只需将 β_P替换为 β: $H^2(X,\mathbb{Z}/2) \to H^3(X,\mathbb{Z})$。

上述同构并非自然的。本文结构如下：在第 2.1 节中，我们回顾强自吸收 C^*-代数的定义，讨论其分类，并给出其 K-理论群。对每个这样的代数，都可以关联一个交换对称环谱 KU^D（见 [18]）。其定义将在第 2.2 节中回顾。正如交换环有一个可逆元（或单位元）群，谱 KU^D 也有一个与之关联的单位谱，其定义基于交换 $\mathcal{I}$-幺半群，见 [53]。第 2.3 节将回顾所有这些概念。正如我们将在后续章节中看到的，对稳定化的强自吸收 C^*-代数的向量丛进行分类的群，可以用连通 K-理论ku来表示。因此，我们将在第 2.4 节中回顾本文其余部分所需的 ku 的主要性质。

在第 3 节中，我们讨论纤维为 $D \otimes \mathcal{K}$ 的 C^*-代数向量丛的分类，其中 D 是强自吸收的 C^*-代数。第 3 节开头回顾上同调理论 $E^*_D(X)$ 及其变体的构造。如第 3.1 节所示，这些理论都分裂出一个低次求和项，可通过带有“扭曲乘法”的普通上同调群来表示。第 3 节中称为 $h(X)$ 的这一求和项的补项，在第 3.2 节中被识别为 $bsu^1_\otimes(X)$。根据 Adams-Priddy 关于 bsu 的唯一性的结果，我们可以用连通 K-理论来表示 $bsu^1_\otimes(X)$（我们将在第 2.4 节回顾该理论）。最后这部分的微妙之处在于，我们必须处理拓扑 K-理论的单位元的两种构造： $gl_1(KU^{\mathbb{C}})$ 和 $gl_1(KU)$; 这里 KU 是一个表示 K-理论的交换 S-代数。我们将在第 4 节和第 5 节证明，这两种构造给出的上同调理论相同。

由于第 5 节中唯一性结果的证明需要用到稳定同伦论中的大量复杂工具，第 4 节概述了我们所需的预备知识：我们在第 4.1 节讨论交换 S-代数及其单位谱的定义，其中也给出了交换 S-代数 KU 的定义；它将在第 5 节中发挥关键作用。

本文第 5 节完全 посвящен于证明唯一性结果，该结果给出一个自然同构 $gl_1(KU^{\mathbb{C}})^*(X) \cong gl_1(KU)^*(X)$。在第 5.1 节中，我们解释如何从交换对称环谱的单位元过渡到交换 S-代数的单位元。在第 5.2 节中，我们使用 Goerss 和 Hopkins 的障碍理论，证明如果在交换 S-代数模型 G for$K$-理论与同伦范畴中的 KU 之间存在含单位乘法同构，则唯一性成立。在接下来的第 5.3 至 5.6 节中，我们构造

一个中间谱 $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}]$，其优点在于，从它到 G and KU 的映射可以由 $\mathbb{C}P^n$ 上的映射构造出来，而这些映射可以很容易地从乘法自然变换中得到。

2. Symmetric ring spectra representing K-theory and its localisations

拓扑 K-理论是一种乘法上同调理论，并且可以建模为一个交换对称环谱[36]。以这种形式，它具有一个自然的扩张 KU^D，其以一个强自吸收的 C^*-代数 D 为输入。对于任意这样的 D，群 $K_0(D)$实际上是一个环；如果 D 满足 UCT，则 $K_0(D) \subseteq \mathbb{Q}$ 作为其子环。谱 KU^D表示以 K-理论为系数的拓扑 $K_0(D)$，即 K-理论的一个局部化。下一节中，我们将回顾强自吸收 C^*-代数的定义、 KU^D 的构造，以及其在稳定同伦论意义下的单位谱。

2.1. 强自吸收 C^*-代数。若 $A \otimes D \cong A$，则一个 C^*-代数 A 张量吸收另一个 C^*-代数 D。正如 [38, 51], 中已经指出的，张量吸收性质在可分单核 C^*-代数的分类纲领中至关重要。这促使人们对强自吸收 C^*-代数 [58] 进行了分析。根据定义，如果存在一个同构 $D \to D \otimes D$，且它与 $d \mapsto d \otimes 1$ 近似酉等价，那么一个含幺 C^*-代数 D 就属于这一类。

两个 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$ 和 $\mathcal{O}_\infty$ 分别具有两个和无穷多个生成元（见 [13]），且都是强自吸收的。该类中的另一个重要例子是 Jiang-Su 代数 $\mathcal{Z}$ （见 [35]），它可视为 $\mathbb{C}$的无限维稳定有限对应物，而 $\mathcal{O}_\infty$ 则是其纯无限版本。我们有同构 $\mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{Z} \cong \mathcal{O}_\infty$。酉 $*$-同态 $\mathbb{C} \to \mathcal{Z} \to \mathcal{O}_\infty$ 是 KK-等价。 $\mathcal{O}_2$ 是 KK-可缩的。

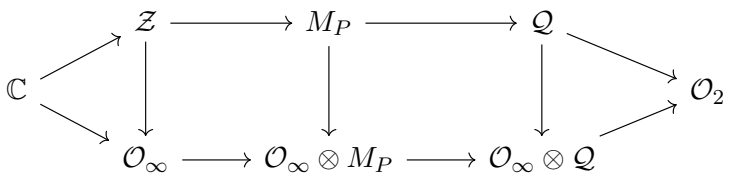
除 $\mathbb{C}$和 $\mathcal{O}_2$之外，所有满足 UCT 的自吸收 C^*代数，都可以构造为 $\mathcal{Z}$ 或 $\mathcal{O}_\infty$ 与一个无限 UHF 代数的张量积。它们的构造是素数集处局部化的一种 C^*代数版本：对于一个素数 p，令 M_p表示无限张量积 $M_p = M_p(\mathbb{C})^{\otimes\infty}$。对于一个素数集 P，定义 M_P 为

$$M_P = \bigotimes_{p \in P} M_p \ .$$

若 $P = \emptyset$，则我们设 $M_P = \mathbb{C}$。强自吸收 C^*-代数可分为两类：它们要么是稳定有限的，要么是纯无限的。第一种情况下，该代数同构于 $\mathbb{C}$、 $\mathcal{Z}$，或某个非空素数集 P 所对应的 M_P；第二种情况下，它同构于 $\mathcal{O}_\infty$、某个非空素数集 P 所对应的 $M_P \otimes \mathcal{O}_\infty$，或 $\mathcal{O}_2$、 [62]。若 D 是纯无限的，则 $D \otimes \mathcal{O}_\infty \cong D$。

如果 D 是强自吸收的且 $D \neq \mathbb{C}$，那么 $D \cong D \otimes \mathcal{Z}$。特别地，我们有$M_P \otimes \mathcal{Z} \cong M_P$。如果 $P \subset P'$ 是素数集合的包含关系，那么 $M_{P'} \otimes M_P \cong M_{P'}$。当 P 是所有素数的集合时，我们将 M_P 记为 $\mathcal{Q}$。 C^*代数 $\mathcal{Q}$ 称为通用 UHF 代数。各种强自吸收 C^*代数之间的关系如下图所示：

(2)



图中的箭头 $D \to D'$ 不仅表示含幺嵌入，还表示性质$D' \otimes D \cong D'$。

对于属于 UCT 类的强自吸收 C^*-代数，其 D K 理论群可如下计算： K [58]： $K_1(D) = 0$ 并且如上所述，群 $K_0(D) \cong K_0(\mathcal{O}_\infty \otimes D)$ 具有自然的含幺交换环结构，其乘法由同构 $D \otimes D \cong D$诱导。令$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 表示对 $\mathbb{Z}$在 p之外局部化所得的 $\mathbb{Z}_{(p)}$，并令 $\mathbb{Z}$表示在 p处局部化所得的 $\mathbb{Z}_{(p)}$。于是有自然的环同构：

$$K_0(\mathbb{C}) \cong K_0(\mathcal{Z}) \cong K(\mathcal{O}_\infty) \cong \mathbb{Z} \ ,$$
$$K_0(M_P) \cong K_0(M_P \otimes \mathcal{O}_\infty) \cong \bigotimes_{p \in P} \mathbb{Z}_p =: \mathbb{Z}_P \ ,$$
$$K_0(\mathcal{O}_2) = 0 \ .$$

仿照整数的局部化，我们在 P 是所有不同于 p的素数构成的集合时，将代数 M_P 记作 $M_{(p)}$。因此：$K_0(M_p) \cong \mathbb{Z}_p$， $K_0(M_{(p)}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}$，以及 $K_0(\mathcal{Q}) \cong \mathbb{Q}$。

我们将交换环 $K_0(D)$的可逆元记为 $K_0(D)^\times$，或记为 $GL_1(K_0(D))$。注意， $K_0(D)$是一个有序群，其正锥由 $D \otimes \mathcal{K}$ 中由投影类表示的元素（而非形式差）构成。 $K_0(D)^\times$ 的正元素子群记为 $K_0(D)^\times_+$。由于当 D 为纯无限时，其序结构是平凡的，因此在这种情况下有 $K_0(D)^\times_+ = K_0(D)^\times$。

2.2. 对称谱 KU^D。 C^*-代数 A 上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次是一个自同构$\gamma \in \mathrm{Aut}(A)$，满足 $\gamma^2 = \mathrm{id}_A$。我们称有序对(A, γ)为分次 C^*-代数，并且通常会在记号中省略分次。任何 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次的 C^*-代数 A 都有一个巴拿赫空间分解$A \cong A^0 \oplus A^1$，其中

$$A^0 = \{a \in A \mid \gamma(a) = a\} \qquad \text{and} \qquad A^1 = \{a \in A \mid \gamma(a) = -a\}$$

使得偶部 A^0 是一个 C^*-子代数，且 $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$，其中此处上标按模 2 计算。元素 $a \in A^i$ 称为齐次元素，其次数为 i，记作 $\deg(a) = i$。若 $\gamma = \mathrm{id}_A$，则称 A 为平凡分次。两个分次 C^*-代数 A 和 B 的（极小）分次张量积，是代数张量积$A \odot B$ 的一个完备化，其乘法和对合在齐次元素上定义为

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{\deg(a') \cdot \deg(b)} aa' \otimes bb' \qquad \text{and} \qquad (a \otimes b)^* = (-1)^{\deg(a) \cdot \deg(b)} a^* \otimes b^*$$

张量交换映射 $A \otimes B \to B \otimes A$ 也必须带上符号 $(-1)^{\deg(a) \cdot \deg(b)}$，才能成为一个 $*$-同构。

以下构造中，两种分次 C^*-代数将发挥核心作用：克利福德代数 $\mathbb{C}\ell_n$ 是带单位的 C^*-代数，具有自伴生成元 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，并满足以下关系

$$e_i e_j + e_j e_i = \delta_{ij} \, 1 \ ,$$

其中 δ_{ii} 是克罗内克 δ。分次 γ 在生成元上的定义为 $\gamma(e_i) = -e_i$，即元素 e_i 是奇数次的。这些结构使 $\mathbb{C}\ell_n$ 成为一个有限维分次 C^*-代数。

我们将遇到的另一个非平凡分次的 C^*-代数是分次悬挂代数 $\mathcal{S} = C_0(\mathbb{R})$，其分次由奇函数与偶函数给出。该代数可以配备一个余结合且余交换的余乘法 $\Delta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$，并具有余单位 $\epsilon\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ [36, 。p. 94]。

设 D 是一个强自吸收的 C^*-代数，并将其视为平凡分次代数。文献 [18] 证明了由下式给出的空间序列 $(KU_n^D)_{n\in\mathbb{N}_0}$：

$$KU_n^D = \hom_{\mathrm{gr}}(\mathcal{S}, (\mathbb{C}\ell_1 \otimes D \otimes \mathcal{K})^{\otimes n})$$

并赋予点范数拓扑后，构成一个表示上同调理论 $X \mapsto K_*(C(X)\otimes D)$ 的交换对称环谱。KU^D 上的乘法结构由以下内容诱导：

$$KU_n^D \wedge KU_m^D \to KU_{n+m}^D \quad , \quad \varphi \wedge \psi \mapsto (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta \ .$$

博特周期性给出 $\hom_{\mathrm{gr}}(\mathcal{S}, C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}\ell_1)$ 中的一个元素，因而通过与一个秩1投影 $1 \otimes e \in D \otimes \mathcal{K}$ 作扩张，得到其中的一个元素

$$\mathrm{Map}_*(S^1, KU_1^D) \cong \hom_{\mathrm{gr}}(\mathcal{S}, C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}\ell_1 \otimes D \otimes \mathcal{K})$$

