arXiv:2302.08109v1 [math.RT] 16 Feb 2023

关于诱导模成为支撑 τ-倾斜模的刻画 *†

Ryotaro KOSHIO YutaKOZAKAI 2023
年2月17日

摘要

设 $\tilde{G}$ 为一个有限群，G 为 $\tilde{G}$ 的一个正规子群。本文给出了 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$ 成为 kG-模 M 的支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模的充要条件。此外，我们还给出了该结果的块版本。

1 引言

支撑 τ-倾斜模由 [2] 引入，在有限维代数的表示论中发挥着重要作用。事实上，它们对应于各种表示论对象，例如二项酝酿复形、函子有限挠类、左有限半砖、二项单纯心集合等（见 [2, 4, 5, 6]）。

另一方面，群代数上 support τ-tilting 模的分类与刻画，是解决 Brou´e 阿贝尔缺陷群猜想的有用工具。事实上，如上所述，support τ-tilting 模与二项静倾复形及简单心集合一一对应。此外，群代数（或有限群的块）上的二项静倾复形与二项倾斜复形相一致，而简单心集合对 Okuyama 方法至关重要，这对于考察该猜想非常重要（见 [12, 13]）。

因此，作者们给出了在群代数或有限群的块˜上获得 support τ-tilting 模的方法 [7, 8, 9]。这些情形下采用的方法是利用诱导函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} := k\tilde{G} \otimes_{kG} \bullet$，从 support τ-tilting kG-模得到 support τ-tilting $k\tilde{G}$-模_，其中 G 是有限群 $\tilde{G}$的正规˜子群。自然地，以下问题随之产生：

˜问题 1.1. 哪些 kG-模会被诱导函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$映为支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模_?

换言之，我们有兴趣弄清楚集合

$$(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}})^{-1}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G}) := \left\{ M \in kG\text{-mod} \;\middle|\; \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M \in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G} \right\} / =_{\mathrm{add}},$$

此处，$M =_{\mathrm{add}} M'$表示对 $M, M' \in kG$-mod 取 add $M =$add M'，这在kG-mod 上定义了一个等价关系。在 [7, 8, 9], 某些假设下，集合 $(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}})^{-1}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\ k\tilde{G})$ 的一些子集已有描述，但该集合从未得到完整阐明。本文针对任意˜有限群 G 及其正规子群 G，给出这一问题的完整答案。

˜定理 1.2. 设 G 是有限群 G 的正规子群。对于一个 kG-模 M，诱导模_$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$ 是支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模，当且仅当 M 是一个 τ-刚性 kG-模，且 $\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M$˜ 是支撑 τ-倾斜 kG-模，也就是说，满足

$$(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}})^{-1}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G}) = \left\{ M \in \tau\text{-rigid}\, kG \;\middle|\; \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M \in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, kG \right\}.$$

*Mathematics Subject Classification（2020年）。20C20，16G10。
†Keywords. 支撑 τ-倾斜模、有限群的块、诱导函子

一个自然的问题是，我们想知道对于群代数，能否得到上述定理的块版本。也就是说，我们想要厘清集合

$$(\tilde{B}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}})^{-1}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\tilde{B}) := \left\{ M \in B\text{-mod} \;\middle|\; \tilde{B}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M \in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\tilde{B} \right\} / =_{\mathrm{add}}.$$

因此，我们得到了该定理的块版本。

定理 1.3. 设 G 是有限群 G的正规子群， B 是 kG 的一个块， B 是 kG的一个覆盖 B的块。对于一个 B-模 M，模 $\tilde{B}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M$是支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模，当且仅当 M是一个 τ-刚性 B-模，且 $\bigoplus_{\tilde{g}\in[I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M$是支撑 τ-倾斜 B-模，也就是说，满足

$$(\tilde{B}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}})^{-1}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\tilde{B}) = \left\{ M \in \tau\text{-rigid}\,B \;\middle|\; \bigoplus_{\tilde{g}\in[I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M \in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,B \right\},$$

