arXiv:2302.08078v1 [quant-ph] 16 Feb 2023

光-物质混合系统中色散超辐射脉冲的量子涨落动力学

Kevin C. Stitely,[1,2,3,*] Fabian Finger,[4] Rodrigo Rosa-Medina,[4] Francesco Ferri,[4] Tobias Donner,[4] Tilman Esslinger,[4] Scott Parkins,[1,3] 和 Bernd Krauskopf[1,2]

[1] *Dodd-Walls Centre for Photonic and Quantum Technologies, New Zealand*

[2] *Department of Mathematics, University of Auckland, Auckland 1010, New Zealand*

[3] *Department of Physics, University of Auckland, Auckland 1010, New Zealand*

[4] *Institute for Quantum Electronics, ETH Zürich, 8093 Zürich, Switzerland*（日期：2023年2月17日）

我们从理论上研究一个受驱动的耗散量子多体系统，该系统由单模光学腔中的原子系综构成，可用开放塔维斯-卡明斯模型描述。在这一光-物质混合系统中，相干过程与耗散过程的相互作用会产生超辐射脉冲，并形成强关联，即使系统包含数百至数千个粒子也是如此。平均场动力学的一个核心特征是，由于潜在的时间反演对称性，两个自旋自由度会发生自反转，而量子涨落会打破这种对称性。我们展示了一种淬火方案，可使高度非高斯态在长时间尺度内得以维持。这一普适机制为复杂涨落模式的生成与控制提供了有趣的可能性，并有望改进用于耗散自旋放大的量子传感方案。

近年来，驱动耗散量子多体系统引起了广泛关注，这类系统出现在从原子与光学物理[1]，到凝聚态物质 [2] 和量子信息理论 [3]等诸多领域。能量的输入与输出对于应用至关重要，并会显著改变量子系统所呈现的动力学。利用相干性与耗散之间相互作用的例子包括极限环和时间晶体行为 [4–7]，、超辐射振荡 [8, 9]，和混沌 [10–12]，以及耗散诱导相和拓扑相 [13–16]。对多体非平衡量子系统的研究通常聚焦于量子涨落较小的平均场行为。此外，对涨落的研究通常关注稳态效应，例如量子相变附近的临界指数[17–19]。迄今为止，对驱动耗散量子系统中量子涨落动力学的研究仅限于自旋压缩 [20–23]。然而，在这些研究中，耗散会被刻意减弱，因为它不利于纠缠。

在本研究中，我们探讨原子系综通过驱动激光场与单模光学腔耦合时的涨落动力学 [图1(a,b)]。该系统由耗散塔维斯-卡明斯模型[24]，描述，其两个极限情形已得到充分研究：耗散占主导时会导致超辐射衰变 [25]，；耗散几乎不存在时则会诱发自旋压缩动力学 [21, 26]。我们研究这两个极端之间尚未探索的区域，并表明系统能够积累强烈的非高斯涨落，我们将其称为色散超辐射脉冲 [图1(c)]。在此，即使系统尺寸不断增大、趋近于人们可能天真地认为热力学极限将会成立的区域，量子涨落也依然显著。此外，我们表明，增强涨落的出现会导致热力学极限的反演时间反演对称性破缺。最后，我们证明，对有效腔共振和光-物质耦合进行猝灭，可以使高度非高斯态在出乎意料的长时间尺度内保持稳定。

我们考虑单模光学腔中的 N 个原子，其有效共振频率为 ω，衰减率为κ。原子处于一种 Λ 构型中，具有两个（名义上的

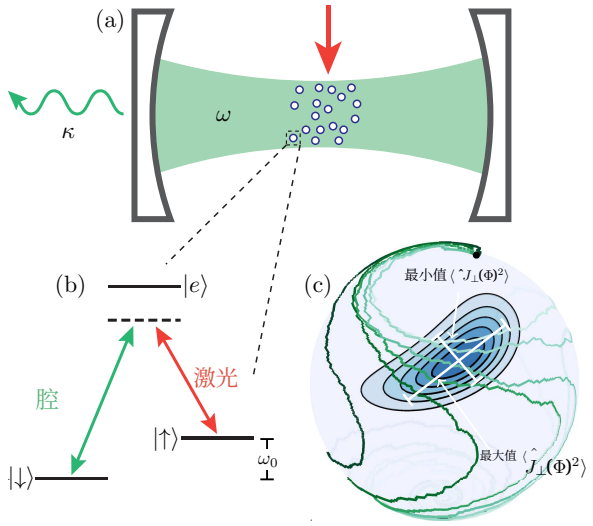


图1。（a）开放塔维斯–卡明斯模型示意图。（b）原子能级与耦合构型。（c）通过六条量子轨迹和自旋 Q-函数在原子布洛赫球上示出的色散超辐射脉冲；其中，$\kappa = 1$、$\lambda = 0.5$、$N = 200$，初态为 $|\theta_0, \phi_0\rangle = |\pi/10, \pi/2\rangle$。

）基态， $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$，以及一个激发态 $|e\rangle$[图1（a、b）]，，并通过腔辅助拉曼跃迁驱动：激光耦合跃迁 $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |e\rangle$，而 $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 与腔模耦合。原子固定在场的交替波腹处，且耦合完全相同。如果驱动激光和腔模与原子共振的失谐很大， $|e\rangle$ 则可进行绝热消除。此时，该耦合方案可视为 $|\downarrow\rangle$ 与 $|\uparrow\rangle$之间由激光和腔光子促成的双光子跃迁。该系统由塔维斯-卡明斯哈密顿量描述 [24] （其中 $\hbar = 1$）

$$\hat{H}_{\mathrm{TC}} = \omega \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\left(\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^{\dagger}\hat{J}_-\right), \qquad (1)$$

其中， $\hat{a}$ 是有效频率为 ω 的腔场模式的湮灭算符， $J_{\pm,z}$ 是集体自旋-$N/2$ 算符， ω_0 是有效能级劈裂， λ 是光物质耦合强度。该开放量子系统的主要耗散机制是腔光子的泄漏，我们用林德布拉德主方程对其建模

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_{\mathrm{TC}}, \hat{\rho}] + \kappa\left(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right), \qquad (2)$$

其中， $\hat{\rho}$ 是约化密度算符， κ 是腔衰减率。通过绝热消除腔场模式（假设 $\sqrt{\omega^2+\kappa^2} \gg \lambda, \omega_0$） [26, 27]，并转到旋转参考系 [28],，我们得到单轴扭转哈密顿量

$$\hat{H} = -\frac{\xi\lambda^2}{N}\left(\frac{N^2}{4} - \hat{J}_z^2\right), \qquad (3)$$

其主方程为

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\eta\lambda^2}{N}\left(2\hat{J}_-\hat{\rho}\hat{J}_+ - \hat{J}_+\hat{J}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{J}_+\hat{J}_-\right). \qquad (4)$$

