arXiv:2302.08133v3 [math.AP] 6 Dec 2023

Keldysh 型退化椭圆算子族的边界三元组

Fran.cois Monard* Yuzhou Zou†

摘要

我们研究一族单参数退化椭圆算子 $\mathcal{L}_\gamma$ 定义在闭圆盘 $\mathbb{D}$上，属于 Keldysh 型（或 Kimura 型），该算子族见作者与 Mishra 先前的相关工作 [15]，并与测地线 X 射线变换相关。根据次主项中常数 $\gamma \in \mathbb{R}$的取值，我们证明：极小算子要么是自伴的（情形$|\gamma| \geq 1$），要么可以构造适当的迹映射和 Sobolev 尺度（定义在 $\mathbb{D}$ 和$\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$上），进而表述映射性质、狄利克雷到诺伊曼映射，并推广格林恒等式（情形 $|\gamma| < 1$）。后一种情形可以用极大算子的边界三元组，或其特定限制的广义边界三元组来重新诠释。这些概念本身也值得研究，可用于描述算子$\mathcal{L}_\gamma$的扩张自伴所需的充分条件；min 这些扩张由边界关系参数化。我们还据此给出若干推论。

目录

1 引言 **2**

2 主要结果 **5**2.1 预备知识 .**5**2.2 狄利克雷扩张的刻画。自伴性 $\mathcal{L}_\gamma,\ min$ 对于 $|\gamma| \geq 1$ . . 8**2.3** 的迹、格林恒等式和狄利克雷到诺伊曼映射 $|\gamma| < 1$ . . . . . 8**2.4** 推论：边界三元组、自伴扩张及其他 . . . . . 12**2.4.1** 预备知识 .12**2.4.2** 定理5和定理8的推论 .14

*数学系，加利福尼亚大学圣克鲁兹分校，加利福尼亚州圣克鲁兹 95064；电子邮件：fmonard@ucsc.edu

†数学系，西北大学，伊利诺伊州埃文斯顿 60208；电子邮件：yuzhou.zou@northwestern.edu

3 稠密性结果，引理 2 和定理3的证明 16
3.1 一些初步的稠密性结果 .163.2 Friedrichs 扩张与引理 2 的证明 .183.3 定理3的证明.21

4 引理 4 的证明 ，定理 5 和 6 23
4.1 引理 4 的证明 .234.2 将狄利克雷迹延拓至 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ .274.2.1 一维迹估计.284.2.2 定理 20 的证明 .294.3 定理 5 的证明.334.4 DN映射——定理 6 的证明 .35

5 定理 8 的证明 36
5.1 诺伊曼迹的延拓 .365.2 狄利克雷迹的延拓 .415.3 格林第二恒等式 (34) 的延拓 .42

A 辅助引理的证明 43
A.1 弗里德里希斯扩张的刻画——引理 17 的证明 .43A.2 引理 18 的证明 .44A.3 引理 28 的证明 .44

1 引言

本文研究欧几里得单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}$ 上一参数族退化椭圆算子的边界三元组（或等价地，推导出适当的框架，使广义格林恒等式[1] 成立）：对于 $\gamma\in\mathbb{R}$，利用极坐标 $z=\rho e^{i\omega}$，并以 $x=1-\rho^2$ 作为边界定义函数，且 $\mathrm{d}V=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$ 为欧几里得测度，我们定义 $|z|\leq 1\}$

$$\mathcal{L}_\gamma := -\rho^{-1}x^{-\gamma}\partial_\rho(\rho x^{\gamma+1}\partial_\rho)-\rho^{-2}\partial_\omega^2+(1+\gamma)^2, \tag{1}$$
$$= -x\partial_\rho^2-(\rho^{-1}-(3+2\gamma)\rho)\partial_\rho-\rho^{-2}\partial_\omega^2+(\gamma+1)^2 id. \tag{2}$$

表达式（1）表明，$\mathcal{L}_\gamma$在空间 $L^2_\gamma:=L^2(\mathbb{D},\ x^\gamma\mathrm{d}V)$（其内积记为（$f$，$g$）$_{L^2_\gamma}:=\int_{\mathbb{D}} f\bar{g}\ x^\gamma\,\mathrm{d}V$）上是形式自伴的，而表达式（2）则表明其退化

[1]对于边界光滑的有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 上的拉普拉斯算子，若 $f,g\in C^\infty(\Omega)$，则格林第一恒等式为 $\int_\Omega((-\Delta f)g+\nabla f\cdot\nabla g)=-\int_{\partial\Omega}\partial_\nu f g$，而格林第二恒等式是其反对称化形式 $\int_\Omega(-g\Delta f+f\Delta g)=\int_{\partial\Omega}(f\partial_\nu g-g\partial_\nu f)$。

行为： $\mathcal{L}_\gamma$在边界法向最高阶项中为一阶。尽管系数 γ 只出现在次主项中， $\mathcal{L}_\gamma$ 的算子论性质（例如自伴扩张的数量、相关迹及其在边界处的正则性）却强烈依赖于 γ。

文献中有许多此类算子的例子：

• 此类算子出现在流体流动的研究中，它们会跨越一条曲线从椭圆型转变为双曲型；其中两个原型是 Keldysh 算子（本文所研究的情形）和特里科米算子，详见例如该书[19]。事实上，1中的表达式 $\mathcal{L}_\gamma$ 可自然地延拓至单位圆之外，而该算子在单位圆盘之外变为双曲型。这里我们仅关注“椭圆区域” $\mathbb{D}$，并在该区域研究算子 $\mathcal{L}_\gamma$ 。

• 近年来，在渐近双曲流形和时空上的微局部方法研究取得进展之际，Vasy 在 [22, 21] 发起了一系列工作，利用了 Keldysh 型算子的某些性质。在渐近双曲流形上，经过紧化并改变光滑结构后，拉普拉斯-贝尔特拉米型算子可以用模型 Keldysh 算子进行分解；前者预解式的亚纯延拓关键地利用了后者具有径向点估计这一性质，另见 [24]。Keldysh 算子也可视为闵可夫斯基拉普拉斯算子在径向紧化闵可夫斯基时空边界上的限制。在那里，椭圆区域对应于类时轨迹的极限点所在的极冠。另见[12, 10]。

• 从相反的方向来看，可以将 Keldysh 型算子纳入 Mazzeo 的一致退化（或 0-）算子框架 [13], 。这一框架最初旨在研究渐近双曲流形上的（Hodge）拉普拉斯算子，为这类算子提供了一个灵活的背景，使其能够成为 Fredholm 算子。这类算子还会作为数理金融中的赫斯顿扩散 [9], 或群体遗传学中的木村扩散 [8, 7]的（空间部分）出现。在这些情形中，研究还因模型必然涉及带角点的空间区域而更加复杂。研究内容包括与这些算子相关的扩散，以及解的正则性性质。

• 下面构造的 H^1-型空间是 [5, 20], 意义下与退化二次型相关的索伯列夫空间的一个例子，不过其退化二次型具有稍微更具体的退化行为（仅在边界处退化，且其行为关于边界点是一致的）。

作者开展这项工作的动机，源于 $\mathcal{L}_\gamma$ 族与带有（测地线）凸边界的黎曼流形上的逆问题之间的联系，尤其是对能够刻画测地线 X 射线变换精确映射性质的适当希尔伯特尺度的描述，参见例如 [17, 16, 15, 14, 18]。最近，作者与 Mishra 在 [15] 中证明，欧几里得圆盘上的一单参数加权测地线X射线变换族，其正规算子是 $\mathcal{L}_\gamma$ 和 $i\partial_\omega$（的一个特定自伴实现）的函数。作为探索退化椭圆算子与更一般黎曼曲面上的 X 射线变换之间联系的一步，本文致力于研究族 $\mathcal{L}_\gamma$ 本身，

包括迹算子的存在性（或不存在性）及其正则性、狄利克雷到诺伊曼映射，以及能够精确描述映射性质的适当希尔伯特尺度。

工作的出发点是这一观察：对于任意 f、$g \in C^\infty(\mathbb{D}^{int})$ 和 $R \in (0,1)$，

$$\int_{\mathbb{D}_R} \left(\bar{g}\mathcal{L}_\gamma f - x\partial_\rho f \; \partial_\rho \bar{g} - \frac{1}{\rho}\partial_\omega f \frac{1}{\rho}\partial_\omega \bar{g} - (\gamma+1)^2 f\bar{g} \right) x^\gamma \, \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathbb{D}_R} \rho x^{\gamma+1} \bar{g}\partial_\rho f \, \mathrm{d}\omega, \tag{3}$$

$$\int_{\mathbb{D}_R} (\bar{g}\mathcal{L}_\gamma f - f\mathcal{L}_\gamma \bar{g}) \, x^\gamma \, \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathbb{D}_R} \rho x^{\gamma+1} (\bar{g}\partial_\rho f - f\partial_\rho \bar{g}) \, \mathrm{d}\omega, \tag{4}$$