（详见 [18, 第4.1] 节）。环谱的单位映射 η_n：$S^n \to KU_n^D$ 被构造为 η_1 的 n 次幂（使用上述乘法）。如通常一样，将单位映射与乘法结合起来，便得到结构映射

$$S^1 \wedge KU_n^D \to KU_{n+1}^D \tag{3}$$

注意，空间 $KU_0^D = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{S}, \mathbb{C}) \simeq S^0$ 仅包含两个点。其中一个由零同态给出，另一个由在0处求值给出；后者是唯一尊重分次的求值。尽管如此，正如我们将在引理 2.1 中看到的，次数为 ≥ 1 的结构映射的所有伴随映射都是弱同伦等价。具有这一性质的对称谱称为正Ω-谱。事实上，还有更强的结论：

引理 2.1. 设 D 是一个强自吸收 C^*-代数。谱 KU^D 是一个正 Ω-谱，它作为乘法上同调理论表示 $X \mapsto K_*(C(X) \otimes D)$。

证明。对于 $n \geq 1$，$KU_n^D \to \Omega KU_{n+1}^D$ 是 3式的伴随映射，依据 [18, 定理 4.2]，它是一个弱等价。因此，KU^D 是一个正 Ω-谱。根据 [59, 定理 4.7]，存在自然同构

$$[X, KU_n^D] \cong [\mathcal{S}, C(X) \otimes \mathbb{C}\ell_n \otimes D \otimes \mathcal{K}]_{\mathrm{gr}} \cong KK(\mathbb{C}, C(X) \otimes \mathbb{C}\ell_n \otimes D) \cong K_n(C(X) \otimes D) \ ,$$

对于 $n \geq 1$，其中 $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathrm{gr}}$ 表示分次同态的同伦类。还需验证这与乘法结构相容。利用博特周期性和悬吊论证，这可以归结为以下问题：$KU_2^D \wedge KU_2^D \to KU_4^D$ 是否实现了 $K_0(C(X) \otimes D) \cong K_2(C(X) \otimes D)$ 中的乘法。

注意，若右侧赋予对角/非对角分次，则有 $\mathbb{C}\ell_2 \cong M_2(\mathbb{C})$。令 $p_1, p_2, q_1, q_2 \in C(X) \otimes D \otimes \mathcal{K}$ 为投影，并考虑

$$\varphi_{p_i,q_i} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}\ell_2 \otimes C(X) \otimes D \otimes \mathcal{K} \quad , \quad f \mapsto \epsilon(f) \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ 0 & q_i \end{pmatrix} \ .$$

根据 [59, p. 303] 这表示 $[X, KU_2^D]$ 中的元素 $[p_i] - [q_i] \in K_0(C(X) \otimes D)$。我们有$\mathbb{C}\ell_2 \otimes \mathbb{C}\ell_2 \cong \mathbb{C}\ell_2 \otimes M_2(\mathbb{C})$，其中 $M_2(\mathbb{C})$ 赋予平凡分次。此外，$(\epsilon \otimes \epsilon) \circ \Delta = \epsilon$，因为 ϵ 是余单位。因此，我们得到

$$((\varphi_{p_1,q_1} \otimes \varphi_{p_2,q_2}) \circ \Delta)(f) = \epsilon(f) \begin{pmatrix} p_1 \otimes p_2 \oplus q_1 \otimes q_2 & 0 \\ 0 & p_1 \otimes q_2 \oplus q_1 \otimes p_2 \end{pmatrix} \ ,$$

这确实表示类 $([p_1] - [q_1]) \cdot ([p_2] - [q_2]) \in K_0(C(X) \otimes D)$。 □

2.3. KU^D 的单位谱。依照 Schlichtkrull [53], , 我们简要概述如何定义交换对称环谱的单位元。这基于以下 E_∞-空间模型：令 $\mathcal{I}$ 为一个范畴，其对象为集合 $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$，其中 $n \in \mathbb{N}_0$（带有 $\mathbf{0} = \emptyset$），态射为单射。该范畴是一个对称幺半范畴，对象上的张量积定义为 $\mathbf{n} \sqcup \mathbf{m} = \{1, \dots, n+m\}$，态射上的张量积则通过将 $\mathbf{n}$ 与 $\{1, \dots, n\} \subset \mathbf{n} \sqcup \mathbf{m}$、将 $\mathbf{m}$ 与 $\{n+1, \dots, n+m\} \subset \mathbf{n} \sqcup \mathbf{m}$ 识别来定义。对象 $\mathbf{0}$ 是幺半单位，对称性 $\mathbf{n} + \mathbf{m} \to \mathbf{m} + \mathbf{n}$ 由一个块置换给出。

$\mathcal{I}$-空间是一个函子 $X\colon \mathcal{I} \to \mathcal{T}$from $\mathcal{I}$ to 带基点拓扑空间的范畴。从 $\mathcal{I}$-空间到另一个 $\mathcal{I}$-空间的态射是一个自然变换。$\mathcal{I}$-空间的范畴还具有对称幺半结构：给定两个 $\mathcal{I}$-空间 X 和 Y，张量积 $X \boxtimes Y$定义为沿着 $\sqcup\colon \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathcal{I}$对 $\mathcal{I}^2$-空间 $X \times Y$作左 Kan 延拓。该定义意味着，$\mathcal{I}$-空间 X, Y, Z 之间的态射 $X \boxtimes Y \to Z$ 等同于一个自然变换

$$X(\mathbf{n}) \times Y(\mathbf{m}) \to Z(\mathbf{n} \sqcup \mathbf{m})$$

$\mathcal{I}^2$-空间之间的自然变换。一个（交换）$\mathcal{I}$-幺半群是 $\mathcal{I}$-空间范畴中的（交换）幺半群。注意，范畴 $\mathcal{I}$ 在 [40] 中记作 $\mathbb{I}$，而 $\mathcal{I}$-幺半群称为 $\mathbb{I}$-FCP。若 X 是一个交换 $\mathcal{I}$-幺半群，那么

$$X_{h\mathcal{I}} = \operatorname{hocolim}_{\mathcal{I}} X$$

是一个 E_∞-空间 [40, 参见注 4.3]。应将 $\mathcal{I}$-空间的同伦余极限视为由它建模的同伦型。

设 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个交换对称环谱，并定义 $(\Omega^\bullet R)(\mathbf{n}) = \Omega^n R_n$。这可扩展为一个 $\mathcal{I}$-空间 $\Omega^\bullet R$，它应当对谱 R底层的无限循环空间建模。不过这里有一个注意事项，因为 $(\Omega^\bullet R)_{h\mathcal{I}}$ 与 R 的同伦群不一定一致（另见 [40, 注 2.1]）。若 R 由一个正 Ω-谱表示（本段余下部分均作此假设），那么这个问题便不会出现。类似于 (23)，我们将 R 的单位空间 $(\Omega^\bullet R)^\times(\mathbf{n})$ 定义为 $\Omega^n R_n$ 的子空间，其中包含那些基点映射 $f\colon S^n \to R_n$，它们是稳定可逆的，即存在g: $S^m \to R_m$ 使得

$$\mu \circ (f \wedge g)\colon S^{n+m} \to R_{n+m}$$

与该环谱的单位映射同伦，其中 $\mu\colon R_n \wedge R_m \to R_{n+m}$表示其乘法。楔积 $(f, g) \mapsto \mu \circ (f \wedge g)$ 赋予 $(\Omega^\bullet R)^\times$ 交换$\mathcal{I}$-幺半群的结构，并且

$$(\Omega^\bullet R)^\times_{h\mathcal{I}} \simeq GL_1(R)\ .$$

因此，$(\Omega^\bullet R)^\times$ 所 underlying 的空间是 $GL_1(R)$，但交换 $\mathcal{I}$-幺半群揭示了其上的一个 E_∞-结构。为了由此得到谱 $gl_1(R)$，我们可以将 $(\Omega^\bullet R)^\times$ 变为一个 Γ-空间，并对其应用无限循环空间机器，将其变为一个弱 Ω-谱。详情请参阅 [53] ，或参见 [40, 构造 12.1 和定义 12.5]。

将此函子应用于 $KU^{\mathbb{C}}$ 给出了定义拓扑K-理论的单位谱的第一种方式，我们将其记为 $gl_1(KU^{\mathbb{C}})$。我们将在第$K4$ 节中以第二种方式定义拓扑4 -理论的单位谱，并将相应对象记为 $gl_1(KU)$。两个谱 $gl_1(KU^{\mathbb{C}})$ 和 $gl_1(KU)$ 将在第5 节中进行比较。

我们通过列出谱 $gl_1(KU^D)$ 之间的一些比较结果来结束本部分。回顾一下，逐层等价是对称谱之间的一个映射，它对所有 $n \geq 0$ ([43, Definition 6.1(i)])，都在谱的第 n 个空间上诱导弱等价。逐层等价是稳定等价（[43, 页面底部 466]）。一般来说，反之并不成立；但如果这些谱是 Ω-谱，则反之成立（[43, Lemma 8.11]）。

这些谱 KU^D 根据引理 2.1 是正 Ω-谱，因此根据 [43, 定理 14。2]，它们是交换对称环谱模型范畴中的纤维化对象。根据 [40, 引理 13。5]，函子 gl_1 保持纤维化对象之间的弱等价。该 $*$-同态$\mathbb{C} \to \mathcal{Z}$ 和 $\mathbb{C} \to \mathcal{O}_\infty$ 诱导交换对称环谱 $KU^{\mathbb{C}} \to KU^{\mathcal{Z}}$与 $KU^{\mathbb{C}} \to KU^{\mathcal{O}_\infty}$之间的逐层等价，因而也是稳定等价。给定任意素数集 P，单位 $*$-同态 $M_P \to M_P \otimes \mathcal{O}_\infty$给出一个稳定等价 $KU^{M_P} \to KU^{M_P \otimes \mathcal{O}_\infty}$。因此，由此可得弱 Ω-谱之间的等价

$$gl_1(KU^{\mathbb{C}}) \simeq gl_1(KU^{\mathcal{Z}}) \simeq gl_1(KU^{\mathcal{O}_\infty}) \,, \tag{4}$$

$$gl_1(KU^{M_P}) \simeq gl_1(KU^{M_P \otimes \mathcal{O}_\infty}) \,. \tag{5}$$

2.4. 连通 K 理论。设 ku 是表示连通 K 理论的一个谱。它是谱 KU （复周期 K-理论的谱）的连通覆盖，即 (-1)-连通覆盖。存在一个谱映射 $ku \to KU$，它在非负次数的同伦群上诱导同构，而 $\pi_i(ku) = 0$ （当 $i < 0$ 时）。因此，构成谱 ku 的前几个空间的同伦类型为：

$$BU \times \mathbb{Z},\, U,\, BU,\, SU,\, BSU,\, BBSU \,\ldots$$

谱 $bsu_\oplus$ 是 ku （或 KU）的 3-连通覆盖（见 [4]）。因此，我们可以将 $bsu_\oplus$ 与 $\Sigma^4 ku$ 等同。设 k^* 为与 ku 相关联的上同调理论。根据我们的观察，存在一个自然同构

$$bsu^n_\oplus(X) \cong k^{n+4}(X), \text{ for all } n \geq 0. \tag{6}$$

就我们的目的而言，探讨如何计算 $bsu^1_\oplus(X) \cong k^5(X)$ 是有用的。令 $H\mathbb{Z}$ 表示通常用于表示普通上同调的 Eilenberg-Mac Lane 谱。Bott 运算 b 诱导出一个谱的余纤维列

$$\Sigma^2 ku \xrightarrow{\;b\;} ku \longrightarrow H\mathbb{Z}$$

从而得到一个长正合列

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & k^3(X) & \xrightarrow{b} & k^1(X) & \rightleftarrows & H^1(X,\mathbb{Z}) \\
0 & \longrightarrow & k^4(X) & \xrightarrow[b]{} & k^2(X) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X,\mathbb{Z}) \\
0 & \longrightarrow & k^5(X) & \xrightarrow[b]{} & k^3(X) & \longrightarrow & H^3(X,\mathbb{Z}) \\
 & & k^6(X) & \xrightarrow[b]{} & k^4(X) & \longrightarrow & H^4(X,\mathbb{Z})
\end{array}$$