这里， $\xi = \omega/(\kappa^2+\omega^2)$、 $\eta = \kappa/(\kappa^2+\omega^2)$以及$\hat{\rho}$ 现在是纯原子系统的约化密度算符。方程（3）描述了由腔光子介导的系综内有效全局范围自旋-自旋相互作用。在方程（4）中，腔耗散导致布居反转集体增强，使系统趋向自旋态 $\bigotimes_{j=1}^{N}|\downarrow_j\rangle$，即迪克超辐射 [25, 29]。由于方程（3、4）守恒集体自旋长度，动力学可表示为布洛赫球表面上的准概率分布的演化[图 1(c)]，，我们用 Husimi 自旋 Q-函数 [28] 描述这一演化。在半经典极限 $N \to \infty$ 下，涨落变得可以忽略（准概率分布趋于 δ 分布），动力学由约束在布洛赫球 [28] 上的平均场轨迹$\hat{}$$\hat{}$描述： $\langle J_x(t)\rangle$、 $\langle J_y(t)\rangle$以及 $\langle \hat{J}_z(t)\rangle$。

开放塔维斯-卡明斯模型已在动力学为纯耗散型 [29–34] 的情况下

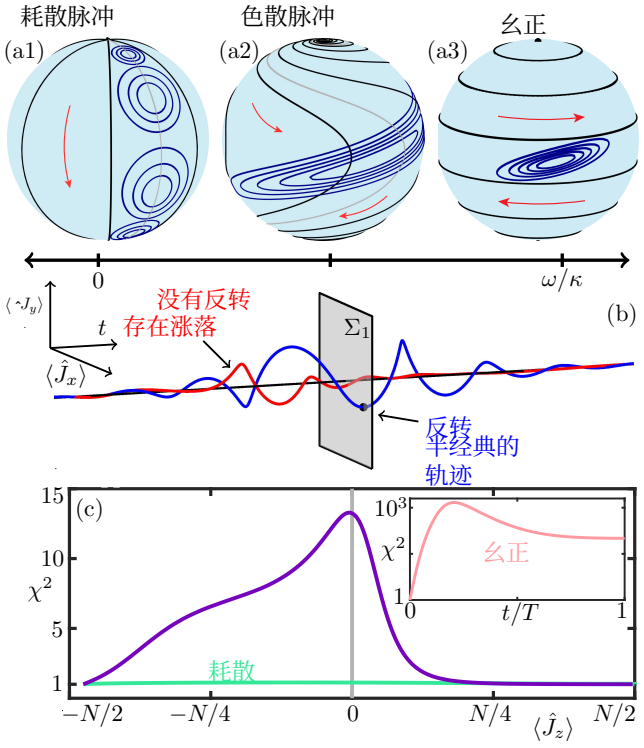


图 2。（a）系统在布洛赫球上演化时的半经典轨迹（黑色）和自旋 Q-函数的等高线（蓝色）：耗散脉冲（a1）和色散脉冲（a2）分别从 $|\theta_0, \phi_0\rangle = |\pi/10, \pi/2\rangle$ 初始化；幺正情形（a3）则从 $|\pi/2, \pi/2\rangle$ 初始化。（b）反演时间反演对称性（蓝色）被量子涨落（红色）打破。（c）形变参数 χ^2 随反演量 $\langle \hat{J}_z(t)\rangle$ 的变化： $\omega = 0$ （耗散情形）和 $\omega = 5$（色散情形）；插图：幺正情形下 χ^2 随时间的变化，其中 $\omega = 5$, $\kappa = 0$，积分时间为 $T = 800$。对于所有情况， $\lambda = 0.5$, $N = 200$。

或纯相干型（幺正型）[21, 35–38]。前一种情况（ $\omega/\kappa = 0$）可化简为超辐射主方程[29, 39]。此时，半经典轨迹沿经线移动至南极 [图 2（a1）]。由于布洛赫球的曲率，涨落沿所有自旋方向均匀增大。相干型情况（$\omega/\kappa \to \infty$）则相反，不含耗散项，并表现出自旋压缩动力学 [20, 21, 26]。半经典轨迹形成与拉比振荡对应的纬线圆 [图 2（a3）]，，且没有向腔内发射，同时具有依赖反转的拉比频率 $2\xi\lambda^2\langle \hat{J}_z\rangle/N$，见式（3）——从而在赤道处产生自旋压缩 [图 2（a3）]。

在中间范围内 $0 < \omega/\kappa < \infty$，耗散引起的超辐射脉冲行为与腔-原子失谐所产生的拉比振荡相互作用，带来了丰富的色散超辐射脉冲动力学。在这里，半经典轨迹沿布洛赫球向下展开，并在赤道处反向 [图 2(a2)]，，朝南极移动。当平均自旋方向位于赤道时， （瞬时）

拉比频率为零并变为负值。这导致轨迹部分自反转，其源于反演-时间反演对称性 $\mathcal{T}_1:(t,\langle J_z\rangle)\mapsto(-t,-\langle J_z\rangle)$ [28]。因此，任何与对称子空间$\Sigma_1=(\langle \hat{J}_x\rangle,\langle \hat{J}_y\rangle,\langle \hat{J}_z\rangle)\in\mathbb{S}^2|\langle \hat{J}_z\rangle=0\}$ 相交的轨迹，在 $\hat{\mathcal{T}}_1$ [40, 41]下保持不变。换言之，$\langle J_x\rangle$ 和 $\langle J_y\rangle$ 在越过赤道时，其动力学会反转。

由于每条轨迹都趋向布洛赫球的南极，任何初始处于激发态的轨迹（$\langle \hat{J}_z(0)\rangle > 0$）都必定与 Σ_1相交，因此会在反演时间反演下呈对称。不同于现有的时间反演动力学设计方案——这些方案需要外部修改（翻转哈密顿量的符号） [42–44]，，该系统的自旋分量 $\langle \hat{J}_x\rangle$ 和$\langle \hat{J}_y\rangle$ [本质上具有自反转特性]图 2(b) Σ_1 。令人惊讶的是，这是由耗散诱导的：由于赤道处的拉比频率为零，经过[45, 46]的运动完全由耗散驱动。请注意，所有自旋分量同时自反转是不可能的，因为这将违反常微分方程的唯一性定理 。相反，只有$\langle J_x\rangle$ 和 $\langle J_y\rangle$ 和 $\langle J_z\rangle$ 会自反转，而$\langle J_z\rangle=-N/2$则单调演化至。

对方程（4）的模拟表明，量子涨落打破了反演时间反演对称性 [图 2(b)],这与色散超辐射脉冲期间出现高度非高斯自旋态有关[图 1(c) 和 2(a2)] 其中一个正交分量的涨落大幅增强。通过采用量子轨迹方法，可以理解这种非均匀态展宽的物理起源 [47, 48]。图 1(c) 展示了从自旋相干态 $|\theta_0、\ \phi_0\rangle=|\pi/10、\ \pi/2\rangle$初始化的六条量子轨迹。布洛赫球北部区域内半经典方程的正发散，导致脉冲初始阶段量子轨迹的涨落得到放大。这种轨迹的“扇形散开”使某些方向上的涨落增强。一旦平均自旋方向越过赤道，轨迹便会汇聚，因此整体涨落水平降低。

