arXiv:2302.08129v2 [math.FA] 1 Jul 2024

无带限条件下从样本唯一恢复小波符号

RIMA ALAIFARI、FRANCESCA BARTOLUCCI 和 MATTHIAS WELLERSHOFF

摘要。我们研究了当分析小波为实值时，根据信号的小波框架系数的幅值恢复信号的问题。我们证明，对于每个实值信号，都可以根据其多小波框架系数唯一恢复该信号，且恢复结果至多相差一个全局符号

$$\{|\mathcal{W}_{\phi_i} f(\alpha^m \beta n, \alpha^m)| : i \in \{1,2,3\}, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

对于每个 $\alpha > 1$，$\beta > 0$ 满足 $\beta \ln(\alpha) \leq 4\pi/(1+4p)$、$p > 0$ 的情形，只要三个小波 ϕ_i 是 P_p 阶泊松小波及其希尔伯特变换的适当线性组合。对于复值信号，我们发现，对于参数 $\alpha > 1$，$\beta > 0$ 的任何取值以及任意窗函数，这都是不可能的。不同于现有关于小波符号恢复的文献，我们的唯一性结果不要求对实值信号施加任何带限约束或其他先验知识，即可保证根据其小波系数的绝对值唯一恢复这些信号。

1. 引言

小波相位恢复是指从函数 f 的尺度图（即其小波变换的绝对值）重建平方可积函数的逆问题：

$$\mathcal{W}_\phi f(b,a) := a^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)} \, \mathrm{d}x, \qquad b \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+.$$

小波变换源于旨在开发新型分析和处理工具、以推动信号理论发展的研究活动，并已被证明在去噪和压缩等各种应用中极为有效。关于小波分析的全面综述，请参阅 [7, 13, 15] 。然而，目前对于如何从函数的小波变换绝对值重建该函数这一问题，了解仍然有限。这一逆问题出现在音频分析与处理中，近年来日益受到关注 [2, 11, 14, 16, 19]。

更准确地说，小波相位恢复旨在确定对于哪些分析小波 ϕ，以及集合 $\Lambda \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 和子空间 $\mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{R})$的哪些选择，前向算子

$$\mathcal{A}_\phi : \mathcal{M}/\sim \to [0,+\infty)^\Lambda, \qquad \mathcal{A}_\phi(f)(b,a) := |\mathcal{W}_\phi f(b,a)|, \quad (b,a) \in \Lambda, \tag{1.1}$$

日期：2024年7月3日。2020 数学学科分类。主要分类：42C40、42C15、30H20、94A12、94A20；次要分类：45Q05。关键词与短语。相位恢复、小波变换、柯西小波、泊松小波、加权 Bergman 空间、小波框架、采样定理。作者获得了瑞士国家科学基金会（SNSF）项目 200021 184698 的部分资助。

是单射，其中 $f \sim g$ 当且仅当对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}$， $f = \mathrm{e}^{i\alpha} g$。下文中，我们区分连续小波相位恢复（即当 Λ 的基数为连续统时，从 $\mathcal{A}_\phi(f)$恢复f （相差一个全局相位））与采样小波相位恢复（即当 Λ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$的一个离散子集时，从 $\mathcal{A}_\phi$ 恢复 f （相差一个全局相位））。

我们强调，本文讨论的是实值分析小波，并指出只要 ϕ 为实值，该映射

$$L^2(\mathbb{R})/\sim \ni f \mapsto (|\mathcal{W}_\phi f(b,a)|)_{(b,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$$

就不是单射。为此，我们考虑一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$，其 $\mathrm{Re}\, f \not\equiv 0$ 且 $\mathrm{Im}\ f \not\equiv 0$。那么，函数 f 和 $g = \mathrm{Re}\ f - i\mathrm{Im}\ f$ 不存在全局常相位使二者相等，即 $f \not\sim g$，但满足

$$|\mathcal{W}_\phi f(b,a)| = |\mathcal{W}_\phi g(b,a)|, \quad (b,a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

因此，当分析小波为实值时，我们不能期望在 $L^2(\mathbb{R})/\sim$ 中得到唯一性结果，而将限制在实值平方可积函数空间 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R})/\sim$ 是最优的。在后一种情况下，$f \sim g$ 当且仅当 $f = \pm g$，我们将这一问题称为小波符号恢复。

1.1. 前人工作：带限条件下的采样小波符号恢复。 现有关于采样小波符号恢复的文献中，唯一性结果都要求分析小波或信号是带限的。在 [2] 中，作者证明，每个在无穷远处指数衰减的实值函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$，都可由其小波系数唯一确定（至多相差一个全局符号）

$$\{|\mathcal{W}_\phi f(2^{-m}\beta n, 2^{-m})| : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$$

前提是 ϕ 为实值带限小波，且 $\beta > 0$ 是由 ϕ的带宽明确确定的采样参数。实值带限小波的例子包括 Meyer小波和 Shannon小波。

随后，在我们近期的论文 [1], 中，我们证明，对于任意选取的采样参数 $\alpha > 1$、 $\beta > 0$，以及任意具有有限个消失矩的 小波 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$[1], ，所有实值带限函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$都可由这些测量值唯一确定（至多相差一个全局符号）

$$\{|\mathcal{W}_\phi f(\alpha^{-m}\beta n, \alpha^{-m})| : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

这一唯一性结果可以重新表述为算子 $\mathcal{A}_\phi$的单射性，参见（1.1），其中取

$$\mathcal{M} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \widehat{f} \ \text{ is compact}\} \qquad \text{and} \qquad \Lambda = \alpha^{-\mathbb{N}}(\beta\mathbb{Z} \times \{1\}),$$

只要 ϕ 具有有限个消失矩。具有有限个消失矩的实值（非带限）小波的例子包括泊松小波和 n^{th} Hermite小波，即高斯函数的 n^{th} 阶导数，其中每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$均成立。特别地， $n = 2$ 对应于墨西哥帽小波。