我们看到 $k^1(X) \cong K^1(X)$ 以及 $k^3(X) \cong \ker\big(K^1(X) \to H^1(X,\mathbb{Z})\big)$，因此

$$k^5(X) \cong \ker\big(k^3(X) \to H^3(X,\mathbb{Z})\big) \,. \tag{7}$$

映射 $k^i(X) \to H^i(X,\mathbb{Z})$ 由行列式映射 det: $U \to U(1)$ 的解缚诱导。映射 c_1 与第一陈类相对应，并且是满射。

对于 $k^5(X)$ 的另一种描述，可以验证，若 X 是一个有限 CW 复形，其 i-骨架为 X_i, $i \geq 0$，那么 $k^3(X) \cong K^1(X, X_1)$，$k^5(X) \cong K^1(X, X_3)$ 同构于以下对象的核：

限制映射 $K^1(X, X_1) \to K^1(X_3, X_1)$。事实上，为方便读者，我们列出以下专家们熟知的命题:

命题 2.2. 若 X 是带基点的有限 CW 复形，则 $X_{i-2} \subset X$ 对约化理论 $\widetilde{k}^i(X) \cong \widetilde{k}^i(X, X_{i-2}) \cong \widetilde{K}^i(X, X_{i-2})$ 诱导一个同构。

证明. 长正合列

$$\longrightarrow \widetilde{k}^{i-1}(X_{i-2}) \longrightarrow \widetilde{k}^i(X, X_{i-2}) \longrightarrow \widetilde{k}^i(X) \longrightarrow \widetilde{k}^i(X_{i-2}) \longrightarrow$$

给出同构 $\widetilde{k}^i(X) \cong \widetilde{k}^i(X, X_{i-2})$，因为 $\widetilde{k}^{i-1}(X_{i-2}) = \widetilde{k}^i(X_{i-2}) = 0$，空间 $bu(r)\widetilde{\ }$ 按构造是 $(r-1)$-连通的，因此当 $\dim(Y) \leq r-1$ 时，$k^r(Y) = [Y, bu(r)] = 0$。接下来，正合列

$$\widetilde{H}^{j-1}(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{k}^{j+2}(Y) \longrightarrow \widetilde{k}^j(Y) \longrightarrow \widetilde{H}^j(Y, \mathbb{Z})$$

表明，如果 Y 是 j-连通的，则 $\widetilde{k}^{j+2}(Y) \cong \widetilde{k}^j(Y)$，因此

$$\widetilde{k}^{j+2}(Y) \cong \widetilde{k}^j(Y) \cong \widetilde{k}^{j-2}(Y) \cong \cdots \cong \widetilde{K}^{j-2m}(Y) \cong \widetilde{K}^j(Y)$$

对 $2m \geq j$ 成立。将此同构应用于 $Y = X/X_{i-2}$（它是 $(i-2)$-连通的），可得 $\widetilde{k}^i(X, X_{i-2}) \cong \widetilde{K}^i(X, X_{i-2})$。□

其他算子代数中连通 K 理论的应用，读者可参阅 [55], [16] 和 [15] 。

3. Units of K-theory and the classification of bundles

设 D 是满足 UCT 的稳定有限强自吸收 C^*-代数。由式（2）可知，$D \cong M_P$ 其中 P 是某个（可能为空的）素数集合。在 [19, 18]中已证明，纤维为 $D \otimes \mathcal{K}$ 的局部平凡 C^*-代数向量丛的同构类在逐纤维张量积下构成一个群。这些群各自属于一种上同调理论，该理论与由谱 $gl_1(KU^D)$ 表示的上同调理论密切相关。这些理论之所以存在，是因为以下空间具有无穷循环空间结构

$$\mathrm{Aut}_0(D \otimes \mathcal{K}),\ \mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K}),\ \mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\mathbb{C}\ell_1 \otimes D \otimes \mathcal{K}),$$

其中 $\mathrm{Aut}_0(\cdot)$ 表示自同构群的单位连通分支，而 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\cdot)$ 表示保持分次的自同构。事实上，这些空间各自都是一个 E_∞-空间，可由与 D自然关联的交换 $\mathcal{I}$-幺半群建模。这些 $\mathcal{I}$-幺半群以及我们对相应上同调理论所采用的记号列于表 1。

交换幺半群 $\mathcal{I}$		上同调理论
$\bar{\mathsf{G}}_D(\mathsf{n}) =$	$\mathrm{Aut}_0((D \otimes \mathcal{K})^{\otimes n})$	$\bar{E}^*_D(X)$
$\mathsf{G}_D(\mathsf{n}) =$	$\mathrm{Aut}((D \otimes \mathcal{K})^{\otimes n})$	$E^*_D(X)$
$\mathsf{G}_{D\otimes\mathcal{O}_\infty}(\mathsf{n}) =$	$\mathrm{Aut}((D \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K})^{\otimes n})$	$E^*_{D\otimes\mathcal{O}_\infty}(X)$
$\mathsf{G}^{\mathrm{gr}}_D(\mathsf{n}) =$	$\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}((\mathbb{C}\ell_1 \otimes D \otimes \mathcal{K})^{\otimes n})$	$\hat{E}^*_D(X)$

Table 1. 与自同构群相关的上同调理论

关于它们的构造细节，请读者参阅 [18, 第 4 节2] 以及 [20] 。请注意，这些 $\mathcal{I}$-幺半群的取值均为拓扑群；若 G 表示其中一个，

则$\mathbf{n} \to BG(\mathbf{n})$（逐层取分类空间定义）也是一个交换$\mathcal{I}$-幺半群。文献[18, 定理 3。6] 证明了，由 BG 得到的谱实际上是与 G 自身相关联的谱的移位版本。这一点并非显而易见，因为分类空间解环原则上可能不同于无限循环空间机器所产生的解环。因此我们有 $[X, B\mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K})] \cong E^1_D(X)$，上表中列出的其他变体也类似。

我们将需要以下包含在 [20] 的定理 5.4 中的结果。回顾一下， KU^D 的单位谱记为 $gl_1(KU^D)$，其内容已在第 2.3 小节中讨论。

定理 3.1. 设 D 是一个满足 UCT 的稳定有限强自吸收 C^*-代数。存在 G^{gr}_D 在环谱 KU^D 上的自然作用，该作用诱导出一个映射

$$\Gamma(\mathrm{G}^{gr}_D) \to \Gamma((\Omega^\bullet KU^D)^\times) \tag{8}$$

相关 Γ-空间的映射进而在稳定同伦范畴中诱导出底层连通谱之间的等价。特别地，我们得到一个自然同构

$$\hat{E}^*_D(X) \cong gl_1(KU^D)^*(X) \tag{9}$$

对于 X 有限 CW复形。

3.1. 分裂结果。 本节的主要结果是命题 3.9，其中我们证明，上述定义的每个上同调理论都可分裂出一个低次数普通上同调群。只需处理 D 稳定有限的情形，因为 [20] 建立了同构

$$E^1_{D\otimes\mathcal{O}_\infty}(X) \cong \hat{E}^1_D(X)\ .$$

我们在 [20] 中重述了 [23], [49]中的如下结果。

命题 3.2。对任意有限 CW 复形 X， $\hat{}E^1_{\mathbb{C}}(X) \cong H^1(X, \mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X, \mathbb{Z})$ 具有如下群结构：

$$(w, \tau) \cdot (w', \tau') = (w + w', \tau + \tau' + \beta(w \cup w'))$$

其中，对 $w, w' \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ 和 $\tau, \tau' \in H^3(X, \mathbb{Z})$， $\beta\colon H^2(X, \mathbb{Z}/2) \to H^3(X, \mathbb{Z})$ 是 Bockstein 同态。

我们回顾 [20]中的以下两个定理：

定理 3.3。设 X 为有限 CW 复形， D 为满足 UCT 的稳定有限强自吸收C^*-代数。群 $E^1_D(X)$ 和 $\hat{}\, E^1_D(X)$ 构成一个短正合列

$$0 \longrightarrow E^1_D(X) \longrightarrow \hat{E}^1_D(X) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0.$$

若 L 是 X 上的实直线向量丛，其相应的 Clifford 丛为 $\mathbb{C}\ell_L$，则 $\delta_0(\mathbb{C}\ell_L \otimes D \otimes \mathcal{K}) = w_1(L)$，其中 $w_1(L)$ 是 L的第一 Stiefel-Whitney 类。

定理 3.4. 设 X 是一个有限 CW 复形，且 D 是一个满足 UCT 的稳定有限强自吸收C^*-代数。那么存在一个群同构

$$\hat{E}^1_D(X) \cong H^1(X; \mathbb{Z}/2) \times_{tw} E^1_D(X)$$

其中直积 $H^1(X; \mathbb{Z}/2) \times E^1_D(X)$ 上的乘法定义为

$$(w, \tau) \cdot (w', \tau') = (w + w', \tau + \tau' + j_P \circ \beta(w \cup w'))$$

对于 $w, w' \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ 和 $\tau, \tau' \in E^1_D(X)$，其中 $j_P\colon E^1_{\mathbb{C}}(X) \to E^1_D(X)$ 是由单位 $*$-同态 $\mathbb{C} \to D$ 诱导的映射，并且我们将 $E^1_{\mathbb{C}}(X) \cong H^3(X, \mathbb{Z})$ 视为相同。

注记 3.5。 正如 [20], 我们在此使用以下基本事实， [10, p.93]。假设

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

是阿贝尔群的扩张，且 $\sigma\colon G \to E$ 是一个映射，使得 $\sigma(0) = 0$ 且 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_E$。令 $c\colon G \times G \to A$ 为由 $i(c(g,h)) = \sigma(gh)\sigma(h)^{-1}\sigma^{-1}(g), g, h \in G$ 定义的归一化 2-余循环。那么群 E 同构于赋有如下群运算的 $G \times A$：

$$(g,a)(g',a') = (g+g', a+a'+c(g,g')).$$

上同调理论的系数 $E_D^*(X)$ 由 $\mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K})$ 的同伦群给出，这些同伦群在 [19, 定理 2.18] 中计算。

$$E_D^{-i}(*) \cong \pi_i(\mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K})) = \begin{cases} K_0(D)_+^\times, & \text{if } i = 0 \\ K_i(D), & \text{if } i \geq 1. \end{cases} \tag{10}$$

若 D 满足 UCT，则 $K_i(D) = 0$，当且仅当 i 为奇数；尤其是，若 $P \neq \emptyset$ 是一组素数，则

$$E_{M_P}^{-i}(*) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_P)_+^\times, & \text{if } i = 0 \\ \mathbb{Z}_P, & \text{if } i = 2k > 0, \\ 0, & \text{if } i = 2k+1. \end{cases} \tag{11}$$

设 P 为一组素数，且 $\mathcal{A} \to X$ 是一个局部平凡的 C^*-代数向量丛，其纤维为 $M_P \otimes \mathcal{K}$。设 $(U_i)_{i \in I}$ 是 X 关于 $\mathcal{A}$ 的一个平凡化开覆盖，并将过渡映射记为 $\varphi_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K})$。若将 K_0-函子应用于 φ_{ij}，则得到一个 1-余循环

$$K_0(\varphi_{ij})\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(K_0(M_P \otimes \mathcal{K})) \cong GL_1(\mathbb{Z}_P)\ ,$$

它经由正可逆元群 $(\mathbb{Z}_P)_+^\times \subset GL_1(\mathbb{Z}_P)$。该余循环仅取决于 $\mathcal{A}$ 的同构类，并且与张量积相容，由此得到一个群同态（另见 [17, 命题 2.3]）

$$\delta_0\colon E_{M_P}^1(X) \to H^1(X, (\mathbb{Z}_P)_+^\times)\ .$$

命题 3.6. 设 X 是一个有限 CW 复形， $P \neq \emptyset$ 是一组素数。群 $E_{M_P}^1(X)$ 属于一个短正合列

$$0 \longrightarrow \bar{E}_{M_P}^1(X) \longrightarrow E_{M_P}^1(X) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, (\mathbb{Z}_P)_+^\times) \longrightarrow 0$$

并且该正合列可分裂（但不是自然地分裂）。特别地，存在一个非自然同构

$$E_{M_P}^1(X) \cong H^1(X, (\mathbb{Z}_P)_+^\times) \oplus \bar{E}_{M_P}^1(X)\ .$$

证明。 由（11）， $\pi_0(\mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K})) \cong K_0(M_P)_+^\times \cong (\mathbb{Z}_P)_+^\times$。由 [18, 推论 2.19], 存在一个正合列

$$1 \to \mathrm{Aut}_0(M_P \otimes \mathcal{K}) \to \mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K}) \to K_0(M_P)_+^\times \to 1.$$