，经典问题转化为理解这些恒等式在何种意义下可以被理解为格林第一、第二恒等式：对于哪些空间 f，g 我们可以将 $R \to 1$ 代入上述恒等式，并将右侧理解为边界迹？一旦能够在 $\mathcal{L}_\gamma$ 的定义域上实现这一点，其中它是一个闭算子，恒等式（4）的推广就给出了衡量 $\mathcal{L}_\gamma$ 与自伴性接近程度的方法，而 $\mathcal{L}_\gamma$ 的自伴实现则可以通过将 $\mathcal{L}_\gamma$ 限制到具有指定边界约束的子空间上来理解。经典地，将极小算子 $\mathcal{L}_{\gamma\text{定义为}min}$ 的闭包，其中 $\mathcal{L}_\gamma$ 配备定义域 $C^\infty(\mathbb{D})$（在边界处以无穷阶消失的光滑函数）。由（4）可知，算子 $\mathcal{L}_{\gamma\text{容易}min}$ 是对称的，而一个经典问题是理解并刻画 $\mathcal{L}_\gamma$ 在 $\mathcal{L}_{\gamma\text{与}min}$ 以及 $\mathcal{L}_{\gamma\text{与}max}$ 之间的所有自伴实现：$= \mathcal{L}^*_{\gamma,\ min}$。

现在简要介绍本文的主要结果，下一节将对此作出阐述。

在第 2.1 节中，我们首先固定记号并陈述 $\mathcal{L}_\gamma$ 族的初步性质，同时回顾先前文献中给出的某些特殊自伴实现 [23, 15]。

在第 2.2 节中，我们首先用此前已知的扩张刻画 $\mathcal{L}_\gamma$ 的弗里德里希斯扩张，并在定理 3 中推导出，对于 $|\gamma| \geq 1$，极小算子 $\mathcal{L}_{\gamma,min}$ 实际上是自伴的。特别地，$\mathcal{L}_{\gamma\text{只有一个自伴扩张},\ min}$，并且当扩张到 $R \to 1$ 且 f, g 在 $\mathcal{L}_\gamma$ 闭的定义域中时，(3)-(4) 的右侧只能是平凡的。

第 2.3 节随后讨论 $|\gamma| < 1$ 的情形，此时情况明显不同：可以定义这样的定义域，使得 $\mathcal{L}_\gamma$ 闭合，并且(3)-(4)的右侧可以扩展为狄利克雷迹算子和诺伊曼迹算子；其精确的映射性质和切向正则性见主要定理，即定理5和定理8。在这种情况下，还可以自然地定义狄利克雷到诺伊曼映射，见定理 6。主要定理给出了当 f, g 属于最大定义域（即 $\mathcal{L}^*_{\gamma,min}$的定义域）时理解格林恒等式(3)-(4)的方法，见定理 8；或者当它们属于其中一个称为 W^2_γ 的子空间（见(28)）时，见定理5。不同于定理3，算子 $\mathcal{L}_\gamma$ 现在具有无穷多个自伴实现，其定义域通过规定某些边界条件来确定。

为使这一点更加明确，在第2.4节中，我们用边界三元组和广义边界三元组的语言重新表述主要结果。通过一般的泛函分析框架，后者可以将给定算子的自伴扩张

表述为自伴边界关系，参见例如 [2, 3, 1], 用经典概念来表述，例如 γ场（此处称为“泊松映射”，以避免与常数 γ冲突）和魏尔 M函数。

最后，我们简要说明本文采用的方法。族 $\mathcal{L}_\gamma$ 具有旋转不变性，因此产生了可数多个一维算子 $\{\mathcal{L}_{\gamma,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$，它们定义在 $[0,1]_\rho$ 上，并由关系 $\mathcal{L}_\gamma(e^{in\omega}f(\rho)) = e^{in\omega}\mathcal{L}_{\gamma,n}f(\rho)$ 给出。原则上，这类算子可以用 Sturm–Liouville理论加以研究。用该理论的术语来说，端点 $\rho = 0$ 始终是奇异的，而端点 $\rho = 1$ 的性质取决于 γ，但不取决于 n：情形 $\gamma \in (-1, 0), \gamma \in [0, 1)$ 和 $|\gamma| \geq 1$ 分别对应于 $\rho = 1$ 为“正则点”、“极限圆情形下的奇异点”和“极限点情形下的奇异点”。$\gamma = 0$ 的情形还涉及一个重指标根，因此需要更精细的分析。我们利用这些先验知识构造适用于各个 $\mathcal{L}_\gamma$ 的 H^1 型函数空间（直接定义在 $\mathbb{D}$ 上，而不是分别定义在每个角向傅里叶模态上）；其中有些空间需要二维版本的“拟导数”，和／或在出现重指标根时需要对数型切向Sobolev正则性。我们构造了若干迹算子（以及在存在时的相应右逆），其有界性通过结合角向傅里叶分析与连续参数族的一维迹估计（例如见引理 21 和 22）得到；有时也会利用 [23]，中关于广义泽尼克多项式的特定知识，例如见命题 27。一旦建立了这类迹估计并构造出相应的右逆，许多结果便可通过稠密性、对偶性和泛函分析论证得出。当前分析的优势之一在于其直接且自成一体，无需改变 $\mathcal{L}_\gamma$ 的光滑结构，也无需对其进行因式分解。这些结果提供了新的函数空间族，使得能够自然地理解边界配对、 $\mathcal{L}_\gamma$ 的格林恒等式以及 Fredholm框架。还应当预期，这些泛函分析框架能够适用于类似的算子，即使它们不再具有旋转不变性。

2 主要结果

2.1 预备知识

˙指标根与余法空间 $\mathcal{A}_\gamma$。设 $C^\infty(\mathbb{D})$ 为闭单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上所有导数在 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$ 上均消失的光滑函数空间，其拓扑对偶记为 $C^{-\infty}(\mathbb{D})$。后者是可延拓分布空间，也是下文所考虑的最大空间。

我们首先为 $\mathcal{L}_\gamma$ 定义自然的“光滑”定义空间。将 $\mathcal{L}_\gamma$ 改写成如下形式 [2]

$$\mathcal{L}_\gamma = -x\Delta + (2+2\gamma)\rho\partial_\rho - \partial_\omega^2 + (\gamma+1)^2 id,$$

[2]注意，这个表达式与 [15, 定理 6], 的证明中出现的表达式不同，其中项 $(2+2\gamma)\rho\partial_\rho$ 被错误地写成了 $(3+2\gamma)\rho\partial_\rho$，不过这对 [15, 定理 6]的论证无关紧要。

其中 $\rho\partial_\rho$ 和 ∂_ω 是 $\mathbb{D}$ 上的光滑向量场，我们看到 $\mathcal{L}_\gamma$ 在 $\mathbb{D}$ 中具有光滑系数。因此自然有

$$\mathcal{L}_\gamma \colon \dot{C}^\infty(\mathbb{D}) \to \dot{C}^\infty(\mathbb{D}). \tag{5}$$

现在我们将此定义推广到一些特殊的余法空间。对于所有的 $\gamma \in \mathbb{R}$、 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，直接计算可得

$$\mathcal{L}_\gamma(\rho^\alpha e^{in\omega}) = (\alpha+\gamma+1)^2\rho^\alpha e^{in\omega} + (n^2-\alpha^2)\rho^{\alpha-2}e^{in\omega}. \tag{6}$$

类似地，

$$\mathcal{L}_\gamma(x^\alpha) = (2\alpha+\gamma+1)^2 x^\alpha - 4\alpha(\gamma+\alpha)x^{\alpha-1}. \tag{7}$$

特别地，指标根（与边界点无关）为 0 和 $-\gamma$，因为除非 $\alpha \in \{0, -\gamma\}$，否则 $\mathcal{L}_\gamma$（x^α）比 x^α 更奇异， $x \to 0$ 。