[1]如果存在一个 $\ell \in \mathbb{N}$，使得

$$\lim_{\xi\to 0} \xi^{-\ell}\widehat{\phi}(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

1.2. **我们的贡献：无需带限的小波符号恢复**。上述结果总是对未知信号或分析小波作出带限假设。不同于以往工作，本文的结果保证：无需带限约束或关于信号的其他先验知识，即可根据其小波变换的绝对值唯一恢复实值信号。迄今为止，关于从 $\mathcal{M} = L^2$（$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$）的采样中进行符号恢复的唯一性结果仍然缺失，而本文提出，当采用三个小波而非单个小波时，可以建立一个正面的唯一性结果。

我们首先证明定理 3.1，该定理保证了 $\mathcal{A}_\phi$ 的单射性：若 Λ 是上半平面中的一个正测度子集，且 ϕ 满足 $\operatorname{Ran} \mathcal{W}_\phi \subseteq \mathscr{A}(\mathbb{C}^+)$，其中 $\mathscr{A}(\mathbb{C}^+)$ 表示上半平面上实解析函数的空间。我们的定理适用于泊松小波，这是一种经典的实值小波，见第 1 章第 7| 节。

然而，定理 3.1 不适用于更具挑战性的情形，即 Λ 是一个离散集。我们通过多小波方法在定理 3.3 中处理这一问题。上半平面中的双曲格 是一个可数离散集，其形式为

$$\Lambda(\beta, \alpha) := \{(\alpha^m \beta n, \alpha^m)\}_{m,n \in \mathbb{Z}},$$

其中 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 0$，例子见图1。定理 3.3 表明，多小波框架系数的模

$$\{|\mathcal{W}_{\phi_i} f(b, a)| : i \in \{1, 2, 3\}, (b, a) \in \Lambda(\beta, \alpha)\} \tag{1.2}$$

唯一确定 f，但相差一个全局符号；前提是解析窗函数 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 是泊松小波的适当线性组合，该小波在傅里叶域中定义为

$$\widehat{P}_p(\xi) := (2\pi)^{p+1/2} |\xi|^p e^{-2\pi|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad p > 0,$$

及其希尔伯特变换 $\mathscr{H} P_p$，并且 Λ 是满足 $\beta \ln(\alpha) \leq 4\pi/(1 + 4p)$ 的双曲格。例如，我们可以选择 $\phi_1 = P_p$、$\phi_2 = \mathscr{H} P_p$ 和 $\phi_3 = P_p + \mathscr{H} P_p$。

根据命题 2.4，集合

$$\{T_b D_a P_p\}_{(b,a) \in \Lambda(\beta,\alpha)} \cup \{T_b D_a \mathscr{H} P_p\}_{(b,a) \in \Lambda(\beta,\alpha)} \tag{1.3}$$

当且仅当 $\beta \ln(\alpha) < 2\pi/p$ 时，构成 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的一个框架，其中 T_b 和 D_a 分别表示平移算子和伸缩算子

$$T_b f(x) = f(x - b) \text{ and } D_a f(x) = a^{-\frac{1}{2}} f\left(a^{-1} x\right),$$

分别地。定理 3.3 指出，将满足条件 (1.3) 构成 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 小波框架所需的密度提高 $(1 + 4p)/2p$ 倍后，我们便能唯一地从测量集合 (1.2) 中恢复实值信号。因此，当相位不可用时，与使用小波系数进行信号重建所需的采样相比，我们大约需要多 $3(1+4p)/4p$ 倍的采样。例如，如果 $p = 1$，则需要多 3.75 倍的采样才能实现唯一恢复。三种小波是否确有必要，抑或一种或两种解析小波 P_p 和 $\mathscr{H} P_p$（或二者的线性组合）也足以实现唯一恢复，这仍是一个悬而未决的问题。

1.3. 其他相关文献。 在 [16]中，作者证明，信号 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 的柯西小波变换的模唯一确定其解析表示

$$\widehat{f}_+(\xi) := 2\widehat{f}(\xi)\mathbf{1}_{\xi>0}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

相差一个全局常数相位因子。这里， $\mathbf{1}_\Xi$ 表示集合 Ξ的示性函数。由于实值函数由其解析表示唯一确定，人们很容易得出这样的结论：柯西小波变换的幅值可以将实值信号唯一确定到一个全局符号。然而，解析表示 f_+ 相差一个全局相位因子，并不能将实值信号唯一确定到一个全局符号。事实上，可以构造实值函数 f， $g \in L^2(\mathbb{R})$，它们并不只相差一个全局符号，却满足 $g_+ = e^{i\alpha} f_+$，其中某个 $\alpha \in \mathbb{R}$，参见 [1, 备注 12]。与 [16], 相比，我们的唯一性定理保证恢复的是实值信号本身，而不是它们的解析表示。此外， [16] 中的结果是半离散情形下的唯一性结果，而我们的主要结果则是在全离散设置下得到的。

基于 [16], in [1] 中的结果，我们将信号类限定为解析带限信号，以便从采样的Cauchy小波变换测量中获得唯一性结果。同样，带限假设对于获得完整的采样结果至关重要。

最后，我们指出，我们的结果让人联想到近期的工作 [9]，其中作者证明了可由多窗 Gabor 框架系数的模确定唯一性。特别是，证明定理 3.3 时为得到方程 (3.1) 所采用的论证，受到了 [9] 中结果的启发。

记号。 我们设 $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$。对于任意 $p \in [1, +\infty]$，我们用 $L^p(\mathbb{R})$ 表示函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的巴拿赫空间，其中的函数关于勒贝格测度是 p-可积的，并用记号 $\|\cdot\|_p$ 表示相应的范数。 $L^1(\mathbb{R})$ 上的傅里叶变换 定义为

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \, \mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