我们首先证明这个序列分裂。为此，我们将构造一个同态 $\gamma\colon (\mathbb{Z}_P)_+^\times \to \mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K})$，它将 $\mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K}) \to \pi_0(\mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K}))$ 提升。注意，

$$(\mathbb{Z}_P)_+^\times \cong \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z} \tag{12}$$

根据素因子分解。因此，我们需要为每个 $p \in P$ 找到一个自同构$\alpha_p \in \mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K})$，使它们彼此可交换，并且 $[\alpha_p(1 \otimes e)] \in K_0(M_P)$ 在迹诱导的同构 $K_0(M_P) \cong \mathbb{Z}_P$ 下对应于 p。固定 p。我们定义 $\bar{\alpha}_p$ 如下

$$M_p \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{K}}} M_p \otimes M_p(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_p} \otimes \varphi_2} M_p \otimes \mathcal{K}$$

其中 $\varphi_1\colon\ M_p \to M_p \otimes M_p(\mathbb{C})$ 和 $\varphi_2\colon\ M_p(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 是同构。若 τ 是 $M_p \otimes \mathcal{K}$ 在有限秩投影上的迹，且 $\tau(1 \otimes e) = 1$，则 $\tau(\bar{\alpha}_p(1 \otimes e)) = p$。我们可以将$M_P \otimes \mathcal{K}$ 视为对所有 $p \in P$，取遍所有 $M_p \otimes \mathcal{K}$ 的张量积。若 P 是无限集，我们选择

$$(M_{p_1} \otimes \mathcal{K}) \otimes \cdots \otimes (M_{p_i} \otimes \mathcal{K}) \to (M_{p_1} \otimes \mathcal{K}) \otimes \cdots \otimes (M_{p_i} \otimes \mathcal{K}) \otimes (M_{p_{i+1}} \otimes \mathcal{K})$$

由 $a \mapsto a \otimes (1 \otimes e)$ 给出。自同构 $\alpha_p \in \mathrm{Aut}(M_P \otimes \mathcal{K})$定义为在相应的张量因子上作用 $\bar{\alpha}_p$，并在其余部分上作用恒等映射。这些显然彼此交换。

令 $D = M_P$，并回忆 $\bar{G}_D(\mathrm{n}) = \mathrm{Aut}_0((D \otimes \mathcal{K})^{\otimes n})$。

存在映射 $\mathcal{I}$-交换幺半群 [20, 引理 6。2]:

$$\bar{G}_D(\mathbf{n}) \to G_D(\mathbf{n}) \to K_0(D)_+^{\times} \tag{13}$$

以及一个群同态

$$K_0(D)_+^{\times} \times \mathrm{Aut}_0(D \otimes \mathcal{K}) \to \mathrm{Aut}((D \otimes \mathcal{K}) \otimes (D \otimes \mathcal{K})) \cong \mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K}),$$

定义为 $(x, \alpha) \mapsto \gamma(x) \otimes \alpha$。根据前面的讨论，这是一个同伦等价。我们得到一个同伦等价

$$B(K_0(D)_+^{\times}) \times B\mathrm{Aut}_0(D \otimes \mathcal{K}) \to B\mathrm{Aut}(D \otimes \mathcal{K}).$$

结合 (13)，这给出了命题中的正合列（并且作为带基点集合的正合列是可分裂的）。要证明群的正合列可分裂，只需注意，若 X 是有限 CW 复形，则 $H^1(X,(Z_P)_+^{\times})$ 是自由群，因为它同构于 $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbb{Z}), (Z_P)_+^{\times}) \cong ((Z_P)_+^{\times})^r$，其中 r 是 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 的秩。□

命题 3.7。设 P 是一个非空素数集，且 X 是一个有限 CW 复形。

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$自然映射 $E^*_{M_P}(X) \to E^*_{M_P}(X) \otimes \mathbb{Z}_P$和 $E^*_{\mathcal{Z}}(X) \otimes \mathbb{Z}_P \to E^*_{M_P}(X) \otimes \mathbb{Z}_P$是群同构$\bar{}$ $\bar{}$。由此可得 $E^*_{M_P}(X) \cong E^*_{\mathcal{Z}}(X) \otimes \mathbb{Z}_P$。

证明。设 D 是一个满足 UCT 的强自吸收 C^*-代数。由于 $\mathbb{Z}_P$ 是平坦的，$\bar{}$可知 $X \mapsto E^*_D(X) \otimes Z_P$ 仍满足有限 CW 复形上的广义上同调理论的所有公理。我们有如下上同调理论之间的自然变换:

$$\bar{E}^*_{M_P}(X) \to \bar{E}^*_{M_P}(X) \otimes \mathbb{Z}_P, \quad \bar{E}^*_{\mathcal{Z}}(X) \otimes \mathbb{Z}_P \to \bar{E}^*_{M_P}(X) \otimes \mathbb{Z}_P.$$

这些变换根据 (11) 在系数上诱导群同构，因此它们诱导上同调理论的同构。□

回顾 [19]，自然映射 $D \to D \otimes \mathcal{O}_\infty$ 诱导一个同构

$$\bar{E}^*_D(X) \xrightarrow{\cong} \bar{E}^*_{D \otimes \mathcal{O}_\infty}(X) \tag{14}$$

因为可以验证，结合 (10)，它在系数上诱导一个同构。

命题 3.8. 设 X 是一个有限 CW 复形。由含幺 $*$-同态 $\mathbb{C} \to \mathcal{Z}$ 诱导的典范映射 $\hat{}\rho\colon \hat{}\ E^1_{\mathbb{C}}(X) \to \hat{}E^1_{\mathcal{Z}}(X)$ 和 $\rho\colon\ E^1_{\mathbb{C}}(X) \to E^1_{\mathcal{Z}}(X)$ 自然地分裂。因此，我们有自然的分裂

$$\hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong \hat{E}^1_{\mathbb{C}}(X) \oplus h(X) \quad and \quad E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong E^1_{\mathbb{C}}(X) \oplus h(X). \tag{15}$$

证明. 根据 CW 逼近定理，存在如下自然图表

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}^1_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\hat{\rho}} & \hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{r}_{\mathbb{C}}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{r}_{\mathcal{Z}}} \\ \hat{E}^1_{\mathbb{C}}(X_4) & \xrightarrow{\hat{\rho}_4} & \hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X_4) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E^1_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\rho} & E^1_{\mathcal{Z}}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle r_{\mathbb{C}}} & & \downarrow{\scriptstyle r_{\mathcal{Z}}} \\ E^1_{\mathbb{C}}(X_4) & \xrightarrow{\rho_4} & E^1_{\mathcal{Z}}(X_4) \end{array} \tag{16}$$

由骨架的包含诱导 $X_4 \hookrightarrow X$。我们将验证映射 $\hat{}\rho_4$、$\hat{}r_{\mathbb{C}}$、ρ_4 以及 $r_{\mathbb{C}}$ 都是双射。这显然意味着 (15)，其中

$$h(X) := \ker \hat{r}_{\mathcal{Z}} \cong \ker r_{\mathcal{Z}}.$$

同构 $\ker \hat{}r_{\mathcal{Z}} \cong \ker r_{\mathcal{Z}}$ 由 (3.3) 的自然性得到。

考虑证明 [20, 定理 6.7] 中的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E^1_{\mathcal{Z}}(X) & \longrightarrow & \hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) & \longrightarrow & H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \rho} & & \uparrow{\scriptstyle \hat{\rho}} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & E^1_{\mathbb{C}}(X) & \longrightarrow & \hat{E}^1_{\mathbb{C}}(X) & \longrightarrow & H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & H^3(X;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(X;\mathbb{Z}) \times_{tw} H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

若我们证明 $\rho_4 : E^1_{\mathbb{C}}(X_4) \to E^1_{\mathcal{Z}}(X_4)$ 是双射，那么 $\hat{}\rho_4$. 也是双射。映射 ρ 由映射 $B\mathrm{Aut}(\mathcal{K}) \to B\mathrm{Aut}(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})$ 诱导，根据计算结果，该映射是 4-连通的；参见 (10)。由怀特海德定理可知，ρ_4 是满射，并且 $\rho_3 : E^1_{\mathbb{C}}(X_3) \to E^1_{\mathcal{Z}}(X_3)$ 是双射。下方交换图中的限制映射 $r'_{\mathbb{C}}$: $E^1_{\mathbb{C}}(X_4) \to E^1_{\mathbb{C}}(X_3)$

$$\begin{array}{ccc} E^1_{\mathbb{C}}(X_4) & \xrightarrow{\rho_4} & E^1_{\mathcal{Z}}(X_4) \\ \downarrow{\scriptstyle r'_{\mathbb{C}}} & & \downarrow{\scriptstyle r'_{\mathcal{Z}}} \\ E^1_{\mathbb{C}}(X_3) & \xrightarrow[\cong]{\rho_3} & E^1_{\mathcal{Z}}(X_3) \end{array} \tag{17}$$

是单射，因为它与映射 $H^3(X_4,\mathbb{Z}) \to H^3(X_3,\mathbb{Z})$ 相对应，而该映射是单射，因为$H^3(X_4/X_3,\mathbb{Z}) = 0$。由此可知，$\rho_4$ 也是单射。接下来我们证明映射 $\hat{}r_{\mathbb{C}}$ 是双射。利用定理 3.3 中正合列的自然性，由于限制映射 $H^1(X;\mathbb{Z}/2) \to H^1(X_4;\mathbb{Z}/2)$ 是双射，只需证明限制映射 $r_{\mathbb{C}} : E^1_{\mathbb{C}}(X) \to E^1_{\mathbb{C}}(X_4)$ 是双射。这可由正合列得出

$$H^3(X/X_4,\mathbb{Z}) \to H^3(X,\mathbb{Z}) \to H^3(X_4,\mathbb{Z}) \to H^4(X/X_4,\mathbb{Z}),$$

因为 X/X_4 是 4-连通的。 □

命题 3.9。设 $P \neq \emptyset$ 是一个素数集合，X 是一个有限 CW 复形。那么存在群同构

(a) $E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong \bar{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong H^3(X,\mathbb{Z}) \oplus h(X)$. (b) $\hat{} E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong (H^1(X,\mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X,\mathbb{Z})) \oplus h(X)$. (c) $E^1_{M_P}(X) \cong H^1(X,(Z_P)^{\times}_{+}) \oplus \bar{E}^1_{M_P}(X) \cong H^1(X,(Z_P)^{\times}_{+}) \oplus H^3(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_P \oplus h(X) \otimes \mathbb{Z}_P$

(d) ˆ $E^1_{M_P}(X) \cong H^1(X,(Z_P)^\times_+) \oplus \big(H^1(X;\mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X,\mathbb{Z}_P)\big) \oplus h(X) \otimes \mathbb{Z}_P$，在 $H^1(X;\mathbb{Z}/2) \times H^3(X,\mathbb{Z}_P)$ 上进行乘法运算

$$(w,\tau)\cdot(w',\tau') = (w+w', \tau+\tau'+\beta_P(w\cup w'))$$

对于 $w,w' \in H^1(X,\mathbb{Z}/2)$ 和 $\tau,\tau' \in H^3(X,\mathbb{Z}_P)$，其中 β_P：$H^2(X,\mathbb{Z}/2) \to H^3(X,\mathbb{Z}_P)$ 是 Bockstein 同态与系数映射 $H^3(X,\mathbb{Z}) \to H^3(X,\mathbb{Z}_P)$ 的复合。

证明。同构 (a) 由（15）得出。回顾一下，$E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong \bar{E}^1_{\mathcal{Z}}(X)$，因为 Aut($\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K}$) 是路径连通的。同构 (c) 由 (a)、命题 3.6 和命题 3.7得出。

剩下需要处理 (b) 和 (d)。在此过程中，我们将回顾定理 3.4 的证明。若 $D' \mapsto D$ 是强自吸收 $*$-代数之间的含幺 C^*-单同态，根据 [20, 引理 6。3]，存在一个交换的交换 $\mathcal{I}$-幺半群图：

$$\begin{array}{ccccc} G_D(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathrm{G}^{\mathrm{gr}}_D(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ G_{D'}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathrm{G}^{\mathrm{gr}}_{D'}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

由此得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E^1_{M_P}(X) & \longrightarrow & \hat{E}^1_{M_P}(X) & \longrightarrow & H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & E^1_{\mathcal{Z}}(X) & \longrightarrow & \hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) & \longrightarrow & H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & E^1_{\mathbb{C}}(X) & \longrightarrow & \hat{E}^1_{\mathbb{C}}(X) & \longrightarrow & H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & H^3(X;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(X;\mathbb{Z}) \times H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H^1(X;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由命题 3.2、注 3.5 以及上方的图可得：

$$\hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong H^1(X;\mathbb{Z}/2) \times E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong \big(H^1(X;\mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X,\mathbb{Z})\big) \oplus h(X),$$

w在前两个因子上按命题 3.2中的方式进行乘法。这证明了 (b).