在下文中，以下交织性质可以直接验证，它将使我们能够把关于 $\mathcal{L}_\gamma$ 的已知结果转化为关于 $\mathcal{L}_{-\gamma}$ 的性质：

$$\mathcal{L}_\gamma \circ x^{-\gamma} = x^{-\gamma} \circ \mathcal{L}_{-\gamma} \quad \text{on} \quad C^\infty(\mathbb{D}^{int}), \qquad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

在 $\gamma = 0$ 的情形下，我们还有以下重要性质

$$\mathcal{L}_0(\log x\ f) = \log x\ \mathcal{L}_0 f + 4(\rho\partial_\rho f + f), \qquad f \in C^\infty(\mathbb{D}^{int}). \tag{9}$$

恒等式（9）可直接验证，也可利用（8），将 $\gamma \to 0$ 代入下列恒等式推导得到

$$\mathcal{L}_\gamma \circ \frac{x^{-\gamma}-1}{-\gamma} = \frac{x^{-\gamma}-1}{-\gamma} \circ \mathcal{L}_{-\gamma} + \frac{\mathcal{L}_\gamma - \mathcal{L}_{-\gamma}}{\gamma},$$

利用 $\frac{x^{-\gamma}-1}{-\gamma} \to \log x$ 当 $\gamma \to 0$。

上述关于指标根的讨论，结合（9），引出了如下定义：

$$\mathcal{A}_\gamma := \begin{cases} x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D}) + C^\infty(\mathbb{D}), & \gamma \neq 0, \\ \log x\ C^\infty(\mathbb{D}) + C^\infty(\mathbb{D}), & \gamma = 0, \end{cases} \tag{10}$$

编码边界行为的 $C^\infty(\mathbb{D}^{int})$ 子空间，每个子空间在 $\mathcal{L}_\gamma$作用下均保持不变，其中一些子空间构成 $\mathcal{L}_\gamma$ 的自伴性核心定义域。例如，对于 $\gamma > -1$， [15, 定理 6] 指出，$(\mathcal{L}_\gamma, C^\infty(\mathbb{D}))$ 是本质自伴的（此外，其完整的特征分解可用广义泽尼克多项式表示）。这一结果与交织性质（8）还立即表明存在其他自伴扩张，现不加证明地陈述如下：

引理 1. 对任意 $\gamma < 1$，作用于 L^2_γ 上的算子 $(\mathcal{L}_\gamma, x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D}))$ 是本质自伴的。

如下文所见，狄利克雷迹和诺伊曼迹在存在时，对应于一种机制，旨在提取 $\mathcal{A}_\gamma$ 中远离 $\partial\mathbb{D}$ 的函数展开中最奇异和次奇异的项。这里，“奇异”的排序是在多齐次项 $\{x^\zeta \log^k x\}_{\zeta\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}_0}$ 之间进行的，其中我们有

$$x^\zeta \log^k x = o(x^{\zeta'} \log^{k'} x) \quad \text{iff} \quad \begin{cases} Re(\zeta) > Re(\zeta') & \text{or} \\ Re(\zeta) = Re(\zeta') & \text{and} \quad k < k'. \end{cases}$$

在此意义下，狄利克雷迹和诺伊曼迹将被视为下文给出的各项前的系数

γ	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
Dirichlet term	1	$\log x$	$x^{-\gamma}$
Neumann term	$x^{-\gamma}$	1	1

分布事实。令 ${}^t\mathcal{L}_\gamma$: $C^{-\infty}(\mathbb{D}) \to C^{-\infty}(\mathbb{D})$ 为（5）的转置算子。存在一个自然的单射 ι_γ: $L^2_\gamma \cup \mathcal{A}_\gamma \to C^{-\infty}(\mathbb{D})$，定义为

$$\langle \iota_\gamma f, \psi\rangle := (f, \psi)_{L^2_\gamma}, \qquad f \in L^2_\gamma \cup \mathcal{A}_\gamma, \qquad \psi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{D}), \tag{11}$$

注意，$\mathcal{A}_\gamma \subset L^2_\gamma$ 当且仅当 $|\gamma| < 1$。若存在 $f \in L^2_\gamma$（分别地，$\mathcal{A}_\gamma$）使得 $u = \iota_\gamma f$，我们就称一个分布 $u \in C^{-\infty}(\mathbb{D})$“属于 L^2_γ（分别地，$\mathcal{A}_\gamma$）”。

通过分部积分可以看出，对于所有$f \in \mathcal{A}_\gamma$ 和 $\psi \in C^\infty(\mathbb{D})$，我们有$(\mathcal{L}_\gamma f, \psi)^{L^2_\gamma} = (f, \mathcal{L}_\gamma\psi)^{L^2_\gamma}$。这意味着

$${}^t\mathcal{L}_\gamma(\iota_\gamma f) = \iota_\gamma(\mathcal{L}_\gamma f), \qquad \forall f \in \mathcal{A}_\gamma. \tag{12}$$

特别地，通过映射ι_γ 得到的 ${}^t\mathcal{L}_\gamma$ 到 $\dot{C}^\infty(\mathbb{D})$或 $\mathcal{A}_\gamma$ 的“限制”与 $\mathcal{L}_\gamma$一致。因此，对于$f \in L^2_\gamma$，如果分布 ${}^t\mathcal{L}_\gamma(\iota_\gamma f)$属于$L^2_\gamma$，我们就称$\mathcal{L}_\gamma f \in L^2_\gamma$。

两个自然的算子。可以从 $\mathcal{L}_\gamma$定义两个自然的闭算子:

(i) 极小算子 $\mathcal{L}_{\gamma,\ min}$，即式（5）中定义的算子的闭包（也称为预极小算子），其定义域是 C^∞（$\mathbb{D}$）在图范数下的完备化

$$f \mapsto n_\gamma(f) := (\|f\|^2_{L^2_\gamma} + \|\mathcal{L}_\gamma f\|^2_{L^2_\gamma})^{1/2}. \tag{13}$$

(ii) 极大算子 $\mathcal{L}_{\gamma,\ max}$，即 $\mathcal{L}_{\gamma,\ min}$ 的伴随，其定义域为

$$\text{dom}\ (\mathcal{L}_{\gamma,max}) = \left\{ f \in L^2_\gamma, \quad \mathcal{L}_\gamma f \in L^2_\gamma \right\}. \tag{14}$$

2.2 狄利克雷扩张的刻画。$\mathcal{L}_{\gamma,\ min}$ 的自伴性，当$|\gamma| \geq 1$

令 $\mathcal{L}_{\gamma,D}$ be 二次型 α_γ 的弗里德里希斯扩张： $C_c^\infty(\mathbb{D}^{int}) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\alpha_\gamma(f) := (\mathcal{L}_\gamma f, f)_{L^2_\gamma} \overset{(\star)}{=} \|\sqrt{x}\ \partial_\rho f\|^2_{L^2_\gamma} + \|\rho^{-1}\partial_\omega f\|^2_{L^2_\gamma} + (1+\gamma)^2\|f\|^2_{L^2_\gamma}, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{D}^{int}), \tag{15}$$

其中 $(\star)$ 可由不含边界项的分部积分得到。于是我们有以下刻画：

引理 2。算子 $\mathcal{L}_{\gamma,\ D}$ 与以下本质自伴算子的闭包一致：

$$(\mathcal{L}_\gamma, x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})) \quad if \quad \gamma < 0 \qquad and \qquad (\mathcal{L}_\gamma, C^\infty(\mathbb{D})) \quad if \quad \gamma \geq 0.$$

上述算子的谱分解是众所周知的：对于 $\gamma \geq 0$, $\mathcal{L}_{\gamma,\ D}$ 具有完整的特征分解

$$\left\{G^\gamma_{n,k}, (n+1+\gamma)^2\right\}_{n\geq 0,\ 0\leq k\leq n}, \quad G^\gamma_{n,k} := P^\gamma_{n-k,k}, \tag{16}$$

其中 $P^\gamma_{m,\ \ell}$ 表示采用 [23]中的约定的广义泽尼克多项式；对于 $\gamma < 0$,$\mathcal{L}_{\gamma,\ D}$具有完整的特征分解 $\{x^{-\gamma}G^{-\gamma}_{n,k},(n+1-\gamma)^2\}_{n\geq 0,\ \ 0\leq k\leq n}$。无论哪种情形，我们都可以为 $\mathcal{L}_{\gamma,\ D}$ 定义泛函演算和狄利克雷索伯列夫尺度

$$\widetilde{H}^{s,\gamma}_D(\mathbb{D}) := \mathrm{dom}\ (\mathcal{L}^{s/2}_{\gamma,D}), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