通过经典的稠密性论证，它可扩展到 $L^2(\mathbb{R})$。最后，我们用$\xi \mapsto$sgn(ξ)表示符号函数。

2. 预备知识

2.1. 希尔伯特空间中的框架。 框架的概念推广了希尔伯特空间中 Riesz 基的概念，由 Duffin和Schaffer [8]提出。设 $\mathcal{H}$ 为一个可分希尔伯特空间，其内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 范数为 $\|\cdot\|$。向量的一个可数序列 $\{f_i\}_{i\in I}$ 属于 $\mathcal{H}$ ，若存在常数 $A, B > 0$ ，使得对所有 $f \in \mathcal{H}$，则称其为 $\mathcal{H}$ 的一个框架

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

下不等式的一个直接推论是，每个 $f \in \mathcal{H}$ 都由其框架系数 $\{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$唯一确定，也就是说

$$\langle f, f_i\rangle = 0, \ \forall i \in I \implies f = 0.$$

如果一个框架由固定函数 ϕ（即分析小波）的平移和缩放版本 $\{T_b D_a \phi\}_{(b,a)\in I}$ 构成，我们就称之为小波框架。对

小波框架的一般化是考虑多个分析小波 $k \in \mathbb{N}$、 $k > 1$，而不是只考虑单个分析小波。在后一种情况下，我们称之为多小波框架。有关框架理论的介绍以及小波框架的概述，请参阅 [6, 7] 。

2.2. **加权 Bergman 空间**。 我们用 $\mathbb{C}^+$ 表示上半平面,

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$

并用 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$ 表示定义在 $\mathbb{C}^+$上的全纯函数空间。对于每个 $w > 1$，我们定义加权 Bergman 空间 $B_w(\mathbb{C}^+)$ 为

$$B_w(\mathbb{C}^+) := \left\{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^+) : \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |F(x+iy)|^2 y^{w-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty \right\}.$$

如果离散子集 Λ 属于 $\mathbb{C}^+$ ，且存在正常数 A 和 B 使得下式成立，则称其为 $B_w(\mathbb{C}^+)$ 的采样集

$$\begin{aligned} A \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |F(x+iy)|^2 y^{w-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le & \sum_{z_j = x_j + iy_j \in \Lambda} |F(x_j+iy_j)|^2 y_j^w \\ & \le B \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |F(x+iy)|^2\, y^{w-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

对每个 $F \in B_w(\mathbb{C}^+)$,

定理 2.1 ([18, 定理 1。1])。 设 $w > 1$。对于每个 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 0$，离散集

$$\Gamma(\beta, \alpha) = \{\alpha^m(\beta n + i)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

是 $B_w(\mathbb{C}^+)$ 的采样集，当且仅当

$$\beta \ln(\alpha) < 4\pi/(w-1).$$

此外，如果对于每个 $F \in B_w(\mathbb{C}^+)$ 都有以下结论，我们称 Λ 中的离散子集 $\mathbb{C}^+$ 是 $B_w(\mathbb{C}^+)$ 的唯一性集

$$F(\lambda) = 0,\ \forall \lambda \in \Lambda \implies F \equiv 0.$$

显然，采样集也是唯一性集。

定理 2.2 ([18])。 设 $w > 1$。对于满足以下条件的任意 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 0$

$$\beta \ln(\alpha) = 4\pi/(w-1),$$

离散集

$$\Gamma(\beta, \alpha) = \{\alpha^m(\beta n + i)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

是 $B_w(\mathbb{C}^+)$ 的唯一性集。

有关加权 Bergman 空间抽样集的一般处理可参见 [17]。

对于一种特殊的分析小波——即所谓的柯西小波——小波变换值域的刻画中会出现加权 Bergman 空间。

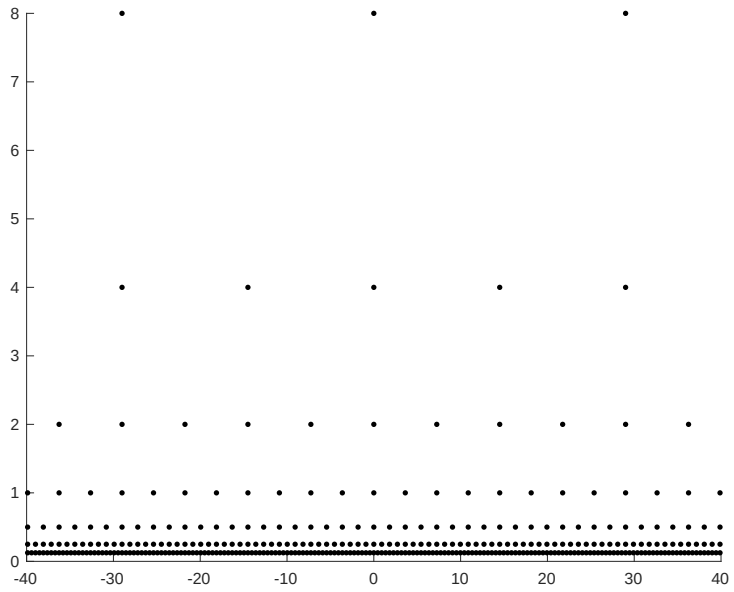

图1。格 Λ(β, α)，其中 $\beta = 4\pi/5\ln(2)$ 且 α =2，是加权 Bergman 空间B_6($\mathbb{C}^+$)的唯一性集。

2.3. **柯西小波**。柯西小波是渐进小波，即仅具有正频率的小波，其实值傅里叶变换定义为

$$\widehat{\psi}_p(\xi) := (2\pi)^{p+1/2}\xi^p \mathrm{e}^{-2\pi\xi}\mathbf{1}_{\xi>0}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

其中 $p > 0$。我们将 $p = 1$ 的情形简记为 $\psi = \psi_1$。相对于任意柯西小波的小波变换称为柯西小波变换，定义如下:

$$\mathcal{W}_{\psi_p} f(b,a) := (2\pi a)^{\frac{1}{2}+p} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi i(b+ia)\xi}\, \xi^p \,\mathrm{d}\xi, \quad (b,a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