其中 $I_{\tilde{G}}(B)$ 是 G中 B 的惯性群。

本文中，我们使用以下记号和术语。模均指左模。符号 k 表示一个特征为 $p>0$的代数闭域。设 Λ 是一个有限维代数。对于一个 Λ-模 M，我们用 τM表示 M的 Auslander-Reiten 平移，用 add M表示 Λ-模范畴 Λ-mod 的全子范畴，其对象是 M的有限个直和项的直和。对于 Λ-模 M和 M'，若 add M =包含于 add M'，则记作 $M =_{\mathrm{add}} M'$。这是一个等价关系，我们称之为加性等价关系。我们用 sτ-tilt Λ 表示支撑 τ-倾斜 Λ-模按加性等价关系划分所得的等价类集合，用 τ-rigid Λ 表示 τ-刚性 Λ-模的相应集合。设 G 是一个有限群， G 是 G的一个正规子群。我们将 (G/G) 的一个代表元集合记为 $[G/G]$。对于一个 kG-模 M 及 $\tilde{g}\in G$，我们定义一个 kG-模 $\tilde{g}M$，其元素为符号 $\tilde{g}m$ 组成的集合，其中 $m\in M$；其 kG-模结构定义为 $\tilde{g}m+\tilde{g}m' := \tilde{g}(m+m')$， $\lambda(\tilde{g}m) = \tilde{g}(\lambda m)$ 以及 $g(\tilde{g}m) := \tilde{g}(\tilde{g}^{-1}g\tilde{g}m)$，其中 m、$m'\in M$、$g\in G$和 $\lambda\in k$。若对任意 $\tilde{g}\in\tilde{G}$， M 同构于 $\tilde{g}M$，则称 kG-模 M是 G-不变的。对于 kG的一个块 B，我们将 B在 G中的惯性群记为 $I_{\tilde{G}}(B) := \left\{ \tilde{g}\in\tilde{G} \;\middle|\; \tilde{g}B\tilde{g}^{-1} = B \right\}$。

2 定理的证明

现在我们给出定理1.2的证明。

定理 *1.2* 的证明。 设 M是一个 kG-模，满足 $\operatorname{Ind}_G^G M$是一个支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模。由 Mackey 分解公式（参见 $\frac{G}{G}$ 引理$\operatorname{Res}_G^G \operatorname{Ind}_G^G M \cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M$ 8.7 [3,），可得 Res Ind]。此外，$\operatorname{Ind}_G^G M$ 是相对 G-投射的，并且满足

$$\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}}\operatorname{Res}_G^{\tilde{G}}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M \cong \operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}}\Big(\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M\Big) =_{\mathrm{add}} \operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M.$$

因此，根据 [10, 定理 1.2.]，限制模 $\operatorname{Res}_G^G \operatorname{Ind}_G^G M$是一个支撑 τ-倾斜 kG-模。特别地，模 M 是支撑 τ-倾斜 kG-模 $\operatorname{Res}_G^G \operatorname{Ind}_G^G M \cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M$的一个直和项。因此， M这个 kG-模是一个 τ-刚性 kG-模，且 $\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M$是一个支撑 τ-倾斜 kG-模。

另一方面，设 M 是一个 τ-刚性 kG-模，且 $\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M$ 是一个支撑 τ-倾斜 kG-模。再次根据 Mackey 分解公式，$\operatorname{Res}_G^G \operatorname{Ind}_G^G M \cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M$ 是一个支撑 τ-倾斜 kG-模，并且显然是一个 $\tilde{G}$-不变 kG-模。因此，根据 [7, 定理 3.2.]，诱导模 $\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}}\operatorname{Res}_G^{\tilde{G}}\operatorname{Ind}_G^G M$ 是一个支撑 τ-倾斜 kG-模。此外，有

$$\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M =_{\mathrm{add}} \operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}}\Big(\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M\Big) =_{\mathrm{add}} \operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}}\operatorname{Res}_G^{\tilde{G}}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M.$$

因此，$\operatorname{Ind}_G^G M$ 是一个支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模。 □

设 Λ 是一个有限维代数。对于 Λ-模 M 和 M'，记 $M \leq_{\mathrm{add}} M'$ 当加性闭包 M 包含于加性闭包 M' 时成立。这个关系显然具有自反性和传递性。此外，若 $M \leq_{\mathrm{add}} M'$ 且 $M' \leq_{\mathrm{add}} M$，则 $M =_{\mathrm{add}} M'$ 对任意 Λ-模 M 和 M' 均成立。我们给出定理 1.3 的证明。

