arXiv:2302.08060v2 [math.GT] 5 May 2023

不带 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构且具有非零高阶斯蒂费尔-惠特尼类的双曲流形

Alan W. Reid 和 Connor Sell

摘要

我们证明，对于维数为 $2n+2 \geq 6$ 的最简单类型带尖点算术双曲流形的每个可公度类，都存在满足条件的流形 M，使得对所有 $0 \leq 2j \leq n$，斯蒂费尔-惠特尼类 $w_{2j}(M)$ 均非零。我们还证明，对于相同的可公度类，存在不允许 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构的流形（与前述流形不同）。

1 引言

流形的斯蒂费尔-惠特尼类 $w_k(M$定义为流形 M 的切丛的斯蒂费尔-惠特尼类，记作 M（关于斯蒂费尔-惠特尼类的定义，请参阅§2）。斯蒂费尔-惠特尼类是否为零这一问题，在几何学和代数拓扑学中有着悠久的研究历史。例如，$w_1(M) = 0$ 当且仅当 M 可定向，且 $w_2(M) = 0$ 当且仅当 M 具有自旋结构。此外，斯蒂费尔-惠特尼类非零可作为障碍，阻止流形嵌入或浸入某些欧几里得空间。关于斯蒂费尔-惠特尼类为零与非零的研究，请参阅 [11] 以及较新的论文 [3]（该论文证明了所谓的矩形角流形的斯蒂费尔-惠特尼类为零）。

与本文主题最相关的是 Sullivan 的工作[22]，该工作证明了任意维数的每个有限体积双曲流形都有一个稳定可平行化的有限层覆盖，因此根据斯蒂费尔-惠特尼类的性质，其所有 $k \geq 1$ 斯蒂费尔-惠特尼类均为零（参见§2）。另一方面，在 [8], 各个维数下都构造出了满足 M 条件的带尖点可定向有限体积双曲流形 ≥ 5（$w_2(M) \neq 0$；最近，在 [10] Martelli、Riolo 和 Slavich 构造了各个维数下满足 M 条件的闭可定向双曲 n-流形 $n \geq 4$（$w_2(M) \neq 0$。

流形上的自旋结构的另一个自然推广，是流形上的 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构（定义见§3）。自旋结构自然地定义了一个 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构（见§3）；因此，由于所有二维和三维的紧可定向流形都存在自旋结构，它们也都存在 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构。另一方面，有些紧致可定向四维流形不存在自旋结构（例如某些平坦4-流形[16]），但众所周知，每个可定向四维流形都存在 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构 [24]。

本文推广了 [8] 的结果，构造了具有非消失高阶斯蒂费尔-惠特尼类的尖点双曲流形，并给出了不承认 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构的尖点双曲流形的例子。我们的结果最精确的版本出现在算术双曲流形的情形中。

定理 1.1。设 n 为一个正整数。对于每个 $m \geq 2n+2 \geq 6$，每个尖点算术双曲 m-流形都与可定向双曲 m-流形M_1 及 M_2 可公度，使得：

- $w_{2j}(M_1) \neq 0$ 对所有 $0 \leq 2j \leq n$；
- M_2 不允许存在 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构。

定理 1.1 的证明采用了 [7] 的方法，以及 [19], 较新的思想。或许，指出证明中的一个关键思想会有所帮助，借助它可以迅速证明下述定理所包含的较弱结论。

定理 1.2。设 n 为正整数。对每个 $m \geq 2n+2 \geq 6$，存在无穷多个有限体积的带尖可定向双曲 m-流形 M_1 和 M_2，它们满足定理 *1.1*的结论。

与此相反，Whitney [25] 证明，若 M 是紧致可定向四维流形，则 $w_3(M) = 0$；而 Massey [11] 更一般地证明，若 M 是偶数维紧致可定向 n-流形，则 $w_{n-1}(M) = 0$。他还在 [11] 中证明，若 $n = 4k+3$ 且 M 是紧致可定向 n- 流形，则 $w_n(M) = w_{n-1}(M) = w_{n-2}(M) = 0$。

本文其余部分安排如下。在§2中，我们将介绍有关斯蒂费尔-惠特尼类的背景知识；在§3 中讨论它们与自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构的联系。在§4 中，我们将介绍平坦流形的相关背景，特别是[4] 和 [9], 中所描述的流形，并在§5 中利用这些内容证明定理1.2。在§6 中，我们证明定理 1.1，这需要一些关于二次型和算术双曲流形的背景知识。最后，在§7 中，我们给出本文工作的其他推论。

致谢：第一作者谨向 Bruno Martelli 致谢，感谢他就有限体积双曲流形背景下斯蒂费尔-惠特尼类的消失与非消失问题，进行了许多有趣且有益的讨论。两位作者都感谢他指出 *[9]* 中的例子，并建议我们的论证也可推广到这些例子。