柯西小波满足容许条件

$$C_{\psi_p} = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}_p(\xi)|^2}{\xi}\mathrm{d}\xi < \infty,$$

因此，柯西小波变换是从$\mathcal{H}_+$(ℝ)到 L^2(ℝ × ℝ+, dbda/a^2)的等距映射的一个倍数,

$$\|\mathcal{W}_{\psi_p} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \mathrm{d}b\,\mathrm{d}a/a^2)} = C_{\psi_p}\|f\|_2^2, \tag{2.1}$$

其中， $\mathcal{H}_+$(ℝ)表示哈代空间,

$$\mathcal{H}_+(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall \xi < 0,\ \widehat{f}(\xi) = 0\}.$$

加权 Bergman 空间与柯西小波变换的关系，犹如 Bargmann–Fock 空间与 Gabor 变换的关系。事实上，映射

$$\mathcal{H}_+(\mathbb{R}) \ni f \mapsto F\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}, \quad F(b+ia) = a^{-(\frac{1}{2}+p)}\mathcal{W}_{\psi_p} f(b,a), \tag{2.2}$$

定义了一个从 $\mathcal{H}_+(\mathbb{R})$ 到加权 Bergman 空间$B_{2p+1}(\mathbb{C}^+)$ 的等距映射的倍数，

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |F(b+ia)|^2 a^{2p-1}\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a = C_{\psi_p}\|f\|_2^2,$$

参见 [10, § 3.2]及其中的参考文献。

2.4. 泊松小波。泊松小波是一种实值小波，其傅里叶变换为实值，定义如下

$$\widehat{P}(\xi) = \sqrt{2\pi}|\xi|e^{-2\pi|\xi|}, \qquad \xi\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

例如参见 [12, 第1章，第 7]节。由式（2.3）可知，泊松小波与柯西小波之间存在如下关系

$$2\psi = P_+ = P + i\mathscr{H}P,$$

其中 $\mathscr{H}$表示希尔伯特变换。回顾一下，希尔伯特变换是定义在 $L^2(\mathbb{R})$上的一个酉算子，其定义为

$$(\mathscr{H}\varphi)\widehat{\ }(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{for a.e. } \xi\in\mathbb{R}.$$

特别地，实值函数的希尔伯特变换仍为实值。一般而言，对于每个 $p>0$，我们可以将阶泊松小波 p 定义为

$$\widehat{P}_p(\xi) := (2\pi)^{p+1/2}|\xi|^p e^{-2\pi|\xi|}, \qquad \xi\in\mathbb{R},$$

这等价于

$$2\psi_p = P_p + i\mathscr{H}P_p. \tag{2.4}$$

下一个命题表明，任意实值信号关于泊松小波的小波变换，对应于其柯西小波变换的实部。类似地，任意实值信号关于泊松小波的希尔伯特变换的小波变换，与其柯西小波变换的虚部相关。

命题 2.3。设 $p>0$。对于每个 $f\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$,

$$\mathcal{W}_{P_p}f = 2\,\mathrm{Re}[\mathcal{W}_{\psi_p}f], \quad \mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f = -2\,\mathrm{Im}[\mathcal{W}_{\psi_p}f]. \tag{2.5}$$

特别地，$\mathcal{W}_{P_p}f$ 和 $\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f$ 在上半平面上是实解析函数。

证明。设 $p>0$ 和 $f\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$。根据等式 (2.4) 及小波变换的定义，我们得到

$$\begin{aligned} 2\mathcal{W}_{\psi_p}f(b,a) = 2\langle f, T_bD_a\psi_p\rangle &= \langle f, T_bD_a\,(P_p + i\mathscr{H}P_p)\rangle,\\ &= \langle f, T_bD_aP_p\rangle - i\langle f, T_bD_a\mathscr{H}P_p\rangle,\\ &= \mathcal{W}_{P_p}f(b,a) - i\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f(b,a), \end{aligned}$$

对于 $(b,\ a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，这意味着等式 (2.5)。等价地，对于每个 $(b,\ a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{P_p}f(b,a) &= 2a^{\frac{1}{2}+p}\mathrm{Re}[a^{-(\frac{1}{2}+p)}\mathcal{W}_{\psi_p}f(b,a)],\\ \mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f(b,a) &= -2a^{\frac{1}{2}+p}\mathrm{Im}[a^{-(\frac{1}{2}+p)}\mathcal{W}_{\psi_p}f(b,a)], \end{aligned}$$

结合方程 (2.2)，这表明 $\mathcal{W}_{P_p}f$ 和 $\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f$ 在上半平面上是实解析函数。□

由定理 2.1 和命题 2.3 可知，泊松小波及其希尔伯特变换为 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 构成离散框架。更准确地说，我们有以下结果。

命题 2.4. 集合

$$\{T_b D_a P_p\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)} \cup \{T_b D_a \mathscr{H} P_p\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)} \tag{2.6}$$

构成 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的一个框架，当且仅当 $\beta\ln(\alpha) < 2\pi/p$。

证明。公式（2.6）中的集合构成 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的一个框架，当且仅当存在常数 $A,B>0$ 使得

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)} (|\mathcal{W}_{P_p} f(b,a)|^2 + |\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p} f(b,a)|^2) \le B\|f\|_2^2, \tag{2.7}$$

对每个 $f\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$。根据命题 2.3，公式（2.7）等价于

$$\frac{A}{4}\cdot\|f\|_2^2 \le \sum_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)} |\mathcal{W}_{\psi_p} f(b,a)|^2 \le \frac{B}{4}\cdot\|f\|_2^2,\ \text{for all } f\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

我们回顾一下，任意实值函数都满足

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)},\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

因此，通过映射 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 与哈代空间 $\mathcal{H}_+(\mathbb{R})$ 同构

$$L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ni f \mapsto f_+ \in \mathcal{H}_+(\mathbb{R}),$$