定理 1.3 的证明。 设 M 是一个 B-模，满足 $\tilde{B}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M$ 是一个支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模，且 β 块 $kI_{\tilde{G}}(B)$ 满足

$$1_{\tilde{B}} = \sum_{x \in [\tilde{G}/I_{\tilde{G}}(B)]} x 1_\beta x^{-1},$$

其中 $1_{\tilde{B}}$ 和 1_β 分别表示 B 和 β 的单位元。由 [10, 命题 4.7.], 可得 $\tilde{B}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M \cong \operatorname{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}} \beta \operatorname{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad M$。由于函子

$$\begin{aligned} \beta\text{-mod} &\longrightarrow \tilde{B}\text{-mod} \\ X &\longmapsto \operatorname{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}} X \end{aligned}$$

通过 [11, 定理 5.12.], 给出了 Morita 等价，β-模 $\beta\operatorname{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad M$ 是一个支撑 τ-倾斜 β-模。此外，由 [10, 命题 4.3.(1)], 可知，限制模 $\operatorname{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad \beta\operatorname{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad M$ 有一个与 M 同构的直和项。由于限制模 $\operatorname{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad \beta\operatorname{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad M$ 在 [10, 引理 2.5.], 下是 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变的，因此我们得到

$$\bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M \leq_{\mathrm{add}} \operatorname{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \beta \operatorname{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} M \leq_{\mathrm{add}} \operatorname{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \operatorname{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} M \cong \bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M.$$

因此，我们得出

$$\operatorname{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \beta \operatorname{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} M =_{\mathrm{add}} \bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M.$$

此外，有

$$\beta \operatorname{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \operatorname{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \beta \operatorname{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} M =_{\mathrm{add}} \beta \operatorname{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M =_{\mathrm{add}} \beta \operatorname{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} M.$$

因此，限制模 $\operatorname{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad \beta\operatorname{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \quad M$ 与 $\bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M$ 加性等价，根据 [10, 定理 5.1.], 是支撑 τ-倾斜 B-模。此外，由于 M 是支撑 τ-倾斜 B-模 $\bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M$ 的直和项，我们得到 B-模 M 是 τ-刚性的。

另一方面，设 M 是一个 τ-刚性 B-模，使得 $\bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M$ 是支撑 τ-倾斜 kG-模。由于 $\bigoplus_{\tilde{g} \in [\tilde{G}/G]} \tilde{g}M$ 这个 B-模是 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变的，根据 [7, 主定理 1.1.], 我们得到 $\tilde{B}\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M$ 与 $\tilde{B}(\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}}(\bigoplus_{\tilde{g} \in [I_{\tilde{G}}(B)/G]} \tilde{g}M))$ 加性等价，且是支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模。 □

从现在起，我们采用以下记号：设 Λ 是一个有限维代数，S 和 T 是简单 Λ-模。我们用 $\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$ 表示一个不可分解的 Λ-模 M，其合成长度为 2，$\operatorname{rad} M \cong T$，且 $M/\operatorname{rad} M \cong S$。我们指出，当 $\dim \operatorname{Ext}^1_\Lambda(S,T) = 1$ 时，这样的 M 在同构意义下唯一。

例 2.1. 设 k 是特征为 $p = 2$ 的代数闭域，G 是 4 次交错群，G 是 4 次对称群。此外，设 S 和 T 是彼此不同构的简单 kG-模，且均不同构于平凡的 kG-模；S_2 是一个 2 维简单 kG-模。众所周知，对于任意 $\sigma \in G \setminus G$，σS 同构于 T，且 σT 同构于 S。在此设定下，$M := k_G \oplus \begin{bmatrix} k_G \\ S \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} k_G \\ T \end{bmatrix}$ 是一个 $\tilde{G}$-不变的支撑 τ-倾斜 kG-模。因此，根据 [7, 主定理 1]，$\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} M$ 是一个支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模。此外，设 $N_1 := k_G \oplus \begin{bmatrix} k_G \\ S \end{bmatrix}$ 且 $N_2 := k_G \oplus \begin{bmatrix} k_G \\ T \end{bmatrix}$。

˜则 N_1 和 N_2 是支撑 τ-倾斜 kG-模，但不是 G-不变的（因此我们无法应用[7, 主定理 1]）。然而，有 $\bigoplus_{\sigma\in[\tilde{G}/G]}\sigma N_i =_{\mathrm{add}} M$，实际上 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} N_i$ 是一个支撑˜τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模，其中 $i=1,\ 2$.