2 斯蒂费尔-惠特尼类

斯蒂费尔-惠特尼类 w_i 是定义在流形 M上秩为 k 的向量丛E的特征类，属于上同调群 $H^i(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。斯蒂费尔-惠特尼类非零的一个重要性质是，它们可用于阻碍处处线性无关截面的集合；也就是说，如果 $w_i(E) \neq 0$，那么向量丛 E不具有 $k-i+1$ 个处处线性无关截面。为方便起见，我们回顾斯蒂费尔-惠特尼类的定义。该定义可简洁地用公理方式表述如下。

定义 2.1（斯蒂费尔-惠特尼类 [13, 第 4] 章）。秩为 k 的向量丛 E 在 M 上的斯蒂费尔-惠特尼类，是满足以下公理的唯一一组元素 $w_i(E) \in H^i(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

1. 对所有 $i > k$，$w_0(E) = 1$ 和 $w_i(E) = 0$。
2. 对于流形 M'和任意连续映射 $f\colon M' \to M$，$w_i(f^*(E)) = f^*(w_i(E))$，其中 $f^*(E)$ 是拉回向量丛。

3. 设 E 和 E' 是底流形 M 上的向量丛。则

$$w_i(E \oplus E') = \sum_{j=0}^{i} w_j(E) \cup w_{i-j}(E') \quad (The\ Whitney\ Product\ Formula)$$

其中 $\cup$ 是杯积。

4. 上的莫比乌斯丛 ¨ $E_{M\ddot{o}bius}$ 满足 $w_1(E_{M\ddot{o}bius}) \neq 0$。

在本文中，我们主要关注向量丛为切丛 TM 的情形；按照惯例，我们用 $w_i(M)$ 表示 TM 的斯蒂费尔-惠特尼类，并将其称为 M 的斯蒂费尔-惠特尼类。

注 2.2。 设 $i:\ N \hookrightarrow M$ 是流形 M 中一个余维一子流形的嵌入，且具有平凡法丛。利用上述斯蒂费尔-惠特尼类的公理，我们得到 $i^*w_{2j}(M) = w_{2j}(N)$（另见 [21]）。特别地，这意味着，如果 M 具有自旋结构，那么 N 也具有自旋结构。

更一般地，这可以用来论证 §1 中提出的一个断言。回忆一下，如果存在一个平凡向量丛 ϵ 覆盖 M，使得 $TM \oplus \epsilon$ 也是一个平凡丛，则称一个 n- 流形为 稳定可平行化的；在这种情况下，如上所述，可以推出斯蒂费尔-惠特尼类$w_i(M) = 0$ 对于 $i \geq 1$ （如 §1 中所述）。

3 自旋$^{\mathbb{C}}$结构

流形上的自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构是流形上自旋结构概念的复类比，可定义如下 [2]: 流形 M 承认自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构，当且仅当存在一个复线丛 L，使得向量丛 $TM \oplus L$ 承认自旋结构；即 $w_2(TM \oplus L) = 0$。注意，若 M 承认自旋结构，则 $w_2(M) = 0$，因而 $w_2(TM \oplus L) = 0$，由此可知 M 承认自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构（如§1中所述）。

我们需要以下引理。它似乎广为人知，但我们未能找到证明，因此在此给出一个证明（参见注 2.2）。

引理3.1。设 M 是一个承认自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构的流形， $N \subset M$ 是一个余维 1 且具有平凡法丛的子流形。则 N 承认自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构。

证明。令 $\pi: TM \oplus L \to M$ 为投影映射，并将丛 $TM \oplus L$ 在 N 上的限制记为 $(TM \oplus L)_N$；即点集 $\{(p, e) \in M \times (TM \oplus L) \mid p \in N, \pi(e) = p\}$。根据构造，$(TM \oplus L)_N$ 是由包含映射 $i: N \hookrightarrow M$ 诱导的拉回丛，因此根据 §2 中描述的斯蒂费尔-惠特尼类的性质以及备注 2.2，我们可得:

$$w_2((TM \oplus L)_N) = w_2(i^*(TM \oplus L)) = i^*(w_2(TM \oplus L)) = i^*(0) = 0.$$

因此，$(TM \oplus L)_N$ 具有自旋结构。

类似地，令 L_N（分别为 TM_N）表示复线丛 L 在 N（分别为 TM 在 N）上的限制。由于 N 的余维为 1 且具有平凡法丛， $TM_N = TN \oplus \epsilon$，其中 ϵ 是平凡秩 1 向量丛。利用这一点，我们可将 $(TM \oplus L)_N$ 分解如下:

$$(TM \oplus L)_N = TM_N \oplus L_N = TN \oplus \epsilon \oplus L_N = (TN \oplus L_N) \oplus \epsilon.$$