令 j：$H^3(X,\mathbb{Z}) = E^1_{\mathbb{C}}(X) \to E^1_{M_P}(X)$ 为由含幺 $*$-同态$\mathbb{C} \to M_P$诱导的映射。由上方的图、命题 3.2 和注 3.5 可得

$$\hat{E}^1_{M_P}(X) \cong H^1(X;\mathbb{Z}/2) \times_{tw} E^1_{M_P}(X) \tag{18}$$

其中群结构由 $(w,x)\cdot(w',x') = (w+w', x+x'+j(\beta(w\cup w')))$ 给出，其中$w,w' \in H^1(X,\mathbb{Z}/2)$ 和 $x,x' \in E^1_{M_P}(X)$。注意，j 的像包含于 $\bar{E}^1_{M_P}(X)$ 中，因为 $E^1_{\mathbb{C}}(X) = \bar{E}^1_{\mathbb{C}}(X)$。利用同构：

$$E^1_{M_P}(X) \cong H^1(X,(Z_P)^\times_+) \oplus \bar{E}^1_{M_P}(X) \cong H^1(X,(Z_P)^\times_+) \oplus \bar{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) \otimes \mathbb{Z}_P$$

以及前面的讨论中，我们可以将映射 j：$E^1_{\mathbb{C}}(X) \to E^1_{M_P}(X)$ 识别为该映射

$$H^3(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,(Z_P)^\times_+) \oplus H^3(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_P \oplus h(X) \otimes \mathbb{Z}_P,$$

由 $H^3(X,\mathbb{Z}) \to H^3(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_P$，$h \mapsto h \otimes 1$。现在由（18）可得第（d）部分。 □

3.2. 比较 $E^1_{\mathcal{Z}}(X)$ 和 $bsu^1_{\otimes}(X)$，并证明定理 A。本节将把命题 3.9 中 $E^1_{\mathcal{Z}}(X)$ 的直和项 $h(X)$ 与广义上同调理论 $bsu^*_{\otimes}(X)$ 的第一群对应起来。为了理解这个群，注意到空间 BU 和 BSU 都具有两种 H-空间结构：一种来自直和，另一种来自张量积。为加以区分，我们分别将后者记为 $BU_{\otimes}$ 和 $BSU_{\otimes}$。Segal 首先在 [54] 中观察到，$BU_{\otimes}$ 实际上是一个无限循环空间。特别地，存在一个上同调理论 $X \mapsto bu^*_{\otimes}(X)$，使得 $bu^0_{\otimes}(X) = [X, BU_{\otimes}]$。后来，May 在 [44] 中进一步认识到，这可以纳入一个更为丰富的 E_∞-环谱单位元理论。K-理论给出了这样一个 E_∞-环谱 KU，其具有单位谱 $gl_1(KU)$；该单位谱的 0-连通覆盖是 $sl_1(KU) \simeq bu_{\otimes}$，而其 2-连通覆盖给出 $bsu_{\otimes}$。

中的结果 [44] 是用 S-模和 S-代数的语言表述的，而不是用对称谱来表述。因此，原则上，由第 $gl_1(KU^{\mathbb{C}}$ 节 2.3 中构造的谱 2.3 表示的上同调理论可能不同于 $gl_1(KU$，对于一个表示拓扑 S-理论的 KU-代数 K而言。我们将在第 5 节通过证明一个强唯一性结果，看到事实并非如此。特别是，推论 5.3 建立了一个自然同构

$$gl_1(KU^{\mathbb{C}})^1(X) \cong gl_1(KU)^1(X), \tag{19}$$

由此得到以下命题：

命题 3.10. 存在一个自然同构 $\hat{} \; E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong \hat{}E^1_{\mathbb{C}}(X) \oplus bsu^1_{\otimes}(X)$.

证明。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} \hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X) & \xrightarrow{\cong} & gl_1(KU^{\mathcal{Z}})^1(X) & \xleftarrow{\cong} & gl_1(KU^{\mathbb{C}})^1(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{r}_{\mathcal{Z}}} & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{E}^1_{\mathcal{Z}}(X_4) & \xrightarrow{\cong} & gl_1(KU^{\mathcal{Z}})^1(X_4) & \xleftarrow{\cong} & gl_1(KU^{\mathbb{C}})^1(X_4) \end{array} \tag{20}$$

根据 (4) 和 (9)，水平方向的箭头是同构。因此，竖直方向的箭头具有同构的核。于是，$h(X)$ $= \ker \hat{} r_{\mathcal{Z}}$ 同构于映射 $gl_1(KU^{\mathbb{C}})^1(X) \to gl_1(KU^{\mathbb{C}})^1(X_4)$ 的核；而根据推论 5.3，它又同构于映射$gl_1(KU)^1(X) \to gl_1(KU)^1(X_4)$ 的核。该映射即为映射 $bu^1_{\otimes}(X) \to bu^1_{\otimes}(X_4)$，因此它同构于$bsu^1_{\otimes}(X)$。□

根据 Adams-Priddy 关于 bsu 唯一性的结果（我们将在第4.1节中回顾），对于有限 CW 复形 X，存在一个（非自然的）同构

$$bsu^*_{\otimes}(X) \cong bsu^*_{\oplus}(X). \tag{21}$$

结合前几节的结果，我们由此推导出主要结果（即引言中的定理 A），为方便读者起见，在此重新陈述如下。

定理 3.11. 设 X 为有限 CW 复形，P 为非空素数集合。存在（非自然的）同构

(a) $E^1_{\mathcal{Z}}(X) \cong H^3(X, \mathbb{Z}) \oplus k^5(X)$. (b) $E^1_{M_P}(X) \cong H^1(X, (\mathbb{Z}_P)^{\times}_+) \oplus H^3(X, \mathbb{Z}_P)$ $\oplus k^5(X, \mathbb{Z}_P)$ (c) $E^1_{\mathcal{O}_\infty}(X) \cong \left(H^1(X, \mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X, \mathbb{Z})\right) \oplus k^5(X)$. (d) $E^1_{M_P \otimes \mathcal{O}_\infty}$ $(X) \cong H^1(X, (\mathbb{Z}_P)^{\times}_+) \oplus \left(H^1(X, \mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X, \mathbb{Z}_P)\right) \oplus k^5(X, \mathbb{Z}_P)$

$H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ 上的（扭曲）乘法 $\times H^3(X, \mathbb{Z}_P)$ 定义如下

$$(w, \tau) \cdot (w', \tau') = (w + w', \tau + \tau' + \beta_P(w \cup w')) \tag{22}$$

对于 $w, w' \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ 和 $\tau, \tau' \in H^3(X, \mathbb{Z}_P)$，其中 β_P: $H^2(X, \mathbb{Z}/2)$ 是 Bockstein 同态 β 与系数映射 $H^3(X, \mathbb{Z}) \to H^3(X, \mathbb{Z}_P)$ 的复合。(c) 中的乘法与 (22) 中的相同，只是将 β_P 替换为 β: $H^2(X, \mathbb{Z}/2) \to H^3(X, \mathbb{Z})$。

证明。由式 (21)，对于任意素数集 P，我们有 $bsu^*_{\otimes}(X) \otimes \mathbb{Z}_P \cong bsu^*_{\oplus}(X) \otimes \mathbb{Z}_P$。由式 (6) 可得 $bsu^1_{\otimes}(X) \otimes \mathbb{Z}_P \cong k^5(X) \otimes \mathbb{Z}_P \cong k^5(X, \mathbb{Z}_P)$。因此，由命题 3.10 和 3.4 可知，该陈述成立，因为 $h^*(X) \cong bsu^1_{\otimes}(X) \cong k^5(X)$。□

若 $H^3(X, \mathbb{Z})$ 不含 2-挠元，或若 $2 \in P$，则映射 β_P 为零。

定理 3.11 的证明依赖于同构 (21) 和 (19)，这两个同构将在接下来的两节中讨论。

4. K-THEORY AS A COMMUTATIVE S-ALGEBRA AND ITS UNITS

张量积赋予拓扑 K 理论乘法上同调理论的结构。按照稳定同伦论的意义，分次交换乘法可提升到谱的层次。事实上，K 理论可由一个 E_∞-环谱表示。要使这一点精确化，有几种不同的方法。我们已经见过交换对称环谱 $KU^{\mathbb{C}}$。正如前几节所见，$KU^{\mathbb{C}}$ 与 C^*-代数向量丛的分类密切相关。本节将简要概述作为交换 S-代数的 K 理论。使用这种方法，证明关于无限循环空间 $BU_\oplus$ 和 $BU_\otimes$ 的许多结果最为简便。这里我们只简要介绍 S-模和 S-代数，并请读者参阅 [24]，以获取完整的参考资料。

构造一个以球谱 S 为单位对象的谱的对称幺半范畴，是一项相当复杂的工作。范畴 $\mathscr{S}[\mathbb{L}]$ 中的对象是（与坐标无关的）谱，同时也是线性等距算子 $\mathbb{L}$ 上的代数；该范畴几乎具备所有所需性质，尤其具有由楔积 $\wedge$ 给出的对称幺半结构（见 [24, 第一章 5]）。唯一的缺陷是球谱不是单位对象。将范畴限制到满子范畴 $\mathscr{M}_S \subset \mathscr{S}[\mathbb{L}]$，即可解决这一问题；在该子范畴上，$S$ 的作用如同单位对象，而 $\mathscr{M}_S$ 中的对象称为 S-模 [24, 定义 II.11]。

一个（交换）S-代数是在 $\mathscr{M}_S$ 中关于 $\wedge$ 的（交换）幺半群。我们用 Com_S 表示交换 S-代数的范畴 [24, 第 II 节3]。$\mathscr{M}_S$ 和 Com_S 都是模型范畴 [24, 第 VII 节4]；弱等价是那些在 π_* 上诱导同构的态射。

表示连通 K-理论的交换 S-代数可由有限维复内积空间和酉同构所构成的双置换范畴按如下方式构造：令 $\mathcal{U}$ 为一个拓扑范畴，其对象为 $\mathbb{N}_0$，即包括 0 在内的自然数，其中我们将 $n \in \mathbb{N}_0$ 视为 $\mathbb{C}^n$。态射空间由下式给出

$$\hom(m, n) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } m \neq n\ , \\ U(n) & \text{if } m = n\ , \end{cases}$$

其中 $U(0)$ 是平凡群。$\mathbb{N}_0$ 上的加法和乘法运算通过酉矩阵的分块直和 $\oplus$ 和克罗内克积 $\otimes$ 延拓到 $\mathcal{U}$ 的态射上。这赋予 $(\mathcal{U}, \oplus, \otimes)$ 双置换范畴的结构。

结合 [45, 第 3 节、24] 页的讨论以及 [24, 推论 3.6] 可知，存在一个与 $\mathcal{U}$ 相关联的交换 S-代数 ku，它根据 [44, VIII.2.1]将连通复拓扑 K-理论表示为乘法上同调理论。其周期对应物——交换 S-代数 KU——可通过将 Bott 元 $\beta \in \pi_2(ku)$求逆构造。（事实上，根据 [24, 定理 VIII.4.3]，KU 甚至是一个交换 ku-代数。）

Ω-谱的第 0 个空间是一个无限循环空间。将这一观察推广到范畴 $\mathscr{S}[\mathbb{L}]$，可得到一个函子 $\Omega^\infty\colon \mathscr{S}[\mathbb{L}] \to \mathcal{T}[\mathbb{L}]$，其陪域为带基点拓扑空间 $\mathcal{T}$范畴中的 $\mathbb{L}$-代数。设 $R \in \mathsf{Com}_S \subset \mathscr{S}[\mathbb{L}]$ 是一个交换 S-代数。阿贝尔群 $\pi_0(\Omega^\infty R)$在继承自 R的乘法下构成一个环。 R 的单位元空间 $GL_1(R)$由以下拉回图定义

$$\begin{array}{ccc} GL_1(R) & \longrightarrow & \Omega^\infty R \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL_1(\pi_0(\Omega^\infty R)) & \longrightarrow & \pi_0(\Omega^\infty R) \end{array} \tag{23}$$