˜注 2.2。 根据定理 1.2，集合 $(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}})^{-1}(\mathrm{s}\tau$-倾斜 $k\tilde{G}$等于以下集合：

$$\left\{ M\in\tau\text{-rigid}\,kG \;\middle|\; \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]}\tilde{g}M\in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,kG \right\}. \tag{2.1}$$

作为一个自然的问题，我们想知道集合 (2.1是否与以下集合相同：

$$\left\{ M\in\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,kG \;\middle|\; \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]}\tilde{g}M\in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,kG \right\}. \tag{2.2}$$

集合 (2.2) 显然包含于集合 (2.1) 中，但这两个集合通常并不相同。事实上，在与例 2.1 相同的情形下，令 $M:=\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$。那么通过计算可知， M 是一个 τ-刚性 kG-模，并且 $\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]}\tilde{g}M$ 是一个支撑 τ-倾斜 kG-模，但 M 不是一个支撑 τ-倾斜kG-模（见 [1, 命题 1.8]）。另一方面， M 的诱导模 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M$ 是一个支撑˜τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模。因此， M 是集合 (2.1) 的元素，但不是集合 (2.2) 的元素。此外，由于 kG 的˜主块分别就是其自身，以下两个集合通常也不相同：

$$\left\{ M\in\tau\text{-rigid}\,B \;\middle|\; \bigoplus_{\tilde{g}\in[I_{\tilde{G}}(B)/G]}\tilde{g}M\in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,B \right\}, \tag{2.3}$$

$$\left\{ M\in\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,B \;\middle|\; \bigoplus_{\tilde{g}\in[I_{\tilde{G}}(B)/G]}\tilde{g}M\in \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,B \right\}. \tag{2.4}$$

参考文献

[1] T. Adachi. 关于 τ-倾斜模在中山代数上的分类。《代数杂志》，第452卷，页码227–262，2016年。DOI 10.1016/j.jalgebra.2015.12.013。

[2] T. Adachi、O. Iyama 和 I. Reiten。 τ-倾斜理论。《组合数学杂志》，150(3)，页码415–452，2014年。DOI 10.1112/S0010437X13007422。

[3] J. L. Alperin。局部表示论，收入第11卷《剑桥高等数学研究丛书》。剑桥大学出版社，剑桥，1986年。DOI 10.1017/CBO9780511623592。

[4]S. Asai。半砖。《国际数学研究通报》，2020(16)，页码4993–5054，2018年。DOI10.1093/imrn/rny150。

[5] T. Br¨ustle 和 D. Yang。《有序交换图》。载于《代数表示论进展》，EMS Ser. Congr. Rep.，第135–193页。Eur. Math. Soc.，Z¨urich，2013年。

[6] S. Koenig 和 D. Yang。有限维代数的倾斜对象、简单心集合、 t-结构与余-t-结构。Doc. Math.，第19卷，第403–438页，2014年。

[7] R. Koshio。关于有限群的块上的惯性不变支撑 τ-倾斜模。SUT数学杂志，58(2)，第157–171页，2022年。DOI 10.55937/sut/1670501315。

[8] R. Koshio 和 Y. Kozakai. 有限群的块上半砖的支撑 τ-倾斜模与扩张模，2021年。DOI 10.48550/ARXIV.2112.08897。

[9] R. Koshio 和 Y. Kozakai. 关于覆盖循环块的块上的支撑 τ-倾斜模。《代数杂志》，第580卷，第84–103页，2021年。DOI 10.1016/j.jalgebra.2021.03.021。[10] R. Koshio 和 Y. Kozakai. 正规子群与支撑 τ-倾斜模，2023年。DOI10.48550/ARXIV.2301.04963。[11] H. Nagao 和 Y. Tsushima. 有限群表示。Academic Press, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1989年。[12] T. Okuyama. 有限群的导出等价块的一些例子。预印本，1997年。[13] J. Rickard. 对称代数的导出范畴等价。《代数杂志》，第257卷第2期，第460–481页，2002年。DOI 10.1016/S0021-8693(02)00520-3。

Ryotaro KOSHIODepartment of Mathematics,
Tokyo University of Science1-3，神乐坂，新宿区，东京，
162-8601，日本 电子邮箱：1120702@ed.tus.ac.jpYuta
KOZAKAIDepartment of Mathematics,
Tokyo University of Science1-3，神乐坂，新宿区，东京，
162-8601，日本 电子邮箱：kozakai@rs.tus.ac.jp