它满足

$$\|f\|_2 = \frac{\|f_+\|_2}{\sqrt{2}}.$$

此外，我们可以看到，关于柯西小波的小波变换满足

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\psi_p} f(b,a) &= \sqrt{a}\cdot\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\psi_p}(a\xi)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi b}\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{a}\cdot\int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\psi_p}(a\xi)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi b}\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\int_0^\infty \widehat{f}_+(\xi)\overline{\widehat{\psi_p}(a\xi)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi b}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\cdot\mathcal{W}_{\psi_p} f_+(b,a),\end{aligned}$$

其中第一个等号由普朗歇尔定理得出。因此，公式（2.8）等价于

$$\frac{A}{2}\cdot\|f\|_2^2 \le \sum_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)} |\mathcal{W}_{\psi_p} f(b,a)|^2 \le \frac{B}{2}\cdot\|f\|_2^2,\ \text{for all } f\in\mathcal{H}_+(\mathbb{R}). \tag{2.9}$$

现在，由于映射

$$\mathcal{H}_+(\mathbb{R}) \ni f \mapsto F\colon \mathbb{C}^+\to\mathbb{C},\quad F(b+ia) = a^{-(\frac{1}{2}+p)}\mathcal{W}_{\psi_p} f(b,a),$$

是从 $\mathcal{H}_+(\mathbb{R})$ 到加权 Bergman 空间 $B_{2p+1}(\mathbb{C}^+)$ 的某个等距映射的倍数（参见方程 (2.2)），方程 (2.9) 变为

$$\begin{aligned}\frac{A}{2C_{\psi_p}}\cdot\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |F(x+iy)|^2 y^{2p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\le \sum_{x+iy\in\Gamma(\beta,\alpha)} |F(x+iy)|^2 y^{2p+1}\\ &\le \frac{B}{2C_{\psi_p}}\cdot\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |F(x+iy)|^2 y^{2p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{2.10}$$

对每个 $F \in B_{2p+1}(\mathbb{C}^+)$ 都成立，其中 $\Gamma(\beta,\ \alpha)$ 表示 $\Lambda(\beta,\ \alpha)$ 在同构 $\mathbb{R}^2 \ni (x,\ y) \mapsto x+iy \in \mathbb{C}$ 下的像。最后，根据定理 2.1 可得，方程 (2.10) 成立当且仅当 $\beta\ln(\alpha) < 2\pi/p$。□

基于这一准备性结果，我们现在着手建立主要结果。为此，如果非线性映射 $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 实现相位恢复，我们称希尔伯特空间的框架 $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 满足相位恢复，其中 $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 当且仅当 $\mathcal{H}$ e对于某个。基于命题 2.4，我们的主要定理表明，多小波框架

$$\mathcal{A}_\Phi\colon \mathcal{H}/\!\sim \to \mathbb{R}_+^I, \qquad \mathcal{A}_\Phi([f]) = \{|\langle f,\varphi_i\rangle|\}_{i\in I}$$

当且仅当 $f\sim g$ e $f=$ 时实现相位恢复，其中 $f\sim g$ 当且仅当 $f=\mathrm{e}^{i\alpha}g$ 对于某个 $\alpha\in\mathbb{R}$。基于命题 2.4，我们的主要定理表明，多小波框架

$$\{T_bD_aP_p\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)}\cup\{T_bD_a\mathscr{H}P_p\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)}\cup\{T_bD_a(\mu_1P_p+\mu_2\mathscr{H}P_p)\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)}$$

在 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$中实现相位恢复，当 $\Lambda(\beta,\ \alpha)$是一个双曲格，且 $\beta\ln(\alpha)\ \leq 4\pi/(1+4p)$，并且向量族

$$\{(1,0),(0,1),(\mu_1,\mu_2)\}$$

满足补性质，其定义将在下一节中回顾。

2.5. **R 中的符号恢复**$\mathbb{R}^M$。 给定向量族 $\Phi=\{v_n\}_{n=1}^N$属于 $\mathbb{R}^M$，我们考虑映射

$$\mathcal{A}_\Phi\colon \mathbb{R}^M/\!\sim \to \mathbb{R}_+^N, \qquad \mathcal{A}_\Phi(v) = \{|\langle v,v_n\rangle|\}_{n=1}^N,$$

其中 $v\sim w$ 当且仅当 $v=\pm w$。“ $\mathbb{R}^M$中的符号恢复”是指研究 Φ 满足什么必要且充分条件时，映射 $\mathcal{A}_\Phi$ 是单射。众所周知，映射 $\mathcal{A}_\Phi$ 是单射，当且仅当集合 Φ 具有补性质。

定义 2.5. 设 $M,N\in\mathbb{N}$，且 $\Phi=\{v_n\}_{n=1}^N$ 是$\mathbb{R}^M$中的一个向量集。若对于每个子集 $S\subseteq\{1,\dots,N\}$，或者 $\operatorname{span}\{v_n\colon\ n\in S\}=\mathbb{R}^M$，或者 $\operatorname{span}\{v_n\colon\ n\in\{1,\dots,N\}\setminus S\}=\mathbb{R}^M$，则称 Φ具有补性质 。

命题 2.6 ([4])。 设 $M,N\in\mathbb{N}$，且 $\Phi=\{v_n\}_{n=1}^N$ 是 $\mathbb{R}^M$中的一个向量集。那么，映射

$$\mathcal{A}_\Phi\colon \mathbb{R}^M/\{\pm1\} \to \mathbb{R}_+^N, \qquad \mathcal{A}_\Phi(v) = \{|\langle v,v_n\rangle|\}_{n=1}^N, \tag{2.11}$$

是单射，当且仅当 Φ 具有补性质。

命题 2.6 立即表明，当 $N\leq 2M-2$ 时，方程 (2.11) 中的映射不是单射。因此，一个自然的问题是， $N=2M-1$ 个向量是否足以保证 $\mathcal{A}_\Phi$ 的单射性。 [4] 已经回答了这个问题：作者证明，向量集合 $\Phi=\{v_n\}_{n=1}^{2M-1}\subseteq\mathbb{R}^M$ 具有补性质，当且仅当 Φ 是 全火花，这意味着 Φ 个向量的 M 任意子集都张成 $\mathbb{R}^M$。