为描述非均匀膨胀，我们引入形变参数

$$\chi^2=\frac{\max\limits_{\Phi}\langle\Delta\hat{J}_\perp(\Phi)^2\rangle}{\min\limits_{\Phi}\langle\Delta\hat{J}_\perp(\Phi)^2\rangle}\geq 1, \tag{5}$$

其中 $\langle\Delta \hat{J}_\perp(\Phi)^2\rangle$ 是垂直于平均自旋方向的某一方向上的自旋方差，该方向由相对于纵向方向的角度 Φ参数化。图 2(c) 展示了 χ^2 在纯耗散脉冲和色散脉冲期间的变化。在耗散情形下，态在整个过程中均匀扩展 [图 2(a1)]，并且 $\chi^2\approx 1$ 始终如此。相比之下，色散情形下 χ^2先明显上升，然后

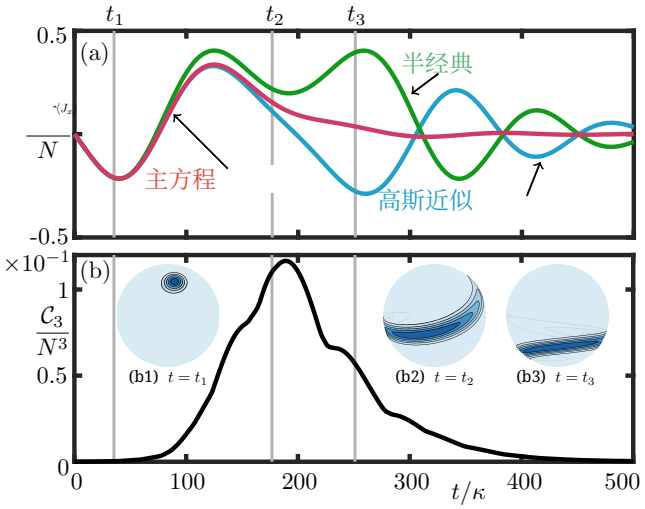


图 3. 色散超辐射脉冲中非高斯关联的生成。(a) 对 $\langle \hat{J}_x(t)\rangle$ 的半经典（绿色）、二阶累积量（蓝色）和主方程（红色）计算。(b) 三阶总关联度 $\mathcal{C}_3(t)$。(b1)–(b3) 脉冲不同时间的自旋 Q 函数快照，其中 $|\theta_0,\phi_0\rangle=|\pi/10,\pi/2\rangle$ 和 $\kappa=1$，
$\omega=5$ $N=200$ ，
$\lambda=0.5$，。

达到峰值，随后迅速下降，系统趋近其 稳态（$\langle J_z\rangle\to -N/2$），此时涨落均匀。（非平衡）稳态是位于南极的自旋相干态 $|\theta,\ \phi\rangle=|\pi,\ \phi\rangle$ 它也是跳跃算符 $\hat{J}_-$ 的暗态，即 $\hat{J}_-|\pi,\ \phi\rangle=0$。图 2(c) 还表明，量子涨落会打破反演-时间对称性，因为 χ^2 关于 $\langle J_z\rangle=0$并不对称。

我们采用累积量展开方法进一步研究这些新出现的非高斯量子态，如图所示。1（c）和2（a2）。累积量也称为连通关联函数[49] 或厄塞尔函数 [50],通过扣除低阶矩所确定的冗余信息，量化高阶矩的影响。近年来，累积量已被用作多种情形下截断方法的基础[51–57]。

在典型的光-物质相互作用模型中，n 阶矩的运动方程取决于 $n+1$阶矩，从而形成一个无限的微分方程层级。在 n阶累积量展开中，假设 $n+1$ 阶累积量为零，从而闭合方程组。一阶展开描述半经典（平均场）近似，该近似在涨落强度较小时有效。二阶累积量展开包含累积量 $\langle J_jJ_k\rangle_c=\langle J_jJ_k\rangle-\langle J_j\rangle\langle J_k\rangle$、 j、 $k\in\{x,y,z\}$，适用于近似高斯态，并能够研究涨落，例如自旋压缩。

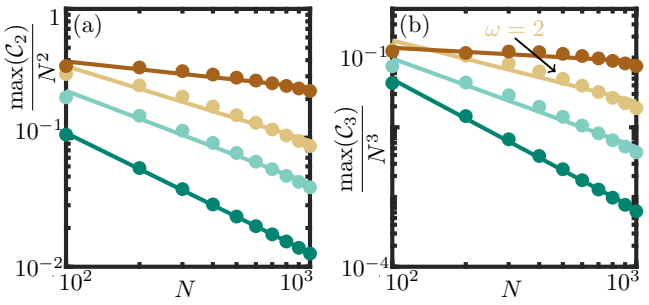


图 4. 二阶（a）和三阶（b）时最大关联随 N的标度。初态为 $|\theta_0\ \phi_0\rangle =$，且和。$|\pi/10\ \pi/2\rangle$ $\kappa = 1$ $\lambda = 0.5$

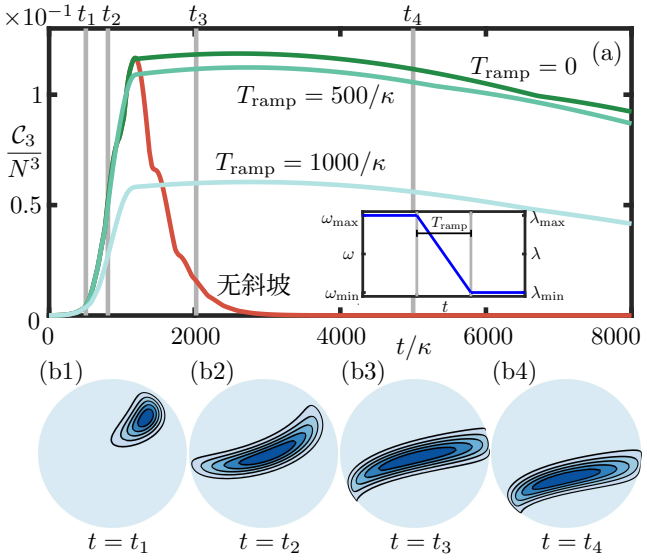


图 5. 通过淬火方案保留非高斯关联。(a) 无斜坡（红色）、瞬时斜坡（深绿色）以及斜坡时间为 $T_{\rm ramp} = 500/\kappa$、$1000/\kappa$（较浅的绿色）时的 $\mathcal{C}_3(t)$。插图展示了淬火方案。(b1)–(b4) 自旋 Q 函数在 $T_{\rm ramp} = 500/\kappa$ 时的快照。这里，$\kappa = 1$、$\omega_{\max} = 5$、$\omega_{\min} = 0$、$\lambda_{\max} = 0.2$、$\lambda_{\min} = 0.02$、$N = 200$，且初态为 $|\theta_0$、$\phi_0\rangle = |\pi/10$、$\pi/2\rangle$。