因此， $GL_1(R)$由 $\Omega^\infty R$ 中关于 R 的乘法可逆的那些连通分支组成。空间 $GL_1(R)$ 是一个 E_∞-环空间。由此它产生一个连通谱 $gl_1(R)$，使得 $\Omega^\infty gl_1(R) = GL_1(R)$。这一构造可以函子化，其取值落在弱 Ω-谱范畴 $\mathscr{S}^\Omega$ 中。

与高度结构化的谱不同，弱 Ω-谱仅由一列带基点空间 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 以及结构映射 $X_n \to \Omega X_{n+1}$ 组成，而这些映射都是弱同伦等价。弱 Ω-谱之间的映射是一列映射 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，其中 $f_n\colon X_n \to Y_n$ 与结构映射相容。弱 Ω-谱 X、Y 的等价是由一串这样的映射构成的

$$X \longleftarrow Z^{(1)} \longrightarrow Z^{(2)} \longleftarrow Z^{(3)} \longrightarrow \ldots \longleftarrow Z^{(k)} \longrightarrow Y$$

它们是逐层弱等价 [47, 第 209]。有关该函子的详细信息

$$gl_1\colon \mathrm{Com}_S \to \mathscr{S}^\Omega$$

从交换 S-代数到范畴 $\mathscr{S}^\Omega$，读者可参阅 [5]中的第 4 节和第 5 节，该文基于 [44]中对单位元的处理。

若将定义 $GL_1(R)$的拉回图中 $\pi_0(\Omega^\infty R)$ 的整个可逆元群替换为平凡子群（仅由 $\pi_0(\Omega^\infty R)$ 的单位元构成），则得到特殊单位元空间 $SL_1(R)$以及相应的连通谱 $sl_1(R)$（例如参见 [46, 定义 7.6]）。作为谱， $sl_1(R) \to gl_1(R)$是 0-连通覆盖。

4.1. 局部化、连通 K-理论、 $bsu_\oplus$ 和 $bsu_\otimes$。回忆一下，我们用 KU和 ku 分别表示代表周期复 K-理论及其连通对应理论的交换 S-代数。相应的单位谱为 $gl_1(KU)$ 和 $gl_1(ku)$。使 Bott 元可逆的局部化映射 $ku \to KU$ 是交换 S-代数的态射，它在底层无穷循环空间上诱导一个等价，因此也诱导一个等价

$$gl_1(ku) \to gl_1(KU)\ .$$

我们先介绍一些背景，并在下文说明 $gl_1(KU)$ 与 [44] 中出现的谱 $bu_\otimes$（以及通过略有不同的方法，在 [54] 中出现的谱）之间的关系。我们用 U 表示无限酉群，即群 $U(n)$ 的余极限；用 SU 表示无限特殊酉群，即群 $SU(n)$ 的余极限。正如上一节所指出的，这些群上的直和和张量积运算已知会在相应的分类空间上诱导出 H-空间结构。我们分别用记号 $BU_\oplus$、$BSU_\oplus$ 以及 $BU_\otimes$、 $BSU_\otimes$ 表示这些结构。

博特周期性表明， $BU_\oplus$ 和 $BSU_\oplus$ 是无穷循环空间。相应的谱记为 $bu_\oplus$ 和 $bsu_\oplus$。注意， $GL_1(\pi_0(\Omega^\infty KU)) \cong GL_1(\pi_0(BU\times\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

因此，我们得到

$$SL_1(KU) \simeq BU_\otimes \ ,$$
$$GL_1(KU) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times BU_\otimes \ .$$

请注意，第一个等价关系可用于赋予 $BU_\otimes$ 无穷循环空间结构。因此，我们也将谱 $sl_1(KU)$ 记作 $bu_\otimes$。令 $bsu_\otimes$ 为谱 $bu_\otimes$ 的 2-连通覆盖，并注意 $\Omega^\infty bsu_\otimes \simeq BSU_\otimes$。用 $BGL_1(KU)$ 表示 $GL_1(KU)$ 的第一个解环，也就是构成谱 $gl_1(KU)$ 的序列中的第一个空间。同样，令$BBSU_\otimes$ 为相对于谱 $bsu_\otimes$的 $BSU_\otimes$ 的第一个解环。根据 [44, 引理 V.3.1]（另见 [41, 第406]页），我们有如下无穷循环空间的分裂

$$BU_\otimes \simeq K(\mathbb{Z}, 2) \times BSU_\otimes \ . \tag{24}$$

虽然空间 $GL_1(KU)$ 和 $BGL_1(KU)$ 确实也可分解为乘积

$$GL_1(KU) \simeq \mathbb{Z}/2 \times BU_\otimes \simeq \mathbb{Z}/2 \times K(\mathbb{Z}, 2) \times BSU_\otimes \ ,$$
$$BGL_1(KU) \simeq K(\mathbb{Z}/2, 1) \times K(\mathbb{Z}, 3) \times BBSU_\otimes \ ,$$

正如 [6] 中隐含指出的，这些分解并不保持无穷循环空间结构。事实上，正如我们在本文中验证的

$$[X, BGL_1(KU)] \cong (H^1(X, \mathbb{Z}/2) \times_{tw} H^3(X, \mathbb{Z})) \oplus bsu^1_\otimes(X)$$

这解释了定理 A 中乘法的扭曲。

根据 Adams 和 Priddy 的经典结果 [4]（更一般的表述另见 [44, 定理 V.4.2]，或 [46, 推论 10.3]），$BSU_\oplus$ 和 $BSU_\otimes$ 在任意素数 p 处局部化后，作为无穷循环空间等价。

定理 4.1（[4]）。存在无穷循环空间之间的等价

$$(BSU_\oplus)_{(p)} \simeq (BSU_\otimes)_{(p)} \ .$$

因此，相应的谱 $bsu_\oplus$ 和 $bsu_\otimes$ 在任意素数 p 处局部化后作为谱等价。在任意素数 p 处完备化后，这一结论也成立，但我们不需要这一结论。

如果我们只关心计算群 $bsu^*_\otimes(X)$，而不考虑自然性，那么可以使用以下观察：设 X 是一个同伦型为有限 CW 复形的空间。根据定理 4.1，存在自然同构 $bsu^*_\oplus(X, \mathbb{Z}_{(p)}) \cong bsu^*_\otimes(X, \mathbb{Z}_{(p)})$。由于 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 是平坦的，根据广义上同调理论的普适系数定理，[2]$bsu^*_\oplus(X, \mathbb{Z}_{(p)}) \cong bsu^*_\oplus(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$，且 $bsu^*_\otimes(X, \mathbb{Z}_{(p)}) \cong bsu^*_\otimes(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$。由这类群的结构定理可知，两个有限生成阿贝尔群若在每个素数处局部化后同构，则它们必然同构。因此，对于每个有限 CW 复形，都存在一个（非自然的）同构

$$bsu^*_\otimes(X) \cong bsu^*_\oplus(X). \tag{25}$$

5. Uniqueness of gl_1 for K-theory spectra

我们已经看到两种定义拓扑 K-理论单位谱的方式：第一种从 S-代数 KU 出发，第二种则从交换对称环谱 $KU^{\mathbb{C}}$ 出发。这两种构造的结果都是弱 Ω-谱。本节的目标是比较这两种构造。根据 [44, VIII.2.1]，谱 ku 表示连通拓扑 K-理论，因此，将 Bott 元取逆得到 KU 后，该谱表示 Atiyah 和 Hirzebruch 定义的周期拓扑 K-理论。在本节中，我们将交替使用

这两种记法，即 KU^* 和 K^*，来表示由 KU 表示的上同调理论；类似地， K_* 和 KU_* 表示相应的同调论。我们将证明：

定理 5.1. 设 F 是一个交换对称环谱，它作为乘法上同调理论，在有限 CW 复形上表示复拓扑 K-理论，即存在一个自然乘法同构 $F^*(X) \cong K^*(X)$。另外，假设 F 是一个正 Ω-谱。那么 $gl_1(F)$ 与 $gl_1(KU)$ 之间存在弱 Ω-谱的等价。

注 5.2. 由引理 2.1 可知，交换对称环谱 $KU^{\mathbb{C}}$、 $KU^{\mathcal{Z}}$和 $KU^{\mathcal{O}_\infty}$满足该定理的假设。

推论 5.3. 在有限 CW 复形上存在一个上同调理论的自然同构

$$gl_1(KU^{\mathbb{C}})^*(X) \cong gl_1(KU)^*(X) \ .$$

5.1. 范畴变换。 本节余下部分我们将采用交换 S-代数（[24]），而非交换对称环谱，因为我们需要用到 [24, 第五章和第八章] 中的一些结果，而文献中尚未写出这些结果对对称谱的类似表述。在小节5.2–5.6 中，我们将证明以下结论：

定理 5.4. 设 G 是一个交换的 S-代数，它作为乘法上同调理论表示有限 CW 复形上的复拓扑 K-理论。那么，在 G 与 KU之间存在一条交换 S-代数的弱等价链。

在本小节中，我们证明定理 5.4 蕴含定理 5.1。

我们将使用相关模型范畴的一个事实。首先回忆一下，如果 $\mathcal{C}$ 是一个模型范畴，那么同伦范畴 Ho$\mathcal{C}$ 是通过对弱等价取逆得到的（[31,第 1.2]节），因此，模型范畴中的两个对象如果由一条弱等价链连接，就会在同伦范畴中变得同构。

回忆一下，我们用 $\mathcal{S}p^\Sigma$ 表示对称谱的范畴；我们用 Com^Σ 表示交换对称环谱的范畴。这些范畴具有 [43, 第 9 节和第 15]节中给出的模型范畴结构；这些模型范畴结构中的弱等价就是稳定等价。

S 模块的范畴记作 $\mathcal{M}_S$。我们将用 Com_S 表示交换 S 代数的范畴（[24, 第二节.3]）。这些是模型范畴（[24, 第七节.4]）；弱等价是指诱导出 π_* 同构的态射。

我们需要的事实是

命题 5.5. 存在一个范畴等价

$$\Upsilon : \mathrm{HoCom}^\Sigma \to \mathrm{HoCom}_S$$

若 $F \in \mathsf{Com}^\Sigma$，则 F 和 $\Upsilon(F)$ 在有限 CW 复形上表示同一个上同调理论。

命题 *5.5* 的证明。 令 $\mathsf{Com}^{\mathcal{I}}$ 为交换正交环谱的范畴（[43,例 4.4]）。根据 [43, 定理 0.7]，存在一个范畴等价

$$\Upsilon_1 : \mathrm{HoCom}^\Sigma \to \mathrm{HoCom}^{\mathcal{I}}$$

具有如下性质： F 和 $\Upsilon_1(F)$ 在有限 CW 复形上表示同一个上同调理论。根据 [42, 定理 1.5]，存在一个范畴等价

$$\Upsilon_2 : \mathrm{HoCom}^{\mathcal{I}} \to \mathrm{HoCom}_S,$$

并且，根据 [42, 定理 7.13] F 和 $\Upsilon_2(F)$ 在有限 CW 复形上表示相同的上同调理论。□

继续之前，我们先说明定理 5.4 如何推出定理 5.1。令 F 如定理 5.1 所述，并注意到 $\Upsilon(F)$ 是一个交换的 S-代数，它作为乘法上同调理论表示 K-理论。函子 Υ 是以下函子的复合：$\mathbf{L}\mathbb{P}$ 和 $\mathbf{L}\mathbb{N}$，分别见 [40, 命题 13。9] 和 [40, 命题 14。1], 。因此，结合这两个命题，我们得到弱 Ω-谱的等价

$$gl_1(\Upsilon(F_c)) \simeq gl_1(F)$$

其中 F_c 是 F 作为交换对称环谱的余纤维替换（它仍表示 K-理论，作为乘法上同调理论）。由定理 5.4 可知，在交换 S-代数之间存在一条弱等价链 $\Upsilon(F_c)$ 与 KU之间。由于 gl_1 保持弱等价，因此它给出一条弱 Ω-谱之间的等价链

$$gl_1(F) \simeq gl_1(\Upsilon(F_c)) \simeq gl_1(KU)\ .$$

5.2. 障碍理论。在第 5.3–5.6 小节中，我们将证明：

引理 5.6. 设 G 是一个交换 S-代数，它将复拓扑 K-理论表示为有限 CW 复形上的乘法上同调理论。那么，在同伦范畴 Ho$\mathcal{M}_S$ 中存在一个从 G 到 KU 的同构，使得下列图表

$$\begin{array}{ccc} G \wedge G & \longrightarrow & KU \wedge KU \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & KU \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} & S^0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ G & \longrightarrow & KU \end{array}$$

在 Ho$\mathcal{M}_S$ 中交换。

在本小节中，我们将使用引理 5.6 证明定理 5.4。

我们使用 Goerss 和 Hopkins 的障碍理论[27], ，具体而言是 [27]的推论 5.9，并采用 $E = KU$ 和 $A = KU_*KU$。[1]

首先，我们考察该推论中的障碍群：

$$D^{n+1}_{E_*T/E_*E}(A, \Omega^n A).$$

根据 [8, 定理 2.6], ，这些群同构于 Gamma 上同调群

$$H\Gamma^{n+1}(A|E_*, \Omega^n A),$$

根据[7,定理 6.2] ，这些群（采用我们所选的 A 和 E）为 0.