作为平凡丛， ϵ 具有自旋结构，而我们已经注意到（$TM \oplus L$）$_N$具有自旋结构。根据 [6, 第二章命题 1。15], 给定两个向量丛 A 和 B 在

同一底空间上，若 A、 B和 $A \oplus B$ 中有两个具有自旋结构，则第三个也具有自旋结构。因此， $TN \oplus L_N$ 具有自旋结构，由此可推得 N 具有自旋^{c}结构。□

4 平坦流形与尖点横截面

回想一下，若 M 是一个有限体积的带尖点双曲 m-流形，则 尖点 M 是 M 的端，并且所有这类端都同胚于如下形式的流形 $B \times \mathbb{R}^+$，其中B 是一个闭（$m-1$）流形，它同胚于一个平坦流形（即 $\mathbb{R}^{m-1}/L$ 的商，其中 L 是 $\mathbb{R}^{m-1}$上的离散余紧无挠等距变换群）。我们称 B 为尖点截面（我们无需明确说明由双曲度量诱导的平坦度量）。注意，根据晶体群的 Bieberbach第三定理（例如参见 [1]），在每个维数下，闭平坦流形在同胚意义下只有有限多个，因此每个维数下尖点截面的同胚类也只有有限多个。

在定理 1.2 和定理1.1的证明中，我们使用了 Im 和 Kim 构造的某些平坦流形 [4], 以及 [18] 的所谓广义 Hantzsche-Wendt 流形。

4.1 Im 和 Kim 的流形

Im 和 Kim 构造的流形 [4] 的维数为 $2n+1$，并且满足 $w_{2j}(N) \neq 0$，其中 $0 \leq 2j \leq n$。我们简要回顾这些流形及其基本群的一些重要特征，后文将用到它们。

N 上的 [4] 流形描述为 $\mathbb{R}^{2n+1}/\pi_n$，其中 π_n 是 Isom($\mathbb{R}^{2n+1}$) 的子群，其生成元为 t_1、.....、t_{n+1}、τ_1、.....、τ_n、K，并以平移和反射来描述。下面使用 [4, pp. 270-271]，以矩阵形式明确写出这些生成元。

$$t_i : v \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_j : v \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K : v \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

t_i 沿第 i个坐标轴作单位平移。τ_j 关于垂直于第 j个和第（$j+1$）个坐标轴的坐标超平面反射，并沿第（$j+1+n$）个坐标轴平移$\frac{1}{2}$。K的作用取决于 n 是奇数还是偶数：当 n 为奇数时，K关于最后（$n+1$）个坐标超平面反射；当 n 为偶数时，则关于最后n 个坐标超平面反射；在这两种情况下，随后都沿前（$n+1$）个坐标轴分别平移$\frac{1}{2}$。由此可知，π_n 的所有生成元在 $\mathbb{R}^{2n+1}$上作用时都保持定向，因此每个 $\mathbb{R}^{2n+1}/\pi_n$ 都是可定向流形。

注4.1。 我们指出，群 π_1 是所谓的 Hantzsche-Wendt 3-流形 HW 的基本群，其中 $w_1(\mathrm{HW}) = \mathrm{w}_2(\mathrm{HW}) = 0$，而这一情况不在 [4]所给出的斯蒂费尔-惠特尼类范围内。

4.2 广义 Hantzsche-Wendt 流形

沿用 [18], 的说法，称一个可定向的 n维平坦流形为广义 Hantzsche-Wendt 流形，当且仅当其全纯群是秩为 $n-1$的初等阿贝尔 2-群。注意，Im 和 Kim 在§4.1 中构造的流形是广义 Hantzsche-Wendt 流形，当且仅当该流形是注4.1中的经典 Hantzsche-Wendt 3-流形 HW。广义 Hantzsche-Wendt 流形具有若干有趣的性质，例如它们都是有理同调 n球面 [23]。不过，我们只需用到它们的全纯群是对角的，由若干矩阵的乘积组成 [9]:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$ 其中 -1 出现在第 i 个位置，

以下结论已在 [9] 中证明。

定理 4.2. 设 N 是一个维数为 >3 的广义 Hantzsche-Wendt 流形。那么 N 不存在 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构。

正如 [9], 广义 Hantzsche-Wendt 流形只存在于奇数维中这一点所指出的那样。

定理1.2的证明

对于这两个流形 M_1 和 M_2 定理 1.2中所述的结果，将通过将陈述分为两种情况来证明，具体取决于双曲流形的维数是奇数还是偶数。我们将详细讨论构造具有非零 Stiefel-Whitney类的流形这一情况，并说明需要如何调整论证才能处理 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构。

命题5.1. 设 $n \geq 2$ 为正整数。存在无穷多个有限体积、带尖点、可定向的双曲（$2n+2$）流形 M，使得对于所有 $0 \leq 2j \leq n$， w_{2j}（M） $\neq 0$。