使得下述算子有意义，并且实际上是一个等距同构

$$\mathcal{L}^{-1}_{\gamma,D} \colon \widetilde{H}^{s,\gamma}_D(\mathbb{D}) \to \widetilde{H}^{s+2,\gamma}_D(\mathbb{D}), \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

A作为第3.1节中证明的进一步稠密性引理的结果，我们有如下 g:

定理3. 若 $|\gamma| \geq 1$，则 $\mathcal{L}_{\gamma,\ min}$ 是自伴的。

特别是，这样的结果排除了在最大定义域上存在迹映射或狄利克雷到诺伊曼映射的可能性。

2.3 对于 $|\gamma| < 1$ 的迹、格林恒等式与狄利克雷到诺伊曼映射

虽然定理3 排除了在 $\mathcal{L}_{\gamma,min}$成立时存在多个自伴扩张的可能性，但现在我们将描述一种截然不同的情形：对于任意 $\gamma \in (-1, 1)$，这种情形都成立。根据 $\gamma \in (-1, 0)$、 $\gamma = 0$ 还是 $\gamma \in$(0, 1)，构造的简易程度各不相同；不过为简洁起见，我们将统一介绍。对于每个 $\gamma \in (-1, 1)$,

存在一个径向函数 ϕ_γ(见 (47)), 它在 $[0,x_\gamma)_x\times\mathbb{S}^1_\omega$的某个邻域内 $\partial\mathbb{D}$不为零，并且满足 $\mathcal{L}_\gamma\phi_\gamma=(\gamma+1)^2\phi_\gamma$在 $[0,x_\gamma)_x\times\mathbb{S}^1_\omega$上的相关性质

$$\begin{cases} \phi_\gamma\equiv 1, & \gamma\in(-1,0),\\ \lim_{\rho\to1}x^\gamma\phi_\gamma=1, \quad \lim_{\rho\to1}x^{\gamma+1}\partial_\rho\phi_\gamma=2\gamma, & \gamma\in(0,1),\\ \lim_{\rho\to1}(\phi_0/\log x)=1, \quad \lim_{\rho\to1}x\partial_\rho\phi_0=-2, & \gamma=0. \end{cases} \tag{19}$$

我们可以 然后定义“正则化”的狄利克雷迹和诺伊曼迹 $\tau^D_\gamma,\ \tau^N_\gamma\colon\ \mathcal{A}_\gamma\to C^\infty(\mathbb{S}^1)$ a s

$$\begin{gathered} \tau^D_\gamma f:=(f/\phi_\gamma)|_{x=0}, \qquad \tau^N_\gamma f:=W(f,\phi_\gamma)|_{x=0},\\ \text{where}\qquad W(f,g)(\rho,\omega):=\rho x^{\gamma+1}(f\partial_\rho g-g\partial_\rho f). \end{gathered} \tag{20}$$

特别地，直接计算表明，对于 $f\in\mathcal{A}_\gamma$，若取型 $f=f_{(0)}+\log x f_{(\log)}$ if $\gamma=0$，或者取 $f=f_{(0)}+x^{-\gamma}f_{(-\gamma)}$ if $|\gamma|\in(0,1)$，其中 $f_{(0)}f_{(\log)}f_{(-\gamma)}\in C^\infty(\mathbb{D})$，我们有

$$\tau^D_\gamma f=\begin{cases} f^{(0)}|_{x=0}, & \gamma\in(-1,0),\\ f^{(\log)}|_{x=0}, & \gamma=0,\\ f^{(-\gamma)}|_{x=0}, & \gamma\in(0,1), \end{cases} \quad\text{and}\quad \tau^N_\gamma f=\begin{cases} -2\gamma f^{(-\gamma)}|_{x=0}, & \gamma\in(-1,0),\\ -2f^{(0)}-2c_0f^{(\log)}|_{x=0}, & \gamma=0,\\ 2\gamma f^{(0)}|_{x=0}, & \gamma\in(0,1), \end{cases} \tag{21}$$

其中 c_0 是定义（47）中出现的常数， ϕ_0。在这个意义下，τ^D_γ提取最奇异项，而τ^N_γ提取次奇异项（或者当 $\gamma=0$时提取它们的线性组合）。此外，以下交织性质自然成立：对于 $\gamma\in(0,\ 1)$ 以及 $f\in\mathcal{A}_\gamma$，则 $x^\gamma f\in\mathcal{A}_{-\gamma}$ 和

$$\tau^D_\gamma f=\tau^D_{-\gamma}(x^\gamma f)\quad\text{and}\quad \tau^N_\gamma f=\tau^N_{-\gamma}(x^\gamma f). \tag{22}$$

为了讨论格林恒等式，我们首先需要定义一种“H^1”内积，使狄利克雷迹有界延拓。一个初步的设想是将型 α_γ（定义于（15）中）延拓到 $\mathcal{A}_\gamma$，但这只有在 $\gamma\in$（-1，0）时才有意义。事实上，例如当 $\gamma\in$（0，1）时，将（15）中最后一个右侧表达式作用于 $x^{-\gamma}C^\infty$（$\mathbb{D}$）的元素时，结果可能变为无穷大，此处的等式（$\star$）便不再成立；另请参见第 4.1 节“情形 $0\le\gamma<1$”。

为解决这一问题，我们令 $\rho_\gamma=\sqrt{1-x_\gamma}$；对于满足 $a<b$ 的 $a,b\in[0,1]$，令 $\mathbb{D}_a$ 为半径为 a、边界为 C_a 的中心圆盘，并令 $A_{a,\ b}$ 为环域 $\{a<\rho<b\}$。于是，对 $f,g\in\mathcal{A}_\gamma$ 和 $b\in(\rho_\gamma,1)$，我们定义：

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_{\gamma,b}[f,g]:=&\left(\sqrt{x}\ \phi_\gamma\partial_\rho(f/\phi_\gamma),\sqrt{x}\ \phi_\gamma\partial_\rho(g/\phi_\gamma)\right)_{x^\gamma,A_{b,1}}-b(x(b))^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi_\gamma}{\phi_\gamma}(b)\int_{C_b}f\bar g\\ &+\left(\sqrt{x}\ \partial_\rho f,\sqrt{x}\ \partial_\rho g\right)_{x^\gamma,\mathbb{D}_b}+\left(\rho^{-1}\partial_\omega f,\rho^{-1}\partial_\omega g\right)_{L^2_\gamma}+(\gamma+1)^2\,(f,g)_{L^2_\gamma}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中，以下各处均将 $\int_{C_b}h$ 简记为 $\int_0^{2\pi}h(b,\ \omega)\,\mathrm{d}\omega$。可以验证，对于任意 $f\in\mathcal{A}_\gamma$，都有 $\sqrt{x}\ \partial_\rho f$在 L^2_γ中远离边界，并且 $\sqrt{x}\ \phi_\gamma\partial_\rho(f/\phi_\gamma)$ 在 L^2_γ中靠近边界，因此（23）是良定义的。

引理 4. (1) 对任意 $f,g\in\mathcal{A}_\gamma$，$\mathfrak{t}_{\gamma,\,b}$的定义不依赖于 $b\in(b_\gamma,1)$。因此，我们将 $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^{1,\,\gamma}}$记为任意 b 时 $\mathfrak{t}_{\gamma,\,b}$的值。

(2) 取α_γ 在(15)中定义的型，对于 $\gamma\in[0,1)$

$$(f,f)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}=\alpha_\gamma(f),\qquad f\in\mathcal{A}_{\gamma,D},\quad where\quad \mathcal{A}_{\gamma,D}:=\ker\tau_\gamma^D, \tag{24}$$

而对于 $\gamma\in(-1,0)$，上述等式在整个 $\mathcal{A}_\gamma$ 上显然成立。

(3) 对任意 $f,g\in\mathcal{A}_\gamma$，第一格林恒等式成立

$$(\mathcal{L}_\gamma f,g)_{L^2_\gamma}=(f,g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}+\left(\tau_\gamma^N f,\tau_\gamma^D g\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)}. \tag{25}$$

(4) 对任意 $\gamma\in(-1,1)$，型$(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}$在(23) 中定义，在 $\mathcal{A}_\gamma$上正定。

将（25）反对称化后，第二格林恒等式为

$$(\mathcal{L}_\gamma f,g)_{L^2_\gamma}-(f,\mathcal{L}_\gamma g)_{L^2_\gamma}=\left(\tau_\gamma^N f,\tau_\gamma^D g\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)}-\left(\tau_\gamma^N g,\tau_\gamma^D f\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)},\qquad f,g\in\mathcal{A}_\gamma, \tag{26}$$