三阶累积量的形成

$$\langle \hat{J}_j \hat{J}_k \hat{J}_\ell \rangle_c = \langle \hat{J}_j \hat{J}_k \hat{J}_\ell \rangle - \langle \hat{J}_j \rangle \langle \hat{J}_k \hat{J}_\ell \rangle - \langle \hat{J}_k \rangle \langle \hat{J}_j \hat{J}_\ell \rangle - \langle \hat{J}_\ell \rangle \langle \hat{J}_j \hat{J}_k \rangle + 2 \langle \hat{J}_j \rangle \langle \hat{J}_k \rangle \langle \hat{J}_\ell \rangle , \tag{6}$$

其中 j、k、$\ell \in \{x, y, z\}$，因此表明非高斯性的出现。由于关联会在不同算符排列的累积量之间动态转移，我们将三阶时的总关联度定义为

$$\mathcal{C}_3(t) = \sum_{j,k,\ell} | \langle \hat{J}_j \hat{J}_k \hat{J}_\ell \rangle_c | \tag{7}$$

对所有可能的累积量排列求和。

图 3(a、b) 展示了色散超辐射脉冲期间 $\langle J_x \rangle$ 和 $\mathcal{C}_3$ 的时间演化。当态近似为相干 [图 3(b1)]时，$\mathcal{C}_3$ 很小，半经典近似和高斯近似均成立。在脉冲中点附近，关联逐渐建立，态变得高度非高斯 [图 3(b2)]，导致二阶累积量展开（高斯近似）失效 [图 3(a)]。最终态再次成为相干自旋态，此时 $\mathcal{C}_3 \to 0$。在二阶累积量展开中，反演时间反演对称性表现为在变换 $\mathcal{T}_2$ 下保持不变：$(t、\langle J_z \rangle、\langle J_z J_\ell \rangle) \mapsto (-t、-\langle J_z \rangle、-\langle J_z J_\ell \rangle)$，其中 $\ell \in \{x, y\}$。相应的对称子空间还具有附加条件 $\langle J_z J_\ell \rangle = 0$。与半经典情形不同，在半经典情形下，期望值因子化可确保：若 $\langle J_z \rangle = 0$，则 $\langle J_z J_\ell \rangle = 0$；这些条件通常并不满足。因此，在存在量子涨落时，轨迹通常不具有反演时间反演对称性。

到目前为止，我们研究了 $N = 200$下非高斯态的耗散生成。然而，许多冷原子实验都在 $N > 10^3$ [58]区间内进行。令人惊讶的是，在色散区产生的强关联会随着原子数 N 增加而缓慢衰减。图4(a)展示了二阶归一化关联总次数的最大值 $\max(\mathcal{C}_2)/N^2$如何随 N 变化，ω 则相应改变。在对数尺度上进行线性拟合，结果表明二者近似呈幂律关系。纯耗散情形（$\omega = 0$）的斜率（绝对值）最大，关联迅速衰减（约为$\propto 1/N$），这与相干态的行为相符。对于较大的 ω，随着脉冲的色散性不断增强，二阶和三阶关联 $\max(\mathcal{C}_2)/N^2$和 $\max(\mathcal{C}_3)/N^3$ [图 4]在显著更大的原子数下仍能保持。在此区间内，对于粒子数至少达到 $N = 1000$ 的系统，我们观察到了非高斯态的形成。经典行为的起始，也就是高阶累积量随着 N 增大而趋于零的现象，在耗散超辐射脉冲中远早于色散脉冲出现。有趣的是，这表明对于冷原子实验中的典型原子数，即使 $N \gtrsim 10^3$ 很大，也存在这样一个区间：必须考虑量子涨落的完整分布。

在迄今讨论的色散脉冲中，非高斯态会迅速出现又消失。正如我们下面将要展示的，通过对有效腔共振 ω 和耦合 λ采用猝灭方案，可以形成并随后维持非高斯态。当平均自旋方向大致位于布洛赫球赤道时，此时非高斯关联达到最大值，ω 和 λ 会逐渐降低。这样一来，色散脉冲便转变为耗散脉冲，演化速度也随之减慢，从而保留非高斯关联 [图 5]。为考虑实验中可行但非瞬时的猝灭过程，我们用 ω 和 λ [28]中的分段线性斜坡对猝灭方案进行建模。

起初，脉冲处于色散阶段，其特征为 $\omega = \omega_{\max}$和 $\lambda = \lambda_{\max}$。最初被激发的原子如图3 所示演化，并开始表现出强关联，这表明非高斯性开始显现。当关联在脉冲中点附近达到峰值时， ω 和 λ 会在一段时间内线性下降，时间为T_{ramp}，随后进入耗散阶段，其特征为 $\omega = \omega_{\min}$ 和 $\lambda = \lambda_{\min}$。在 $\omega_{\min} = 0$所描述的纯耗散状态下，脉冲初始色散阶段形成的非高斯态会被“冻结”，并如图2(a1)所示，沿布洛赫球向下移动。由于速度由λ决定，因此猝灭可以使脉冲色散阶段形成的非高斯态长期保持。图$\mathcal{C}_3(t)$中的5(a)展示了对关联保持情况的监测，插图中给出了猝灭方案。若不进行斜坡调节，超辐射脉冲会始终处于色散状态，关联迅速增强后又很快消失。要维持非高斯关联，最佳情形是采用 $T_{\text{ramp}} = 0$所示的瞬时猝灭。在这种情况下，我们观察到色散阶段的关联迅速出现，随后在耗散阶段缓慢衰减，使三阶关联在较长时间内得以保留（通过设置 $\lambda_{\min}/\lambda_{\max} \ll 1$确保这一点）。对于有限 T_{ramp} 的更现实猝灭过程（即驱动激光改变频率和功率所需的时间），我们观察到类似行为，关联度最大值仅略低于瞬时猝灭的情况。图 $T_{\text{ramp}} = 500/\kappa$所示为布洛赫球上量子态的演化，见图5(b1)–(b4)，其中展示了色散阶段，随后量子态极其缓慢地衰减。

总之，我们研究了色散区中的开放 Tavis-Cummings 模型，其参数处于耗散过程占主导和幺正过程占主导这两个已得到充分研究的极限之间。这两种过程的相互作用产生并维持了具有高度非高斯量子关联的超辐射脉冲。值得注意的是，随着原子数增加，增强的涨落在很大程度上得以保留，这表明量子-经典交叉可能强烈依赖于涨落的动力学行为。我们的研究结果为在驱动耗散多体量子系统中生成和控制特定的非高斯关联开辟了令人振奋的可能性。所研究的非高斯量子态可用于量子计量学中的最优态制备 [59]。由于态发生了显著形变，我们用于产生色散超辐射脉冲的方案或可借助超辐射自旋放大 [32]，提升磁场传感能力。在腔量子电动力学[8, 16] 的色散区利用超冷原子实现该方案具有若干优势。由于腔失谐和耦合强度由驱动激光的特性决定，我们所考虑的参数确实可以在实验过程中动态调节。此外，还可以对腔输出场进行非破坏性测量，从而实时读取自旋反转，这对实现最优超辐射自旋放大至关重要。