补性质也可以在更一般的情形下表述： Φ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的一个向量集合，其中该空间是可分的。

定义 2.7 ([5])。 设 $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 是可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$中的一组向量。若对于每个子集$S\subseteq I$，$\operatorname{span}\underline{\{\varphi_i\colon\ i\in S\}=\mathcal{H}}$ 或 $\operatorname{span}\underline{\{\varphi_i\colon\ i\in I\setminus S\}=\mathcal{H}}$，则称 Φ 具有补性质 。

与有限维情形类似，若 $\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{R}$上的希尔伯特空间，则一组向量 Φ 能够进行相位恢复，当且仅当 Φ 具有补性质。若 $\mathcal{H}$是定义在 $\mathbb{C}$上的希尔伯特空间，我们只知道补性质是相位恢复问题具有唯一解的必要条件，参见 [3, 5]。

3. 主要结果：无带限的小波符号恢复

本节旨在介绍我们在小波符号恢复方面的贡献。相较于现有文献，我们的结果的新颖之处在于，为了保证从其实值平方可积信号的小波变换的绝对值中唯一恢复这些信号，我们不需要任何先验知识。

回顾一下，我们区分连续小波符号恢复与采样小波符号恢复：前者指从 $(|\mathcal{W}_\phi f(b,\ a)|)^{(b,a)\in\Omega}$ 中恢复 f（相差一个全局符号），其中 Ω 的基数与连续统相同；后者则指从 $(|\mathcal{W}_\phi f(b,\ a)|)^{(b,a)\in\Lambda}$ 中恢复 f（相差一个全局符号），其中 Λ 是$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 的一个离散子集。

3.1. 连续小波符号恢复。

我们回顾一下，$\mathscr{A}(\mathbb{C}^+)$ 表示上半平面上的实解析函数空间。

定理 3.1。 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 是一个具有正测度的集合，并设 $\phi\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$是一个分析小波，使得 $\operatorname{Ran}\mathcal{W}_\phi\subseteq\mathscr{A}(\mathbb{C}^+)$。那么，对于 $f,g\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$，以下各项等价：

(i) $f=\pm g$,
(ii) $|\mathcal{W}_\phi f|=|\mathcal{W}_\phi g|$ *on* Ω.

证明。 显然，(i) 项蕴含 (ii) 项。因此，不妨设$f,g\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足

$$|\mathcal{W}_\phi f(b,a)|=|\mathcal{W}_\phi g(b,a)|,\qquad (b,a)\in\Omega.$$

考虑子集

$$S=\{(b,a)\in\Omega:\mathcal{W}_\phi f(b,a)=\mathcal{W}_\phi g(b,a)\},$$

则函数 $h_1=f+g$ 和 $h_2=f-g$ 满足

$$\mathcal{W}_\phi h_1(b,a)=0,\qquad (b,a)\in\Omega\setminus S,$$

and

$$\mathcal{W}_\phi h_2(b,a)=0,\qquad (b,a)\in S.$$

由于 Ω 具有正测度，S 或 $\Omega\setminus S$ 中至少有一个具有正测度。因此，$\mathcal{W}_\phi h_1\equiv 0$ 或 $\mathcal{W}_\phi h_2\equiv 0$，因为非零实解析函数的零点集具有零测度。由此我们可以得出结论：$f=\pm g$。□

注记 3.2。 根据命题 2.3，定理 3.1 适用于泊松小波族及其希尔伯特变换。

3.2. 采样小波符号恢复。 定理 3.1 不适用于仅知道小波变换在离散集合上的模的情形。回顾一下，上半平面中的双曲格具有如下形式

$$\Lambda(\beta,\alpha)=\{(\alpha^m\beta n,\alpha^m)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

对于参数 $\alpha>1$ 和 $\beta>0$ 的某些取值。因此，一个自然的问题是：对于分析小波以及采样参数 α 和 β，在什么假设下我们能够获得如定理 3.1 中的唯一性结果。我们采用多小波方法来处理这一问题。

定理 3.3。 令 $p>0$，并令 $\alpha>1$ 和 $\beta>0$ 满足

$$\beta\ln(\alpha)\le\frac{4\pi}{1+4p}.$$

此外，令

$$\phi_i=\lambda_{i,1}P_p+\lambda_{i,2}\mathscr{H}P_p,\quad i=1,2,3,$$

对于一组全火花向量

$$\{\lambda_i=(\lambda_{i,1},\lambda_{i,2})\}_{i=1}^3$$

在 $\mathbb{R}^2$. *Then*，每个 $f\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 都由多小波框架系数的幅值唯一确定（相差一个全局符号）

$$\{|\mathcal{W}_{\phi_i}f(b,a)|:i\in\{1,2,3\},(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)\}.$$

等价地，多小波框架

$$\{T_bD_a\phi_1\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)}\cup\{T_bD_a\phi_2\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)}\cup\{T_bD_a\phi_3\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)}.$$

在 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中实现符号恢复。

证明。 设 $f,g\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足

$$|\mathcal{W}_{\phi_i}f(b,a)|=|\mathcal{W}_{\phi_i}g(b,a)|,\quad(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha),$$

其中

$$\phi_i=\lambda_{i,1}P_p+\lambda_{i,2}\mathscr{H}P_p,\quad i=1,2,3,$$

一组全火花向量

$$\{\lambda_i=(\lambda_{i,1},\lambda_{i,2})\}_{i=1}^3.$$

我们证明 $f=\pm g$。首先注意，对于每个 $(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)$ 以及每个 $i=1,2,3$，都有

$$\begin{aligned}|\langle(\mathcal{W}_{P_p}f(b,a),\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f(b,a)),\lambda_i\rangle|&=|\mathcal{W}_{\phi_i}f(b,a)|=|\mathcal{W}_{\phi_i}g(b,a)|\\&=|\langle(\mathcal{W}_{P_p}g(b,a),\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}g(b,a)),\lambda_i\rangle|.\end{aligned}$$