这是一种量化 $\mathcal{L}_\gamma$自伴性缺失程度的方法。于是，问题在于找到一些空间，使得 $\mathcal{L}_\gamma$ 是闭的，并将迹（20）延拓到这些空间。

由于根据引理 4.(4)，型 $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}$是正定的，因此我们令

$$\begin{aligned}&\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}):\text{ the completion of }(\mathcal{A}_\gamma,(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}),\\&\widetilde{H}_0^{1,\gamma}(\mathbb{D}):\text{ the completion of }(\dot{C}^\infty(\mathbb{D}),(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}).\end{aligned} \tag{27}$$

显然有包含关系 $\widetilde{H}^{1}_{,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D})\subset\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})\subset L^2_\gamma\subset C^{-\infty}(\mathbb{D})$。对于下文而言，$\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 的一个重要子空间是

$$W^2_\gamma:=\{f\in\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}),\quad \mathcal{L}_\gamma f\in L^2_\gamma\}=\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max})\cap\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}), \tag{28}$$

赋予范数 $\|f\|^2_{W^2_\gamma}:=\|f\|^2_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}+\|\mathcal{L}_\gamma f\|^2_{L^2_\gamma}$。

在 $\mathbb{S}^1=\partial\mathbb{D}$ 上，我们将 $H_{(\gamma)}$ 定义为 $(C^\infty(\mathbb{S}^1)\ \|\cdot\|_{(\gamma)})$ 的完备化，其中对于 $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k e^{ik\theta}$，我们定义

$$\|f\|^2_{(\gamma)}:=\begin{cases}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2|\gamma|}|f_k|^2, & |\gamma|\in(0,1),\\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+\log\langle k\rangle)|f_k|^2, & \gamma=0.\end{cases} \tag{29}$$

对于 $|\gamma|\in(0,1)$，$H_{(\gamma)}$ 是经典的索伯列夫空间 $H^{|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$，其对偶空间可识别为 $H^{-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$。对于 $\gamma=0$，$H_{(0)}$ 是对数加权索伯列夫空间，其对偶空间可识别为 $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 关于范数 $f\mapsto\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+\log\langle k\rangle)^{-1}|f_k|^2$ 的完备化。下文中，我们将相应的对偶配对记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'_{(\gamma)}\,H_{(\gamma)}}$。我们的第一个主要定理如下:

定理 5。设 $\gamma \in (-1,1)$。式 (20) 中定义的迹 $\tau^{D,\gamma}{}^{N}$ 可延拓为有界算子τ_γ^D: $\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}) \to H_{(\gamma)}$ 和 τ_γ^N: $W_\gamma^2 \to H'_{(\gamma)}$, 其中 τ_γ^D 为满射。格林第一恒等式 (25) 可延拓至$f \in W_\gamma^2$和 $g \in \widetilde{H}^{1,\gamma}$

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L_\gamma^2} = (f,g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} + \langle \tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g\rangle_{H'_{(\gamma)},H_{(\gamma)}}. \tag{30}$$

特别地，格林第二恒等式(26) 可推广至 $f,g \in W_\gamma^2$

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L_\gamma^2} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L_\gamma^2} = \langle \tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g\rangle_{H'_{(\gamma)},H_{(\gamma)}} - \langle \tau_\gamma^N g, \tau_\gamma^D f\rangle_{H'_{(\gamma)},H_{(\gamma)}}. \tag{31}$$

此外，对于 $\gamma \in (-1,1)$，可以定义狄利克雷到诺伊曼映射的类似映射，该映射相对于谱参数 $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,D})$ 定义（对于任意算子 B， $\rho(B)$ 表示其预解集）。

定理 6. 对于任意 $\gamma \in (-1,1)$ 和任意 $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,D})$，存在一个有界的狄利克雷到诺伊曼映射算子

$$\Lambda_\gamma(\lambda)\colon H_{(\gamma)} \to H'_{(\gamma)}, \tag{32}$$

使得对于任意 $u \in W_\gamma^2 \cap \ker(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)$， $\Lambda_\gamma(\lambda)(\tau_\gamma^D u) = \tau_\gamma^N u$。

我们的第二个主要结果是将格林第二恒等式（26）推广到在（14）中定义的最大定义域 $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max})$。这需要根据一个特别的、性质已充分了解的 $\mathcal{L}_\gamma$ 自伴扩张来拆分最大定义域, 此处具体为 $\mathcal{L}_{\gamma,D}$ 。本文下文中，我们定义 $\mathcal{N}_\lambda(\mathcal{L}_{\gamma,max}) := \{f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max}) \ \ \mathcal{L}_\gamma f = \lambda f\}$。

引理 7. 对于 $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ D}) = \widetilde{H}^{2,\ \gamma}_{\ D}(\mathbb{D})$，任意 $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,\ D})$，我们有

$$dom\ (\mathcal{L}_{\gamma,max}) = dom\ (\mathcal{L}_{\gamma,D}) \oplus \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{L}_{\gamma,max}) \tag{33}$$

对于 $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ max})$，固定 $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,\ D})$ 后，我们将 $f = f_D + f_\lambda$ 按照f （33）对其进行分解。我们的第二个主要定理如下。

定理 8. 在 $\tau^{D,\ \gamma}{}^{N}$中定义的迹 (20) 延拓为有界满射算子

$$\tau_\gamma^N\colon \widetilde{H}_D^{2,\gamma}(\mathbb{D}) \to H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1), \qquad \tilde{\tau}_\gamma^D\colon dom\ (\mathcal{L}_{\gamma,max}) \to H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1).$$

格林第二恒等式（26）可扩展至 $f,g \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max})$，如下所示:

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L_\gamma^2} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L_\gamma^2} = \langle \tilde{\tau}_\gamma^D g, \tau_\gamma^N f_D\rangle_{H^{-1+|\gamma|},H^{1-|\gamma|}} - \langle \tilde{\tau}_\gamma^D f, \tau_\gamma^N g_D\rangle_{H^{-1+|\gamma|},H^{1-|\gamma|}}. \tag{34}$$

2.4 推论：边界三元组、自伴扩张及其他

边界三元组理论是一种泛函分析框架，可借助算子的泊松映射和Weyl函数来描述算子的所有自伴实现及其谱，参见 [1]。为此引入了更精细的概念，例如 广义边界三元组 和拟边界三元组（例如参见 [2, 3, 6]）。现在我们将说明主要定理 5 和8 如何以及为何适用于这一框架，并给出一些自然推论。

2.4.1 预备知识

边界三元组及其魏尔函数。下文中，我们遵循[3] 中的论述，更多细节请参见该文献。设 S 是作用于希尔伯特空间（$\mathcal{H}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$）上的稠密定义闭对称算子。若三元组 $\{\mathcal{G},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ 满足（$\mathcal{G}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{G}}$）是一个希尔伯特空间，且 Γ_0,Γ_1: dom（S^*） $\to \mathcal{G}$ 是线性映射，使得映射（Γ_0,Γ_1）: dom（S^*） $\to \mathcal{G}\times\mathcal{G}$ 为满射，并且对所有 $f,g\in\in$dom（S^*），下述抽象拉格朗日/格林恒等式成立，则称 $\{\mathcal{G},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ 为伴随算子 S^* 的边界三元组，

$$(S^*f,g)_{\mathcal{H}}-(f,S^*g)_{\mathcal{H}}=(\Gamma_1 f,\Gamma_0 g)_{\mathcal{G}}-(\Gamma_0 f,\Gamma_1 g)_{\mathcal{G}}\,. \tag{35}$$

根据 [3, 命题 1.2], ，边界三元组可通过 $\mathcal{G}$ 中的闭线性关系[3] R ，经由以下双射，对S 的所有作为 S^* 限制的闭扩张进行参数化

$$R\mapsto A_R:=S^*|(\Gamma_0,\Gamma_1)^{-1}(R).$$

给定 $\mathcal{G}$ 上的一个关系 R，我们定义伴随关系 $R^*:=\{(f,f')\in\mathcal{G}\times\mathcal{G},(f',h)_{\mathcal{G}}=(f,h')_{\mathcal{G}}$对所有 $(h,h')\in R\}$。进一步的恒等式 $A_{R^*}=A_R^*$ 蕴含：当且仅当 R 是 $\mathcal{G}$ 中的一个自伴关系时， A_R 才是自伴的。