我们感谢瑞士国家科学基金会提供的资助：项目编号 IZBRZ2、186312、182650 和 212168，以及 NCCR QSIT；同时感谢欧盟 Horizon 2020 提供的资助：ERC高级研究员资助项目 TransQ（项目编号 742579）。

* kevin.stitely@auckland.ac.nz

[1] T. Geiger, J. Schmiedmayer, 《非平衡超冷原子》，《凝聚态物理年度评论》6, 201 (2015)。[2] I. Carusotto 和 C. Ciuti, 《光的量子流体》，Reviews of Modern Physics 85, 299 (2013)。[3] P. M. Harrington、E. J. Mueller 和 K. W. Murch, 《面向量子信息科学的工程化耗散》，《自然·物理评论》4, 660 (2022)。[4] N. Dogra、M. Landini、K. Kroeger、L. Hruby、T. Donner 和 T. Esslinger, 《量子气体中的耗散诱导结构不稳定性与手性动力学》，《科学》366, 1496 2019( )。[5] E. I. R. Chiacchio 和 A. Nunnenkamp, 《光学腔内自旋or玻色-爱因斯坦凝聚体的耗散诱导不稳定性》，Physical Review Letters 122, 193605 2019( )。[6] B. Buˇca、J. Tindall 和 D. Jaksch, 《通过耗散实现非稳态相干量子多体动力学》，《自然·通讯》10, 1730 (2019)。[7] H. Keßler、P. Kongkhambut、C. Georges、L. Mathey、J. G. Cosme 和 A. Hemmerich, 《耗散时间晶体的观测》，Physical Review Letters 127, 043602 (2021)。[8] Z. Zhiqiang、C. H. Lee、R. Kumar、K. J. Arnold、S. J. Masson、A. S. Parkins 和 M. D. Barrett, 《自旋-1 4, 424 2017 Dicke模型中的非平衡相变》，《光学》 ( )。[9] K. C. Stitely、S. J. Masson、A. Giraldo、B. Krauskopf 和 S. Parkins, 《广义 Dicke模型中的超辐射切换、量子滞后与振荡》，Physical Review A 102, 063702 (2020)。[10] C. Emary 和 T. Brandes, 《Dicke模型中的混沌与量子相变》，《物理评论 E辑》67, 066203 (2003)。[11] C. Emary 和 T. Brandes, 《量子相变前兆触发的量子混沌：Dicke模型》，Physical Review Letters 90, 044101 (2003)。[12] K. C. Stitely、A. Giraldo、B. Krauskopf 和 S. Parkins, 《非平衡开放Dicke 模型的非线性半经典动力学》，《物理评论研究》2, 033131 (2020)。[13] M. Soriente、T. Donner、R. Chitra 和 O. Zilberberg, 《耗散诱导的反常多临界现象》，Physical Review Letters 120, 183603 (2018)。[14] D. Dreon、A. Baumg¨artner、X. Li、S. Hertlein、T. Esslinger 和 T. Donner, 《拓扑耗散原子-腔系统中的自振荡泵》，《自然》608, 494 2022( )。[15] S. Diehl、E. Rico、M. A. Baranov 和 P. Zoller, 《原子量子线中的耗散诱导拓扑》，Nature Physics 7, 971 (2011)。