证明。我们将使用[7] 以及 [12], 所给出的提升；两者结合起来证明，每个闭的平坦（$m-1$）流形都可作为某个带尖点的有限体积双曲 m-流形的尖点截面（事实上，可作为无穷多个此类流形的尖点截面）。特别是， N 中 [4] §4所描述的流形可作为无穷多个带尖点的有限体积双曲（$2n+2$）-流形的尖点截面 M。如§4所述， N 是可定向的，而[7] 表明双曲流形 M 可以取为可定向的。

由于 N 嵌入于 M 中，作为尖点截面， i 的法丛： $N \hookrightarrow M$ 是平凡的。由于 $w_{2j}(N) \neq 0$，由备注 2.2可推得 $w_{2j}(M) \neq 0$ 在所述范围内成立。□

命题5.2。设 $n \geq 2$ 为正整数。存在无穷多个有限体积、带尖点的可定向双曲（$2n+3$）流形 M，使得对所有 $0 \leq 2j \leq n$， w_{2j}（M） $\neq 0$。

证明。考虑第§4节中描述并用于命题5.1证明的闭可定向平坦（$2n+1$）流形 N。那么 $N \times S^1$ 是一个闭可定向平坦（$2n+2$）流形，其嵌入 $N \hookrightarrow N \times S^1$ 具有平凡法丛。因此，利用备注 2.2，我们可推得对所有 $0 \leq 2j \leq n$，斯蒂费尔-惠特尼类 w_{2j}（$N \times S^1$） $\neq 0$。再次利用[7] 和 [12] ，我们可以构造无穷多个有限体积、带尖点的可定向双曲（$2n+3$）流形 M，其尖点截面为 $N \times S^1$。与命题5.1中一样，随后可推得 w_{2j}（M） $\neq 0$ 在所述范围内成立。□

The 定理的第一部分1.2 现在可由命题5.1 或命题5.2 得出，具体取决于
ng 是偶数还是奇数
为偶数还是奇数。 □

注 5.3。 在定理 1.2中 $m = 5$ 的情形也可以处理，因为在 [8], 中，一个没有自旋结构的平坦4维流形（即 $w_2 \neq 0$）被嵌入为某个带尖点双曲5维流形的尖点截面。

为处理自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构的情形，我们先假设 $m = 2n+2$，从而 $m-1$为奇数。在这种情况下，若 N 是一个维数为 $m-1$的广义 Hantzsche-Wendt 流形，则再次应用[7] 和 [12] 可得， N 是无穷多个可定向有限体积双曲（$2n+2$）流形的尖点截面 M。应用定理4.2 和引理 3.1 现在可推出，这样的流形 M 不允许存在自旋$^{\mathbb{C}}$结构。

与命题 5.2 的情形一样，为了处理 $m = 2n+3$ 的情形，我们考虑平坦流形 $N \times S^1$，在此情形下， N 是上文给出的广义 Hantzsche-Wendt 流形。由引理 3.1， $N \times S^1$ 同样不具有 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构，因此我们接着采用上述论证。□

注 5.4. 与斯蒂费尔-惠特尼类不消失的情形不同， $m = 5$这种情形无法处理，因为正如§1中所述，所有 4 维流形都具有 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构。

6 算术流形的可公度类

本节的主要结果是定理1.2 的一个更精确版本，该版本表述为定理1.1 ，为方便起见，下面再次列出。关键在于， [7] 和[12] 的构造利用了算术流形，而我们可以借此在算术情形下证明一个更强的结果。接下来的小节中，我们将介绍一些背景知识和必要的定义。

定理 6.1。设 n 为正整数。对于每个 $m \geq 2n+2 \geq 6$，每个有尖点的算术双曲 m-流形都与可定向的双曲 m-流形 M_1 和 M_2 可公度，使得：

- $w_{2j}(M_1)$ 对所有 $0 \leq 2j \leq n$ 都有 $\neq 0$；
- M_2 不具有 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构。

请注意，[7] 和 [12] 的可分性论证表明，在每个有尖点的算术双曲 m-流形的可公度类中，都存在无穷多个有尖点的可定向双曲 m-流形 M_1 和 M_2，它们如定理6.1所述。

6.1 二次型

定义 6.2（二次型）。域 K 上的二次型是一个系数属于 K、次数为 2 的齐次多项式。

在本文余下部分，我们假设二次型是非退化的，并定义在 $\mathbb{Q}$ 上。 n 个变量的二次型称为具有秩 n。我们可以将秩为 n 的二次型 $q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 写成一个 $n \times n$ 对称矩阵 Q，使得 $q(x) = x^tQx$，其中将元素 q_{ij} 设为 a_{ij}（当 $i = j$ 时），否则设为 $\frac{a_{ij}}{2}$。

定义 6.3（有理等价）。由对称矩阵 Q_1 和 Q_2 给出的两个秩为 n 的二次型称为有理等价的，当且仅当存在一个矩阵 $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ 使得 $T^tQ_1T = Q_2$。