接下来我们注意到 KU_*G 同构于 KU_*KU 作为 KU_*KU 范畴中 KU_*KU 的余模的交换代数；这可直接由引理5.6 以及余模结构的定义（[3, 第 281]页）得出。

现在，[27, 推论 5.9] 以及第 183 页上 [27] 中 $\mathcal{TM}$（A）的定义给出了一个交换 S-代数图

$$G \to G_1 \leftarrow G_2 \to \cdots \leftarrow KU \tag{26}$$

其中每个映射都是一个 KU_* 同构。

[1] [27] 的第 1 节说明，这一障碍理论适用于交换 S-代数范畴。

接下来我们应用 KU-局部化（参见 [24, 第 VIII.1 节和第 VIII.2] 节）。[24] 的定理 VIII.2.2 表明，若 H 是一个胞腔交换 S-代数（参见 [24, 定义 VII.4.11]），则存在一个 KU-局部化 $\lambda\colon H \to \overline{H}$，满足 $\overline{H}$ 是交换 S-代数，且 λ 是交换 S-代数之间的映射。为了应用此定理，我们需要知道，对于每个交换 S-代数 J，都存在一个胞腔交换 S-代数 CJ 以及交换 S- 代数之间的弱等价 $\kappa\colon CJ \to J$；此外，此构造还给出一个函子 $C\colon \mathsf{Com}_S \to \mathsf{Com}_S$，以及一个从 C 到恒等函子的自然变换 κ（参见 [43, 引理 5.8] 和 [24, 引理 VII.5.8]）。

现在考虑以下图表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
G & \longrightarrow & G_1 & \longleftarrow & G_2 & \longrightarrow & \cdots & \longleftarrow & KU \\
\uparrow{\scriptstyle\kappa} & & \uparrow{\scriptstyle\kappa} & & \uparrow{\scriptstyle\kappa} & & & & \uparrow{\scriptstyle\kappa} \\
CG & \longrightarrow & CG_1 & \longleftarrow & CG_2 & \longrightarrow & \cdots & \longleftarrow & CKU \\
\downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\
\overline{CG} & \longrightarrow & \overline{CG_1} & \longleftarrow & \overline{CG_2} & \longrightarrow & \cdots & \longleftarrow & \overline{CKU}
\end{array}
\tag{27}
$$

第三行中的映射由 [24], 的定理 VIII.2.2 给出，并且图表的下半部分同伦交换。由于 κ 是弱等价，第二行中的所有映射都是 KU_*-同构；又由于 λ 是 KU_*-同构，第三行中的所有映射都是 KU_*-同构。接着，第三行中的映射都是弱等价，因为 KU-局部谱之间的 KU_*-同构是弱等价。映射 $\lambda\colon CKU \to \overline{CKU}$ 也是弱等价，因为 KU 是 KU-局部的，而引理 5.6 表明 G 与 KU 弱等价（作为 S-模），因此 CG 是 KU-局部的，且映射 $\lambda\colon CG \to \overline{CG}$ 是弱等价。现在，该图表给出了定理 5.4 所述的弱等价链。

5.3. S-模 $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}]$。设 ξ 是 $\mathbb{C}P^\infty$上的典范复直线丛。ξ 的分类映射是从 $\mathbb{C}P^\infty$ 到分类空间 BS^1的同伦等价。S^1 的乘法在 BS^1 上诱导出结合且交换的乘法，从而在 $\mathbb{C}P^\infty$上给出同伦结合且同伦交换的乘法。进而，这在 S-模$\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+$上给出同伦结合且同伦交换的乘法（其中 $+$ 表示一个不交基点）。

接下来回顾一下，若 X 是一个带基点的 CW 复形，则在同伦范畴 $\mathrm{Ho}\mathcal{M}_S$中存在一个自然同构

$$\nu\colon \Sigma^\infty X_+ \to \Sigma^\infty S^0 \vee \Sigma^\infty X$$

其复合映射

$$\Sigma^\infty X_+ \xrightarrow{\nu} \Sigma^\infty X \vee \Sigma^\infty S^0 \to \Sigma^\infty S^0$$

由如下带基点映射诱导

$$p\colon X_+ \to S^0$$

该映射将 X 映到非基点，而复合映射

$$\Sigma^\infty X_+ \xrightarrow{\nu} \Sigma^\infty S^0 \vee \Sigma^\infty X \to \Sigma^\infty X$$

由基点映射诱导

$$q\colon X_+ \to X$$

它在 X 上是恒等映射。 ν 的逆映射是

$$\Sigma^\infty S^0 \vee \Sigma^\infty X \xrightarrow{\Sigma^\infty p' \vee Q} \Sigma^\infty X_+$$

其中， p' 将 S^0 的非基点映射到 X 的基点，而 $Q \circ \Sigma^\infty q$ 是映射 $1 - \Sigma^\infty(p' \circ p)$。令

$$a\colon S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$$

为 2-骨架的包含映射，并令

$$b\colon \Sigma^\infty S^2 \to \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+$$

为复合映射

$$\Sigma^\infty S^2 \xrightarrow{\Sigma^\infty a} \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{Q} \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+$$

定义 S-模 $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}]$ 为望远镜

$$\operatorname{Tel} \Sigma^{-2n}\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+$$

其中映射

$$\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+ \to \Sigma^{-2n-2}\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+$$

是 $\Sigma^{-2}b$上的左乘法： $S^0 \to \Sigma^{-2}\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+$（参见 [24, 第 94]页）。

引理 5.7。 $\pi_*(\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}])$ 在奇数次数中为 0，而在偶数次数中， $2n$ 是由 b^n生成的 $\mathbb{Z}$ 的一个副本。

证明。 $\pi_*(\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}])$ 同构于 $(\pi_*\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+)[b^{-1}]$ （参见 [24, 第 94] 页底部），因此由 Snaith 的定理 [56, 定理 2.12 和等式 2.4] 可得该引理。□

5.4. 等价 性：从 $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}]$ 到 KU 和 G。首先我们构造一个弱等价 ce

$$\eta\colon \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+[b^{-1}] \to KU$$

典范丛 ξ 在 $\mathbb{C}P^\infty$ 上限制为 $\mathbb{C}P^n$上的向量丛 ξ_n ，这给出了一列元素 $x_n \in K^0(\mathbb{C}P^n)$；根据命题 III.8.1 和第 222] 页的习题 (ii)，该序列给出一个元素 $x \in K^0(\mathbb{C}P^\infty)$。 x 给出一个映射

$$\bar{x}\colon \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+ \to KU$$

引理 5.8。复合映射

$$\Sigma^\infty S^2 \xrightarrow{b} \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty_+ \xrightarrow{\bar{x}} KU$$

是 $\pm\beta$，其中 β 是 Bott 元。

证明。 只需证明，由该复合映射表示的 $\tilde{K}^0(S^2)$ 中的元素是一个生成元。采用小节 5.3 中的记号，只需证明 Q^* 将类 x_2 映射为 $\tilde{K}^0(S^2)$ 的一个生成元。在直和图中

$$\tilde{K}^0(S^2) \underset{Q^*}{\overset{q^*}{\rightleftarrows}} \tilde{K}^0(S^2_+) \underset{(p')^*}{\overset{p^*}{\rightleftarrows}} \tilde{K}^0(S^0)$$

我们有

$$q^*Q^*(x_2) = x_2 - p^*(p')^*(x_2) = x_2 - 1$$

现在， q^* 同构映射到 $\mathrm{id} - p^*(p')^*$ 的像，而 $x_2 - 1$ 生成 $\mathrm{id} - p^*(p')^*$ 的像，因此 $Q^*(x_2)$ 是所要求的生成元。□

利用这一引理，存在一个映射

$$\mathrm{Tel}\ \Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty \to KU$$

其在 $\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty$ 上的限制是复合映射

$$\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty \xrightarrow{\Sigma^{-2n}\bar{x}} \Sigma^{-2n}KU \xrightarrow{\beta^{-n}\cdot} KU$$

对每个 n，此外，根据[3, 命题 III.8.1 和第 222]页上的习题 (ii)，此映射在同伦意义下唯一。定义

$$\eta\colon \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] \to KU$$

为此映射。

接下来，利用 G 在有限 CW 复形上表示 K-理论这一事实，构造出 η 的论证给出了一个映射

$$\bar{y}\colon \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty \to G$$

以及一个弱等价

$$\theta\colon \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] \to G$$

5.5. $\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}]$的乘积映射。在本小节中，我们构造一个映射

$$\mu : \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] \wedge \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] \to \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}]$$

于 $\mathrm{Ho}\mathcal{M}_S$ 中。

首先注意到存在一个弱等价

$$\mathrm{Tel}\ ((\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \wedge (\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty)) \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{Tel}\ \Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \wedge (\mathrm{Tel}\ \Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty)$$

它由单位区间的对角映射诱导。接下来注意到，由于 $\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty$ 的乘法是同伦结合且同伦交换的，存在一个映射

$$m : \mathrm{Tel}\ ((\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \wedge (\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty)) \to \mathrm{Tel}\ \Sigma^{-4n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty$$

其在 $(\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \wedge (\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty)$ 上的限制是复合映射

$$(\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \wedge (\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \to \Sigma^{-4n}(\mathbb{C}P_+^\infty \wedge \mathbb{C}P_+^\infty) \to \Sigma^{-4n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty$$

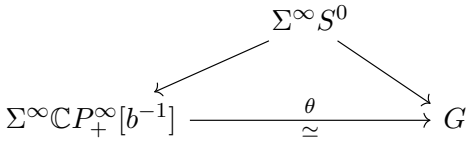
对每个 n 都成立。此外，根据命题 III.8.1 和第 222] 页的习题 (ii)，满足此性质的映射 m 在同伦意义下唯一（这里用到了这样一个事实：乘以 β 在 m 的目标上是弱等价）。现在令 μ 为复合映射

$$\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] \wedge \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] = (\mathrm{Tel}\ \Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \wedge (\mathrm{Tel}\ \Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \simeq$$
$$\mathrm{Tel}\ ((\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty) \wedge (\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty)) \xrightarrow{m} \mathrm{Tel}\ \Sigma^{-4n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty \simeq \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}]$$

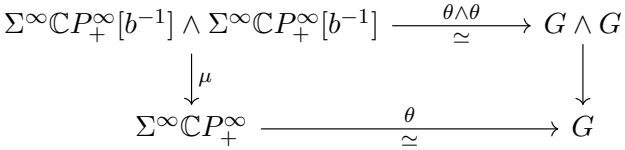
5.6. 引理的证明 **5.6.** 要证明引理5.6 只需证明以下图表

(28)
$$\begin{array}{ccc} & \Sigma^\infty S^0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] & \xrightarrow[\simeq]{\eta} & KU \end{array}$$

(29)
$$\begin{array}{ccc} \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] \wedge \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty[b^{-1}] & \xrightarrow[\simeq]{\eta\wedge\eta} & KU \wedge KU \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow \\ \Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty & \xrightarrow[\simeq]{\eta} & KU \end{array}$$

(30)


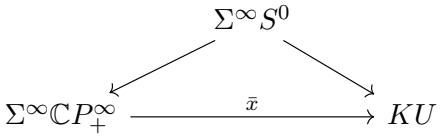
and

(31)


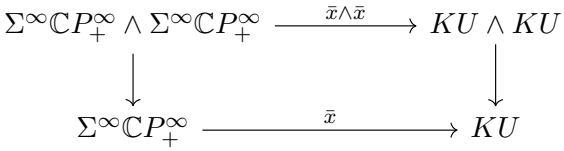
在 Ho$\mathcal{M}_S$ 中交换。

我们将给出图式（28）和（29）的证明；另外两个图式的证明相同。

引理 5.9。以下图式

(32)


and

(33)