[16] F. Ferri、R. Rosa-Medina、F. Finger、N. Dogra、M. Sori- ente、O. Zilberberg、T. Donner 和 T. Esslinger，《具有可调衰变的超辐射量子气体中的新兴耗散相》，Physical Review X 11, 041046 (2021)。[17] D. Nagy、G. Szirmai 和 P. Domokos，《量子噪声驱动相变的临界指数：开放系统 Dicke模型》，Physical Review A 84, 043637 (2011)。[18] B. ¨Oztop、M. Bordyuh、O. E. M¨ustecaplıo˘glu 和 H. E. T¨ureci，《腔中光驱动原子凝聚体的激发：光探测测量理论》，New Journal of Physics 14, 085011 (2012)。[19] F. Brennecke、R. Mottl、K. Baumann、R. Landig、T. Donner 和 T. Esslinger，《驱动耗散迪克相变中涨落的实时观测》，美国国家科学院院刊110, 11763 (2013)。[20] L. Pezz`e、A. Smerzi、M. K. Oberthaler、R. Schmied 和 P. Treutlein，《利用原子系综的非经典态进行量子计量》，Reviews of Modern Physics 90, 035005 (2018)。[21] J. Ma、X. Wang、C. Sun 和 F. Nori，《量子自旋压缩》，Physics Reports 509, 89 (2011)。[22] K. C. Cox、G. P. Greve、J. M. Weiner 和 J. K. Thomp- son，《通过集体测量与反馈制备确定性压缩态》，Physical Review Letters 116, 093602 (2016)。[23] R. J. Lewis-Swan、M. A. Norcia、J. R. K. Cline、J. K. Thompson 和 A. M. Rey，《通过光子介导相互作用在光学时钟跃迁上实现稳健自旋压缩》，Physical Review Letters 121, 070403 (2018)。[24] M. Tavis 和 F. W. Cummings，《N-分子—辐射场哈密顿量的精确解》，Physical Review 170, 379 (1968)。[25] R. H. Dicke，《自发辐射过程中的相干性》，Physical Review 93, 99 (1954)。[26] J. Hu、W. Chen、Z. Vendeiro、A. Urvoy、B. Braverman 和 V. Vuleti´c，《真空自旋压缩》，Physical Review A 96, 050301 2017( )。[27] S. J. Masson、M. D. Barrett 和 S. Parkins，《腔量子电动力学对自旋气体中自旋动力学与压缩的工程调控》，P hysical Review Letters 119, 213601 (2017)。[28] 关于半经典模型、二阶累积量展开、Husimi自旋 Q-函数以及猝灭方案的详情，见 LINK 处的补充材料。[29] M. Gross 和 S. Haroche，《超辐射：集体自发辐射理论述评》，Physics Reports 93, 301 (1982)。[30] A. V. Andreev、V. I. Emel'yanov 和 Y. A. Il'inski˘ı，《集体自发辐射（迪克超辐射）》，苏联物理学进展23, 493 (1980)。[31] A. Angerer、K. Streltsov、T. Astner、S. Putz、H. Sumiya、S. Onoda、J. Isoya、W. J. Munro、K. Nemoto、J. Schmied- mayer 和 J. Majer，《金刚石中色心的超辐射发射》，Nature Physics 14, 1168 (2018)。[32] M. Koppenh¨ofer、P. Groszkowski、H.-K. Lau 和 A. Clerk，《用于增强量子传感的耗散型超辐射自旋放大器》，PRX Quantum 3, 030330 (2022)。[33] G. S. Agarwal，《自发辐射的主方程方法》，Physical Review A 2, 2038 (1970)。[34] N. Skribanowitz、I. P. Herman、J. C. MacGillivray 和 M. S. Feld，《光泵浦HF气体中迪克超辐射的观测》，Physical Review Letters 30, 309 (1973)。[35] J. Appel、P. J. Windpassinger、D. Oblak、U. B. Hoff，N. Kjærgaard 和 E. S. Polzik，《超越标准量子极限的精密测量用介观原子纠缠》，美国国家科学院院刊 106，10960（2009）。[36] D. J. Wineland、J. J. Bollinger、W. M. Itano、F. L. Moore 和 D. J. Heinzen，《光谱学中的自旋压缩与量子噪声降低》，Physical Review A 46，R6797（1992）。[37] D. J. Wineland、J. J. Bollinger、M. W. Itano 和 D. J. Heinzen，《光谱学中的压缩原子态与投影噪声》，Physical Review A 50，67（1994）。[38] M. A. Norcia、R. J. Lewis-Swan、J. R. K. Cline、B. Zhu、A. M. Rey 和 J. K. Thompson，《锶超辐射激光器中的腔介导集体自旋交换相互作用》，《科学》361，259（2018）。[39] G. S. Agarwal，《自发辐射的主方程方法》，Physical Review A 2, 2038（1970）。[40] R. L. Devaney，《可逆微分同胚与流》，Trans. Amer. Math. Soc. 218，89（1976）。[41] R. I. Bandara、A. Giraldo、N. G. R. Broderick 和 B. Krauskopf，《具有四次色散的非线性薛定谔方程中无限多个不同对称类型的多脉冲孤子》，Physical Review A 103，063514（2021）。¨odinger 方程中具有四次色散的无限多个不同对称类型的多脉冲孤子，Physical Review A 103，063514（2021）。[42] M. G¨artner、J. G. Bohnet、A. Safavi-Naini、M. L. Wall、J. J. Bollinger 和 A. M. Rey，《测量囚禁离子量子磁体中的非时序关联和多量子谱》，Nature Physics 13，781（2017）。[43] D. Linnemann、H. Strobel、W. Muessel、J. Schulz、R. J. Lewis-Swan、K. V. Kheruntsyan 和 M. K. Oberthaler，《基于非线性动力学时间反演的量子增强传感》，Physical Review Letters 117，013001（2016）。[44] S. Colombo、E. Pedrozo-Pe˜nafiel、A. F. Adiyatullin、Z. Li、E. Mendez、C. Shu 和 V. Vuleti´c，《基于时间反演的多体纠缠态量子计量学》，Nature Physics 18，925（2022）。[45] V. I. Arnol'd，*Ordinary Differential Equations*（Springer-Verlag，1992）。[46] P. Glendinning，*Stability，Instability and Chaos*（剑桥大学出版社，1994）。[47] H. J. Carmichael，*Statistical Methods in Quantum Optics II: Non-Classical Fields* 2008 (Springer，)。[48] H. J. Carmichael，*An Open Systems Approach to Quantum Optics* 1993 (Springer-Verlag，)。[49] M. E. Peskin 和 D. V. Schroeder，*An Introduction to Quantum Field Theory* 1995 (Westview Press，)。[50] K. J. Percus，《伊辛自旋晶格的关联不等式》，Commun. math. Phys. 40，283（1975）。[51] R. Kubo，《广义累积量展开法》，日本物理学会杂志 17，1100（1962）。[52] M. Kira 和 S. W. Koch，《量子光学中的簇展开表示》，Physical Review A 78，022102（2008）。[53] M. S´anchez-Barquilla、R. E. F. Silva 和 J. Feist，《用于处理任意材料结构中光-物质相互作用的累积量展开》，J. Chem. Phys. 152, 034108（2020）。[54] P. Kirton 和 J. Keeling，《驱动耗散迪克模型中的超辐射态与激射态》，New Journal of Physics 20, 015009（2018）。[55] J. Q. Quach、K. E. McGhee、L. Ganzer、D. M. Rouse、B. W. Lovett、E. M. Gauger、J. Keeling、G. Cerullo、D. G. Lidzey 和 T. Virgili，《有机微腔中的超吸收：迈向量子电池
，《科学进展》

8,eabk3160 (2022)。[56] D. Plankensteiner、C. Hotter 和 H. Ritsch，《Quantum- Cumulants.jl：用于开放量子系统广义平均场方程的 Julia 框架》，Quantum **6**, 617 2022()。[57] Y.-X. Huang、M. Li、K. Lin、Y.-L. Zhang、G.-C. Guo 和 C.-L. Zou，具有强光子-光子耦合的多模非线性系统中的经典-量子转变，

Physical Review A **105**, 043707 (2022)。[58] F. Mivehvar、F. Piazza、T. Donner 和 H. Ritsch，《量子气体的腔量子电动力学：多体物理的新范式》，Advances in Physics **70**, 1 (2021)。[59] M. H. Mu˜noz-Arias、I. H. Deutsch 和 P. M. Poggi，集体自旋量子计量学中的相空间几何与最优态制备 (2022)，arXiv:2211.01250 [quant-ph]。

补充材料：光-物质混合系统中色散超辐射脉冲的量子涨落动力学

Kevin C. Stitely, [1,2,3] Fabian Finger, [4] Rodrigo Rosa-Medina, [4] Francesco Ferri, [4]Tobias Donner, [4] Tilman Esslinger, [4] Scott Parkins, [1,3] 和 Bernd Krauskopf[1,2]

[1]*Dodd-Walls Centre for Photonic and Quantum Technologies, New Zealand*[2]*Department of Mathematics, University of Auckland, Auckland 1010, New Zealand*[3]*Department of Physics, University of Auckland, Auckland 1010, New Zealand*[4]*Institute for Quantum Electronics, ETH Zürich, 8093 Zürich, Switzerland*

arXiv:2302.08078v1 [quant-ph] 16 Feb 2023

半经典模型

回顾一下，我们研究的哈密顿量为

$$\hat{H} = -\frac{\xi\lambda^2}{N}\left(\frac{N^2}{4} - \hat{J}_z^2\right), \tag{1}$$

其主方程为

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H},\hat{\rho}] + \frac{\eta\lambda^2}{N}\left(2\hat{J}_-\hat{\rho}\hat{J}_+ - \hat{J}_+\hat{J}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{J}_+\hat{J}_-\right). \tag{2}$$

With

$$\beta = \frac{\langle\hat{J}_-\rangle}{N} \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{\langle\hat{J}_z\rangle}{N} \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

半经典近似认为，算符乘积的期望值可以因式分解，即 $\langle\, \hat{J}_j \hat{J}_k\rangle \approx \langle\, \hat{J}_j\rangle\langle\, \hat{J}_k\rangle$，$j,\ k \in \{x,y,z\}$。因此，对式（2）取迹，可得到关于 β和 γ的一组封闭常微分方程：

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(\hat{J}_-\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right) = \frac{d\beta}{dt} = 2(\eta - i\xi)\lambda^2\beta\gamma, \tag{5}$$

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(\hat{J}_z\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right) = \frac{d\gamma}{dt} = -2\eta\lambda^2\beta^*\beta. \tag{6}$$