为了进一步讨论此类扩张的谱性质，我们应当提及，下文引用的结果有时会将关系 R 限制为如下形式：$\{(f,\Theta f)\ \ f\in\mathcal{G}\}$，其中 Θ: $\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 是某个线性映射；在这种情况下，我们将该扩张记为 $A_\Theta:=S^*|\ker(\Gamma_1-\Theta\Gamma_0)$。或者，关系也可具有如下形式： $\{(Bf,f)\ \ f\in\mathcal{G}\}$，其中 B: $\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 是某个线性映射；在这种情况下，我们将该扩张记为 $A_{[B]}:=S^*|\ker(B\Gamma_1-\Gamma_0)$。

记作 $A_0:=A_{\{0\}\times\mathcal{G}}=S^*|\ker\Gamma_0$，一个边界三元组导出泊松映射[4] P和一个魏尔函数 M的概念，

$$P(\lambda):=(\Gamma_0|\mathcal{N}_\lambda(S^*))^{-1},\qquad M(\lambda):=\Gamma_1P(\lambda),\qquad \lambda\in\rho(A_0).$$

根据 [3, 命题 1.5， 1.6]、 P和 M 分别是定义在 $\rho(A_0)$ 上、取值于 $\mathcal{B}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ 的全纯函数。

[3] $\mathcal{G}$ 中的一个闭线性关系 R 是 $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$的一个闭线性子空间。[4]请注意，在偏微分方程语境中，它可被解释为泊松映射。在抽象边界三元组理论中，此类映射被称为 γ-场；为避免与 $\mathcal{L}_\gamma$中的常数 γ 混淆，我们在此避免使用这一术语。

此外， M 是一个赫尔格洛茨函数，因此可以通过以下方式刻画 S 的任意闭扩张 A_Θ 的谱：在上文提到的“Θ”约定下，[3, 定理 1.7 (ii)] 指出，当且仅当 $0 \in \sigma_i(\Theta - M(\lambda))$ 时， $\lambda \in \sigma_i(A_\Theta)$， $i = \mathrm{p}$、c、r，其中 σ_{p}、 σ_{c}、 σ_{r}分别表示点谱、连续谱和剩余谱。函数 P 和 M 还可用于写出克赖因公式，该公式将 A_Θ 的预解式与 A_0 的预解式联系起来：$= S^* | \ker \Gamma_0$：对所有 $\lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(A_\Theta)$，

$$(A_\Theta - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + P(\lambda)(\Theta - M(\lambda))^{-1} P(\overline{\lambda})^*. \tag{36}$$

鉴于 P 和 M的实用性，接下来关注的是如何计算它们，或者如何将它们与狄利克雷到诺伊曼映射等量联系起来。因此，已知极大算子的边界三元组涉及一些会使这一目的更难实现的运算，这促使人们在下文定义稍弱一些的概念，即在 [6], 中首次引入的广义边界三元组，甚至更弱的拟边界三元组，后者首次在 [2]中引入。

拟/广义边界三元组及其 Weyl函数。若三元组 $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$是 S^* 的拟边界三元组，则 $(\mathcal{G}, (\cdot,\cdot)_\mathcal{G})$ 是希尔伯特空间，并且存在算子 T，使得 $\overline{T} = S^*$ 和 $\Gamma_0, \Gamma_1 : \mathrm{dom}\,(T) \to \mathcal{G}$ 为线性映射，且 $(\Gamma_0, \Gamma_1) : \mathrm{dom}\,(T) \to \mathcal{G} \times \mathcal{G}$的值域稠密；对于所有 $f, g \in \mathrm{dom}\,(T)$，式 (35) 均成立，并且 $A_0 := T | \ker \Gamma_0$在 $\mathcal{H}$中自伴。若此外 Γ_0 是满射到 $\mathcal{G}$，则 $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ 是广义边界三元组。

给定 Ra $\mathcal{G}$中的线性关系，我们类比上文定义 S 的扩张 A_R：

$$A_R := T | \{f \in \mathrm{dom}\,(T) : (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \in R\},$$

尽管这不再与 S的自伴扩张构成一一对应。由于映射 (Γ_0, Γ_1) 不再是满射，我们定义 $\mathcal{G}_0 := \mathrm{ran}(\Gamma_0)$ 和 $\mathcal{G}_1 := \mathrm{ran}(\Gamma_1)$；对于任意$\lambda \in \rho(A_0)$，我们可以将泊松映射 P 和 Weyl函数 M与上述拟边界三元组相关联。

$$P(\lambda) := (\Gamma_0 | \mathcal{N}_\lambda(T))^{-1} : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{H}, \qquad M(\lambda) := \Gamma_1 P(\lambda) : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1.$$

在“广义”边界三元组情形下， $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$，此时 $P(\lambda)$ 和 $M(\lambda)$ 均定义在整个 $\mathcal{G}$上。在附加假设下，这类函数具有许多与其“边界三元组”对应函数相同的性质，并可借助上文“Θ”约定下的定理 1.18] ，得到关于 Θ 的充分条件，使 $T | \ker(\Gamma_1 - \Theta\Gamma_0)$ 为自伴，从而对 S 的自伴扩张进行参数化；这些扩张是 T的限制。具体而言：

定理 9（ [3]中的定理 1.18）。设 S 是 $\mathcal{H}$ 中的稠密定义闭对称算子，且 $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ 是 $\overline{T} = S^*$ 的拟边界三元组，其中 $A_i = T | \ker \Gamma_i$、 $i = 0$、1 和魏尔

函数 M。假设 A_1 是自伴的，且对于某个 $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$，$\overline{M(\lambda_0)^{-1}}$ 是 $\mathcal{G}$ 中的紧算子。若 Θ 是 $\mathcal{G}$ 中的有界自伴算子，使得

$$\Theta(dom\ \overline{M(\lambda_\pm)}) \subset \mathcal{G}_1 \tag{37}$$

对某个 $\lambda_+ \in \mathbb{C}^+$ 和 $\lambda_- \in \mathbb{C}^-$ 成立，则 $A_\Theta := T|\ker(\Gamma_1 - \Theta\Gamma_0)$ 是 $\mathcal{H}$ 中的自伴算子。特别地，条件 (37) 在 $\mathrm{ran}(\Theta) = \mathcal{G}_1$ 时成立。

一项较新的改进去除了上述关于 $M(\lambda_0)^{-1}$ 的紧性要求，结果如下，并采用上文提到的“$\overline{B}$”约定来表述。

定理 10（ [4]中的推论2.7）。设 $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ 是 $T \subset S^*$ 的一个拟边界三元组，其对应的泊松映射为 P，Weyl函数为 M。设 B 是 $\mathcal{G}$ 中的有界自伴算子，并假设存在一个 $\lambda_0 \in \rho(A_0) \cap \mathbb{R}$，使得以下条件成立：

(i) $1 \in \rho(B\overline{M(\lambda_0)})$, (ii) $B(\mathrm{ran}\ M(\lambda_0))) \subset \mathrm{ran}\ \Gamma_0$, (iii) $\overline{B(\mathrm{ran}\ \Gamma_1)} \subset \mathrm{ran}\ \Gamma_0$ 或 $\lambda_0 \in \rho(A_1)$。

那么，算子 $A_{[B]} := T|\ker(B\Gamma_1 - \Gamma_0)$ 是 S 的一个自伴扩张，使得 $\lambda_0 \in \rho(A_{[B]})$，并且预解公式

$$(A_{[B]} - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + P(\lambda)(I - BM(\lambda))^{-1}BP(\bar{\lambda})^* \tag{38}$$

对所有 $\lambda \in \rho(A_{[B]}) \cap \rho(A_0)$ 都成立。

此外，如果 $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ 是一个广义边界三元组，那么条件 (ii) 和 (iii) 将自动满足，并且 $M(\lambda_0) = M(\lambda_0)$。在这种情况下，自伴性的条件归结为 $1 \in \rho(BM(\lambda_0))$。

2.4.2 定理 5和 8 的推论

恒等式（34）表明，在定义等距同构

$$\iota_{\pm(1-|\gamma|)} : H^{\pm(1-|\gamma|)}(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$$

suc使得 $\langle\varphi, \psi\rangle_{-1+|\gamma|,1-|\gamma|} = (\iota_-\varphi, \iota_+\psi)_{L^2(\mathbb{S}^1)}$，对于所有 $f, g \in \mathrm{dom}\ (\mathcal{L}_{\gamma,max})$，