在 Ho$\mathcal{M}_S$ 中交换。

证明。 图式（32）交换，因为 x 在 $\mathbb{C}P^0$ 上的限制是K（$\mathbb{C}P^0$）的标准生成元。对于图式（33），我们需要证明 x 沿映射的拉回

$$\Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty_+ \wedge \Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty_+ \to \Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty_+$$

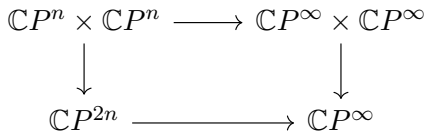
是外积 $x \times x$。为此，根据 [3, 命题 III.8.1 和第 222], 页的习题 (ii)，只需证明 x 沿映射的拉回

$$\Sigma^\infty\mathbb{C}P^n_+ \wedge \Sigma^\infty\mathbb{C}P^n_+ \to \Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty_+$$

对每个 n，均为 $x_n \times x_n$。该映射

$$\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$$

通过胞腔逼近，可知该映射在同伦意义下经由 $\mathbb{C}P^{2n}$ 分解，因此我们得到一个同伦交换图

(34)


在此交换图中，沿顺时针复合映射拉回向量丛 ξ，所得结果同沿逆时针复合映射拉回向量丛 ξ 所得结果同构，因此沿 ξ_{2n} 拉回

左侧竖直箭头是 $\xi_n \otimes \xi_n$。对图式（34）应用 K-理论，得到交换图

$$\begin{array}{ccc} K^0(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n) & \longleftarrow & K^0(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \\ \uparrow & & \uparrow \\ K^0(\mathbb{C}P^{2n}) & \longleftarrow & K^0(\mathbb{C}P^\infty) \end{array}$$

我们刚刚已经证明， x_{2n} 在该左侧竖直箭头下的像是 $x_n \times x_n$，因此， x 在逆时针复合下的像是 $x_n \times x_n$ ，正如所要求的那样。□

现在，图 (32) 的交换性蕴含图 (28) 的交换性，因此只剩下证明图 (29) 的交换性。由 [3, 命题 III.8.1 及第 222] 页的习题 (ii)，只需证明图 (29) 中的两个复合映射在 $(\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty)\wedge(\Sigma^{-2n}\Sigma^\infty\mathbb{C}P_+^\infty)$ 上的限制对于每个 n 都是同伦的，这由引理 5.9 得出。

致谢 我们感谢 Mike Mandell 指出，同构 (25) 可由 Adams-Priddy 定理推出。第三位作者感谢 John Lind 就本文所使用的单位谱的两种实现形式进行的有益讨论。

References

[1] J. Aastrup、R. Nest 和 E. Schrohe。流形（带边界）的 C^*-代数连续域与切群胚。J. Funct. Anal., 237(2):482–506, 2006。2[2] J. F. Adams。广义上同调讲义。载于《范畴论、同调论及其应用 III》（巴特尔研究所会议，1968年，美国华盛顿州西雅图，第三卷），第1–138页。施普林格出版社，柏林，1969年。18[3] J. F. Adams。稳定同伦与广义同调。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州-伦敦，1974年。芝加哥数学讲座。20, 22, 23, 24, 25[4] J. F. Adams 和 S. B. Priddy。 BSO 的唯一性。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 80(3):475–509, 1976。3, 8, 18[5] M. Ando、A. J. Blumberg、D. Gepner、M. J. Hopkins 和 C. Rezk。通过刚性无限环空间理论研究环谱的单位、定向和 Thom 谱。J. Topol., 7(4):1077–1117, 2014。17[6] M. Atiyah 和 G. Segal。扭曲的 K-理论。Ukr. Mat. Visn., 1(3):287–330, 2004。18[7] A. Baker 和 B. Richter。关于数值多项式环的 Γ-上同调以及 E_∞ 结构和 K-理论。Comment. Math. Helv., 80(4):691–723, 2005。20[8] M. Basterra 和 B. Richter。交换（S-）代数的（余）同调理论。载于《结构化环谱》，伦敦数学学会讲义丛书第315卷，第115–131页。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。20[9] ´E. Blanchard 和 E. Kirchberg。C*-代数丛的全局 Glimm 减半。J. Oper. Theory, 52:385–420, 2004。1[10] K. S. Brown。群的上同调，数学研究生教材第87卷。施普林格出版社，纽约，1994年。1982年原版的修订重印本。11[11] A. Connes。非交换几何。学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1994年。2[12] A. Connes 和 N. Higson。D´eformations、morphismes asymptotiques 及 K-th´eorie bivariante。C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math., 311(2):101–106, 1990。1[13] J. Cuntz。由等距算子生成的简单 C^*-代数。Comm. Math. Phys., 57:173–185, 1977。4[14] M. Dadarlat、I. Hirshberg 和 N. C. Phillips。与其逆代数不具等变同构的简单核 C*-代数。arXiv:1602.04612, 2016年。2[15] M. Dadarlat 和 J. McClure。两个交换 C^*-代数何时稳定同伦等价？Math. Z., 235(3):499–523, 2000。9

[16] M. Dadarlat 和 A. N´emethi。形状理论与（连通） K-理论。J. Operator Theory, 23(2):207–291, 1990。9[17] M. Dadarlat 和 U. Pennig。强自吸收 C^*-代数的 Dixmier–Douady 理论 II：Brauer群。J. Noncommut. Geom., 9(4):1137–1154, 2015。11, 13[18] M. Dadarlat 和 U. Pennig。来自强自吸收 K-代数的 C^*-理论单位谱。Algebr. Geom. Topol., 15(1):137–168, 2015。2, 3, 6, 9, 10, 11[19] M. Dadarlat 和 U. Pennig。强自吸收 C^*-代数的 Dixmier–Douady 理论。J. Reine Angew. Math., 718:153–181, 2016年。2, 9, 11, 12[20] M. Dadarlat 和 U. Pennig。带 Clifford分次的强自吸收 C^*-代数丛。预印本，2022年。9, 10, 11, 12, 13, 14[21] M. Dadarlat 和 W. Winter。关于强自吸收 KK-代数的 C^*-理论。Math. Scand., 104(1):95–107, 2009。2[22] J. Dixmier。 C^*-代数。North Holland, 阿姆斯特丹，1982年。1[23] P. Donovan 和 M. Karoubi。分次Brauer群与带局部系数的 K-理论。Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math., (38):5–25, 1970。10[24] A. D. Elmendorf、I. Kriz、M. A. Mandell 和 J. P. May。稳定同伦论中的环、模和代数，数学调查与专著第47卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1997年。附有 M. Cole 的附录。16, 19, 21, 22[25] J. M. G. Fell。算子域代数的结构。Acta Math., 106:233–280, 1961。1[26] J. Gabe 和 G. Szab´o。动力学Kirchberg-Phillips定理。预印本, 2022年，arXiv:2205.04933[math.OA]。2[27] P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins。交换环谱的模空间。载于《结构化环谱》，伦敦数学学会讲义丛书第315卷，第151–200页。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。20[28] N. Higson。Mackey类比与 K-理论。预印本，2007年。2[29] N. Higson 和 E. Guentner。群 C^*-代数与 K-理论。载于《非交换几何》，数学讲义第1831卷，第137–251页。施普林格出版社，柏林，2004年。2[30] N. Higson 和 G. Kasparov。对 Hilbert空间作适当且等距作用的群的 E-理论与 KK-理论。Invent. Math., 144(1):23–74, 2001年。2[31] M. Hovey。模型范畴，数学调查与专著第63卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1999年。19[32] M. Hovey、B. Shipley 和 J. Smith。对称谱。J. Amer. Math. Soc., 13(1):149–208, 2000。[33] M. Izumi。算子代数上的群作用。载于《国际数学家大会论文集》第III卷，第1528–1548页。Hindustan Book Agency，新德里，2010年。2[34] M. Izumi 和 H. Matui。Kirchberg 代数上的多 $\mathbb{Z}$ 群作用 II。Invent. Math., 224(3):699–766, 2021 年。2[35] X. Jiang 和 H. Su。关于一个简单的含单位无投影 C^*-代数。American J. Math., 121(2):359–413, 1999年。4[36] M. Joachim。等变 K-理论的高阶相容性。载于《结构化环谱》，伦敦数学学会讲义丛书第315卷，第87–114页。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。4, 5[37] G. G. Kasparov。等变 KK-理论与 Novikov猜想。Invent. Math., 91(1):147–201, 1988年。2[38] E. Kirchberg。利用 Kasparov 理论对纯无限 C^*-代数进行分类。预印本，1994年。4[39] N. P. Landsman。经典力学与量子力学之间的数学主题。施普林格数学专著。施普林格出版社，纽约，1998年。2[40] J. A. Lind。图空间、图谱与单位谱。Algebr. Geom. Topol., 13(4):1857–1935, 2013年。7, 8, 20[41] I. Madsen、V. Snaith 和 J. Tornehave。几何拓扑中的无限循环映射。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 81(3):399–430, 1977年。18

[42] M. A. Mandell 和 J. P. May. 等变正交谱与 S-模. Mem. Amer. Math. Soc., 159(755):x+108, 2002. 19[43] M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede 和 B. Shipley. 图谱的模型范畴. Proc. London Math. Soc. (3), 82(2):441–512, 2001. 7, 8, 19, 21[44] J. P. May. E_∞ 环空间与 E_∞ 环谱. 数学讲义，第 577 卷. 施普林格出版社，柏林—纽约，1977. Frank Quinn、Nigel Ray 和 Jørgen Torne- have 作出贡献. 15, 16, 17, 18[45] J. P. May. 乘法无穷循环空间理论. J. Pure Appl. Algebra, 26(1):1–69, 1982年. 16[46] J. P. May. E_∞ 环空间有何用？载于《伽罗瓦理论与代数几何的新拓扑背景》（BIRS 2008），《Geom. Topol. Monogr.》第 16 卷，331–365 页. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2009. 17, 18[47] J. P. May 和 R. Thomason. 无穷循环空间机器的唯一性. Topology, 17(3):205–224, 1978. 17[48] R. Meyer. 关于 C*-代数上群作用在等变 KK-等价意义下的分类. Ann. K-Theory, 6(2):157–238, 2021. 2[49] E. M. Parker. 分次连续迹 C^*-代数的 Brauer群. Trans. Amer. Math. Soc., 308(1):115–132, 1988. 10[50] U. Pennig. 高阶扭曲 K-理论的非交换模型. J. Topol., 9(1):27–50, 2016年. 2[51] N. C. Phillips. 核纯无限单 C^*-代数的分类定理. Documenta Math., (5):49–114, 2000. 4[52] M. A. Rieffel. 量子化与 C^*-代数. 载于《 C^*-代数：1943–1993》（德克萨斯州圣安东尼奥，1993），《Contemp. Math.》第 167 卷，66–97 页. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. 2[53] C. Schlichtkrull. 环谱的单位元及其在代数 K-理论中的迹. Geom. Topol., 8:645–673（电子版）, 2004. 3, 7[54] G. Segal. 范畴与上同调理论. Topology, 13:293–312, 1974. 15, 17[55] G. Segal. K-同调论与代数 K-理论. 第 113–127 页. 数学讲义，第 575 卷，1977. 9[56] V. Snaith. 若干分类空间的局部化稳定同伦. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 89(2):325–330, 1981. 22[57]A. S. Toms 和 W. Winter. 强自吸收 C^*-代数. Trans. Amer. Math. Soc., 359(8):3999–4029, 2007. 2[58]S. Toms, A 和 W. Winter. 强自吸收 C^*-代数. Trans. Amer. Math. Soc., 359(8):3999–4029（电子版）, 2007. 4, 5[59] J. Trout. 关于分次 K-理论、椭圆算子与函数演算. 《伊利诺伊数学杂志》, 44(2):294–309, 2000. 6[60] J.-L. Tu. 可和叶状结构的鲍姆–康恩猜想. K-理论, 17(3):215–264, 1999. 2[61] W. Winter. 强自吸收 C^*-代数是 $\mathcal{Z}$-稳定的. J. Noncommut. Geom., 5(2):253–264, 2011. 2[62] W. Winter. QDQ 与 UCT. 载于《算子代数及其应用——阿贝尔研讨会 2015》，《Abel Symp.》第 12 卷，327–348 页. 施普林格，[Cham], 2017. 2, 4

Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, USA

School of Mathematics, Cardiff University, Cardiff, CF24 4AG, Wales, UK