所有二次型都与某个对角形式有理等价，也就是说，其对应的对称矩阵是对角矩阵的二次型。我们将把二次型视为有理等价下的对象，因此总可以从每个有理等价类中选取一个对角表示。为简化记号，我们将对角二次型 $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i^2$ 写作 $\langle a_1、\ldots、a_n\rangle$。我们还需要考虑另一种等价形式。

定义 6.4（射影等价）。如果存在两个非零整数 a 和 b，使得 aq_1 和 bq_2 在有理数域上等价，则两个二次型 q_1 和 q_2 射影等价。

对角二次型 q 在射影等价意义下的一组完全不变量由符号差、判别式以及哈塞-维特不变量 $\epsilon_p(q)$ 给出，后者将在下文定义。

设 $q(x) = \langle a_1, \ldots\ldots, a_n\rangle$。 q的符号差定义为 (r,s)，其中 r 是 a_i 中的正系数（对于非对角形式，则是对应对称矩阵中的正特征值）的个数，而 s 是 a_i中负系数的个数。判别式定义为系数乘积模平方数，即 $\prod_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ （或者对于

非对角形式，则为对应对称矩阵的行列式）。哈塞–维特不变量更为复杂，其定义用到了希尔伯特符号。希尔伯特符号定义如下：

$$(a,b)_p = \begin{cases} 1 & \text{if } z^2 = ax^2 + by^2 \text{ has a solution in } \mathbb{Q}_p \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义 6.5（哈塞-维特不变量）。给定一个在 $\mathbb{Q}$ 上的对角二次型 $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ 和一个素数 p（∞ 可能为），q 在 p 处的哈塞-维特不变量定义为

$$\epsilon_p(q) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i, a_j)_p.$$

哈塞-维特不变量（以及希尔伯特符号）满足希尔伯特互反律，这意味着对于任意二次型 q，$\prod \epsilon_p(q) = 1$。此外，对于任意固定的 q，只有有限多个 $\epsilon_p(q)$ 等于 -1，因为除 2 和 ∞ 外，任何这样的 p 都必须整除 q 的至少一个系数。

我们将使用 Serre 的以下引理来构造二次型。

引理 6.6 （[20,第 IV 章，命题 7]）。设 d、r、s 和 n 为整数，且 ϵ_p 对于每个素数 p（包括 ∞）均为 1 或 -1。则存在一个秩为 n 的二次型 q，其判别式为 d，符号差为（r，s），且哈塞-维特不变量为 ϵ_p，当且仅当以下条件得到满足。

1. $\epsilon_p = 1$ 几乎对所有 p 以及 $\prod \epsilon_p = 1$ 对所有素数 p成立。2. $\epsilon_p = 1$ 若 $n = 1$，或若 $n = 2$ 且 d 在 $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$ 中的像为 -1。3. r、$s \ge 0$ 和 $n = r + s$。4. d 的符号等于 $(-1)^s$。5. $\epsilon_\infty = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}$。

6.2 正交群

与 §6.1 中一样，我们令 q 为一个秩为 n 的二次型，定义在 $\mathbb{Q}$ 上，其对应的对称矩阵为 Q。的正交群和特殊正交群（或 Q）是如下群：

$$\mathrm{O}(q) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) | A^t Q A = Q\} \text{ and } \mathrm{SO}(q) = \{A \in \mathrm{O}(q) | \det(A) = 1\}.$$

假设 q 不是定二次型，则 $\mathrm{O}(q)$ 的算术子群可以构造为 $\mathrm{O}(q,\mathbb{Z}) = \mathrm{O}(q) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$（以及显然的子群 $\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z})$）。假设 q 不是定二次型，只是为了确保所构造的算术群是无限的。

如果 q_1 和 q_2 是有理等价二次型，那么存在 $T \in$ 一般线性群$(n,\mathbb{Q})$ 使得 $T^t Q_1 T = Q_2$，在这种情况下，$T^{-1}\mathrm{O}(q_1,\mathbb{Z})T$ 与 $\mathrm{O}(q_2,\mathbb{Z})$ 可公度。

注意，若 q 是一个符号差为 $(m,1)$ 的二次型，则 q 在 $\mathbb{R}$ 上等价于二次型 $j_{m+1}(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 - x_{m+1}^2$（其对应的对称矩阵为 J_{m+1}）。

6.3 算术双曲流形

在本文余下部分中，将双曲 m 空间 $\mathbb{H}^m$ 认作双曲面模型会更方便。

$$\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} | j_{m+1}(x) = -1, x_{m+1} > 0\},$$