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L^2_\gamma} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L^2_\gamma} = \left(\iota_{1-|\gamma|}\tau_\gamma^N f_D, \iota_{-1+|\gamma|}\tilde{\tau}_\gamma^D g\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)} - \left(\iota_{-1+|\gamma|}\tilde{\tau}_\gamma^D f, \iota_{1-|\gamma|}\tau_\gamma^N g_D\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)}, \tag{39}$$

其中 $f_D := (\mathcal{L}_{\gamma,D} - \lambda)^{-1}(\mathcal{L}_\gamma - \lambda) f$ 是对任意 $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,D})$ 将（33）投影到左直和项上的投影。根据上述定义，方程（39）恰好意味着如下内容：

推论 11。固定 $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,\ D})$，并令 $f \mapsto f_D$ 为（39）中投影到左直和项上的投影。定义映射，$_1$: dom $(\mathcal{L}_{\gamma,\ max}) \to L^2(\mathbb{S}^1)$，即

$$\Gamma_0 f := \iota_{-1+|\gamma|}\tilde{\tau}_\gamma^D f, \qquad \Gamma_1 g := \iota_{1-|\gamma|}\tau_\gamma^N g_D, \qquad f, g, \in dom\ (\mathcal{L}_{\gamma,max}), \tag{40}$$

其中，$\tilde{\tau}_\gamma^D$、τ_γ^N由定理 5定义，三元组 $\{L^2(\mathbb{S}^1)\ \Gamma_0$、$\Gamma_1\}$ 是算子 $\mathcal{L}_{\gamma,\ max}$的边界三元组。

根据上一节，推论 11 允许用自伴边界关系对 $\mathcal{L}_{\gamma,\ min}$ 的所有自伴扩张进行参数化。正如上一节所述，映射 $g \mapsto g_D$ 的出现改变了 M 函数的计算方式，因为后者不再是狄利克雷到诺伊曼映射的因式分解。原则上仍然可以按照例如 [1, 引理 8.45], 中应用于薛定谔算子的思想进行计算。

一种简化描述的方法是引入中间扩张 $T\colon = \mathcal{L}_{\gamma,\ max}|W_\gamma^2$，其中 W_γ^2定义于（28）中。恒等式（31）意味着，在定义等距同构 $\iota_{(\gamma)}\colon\ H_{(\gamma)} \to L^2(\mathbb{S}^1)$ 和 $\iota_{(\gamma)'}\colon\ H'_{(\gamma)} \to L^2(\mathbb{S}^1)$ 之后，对于所有 f、$g \in W_\gamma^2$，我们都有

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L_\gamma^2} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L_\gamma^2} = \left(\iota_{(\gamma)'}\tau_\gamma^N f, \iota_{(\gamma)}\tau_\gamma^D g\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)} - \left(\iota_{(\gamma)}\tau_\gamma^D f, \iota_{(\gamma)'}\tau_\gamma^N g\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

此外，算子 $\Gamma_0 := \iota_{(\gamma)}\tau_\gamma^D|W_\gamma^2$是满射，即 $\mathcal{G}_0 = L^2(\mathbb{S}^1)$（事实上，考察定理 6 的证明可知，对于任意 $f \in H_{(\gamma)}$，都可以构造一个函数 $u_f \in W_\gamma^2$ 使得 $\tau_\gamma^D u_f = f$），并且 $\Gamma_1 := \iota_{(\gamma)'}\tau_\gamma^N$ 在 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 中具有稠密值域，因为 $\mathcal{A}_\gamma \subset W_\gamma^2$且 $\tau_\gamma^N(\mathcal{A}_\gamma) = C^\infty(\mathbb{S}^1)$。结合 $T|\ker\Gamma_0 = \mathcal{L}_{\gamma,\ D}$是自伴的这一事实，我们可以得出：

推论 12 $\{L^2\ \mathbb{S}^1\ \ \iota_{(\gamma)}\tau_\gamma^D\ \iota_{(\gamma)'}\tau_\gamma^N\}$ S^* =。
$\mathcal{L}_{\gamma\ max}$ $T = \mathcal{L}_{\gamma\ max}|W_\gamma^2$ $M_\gamma\ \lambda\ \ L^2\ \mathbb{S}^1\ \ \to$
三元组 ()，通过扩张，是，的广义边界三元组。此外，Weyl 函数 $()\colon()L^2(\mathbb{S}^1)$ 由 $M_\gamma(\lambda) = \iota_{(\gamma)'}\Lambda_\gamma(\lambda)$ $\iota^{-1}{}_{(\gamma)}$给出，其中 Λ_γ 是定理 6中定义的狄利克雷到诺伊曼映射。

结合定理 10 及其紧随其后的注释，这一结果给出了一个简单的判据，可用于判断 $\mathcal{L}_{\gamma,min}$ 的扩张的自伴性；这些扩张的定义域包含于 W_γ^2，且该判据适用于范围广泛的边界条件，例如同时关联两个迹的罗宾型条件。

推论 13. 设 $\gamma \in (-1, 1)$、$\{L^2(\mathbb{S}^1)\ \iota_{(\gamma)}\tau_\gamma^D$、$\iota_{(\gamma)'}\tau_\gamma^N\}$、$T$ 和 $M_\gamma(\lambda)$ 如前一结果所述。设 B 是 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 中的一个有界自伴算子，并假设存在 $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,D}) \cap \mathbb{R}$，使得

$$1 \in \rho(BM_\gamma(\lambda_0)).$$

那么算子 $\mathcal{L}_{\gamma,[B]} := T|\ker(B\iota_{(\gamma)'}\tau_\gamma^N - \iota_{(\gamma)}\tau_\gamma^D)$ 是 $\mathcal{L}_{\gamma,min}$ 的一个自伴扩张，满足 $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,[B]})$，且其预解公式为

$$(\mathcal{L}_{\gamma,[B]} - \lambda)^{-1} = (\mathcal{L}_{\gamma,D} - \lambda)^{-1} + P_\gamma(\lambda)(I - BM_\gamma(\lambda))^{-1}BP_\gamma(\bar{\lambda})^*$$

对所有 $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\gamma,[B]}) \cap \rho(\mathcal{L}_{\gamma,D})$ 均成立，其中 $P_\gamma(\lambda) := (\iota_{(\gamma)}\tau_\gamma^D|\mathcal{N}_\lambda(\mathcal{L}_{\gamma,max}))^{-1}$。

上述结果的进一步改进可利用 $M_\gamma(\lambda_0)$ 的范数估计来证明剩余条件总是满足的，参见例如 [4] 其中 $\|M(\lambda)\| \to 0$ 如 $\lambda \to -\infty$。对此类问题进行更深入的研究，并针对特定边界条件加以分析，将是未来工作的重点。

后续各节概述。本文余下部分安排如下。第 3 节中，我们讨论 $|\gamma| \geq 1$ 的情形：首先在第 3.1 节给出一些稠密性结果，接着在第 3.2 节说明弗里德里希斯扩张的刻画（引理 2），最后在第 3.3 节证明 $\mathcal{L}_{\gamma,min}$ 是自伴的（定理3）。第 4 节中，我们介绍在 $\gamma \in (-1,1)$ 时为 $\mathcal{L}_{\gamma,max}$ 构造广义边界三元组（定理 5）和狄利克雷到诺伊曼映射（定理 6）；本节开头还将详细说明证明思路。第 5 节中，我们介绍在 $\gamma \in (-1,1)$ 时为 $\mathcal{L}_{\gamma,max}$ 构造（普通）边界三元组（定理 8）；本节开头还将详细说明证明思路。附录 A 中给出了部分辅助引理的证明。

3 稠密性结果、引理的证明2 和定理 3

3.1 一些初步的稠密性结果

我们首先探讨 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 何时在形如 $(\log x)^k x^\alpha C^\infty(\mathbb{D})$ 的空间中稠密，其中考虑 L^2_γ 拓扑和图范数拓扑 n_γ，后者定义于 (13) 中。

定理 14. (i) $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 在 L^2_γ 中对所有 $\gamma \in \mathbb{R}$ 都稠密；特别地，对所有 $\alpha > (-\gamma-1)/2$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$，它关于 L^2_γ 拓扑在 $(\log x)^k x^\alpha C^\infty(\mathbb{D})$ 中稠密。

(ii) 对所有 $\gamma \in \mathbb{R}$、$\alpha > (1-\gamma)/2$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$，$C_c^\infty(\mathbb{D})$ 关于图范数 n_γ 在 $(\log x)^k x^\alpha C^\infty(\mathbb{D})$ 中稠密。