这里，自旋守恒体现为 $|\beta|^2+\gamma^2$ 为常数，这使（β,γ）被限制在布洛赫球面上，并令动力学本质上成为二维的。该系统自然可用球坐标表示，

$$\beta = r\sin(\theta)e^{-i\phi}, \tag{7}$$

$$\gamma = r\cos(\theta), \tag{8}$$

半径为 $r \geq 0$、极角为 $\theta \in [0,\pi]$、方位角为 $\phi \in [0,2\pi)$，由此得到以下常微分方程组

$$\frac{d\theta}{dt} = \eta\lambda^2\sin(\theta), \tag{9}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \xi\lambda^2\cos(\theta), \tag{10}$$

用于描述角度 $\theta(t)$ 和 $\phi(t)$。由于自旋守恒， r 的方程已被消去，因为 $dr/dt = 0$；同时，我们取半径的最大值 $r = 1/2$。在这种表示中，系统的 $U(1)$ 对称性体现为在变换 $\mathcal{R}(\varphi)$：$\phi \mapsto \phi + \varphi$ 下保持不变。我们对方程（9）和（10）进行了数值积分，以计算图 2(a1)–(a3) 中布洛赫球上的半经典轨迹，以及正文图 2(b) 和图 3(a) 中的时间变化曲线。

从式（5）的虚部可以看出，依赖于反转的拉比频率 $\Omega = 2\xi\lambda^2\gamma$是单轴扭转动力学的特征；当 γ通过腔耗散衰减时，它会随时间变化。

累积量展开

在上述半经典近似中，忽略了量子涨落的影响，转而采用一组封闭的微分方程来描述平均场。换句话说，当原子数 N 足够大时，二阶累积量 $\langle \hat{J}_j \hat{J}_k \rangle_c, j,k \in \{x,y,z\}$ 会趋于零。

一般而 地，算符 { 在 n 阶的累积量 $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_n\}$ 可写为 [1, 2]

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} \hat{A}_i \right\rangle_c = \sum_{p\in\mathcal{P}} (|p|-1)!(-1)^{|p|-1} \prod_{B\in p}^{|p|} \left\langle \prod_{m\in B}^{|B|} \hat{A}_m \right\rangle, \tag{11}$$

其中 $\mathcal{P}$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有划分的集合， $|p|$ 是划分 p的长度，而 B 是该划分的一个块。例如， $\{\{1,2\},3\}$ 是 $\{1,2,3\}$的一个划分，其中 $\{1,2\}$ 和 $\{3\}$ 是该划分的块，且该划分的长度为二（即块的数量）。对于 式（11），可化为 $n=2$ 的协方差；而对于 $n=3$，则得到正文中的式（7）。重要的是， n 阶累积量仅取决于 n 阶及以下的矩。

二阶累积量展开模型

任意算符 $\hat{}$ 的运动方程A 在主方程（2）的演化下形式如下

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A} \rangle = \frac{i\xi\lambda^2}{N} \langle [\hat{A}, \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2] \rangle + \frac{\eta\lambda^2}{N} \left(\langle [\hat{J}_+, \hat{A}] \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_+ [\hat{A}, \hat{J}_-] \rangle \right). \tag{12}$$

取 $\hat{A} = \hat{J}_j$作为 $j \in \{x,y,z\}$， 一阶矩的方程为

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_x \rangle = \frac{\xi\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_y \hat{J}_z \rangle + \langle \hat{J}_z \hat{J}_y \rangle \right) + \frac{\eta\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_z \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_+ \hat{J}_z \rangle \right), \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_y \rangle = \frac{\xi\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_z \hat{J}_x \rangle + \langle \hat{J}_x \hat{J}_z \rangle \right) + \frac{\eta\lambda^2}{N} \left(i\langle \hat{J}_z \hat{J}_- \rangle - i\langle \hat{J}_+ \hat{J}_z \rangle \right), \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_z \rangle = -\frac{\eta\lambda^2}{N} \left(i\langle \hat{J}_y \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_x \hat{J}_- \rangle - i\langle \hat{J}_+ \hat{J}_y \rangle + \langle \hat{J}_+ \hat{J}_x \rangle \right). \tag{15}$$

二阶矩（$\hat{A} = \hat{J}_j \hat{J}_k$, $j,k \in \{x,y,z\}$）的方程为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_x^2 \rangle = & -\frac{\xi\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_x \hat{J}_z \hat{J}_y \rangle + \langle \hat{J}_z \hat{J}_x \hat{J}_y \rangle + \langle \hat{J}_y \hat{J}_x \hat{J}_z \rangle + \langle \hat{J}_y \hat{J}_z \hat{J}_x \rangle \right) \\
& + \frac{\eta\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_z \hat{J}_x \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_x \hat{J}_z \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_+ \hat{J}_z \hat{J}_x \rangle + \langle \hat{J}_+ \hat{J}_x \hat{J}_z \rangle \right),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_x \hat{J}_y \rangle = & \frac{\xi\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_x \hat{J}_z \hat{J}_x \rangle + \langle \hat{J}_x^2 \hat{J}_z \rangle - \langle \hat{J}_z \hat{J}_y^2 \rangle - \langle \hat{J}_y \hat{J}_z \hat{J}_y \rangle \right) \\
& + \frac{\eta\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_z \hat{J}_y \hat{J}_- \rangle + i\langle \hat{J}_x \hat{J}_z \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_+ \hat{J}_z \hat{J}_y \rangle - i\langle \hat{J}_+ \hat{J}_x \hat{J}_z \rangle \right),
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_x \hat{J}_z \rangle = & \frac{\xi\lambda^2}{N} \left(-\langle \hat{J}_x \hat{J}_y \hat{J}_x \rangle - \langle \hat{J}_z^2 \hat{J}_y \rangle + \langle \hat{J}_y \hat{J}_x^2 \rangle - \langle \hat{J}_y \hat{J}_z^2 \rangle \right) \\
& + \frac{\eta\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_z^2 \hat{J}_- \rangle - i\langle \hat{J}_x \hat{J}_y \hat{J}_- \rangle - \langle \hat{J}_x^2 \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_+ \hat{J}_z^2 \rangle + i\langle \hat{J}_+ \hat{J}_x \hat{J}_y \rangle - \langle \hat{J}_+ \hat{J}_x^2 \rangle \right),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_y^2 \rangle = & \frac{\xi\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_x \hat{J}_z \hat{J}_y \rangle + \langle \hat{J}_z \hat{J}_x \hat{J}_y \rangle + \langle \hat{J}_y \hat{J}_x \hat{J}_z \rangle + \langle \hat{J}_y \hat{J}_z \hat{J}_x \rangle \right) \\
& + \frac{\eta\lambda^2}{N} \left(i\langle \hat{J}_z \hat{J}_y \hat{J}_- \rangle + i\langle \hat{J}_y \hat{J}_z \hat{J}_- \rangle - i\langle \hat{J}_+ \hat{J}_z \hat{J}_y \rangle - i\langle \hat{J}_+ \hat{J}_y \hat{J}_z \rangle \right),
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_y \hat{J}_z \rangle = \frac{\xi\lambda^2}{N} \left(\langle \hat{J}_z^2 \hat{J}_x \rangle - \langle \hat{J}_x \hat{J}_y^2 \rangle + \langle \hat{J}_x \hat{J}_z^2 \rangle + \langle \hat{J}_y \hat{J}_x \hat{J}_y \rangle \right)$$