其中 j_{m+1} 是上文给出的二次型。$\mathbb{H}^m$ 的完整等距变换群为 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^m) = \mathrm{O}^+(j_{m+1})$，其中 $\mathrm{O}^+(j_{m+1})$ 是 $\mathrm{O}(j_{m+1})$ 中保持双曲面上半叶 $\{x \in \mathbb{R}^{m+1} | j_{m+1}(x) = -1\}$ 的子群。

有限体积的带尖点双曲 m-流形 $M = \mathbb{H}^m/\Gamma$ 被定义为算术的，当且仅当 Γ 与如下由算术群 $\mathrm{O}(q, \mathbb{Z})$ 构造的群可公度。设 q 是一个符号差为 $(m, 1)$ 的有理二次型，且 $T \in \mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R})$，使得 $T^t Q T = J_{m+1}$，那么群 $T^{-1}\mathrm{O}(q, \mathbb{Z})T \cap \mathrm{O}^+(j_{m+1})$ 在 $\mathbb{H}^m$ 上作用时具有有限余体积；若 Γ 与某个这样的群可公度，则称其为算术的。

注意，根据[14], 两个带尖点算术双曲流形可公度，当且仅当它们对应的二次型射影等价。

6.4 定理6.1的证明

在开始证明之前，我们先作一些初步说明，以帮助读者理解。定理6.1 的证明更谨慎地运用了 [7]中的构造。具体而言，给定某个闭平坦（$m-1$）流形 B，[7] 提供了一种算法，用于寻找一个算术轨形，使其某个尖点截面与 B微分同胚。利用 [12], ，我们可以取某个有限覆盖，使 B 成为某个算术双曲 m流形的尖点截面。[7] 的算法输出与某个二次型相关联的算术双曲轨形 q （如§6.3中所述），其中 q 通过对平坦流形全纯群的描述，融入 [7] 的算法中。该全纯群是有限群，因此保持某个正定二次型不变。我们可以利用这一信息来控制该算法输出对象所属的可公度类。

现在我们详细讨论斯蒂费尔-惠特尼类不消失的情形；关于 $\mathrm{spin}^{\mathbb{C}}$-结构的情形，则沿用这一论证思路略作说明。

证明。 与命题5.1 和 5.2中一样，我们通过将第 $m-1$节的闭平坦（ N ）流形 §4 （如有必要，也可以将这类流形与 S^1 取积）输入 [7]中的算法，找到具有所需性质的双曲流形。为使论证简洁，我们讨论 $m = 2n+2$的情形，并在证明末尾简要评论 $2n+3$ 的情形。

[7] 的算法依赖于将 N 的全纯群（在此处的情形下为（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$^{n+1}$）表示到 $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{Z})$ 中，并选择一个符号差为（$2n+1, 0$）的二次型 f，使得该表示像中的每个矩阵都保持此二次型不变。在我们的设定中，全纯群由 §4 中描述的对角矩阵生成，因此该表示保持任意秩为（$2n+1$）的对角二次型不变。因此，对于任意符号差为（$m-1, 0$）的正定对角二次型 f，[7] 的算法现在都会生成一个流形，它属于 §6.3 中所述、与群 $\mathrm{SO}(f \oplus \langle 1, -1\rangle, \mathbb{Z})$ 相关联的可公度类。请注意，§4 中列出的生成元的平移部分包含 $1/2$，但 [7] 内置了缩放功能，因此缩放后各群 π_n 的像确实属于 $\mathrm{SO}(f \oplus \langle 1, -1\rangle, \mathbb{Z})$。我们提醒读者，实施上述缩放可能会改变形式 $f \oplus \langle 1, -1\rangle$，但它仍属于同一个射影

等价类，因此所得流形仍属于同一个可公度类。

根据以上讨论，要完成证明，我们需要证明每个符号差为（$m, 1$）的二次型q 都射影等价于一个二次型 q''，它可以写成 $q' \oplus \langle 1, -1 \rangle$，其中 q' 是符号差为（$m-1, 0$）的某个对角二次型（在上述讨论中取 $q' = f$）。

如 §6.1 所述，q 与任何具有相同符号差（$m, 1$）、判别式和哈塞-维特不变量的形式都射影等价。设 q 的判别式为 d，其哈塞-维特不变量为 $h_p = \epsilon_p(q)$。我们将使用引理 6.6 构造一个符号差为（$m-1, 0$）、判别式为 $-d$、哈塞-维特不变量为 $\epsilon_p(q') = h_p(-1, -d)_p$的二次型 q'，从而使 q 和 q'' 的所有必要不变量都相等。