根据假设，向量集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ 是全火花的，因此满足补性质。因此，对于每个 $(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)$，

$$(\mathcal{W}_{P_p}f(b,a),\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f(b,a))=\pm(\mathcal{W}_{P_p}g(b,a),\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}g(b,a)).\tag{3.1}$$

若考虑子集

$$S=\{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha):(\mathcal{W}_{P_p}f(b,a),\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}f(b,a))=(\mathcal{W}_{P_p}g(b,a),\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}g(b,a))\},$$

那么，函数 $h_1=f+g$ 和 $h_2=f-g$ 满足

$$(\mathcal{W}_{P_p}h_1(b,a),\mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}h_1(b,a))=0,\qquad(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)\setminus S$$

and

$$(\mathcal{W}_{P_p}h_2(b,a), \mathcal{W}_{\mathscr{H}P_p}h_2(b,a)) = 0, \qquad (b,a) \in S.$$

因此，根据命题 2.3，函数 h_1 和 h_2 满足

$$(2\,\mathrm{Re}[\mathcal{W}_{\psi_p}h_1(b,a)], -2\,\mathrm{Im}[\mathcal{W}_{\psi_p}h_1(b,a)]) = 0, \qquad (b,a) \in \Lambda(\beta,\alpha) \setminus S$$

and

$$(2\,\mathrm{Re}[\mathcal{W}_{\psi_p}h_2(b,a)], -2\,\mathrm{Im}[\mathcal{W}_{\psi_p}h_2(b,a)]) = 0, \qquad (b,a) \in S,$$

或者等价地

$$\mathcal{W}_{\psi_p}h_1(b,a) = 0 \qquad (b,a) \in \Lambda(\beta,\alpha) \setminus S \qquad \text{and} \qquad \mathcal{W}_{\psi_p}h_2(b,a) = 0 \qquad (b,a) \in S.$$

我们引入函数

$$H_1(b+ia) := a^{-(\frac{1}{2}+p)}\mathcal{W}_{\psi_p}h_1(b,a), \quad H_2(b+ia) := a^{-(\frac{1}{2}+p)}\mathcal{W}_{\psi_p}h_2(b,a),$$

作为一个复变量的函数，其中 $(b,\ a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，并注意到 H_1 和 H_2 是在上半平面上的整函数（参见方程 (2.2)）。因此，函数

$$H = H_1 \cdot H_2$$

也是上半平面上的整函数，并且

$$H(b+ia) = 0, \qquad (b,a) \in \Lambda(\beta,\alpha). \tag{3.2}$$

此外，根据方程 (2.1),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |H(b+ia)|^2 a^{2+4p}\frac{\mathrm{d}b\mathrm{d}a}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |\mathcal{W}_{\psi_p}h_1(b,a)|^2 |\mathcal{W}_{\psi_p}h_2(b,a)|^2\frac{\mathrm{d}b\mathrm{d}a}{a^2}\\ &\le \|\psi_p\|_2^2\|h_1\|_2^2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}|\mathcal{W}_{\psi_p}h_2(b,a)|^2\frac{\mathrm{d}b\mathrm{d}a}{a^2}\\ &= C_{\psi_p}\|\psi_p\|_2^2\|h_1\|_2^2\|h_2\|_2^2,\end{aligned}$$

其中

$$C_{\psi_p} = \int_0^{+\infty}\frac{|\widehat{\psi_p}(\xi)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega < \infty,$$

这表明 H 属于加权 Bergman 空间 $B_{2+4p}(\mathbb{C}_+)$。根据定理 2.1 和定理 2.2，通过同构 $\mathbb{R}^2 \ni (x,y), \ \Lambda(\beta,\alpha)$ 的像 $\mapsto x+iy \in \mathbb{C}$ 是 $B_{2+4p}(\mathbb{C}_+)$ 的唯一性集，因此方程 (3.2) 蕴含 $H \equiv 0$。所以，要么 $H_1 \equiv 0$ ，要么 $H_2 \equiv 0$ ，这表明 $f = \pm g$。□

例 3.4。 定理 3.3 适用于分析小波

$$\phi_1 = P, \quad \phi_2 = \mathscr{H}P, \quad \phi_3 = P + \mathscr{H}P,$$

以及二进格 $\Lambda(4\pi/5\ln(2),2)$，见图 1 和图 2。

注 3.5. 更一般地，我们可以将定理 3.3 中的正则采样集 $\Lambda(\beta,\alpha)$ 替换为 $B_{2+4p}(\mathbb{C}_+)$ 的任意其他采样集。关于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上 Bergman 型空间的抽样集的完整刻画，参见 [17] 。我们回顾一下，上半平面 $\mathbb{C}_+$ 可通过共形映射映到单位圆盘$\mathbb{D}$