$$+\frac{\eta\lambda^2}{N}\Big(i\langle\hat{J}_z^2\hat{J}_-\rangle - i\langle\hat{J}_y^2\hat{J}_-\rangle - \langle\hat{J}_y\hat{J}_x\hat{J}_-\rangle - i\langle\hat{J}_+\hat{J}_z^2\rangle + i\langle\hat{J}_+\hat{J}_y^2\rangle - \langle\hat{J}_+\hat{J}_y\hat{J}_x\rangle\Big), \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{J}_z^2\rangle = \frac{\eta\lambda^2}{N}\Big(-i\langle\hat{J}_y\hat{J}_z\hat{J}_-\rangle - \langle\hat{J}_x\hat{J}_z\hat{J}_-\rangle - i\langle\hat{J}_z\hat{J}_y\hat{J}_-\rangle - \langle\hat{J}_z\hat{J}_x\hat{J}_-\rangle \tag{21}$$

$$+i\langle\hat{J}_+\hat{J}_y\hat{J}_z\rangle - \langle\hat{J}_+\hat{J}_x\hat{J}_z\rangle + i\langle\hat{J}_+\hat{J}_z\hat{J}_y\rangle - \langle\hat{J}_+\hat{J}_z\hat{J}_x\rangle\Big). \tag{22}$$

截断至三阶时，$\langle \hat{J}_j\hat{J}_k\hat{J}_\ell\rangle_c = 0$，三阶矩可表示为一阶矩和二阶矩的形式，

$$\langle\hat{J}_j\hat{J}_k\hat{J}_\ell\rangle \approx 2\langle\hat{J}_j\rangle\langle\hat{J}_k\rangle\langle\hat{J}_\ell\rangle - \langle\hat{J}_j\rangle\langle\hat{J}_k\hat{J}_\ell\rangle - \langle\hat{J}_k\rangle\langle\hat{J}_j\hat{J}_\ell\rangle - \langle\hat{J}_\ell\rangle\langle\hat{J}_j\hat{J}_k\rangle. \tag{23}$$

这就构成了系统（13）–（22），该系统用于计算主文图 3(a) 中二阶累积量展开（高斯近似）里的 $\langle\hat{J}_x(t)\rangle$。

n阶总关联度

在自旋算符 $\{\hat{J}_x、\hat{J}_y、\hat{J}_z\}$ 之间，用于衡量三阶总体关联水平的 $\mathcal{C}_3$ 可以推广到任意阶的关联，并可用于量化超越 $n=3$ 的关联。对于一组包含 r 个不同算符 $\{\hat{A}_1、\hat{A}_2、\cdots、\hat{A}_r\}$，其重数分别为 $k_1、k_2$ 等的算符，在 n 阶时的总关联度为

$$\mathcal{C}_n(t) = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\cdots\sum_{k_r}\left|n!\left\langle\mathcal{S}\prod_{i=1}^{r}\hat{A}_i^{k_i}\right\rangle_c\right|,\ \text{where}\ \sum_{i=1}^{r}k_i = n. \tag{24}$$

此处，$\mathcal{S}$ 是对称化（超）算符

$$\mathcal{S} = \frac{1}{n!}\sum_{\pi}\hat{\mathscr{P}}_\pi, \tag{25}$$

其中，$\mathscr{P}_\pi$ 是置换 π 对应的置换（超）算符，其作用为

$$\hat{\mathscr{P}}_\pi(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_n) = \hat{A}_{\pi(1)}\hat{A}_{\pi(2)}\cdots\hat{A}_{\pi(n)}. \tag{26}$$

HUSIMI 自旋 Q 函数

我们所用的自旋 Q-函数的定义与玻色场的 Husimi Q-函数类似，即对相干态空间取密度矩阵的迹。这里，与之对应的基态为自旋相干态 [3]

$$|\theta,\phi\rangle = |\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{(1+|\zeta|^2)^N}}\sum_{p=0}^{N}\sqrt{\frac{N!}{p!(N-p)!}}\,\zeta^p\,|J,J-p\rangle, \tag{27}$$

其中 $\zeta = \tan(\theta/2)e^{i\phi}\in\mathbb{C}$ 和 $|J,J-p\rangle$ 是 Dicke 态（$\hat{J}_z$ 的本征态），且 $J=N/2$。因此，自旋 Q-函数为

$$Q(t,\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|\hat{\rho}(t)|\theta,\phi\rangle. \tag{28}$$

这使我们能够通过单独计算密度算符 $\hat{\rho}(t)$，对图 1、2、3 和 5 中的量子态进行可视化。

淬火方案的详细信息

我们的淬火方案是在斜坡时间 T_{ramp} 内，从具有 $\omega=\omega_{\max}$ and$\lambda=\lambda_{\max}$ 的超辐射脉冲色散阶段，过渡到具有 $\omega=\omega_{\min}$ and $\lambda=\lambda_{\min}$ 的耗散阶段的分段线性斜坡；斜坡在时间T_{pulse}结束，此时脉冲的平均自旋方向接近布洛赫球赤道。

形式上，该方案表示为

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_{\min}, & \text{if } t < T_{\text{pulse}} - T_{\text{ramp}}, \\ \omega_{\max} + \dfrac{(\omega_{\min} - \omega_{\max})t}{T_{\text{ramp}}} - \dfrac{(T_{\text{pulse}} - T_{\text{ramp}})(\omega_{\min} - \omega_{\max})}{T_{\text{ramp}}}, & \text{if } T_{\text{pulse}} - T_{\text{ramp}} \le t \le T_{\text{pulse}}, \\ \omega_{\min}, & \text{if } t > T_{\text{pulse}}, \end{cases} \tag{29}$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_{\max}, & \text{if } t < T_{\text{pulse}} - T_{\text{ramp}}, \\ \lambda_{\max} + \dfrac{(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})t}{T_{\text{ramp}}} - \dfrac{(T_{\text{pulse}} - T_{\text{ramp}})(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}{T_{\text{ramp}}}, & \text{if } T_{\text{pulse}} - T_{\text{ramp}} \le t \le T_{\text{pulse}}, \\ \lambda_{\min}, & \text{if } t > T_{\text{pulse}}. \end{cases} \tag{30}$$

如图 5(a) 的插图所示，该方法用于计算三阶累积量，从而得到$C_3(t)$。

[1] R. Kubo，广义累积量展开法，日本物理学会杂志**17**，1100（1962）。[2] D. Plankensteiner、C. Hotter 和 H. Ritsch，QuantumCumulants.jl：用于开放量子系统中广义平均场方程的 Julia 框架，Quantum**6**，617（2022）。[3] J. M. Radcliffe，相干自旋态的一些性质，《物理学杂志A：普通物理学》**4**，313（1971）。