我们先证明，给定具有上述不变量的 q'，$q'' = q' \oplus \langle 1$和$-1 \rangle$必定与 q射影等价，因为它们具有相同的不变量。显然，q'' 的符号差为（m，1），其判别式为 $d = (-d)(-1)$。我们可以根据各系数的希尔伯特符号计算哈塞-维特不变量。令 $q' = \langle x_1, \ldots\ldots, x_{m-1} \rangle$，使得 $q'' = \langle x_1, \ldots\ldots, x_{m-1}, 1, -1 \rangle$。于是：

$$\begin{aligned}
\epsilon_p(q'') &= \left(\prod_{i<j} (x_i, x_j)_p \right) \left(\prod_i (1, x_i)_p \right) \left(\prod_i (-1, x_i)_p \right) (1, -1)_p \\
&= (\epsilon_p(q'))(1) \left(-1, \prod_i x_i \right)_p (1) \\
&= h_p(-1, -d)_p (-1, -d)_p \\
&= h_p = \epsilon_p(q)
\end{aligned}$$

因此，q 和 q'' 具有相同的符号差、判别式和哈塞-维特不变量，故必定射影等价。

为了完成证明，还需证明存在一个 q'，其符号差为（$m-1$，0），判别式为 $-d$，哈塞-维特不变量为 $\epsilon_p(q') = h_p(-1, -d)_p$。参照引理 6.6，我们注意到条件 (1) 得到满足，因为 $\prod_p \epsilon_p(q) = \prod_p h_p = 1$；由希尔伯特互反律可知 $\prod_p (1, -d)_p = 1$。条件 (2) 得到满足，因为 $m - 1 \geq 5$；而条件 (3) 可通过将秩取为 $m-1$来满足。我们知道，$d < 0$ 是一个符号差为（m，1）的二次型的判别式，因此 $-d > 0$，满足条件 (4)。最后，条件 (5) 成立，因为 $\epsilon_\infty(q') = h_\infty(-1, -d)_\infty = 1$；注意，$h_\infty = 1$，因为 q 的符号差为（m，1）；并且（-1, $-d$）$_\infty = 1$，因为 d 为负。根据引理 6.6，存在 q'，其余论证随之成立。

当我们考虑 $m = 2n+3$ 的情形时，发生变化的对象只有 N 及其全纯群。我们可以取 $N = N' \times S^1$，其中 N' 是 $2n+1$-流形，如 §4所述。N' 的全纯表示与 N的相同，只是在底部多了一行、右侧多了一列，且两者除右下角的 1 外，其余元素均为 0。这并不改变该表示为对角的这一事实，因此在 [7]的算法中，可以选取任意一个秩合适的二次型 f。证明的其余部分照常进行。□

现在我们讨论阻碍 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构的情形。设 $m = 2n+2$ 且N 是一个维数为 $m-1$的广义 Hantzsche-Wendt 流形。则 N 的全纯表示由对角矩阵生成，如 §4.2中所述。同样的

用于证明定理 6.1 的论证表明，每个带尖点的算术双曲m-流形都与一个流形 M 可公度，该流形具有一个与N同胚的尖点截面；现在如前通过应用定理 4.2 和引理3.1，结论随即成立。

为处理 $m = 2n+3$这一情形，我们考虑流形 $N \times S^1$，其中 N 是维数为 $m-2$的广义 Hantzsche-Wendt 流形。现在， $N \times S^1$的全纯表示仍将是对角的， $N \times S^1$ 根据引理 $^{\mathbb{C}}$ 不具有 spin3.1结构，其余论证与此前相同，从而完成证明。 □

7 最后的评论

7.1 其他情形中的非零斯蒂费尔-惠特尼类

在 [5], 中，作者考察了局部对称空间以及其他一些流形的特征类和特征数的消失与非消失。在 [5, 第 6], 节中，他们提出了如下问题：计算非正曲率黎曼流形的其余已知例子的特征类和/或特征数。

这些“其余已知例子”中的一部分来自对尖点双曲流形进行双构造。更正式地说，一个有限体积的带尖点双曲 n 流形同胚于某个紧流形 X 的内部， ∂X 其边界 ∂X （其边界不一定连通），且每个边界分支都是维数为 $n-1$ 的平坦流形。流形 X 可以沿着 ∂X 进行双构造，从而形成闭流形 DX （ X 的双）。众所周知（例如参见 [15, 第 1] 节），DX 具有非正曲率度量。现在，如果我们取 X 使其来自定理 1.2 或定理 1.1 中构造的某个带尖点双曲 m 流形 M_1，那么平坦流形 N （分别为 $N \times S^1$）嵌入 DX 且具有平凡法丛，因此，按照此前的论证， DX 将在某个范围内具有非零斯蒂费尔-惠特尼类。综上，我们得到以下推论。

推论 7.1。设 n 是一个正整数。对于每个 $m \geq 2n+2$，都存在无穷多个闭的可定向 m 流形 M，它们具有非正曲率度量和非可解基本群，并且对于所有 $0 \leq 2j \leq n$， $w_{2j}(M) \neq 0$ 。

7.2 几乎复结构

光滑流形 M 上的几乎复结构定义为 TM 上的几乎复结构；即一个丛自同态 $J\colon TM \to TM$，满足 $J^2 = -\mathrm{id}|_{TM}$。如果 M 具有几乎复结构，那么 M 可定向且维数为偶数。