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

称为凯莱变换。

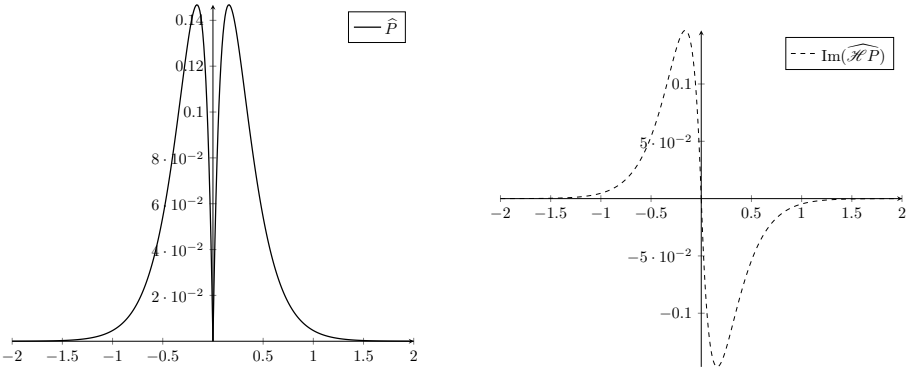

图 2. 泊松小波的傅里叶变换（左）及其希尔伯特变换（右）。由于泊松小波的傅里叶变换为实值，其希尔伯特变换的傅里叶变换为纯虚数。

注 3.6。 在定理 3.3 证明的第二部分中，我们实际上证明了，如果 $\beta \ln(\alpha) \leq 4\pi/(1+4p)$，则柯西小波框架

$$\{T_b D_a \psi_p\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)}$$

对于哈代空间 $\mathcal{H}_+(\mathbb{R})$，满足补性质（见定义 2.7）。事实上，假设存在一个子集 $S \subseteq \Lambda(\beta,\ \alpha)$，使得

$$\overline{\mathrm{span}\{T_b D_a \psi_p\}_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)\setminus S}} \neq \mathcal{H}_+(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \overline{\mathrm{span}\{T_b D_a \psi_p\}_{(b,a)\in S}} \neq \mathcal{H}_+(\mathbb{R}).$$

这意味着存在两个非零函数 $h_1,\ h_2 \in \mathcal{H}_+(\mathbb{R})$，使得

$$\mathcal{W}_{\psi_p} h_1(b,a) = 0 \qquad (b,a) \in \Lambda(\beta,\alpha) \setminus S \qquad \text{and} \qquad \mathcal{W}_{\psi_p} h_2(b,a) = 0 \qquad (b,a) \in S.$$

接着，采用与定理 3.3 证明中相同的论证，可得出结论： h_1 或 h_2 必有一个为零，因此补性质成立。然而，在复值情形下，补性质只是相位恢复问题具有唯一解的必要条件，因此我们无法断定该算子

$$\mathcal{H}_+(\mathbb{R})/\sim \ni h \mapsto (|\mathcal{W}_{\psi_p} h(b,a)|)_{(b,a)\in\Lambda(\beta,\alpha)} \in \mathbb{R}^{\Lambda(\beta,\alpha)} \tag{3.3}$$

是单射。确定一个使方程 (3.3) 中的算子为单射的双曲格，仍然是一个有趣的开放问题。

致谢

作者谨向 MarcoPeloso 致谢，感谢他指出了备注 3.5 中讨论的参考文献[17] 。

参考文献

1. Rima Alaifari、Francesca Bartolucci 和 Matthias Wellershoff。小波变换中带限函数的相位恢复。应用与计算调和分析，64:102–117，2023年5月。2. Rima Alaifari、Ingrid Daubechies、Philipp Grohs 和 Gaurav Thakur。利用小波及其他框架的无符号系数重建实值函数。《傅里叶分析与应用杂志》，23(6):1480–1494，2017年。3. Rima Alaifari 和 Philipp Grohs。巴拿赫空间连续框架一般情形下的相位恢复。*SIAM* 数学分析期刊，49(3):1895–1911，2017年。

4. Radu Balan、Pete Casazza 和 Dan Edidin。无相位信号重建。应用与计算调和分析，20(3):345–356，2006年。5. Jameson Cahill、Peter Casazza 和 Ingrid Daubechies。无限维希尔伯特空间中的相位恢复。美国数学会会刊，*B*辑，3 76, 2016 3 63( ): – 。6. Ole Christensen 等。《框架与 Riesz 基导论》，第7卷。施普林格，2003年。7. Ingrid Daubechies。《小波十讲》。SIAM，1992年。8. Richard J Duffin 和 Albert C Schaeffer。一类非调和傅里叶级数。美国数学会会刊，72(2):341–366，1952年。9. Philipp Grohs、Lukas Liehr 和 Martin Rathmair。多窗短时傅里叶变换相位恢复：格点唯一性。*arXiv*预印本 *arXiv:2207.10620*，2022年。10. A Grossmann、J Morlet 和 T Paul。与平方可积群表示相关的变换。II：示例。载于《*IHP* 理论物理年刊》，第 45 卷，第 293–309页，1986年。11. Nicki Holighaus、Günther Koliander、Zdeněk Průša 和 Luis Daniel Abreu。解析小波变换的刻画及一种新的无相位重建算法。*IEEE*信号处理汇刊，67(15):3894–3908，2019年8月。12. M. Holschneider。通过逆小波变换实现逆拉东变换。《逆问题》，7(6):853–861，1991年。13. M. Holschneider。《小波：一种分析工具》。牛津数学专著丛书。克拉伦登出版社，牛津，1995年。14. Philippe Jaming。泡利相位恢复问题扩展形式中的唯一性结果。应用与计算调和分析，37(3):413–441，2014年11月。15. Stéphane Mallat。《信号处理小波之旅》。学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1998年。16. Stéphane Mallat 和 Irène Waldspurger。柯西小波变换的相位恢复。《傅里叶分析与应用杂志》，21(6):1251–1309，2015年。17. Kristian Seip。单位圆盘中的 Beurling 型密度定理。《数学新进展》，113:21–39，1993年。18. Kristian Seip。加权 Bergman 空间的正则抽样集与插值集。《美国数学会会刊》，117(1):213–220，1993年。19. I. Waldspurger。小波变换的相位恢复。*IEEE*信息论汇刊，63(5):2993–3009，2017年。

应用数学研讨会，苏黎世联邦理工学院，雷米街101号，8092 苏黎世，瑞士电子邮箱地址：rima.alaifari@sam.math.ethz.ch 代尔夫特应用数学研究所，代尔夫特理工大学，梅克尔路4号，2628 CD 代尔夫特，荷兰电子邮箱地址：f.bartolucci@tudelft.nl 数学系，马里兰大学，校园大道4176号，科利奇帕克，马里兰州20742，美国电子邮箱地址：wellersm@umd.edu