众所周知，如果 M 是带有几乎复结构的光滑流形，那么 M具有一个自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构 [6]。因此，作为定理 1.1 的推论，我们有：

推论 7.2。对于所有 $m \geq 6$ 且为偶数的情形，每个有尖点的算术双曲 m 流形都与一个不具有几乎复结构的可定向双曲 m 流形可公度。

类似地，利用尖点双曲 m流形 M_2 定理1.1 中构造的流形，我们可以构造与推论7.1 中的例子类似的例子，且这些例子不具有自旋$^{\mathbb{C}}$ 结构，因此也不具有几乎复结构，即：

推论 7.3. 对于每个 $m \geq 2n+2$，都存在无穷多个闭的可定向 m-流形 M，它们具有非正曲率度量，且其基本群非可解

，并且不允许存在 spin$^{\mathbb{C}}$ 结构。若 m 为偶数，这些流形不允许存在几乎复结构。

参考文献

[1] L.S. Charlap，《比伯巴赫群与平坦流形》，Universitext，施普林格出版社（1986）。[2] R.E. Gompf，自旋^c 结构与同伦等价，Geometry and Topology 1（1997），41–50。[3] S. Hasui、D. Kishimoto 和 A. Kizu，矩角流形的斯蒂费尔-惠特尼类均为平凡类，Forum Math. 34（2022），1463–1474。[4] S. M. Im 和 H. K. Kim，具有非零斯蒂费尔-惠特尼类的紧平坦流形，Topology and its Applications 96（1999），267–276。[5] J-F. Lafont 和 R. Roy，关于非正曲率流形的特征类的一则注记，Expositiones Math. 25（2007），21–35。[6] H. B. Lawson 和 M-L. Michelson，《旋量几何》，普林斯顿数学丛书 38，普林斯顿大学出版社（1989）。[7] D. D. Long 和 A. W. Reid，所有平坦流形都是双曲轨形的尖点，Alge- braic and Geometric Topology 2（2002），285–296。[8] D. D. Long 和 A. W. Reid，虚旋双曲流形，Proc. Edinburgh Math. Soc.，63（2020），305–313。[9] R. Lutowski、J. Popko 和A. Szczepa´nski，Hantzsche-Wendt 流形上的自旋^c 结构，arXiv:2103.01051。[10] B. Martelli、S. Riolo 和 L. Slavich，不存在自旋结构的紧双曲流形，Geometry and Topology 24（2020），2647–2674。[11] W. S. Massey，关于流形的斯蒂费尔-惠特尼类，Amer. J. Math. 82（1960），92–102。[12] D. B. McReynolds，算术双曲轨形的外围可分性与尖点，Algebraic and Geometric Topology 4（2004），721–755。[13] J. Milnor 和 J. Stasheff，《特征类》，Annals of Math. Studies 76，普林斯顿大学出版社（1974）。[14] J. M. Montesinos-Amilibia，关于具有可公度自同构群的整二次型，Hiroshima Math. J. 43（2013），371–411。[15] P. Ontaneda，双曲流形的双与非正曲率异 PL 结构，Trans. Amer. Math. Soc. 355（2003），935–965。[16] B. Putrycz 和 A. Szczepa´nski，平坦四维流形上自旋结构的存在性，Adv. Geom. 10（2010），323–332。

[17] J. G. Ratcliffe，《双曲流形基础》，数学研究生教材 149，施普林格出版社（1994）。[18] J. P. Rossetti 和 A. Szczepa´nski，广义 Hantzsche-Wendt 平坦流形，《伊比利亚美洲数学评论》21（2005），1053–1070。[19] C. Sell，双曲四维流形的尖点与可公度类，即将在 Algebraic and Geometric Topology 发表，arXiv:2109.12172。[20] J.-P.Serre，《算术教程》，数学研究生教材 7，施普林格出版社（1973）。[21] R. E. Stong，流形的斯蒂费尔-惠特尼类，《太平洋数学杂志》68（1977），271–276。[22] D. Sullivan，双曲几何与同胚，载于《几何拓扑》（乔治亚拓扑学会议论文集，佐治亚州雅典，1977），543–555，学术出版社，纽约（1979）。[23] A. Szczepa´nski，具有球面同调的无球面流形，《Mathematika》30（1983），291–294。 ℚP. Teichner 和 E. Vogt，所有 4 维流形都有自旋^C 结构，预印本见 https://math.berkeley.edu/~teichner/Papers/spin.pdf[25] H. Whitney，关于可微流形的拓扑学，《拓扑学讲义》，101–141，密歇根大学出版社（1941）。

莱斯大学数学系，美国德克萨斯州休斯敦市，邮编 77005。alan.reid@rice.edu, cds7@rice.edu