为证明这些稠密性结果，我们使用以下“截断”引理:

引理15. 设 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 和 $g \in (\log x)^k x^\alpha C^\infty(\mathbb{D})$ 对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$成立。那么，如果 $2\alpha+\gamma > -1$，或者如果 χ 在 0 处具有无穷阶零点，则有

$$\|\chi(x/\epsilon)g\|_{L^2_\gamma} = O(|\log \epsilon|^k \epsilon^{\alpha+(\gamma+1)/2}), \qquad as\ \epsilon \to 0^+.$$

引理15的证明。 记 $C_g :=$ 最大值$_{\mathbb{D}} |(\log x)^{-k} x^{-\alpha} g|$, 由假设可知其有限。于是有

$$\begin{aligned}
\|\chi(x/\epsilon)g\|_{L^2_\gamma}^2 &= \int_{\mathbb{D}} |\chi(x/\epsilon)|^2 |g|^2 \, x^\gamma \, \mathrm{d}V \\
&\le C_g^2 \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^1 |\chi(x/\epsilon)|^2 x^{2\alpha+\gamma} |\log x|^{2k} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\omega \\
&\overset{x=\varepsilon y}{=} 2\pi C_g^2 \int_0^{1/\epsilon} |\chi(y)|^2 (\epsilon y)^{2\alpha+\gamma} |\log(\epsilon y)|^{2k} \, \epsilon \, \mathrm{d}y \\
&\le \sum_{i=0}^{2k} C_i |\log \epsilon|^i \epsilon^{2\alpha+\gamma+1}, \qquad C_i = 2\pi \binom{2k}{i} C_g \int_0^\infty |\chi(y)|^2 y^{2\alpha+\gamma} |\log(y)|^{2k-i} \, \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中，假设 $2\alpha + \gamma > -1$ 或 χ 在无穷阶消失，则所有常数均为有限值。

□

定理14的证明。 (i) 的证明。由于权函数 x^γ 在 $\mathbb{D}$上不在正测度集上消失，因此 L^2_γ 中的函数可以用支集为 内部 的 $\mathbb{D}$紧子集的函数来逼近。此类函数可以按标准方法用 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 函数逼近，并注意到 x^γ 在内部的任意紧子集上严格为正$\mathbb{D}$。第二部分由 $x^\alpha C^\infty(\mathbb{D}) \subset L^2_\gamma$ 对所有 $\alpha > (-\gamma - 1)/2$成立可得。

为证明 (ii)，我们采用截断法。也就是说，取 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\chi \equiv 1$ 在 0 的某个邻域内成立；对于 $f \in x^\alpha C^\infty(\mathbb{D})$，令

$$f_\epsilon = (1 - \chi(x/\epsilon)) f.$$

于是，对 $\epsilon > 0$，有 $f_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{D})$。我们有 $f_\epsilon \to f$ 属于 L^2_γ，因此只需检验 $\mathcal{L}_\gamma f_\epsilon \to \mathcal{L}_\gamma f$ 是否属于 L^2_γ。我们有

$$\mathcal{L}_\gamma f_\epsilon = -\rho^{-1} x^{-\gamma} \partial_\rho (\rho \, x^{\gamma+1} \partial_\rho f_\epsilon) - \rho^{-2} \partial_\omega^2 f_\epsilon + (1+\gamma)^2 f_\epsilon.$$

第三项收敛到 $1 + \gamma^2 f$ 于 L^2_γ，而第二项等于 $\rho^{-2}(1 - \chi(x/\epsilon))\partial_\omega^2 f$，它收敛到 $\rho^{-2}\partial_\omega^2 f$ 于 L^2_γ。还需验证当 $\epsilon \to 0$ 时， $\|\rho^{-1} x^{-\gamma} \partial_\rho (\rho \, x^{\gamma+1} \partial_\rho [f - f_\epsilon])\|_{L^2_\gamma} \to 0$。因此我们写作

$$\begin{aligned}
-\rho^{-1} x^{-\gamma} \partial_\rho (\rho x^{\gamma+1} \partial_\rho [f - f_\epsilon]) &= -\rho^{-1} x^{-\gamma} \partial_\rho (\rho \, x^{\gamma+1} \partial_\rho (\chi(x/\epsilon) f)) \\
&= -\rho^{-1} x^{-\gamma} \partial_\rho (\rho \, x^{\gamma+1} \chi(x/\epsilon) \partial_\rho f - 2\rho^2 \, x^{\gamma+1} \epsilon^{-1} \chi'(x/\epsilon) f) \\
&= \chi(x/\epsilon) g_0 + \epsilon^{-1} \chi'(x/\epsilon) g_1 + \epsilon^{-2} \chi''(x/\epsilon) g_2 \qquad (41)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
g_0 &= -\rho^{-1} \, x^{-\gamma} \partial_\rho (\rho \, x^{\gamma+1} \partial_\rho f), \\
g_1 &= -\rho^{-1} \, x^{-\gamma} (-2\rho^2 \, x^{\gamma+1}) \partial_\rho f - \rho^{-1} \, x^{-\gamma} \partial_\rho (-2\rho^2 \, x^{\gamma+1} f) \\
&= 4\rho \, x \partial_\rho f + (4x - 4(\gamma+1)\rho^2) f, \\
g_2 &= -4\rho^2 x \, f.
\end{aligned} \qquad (42)$$

现在注意，若 $f \in (\log\ x)^k x^\alpha C^\infty(\mathbb{D})$，则在（42）中定义的函数 g_0, g_1, g_2 满足 $g_i \in \sum_{j=\max(0,\ k-i)}^{k} (\log\ x)^j x^{\alpha-1+i} C^\infty(\mathbb{D})$, 因此由引理 15 可得

$$\|\epsilon^{-i}\chi^{(i)}(x/\epsilon)g_i\|_{L^2_\gamma} = O(|\log\epsilon|^k \epsilon^{-i+(\alpha-1+i)+(\gamma+1)/2}) = O(|\log\epsilon|^k \epsilon^{\alpha-(1-\gamma)/2})$$

对于 $i = 0,\ 1,\ 2$。由此可知，如果 $\alpha > (1-\gamma)/2$，将上述结果与（41）结合，可得

$$-\rho^{-1}\ x^{-\gamma}\partial_\rho(\rho\ x^{\gamma+1}\partial_\rho[f - f_\epsilon]) = O_{L^2_\gamma}(|\log\epsilon|^k \epsilon^{\alpha-(1-\gamma)/2}) = o_{L^2_\gamma}(1), \qquad \text{as } \epsilon \to 0.$$

□

3.2 Friedrichs 扩张与引理2的证明

回顾以下对于任意对称且正的（更一般地说，半有界）算子均成立的结果（参见，例如，[11, 第4.4节，第34]页）。

定理16。对称的正算子 T_0 在 $\mathcal{H}$ 上（其中 $D(T_0)$在 $\mathcal{H}$中稠密）存在一个自伴扩张，称为弗里德里希斯扩张。

构造如下。对于 T_0，我们关联型 $\alpha(u,v) := (T_0u, v)_{\mathcal{H}}$，其定义域为 $D(T_0)$。随后，我们考察 V 相对于范数 $u \mapsto (\alpha(u,u))^{1/2}$对 $D(T_0)$进行完备化所得的希尔伯特空间，将 V 视为嵌入 $\mathcal{H}$ 中，并通过连续性将 α 扩张为型$\tilde{\alpha}$，其定义域为 V（该型将关于 V上的范数连续）。最后令

$$D_F = \{u \in V\ :\ \exists\, C > 0\ \text{ s.t. } |\tilde{\alpha}(u,v)| \le C\|v\|_{\mathcal{H}}\}, \tag{43}$$

即，D_F 由满足以下条件的 $u \in V$ 组成：$\tilde{\alpha}(u,\cdot)$ 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的有界反线性泛函。对于这样的 u，存在唯一的元素 $T_F u \in \mathcal{H}$，使得 $\tilde{\alpha}(u,\cdot) = (T_F u, \cdot)_{\mathcal{H}}$；则定义域为 D_F 的 T_F 是弗里德里希斯扩张。注意，$D(T_0) \subset D_F \subset D(T_0^*)$，其中 $T_0^*|_{D_F} = T_F$ 且 $T_F|_{D(T_0)} = T_0$。

现在我们给出一个判据，用以确定自伴扩张何时是弗里德里希斯扩张；其证明放在附录A.1中。回顾一下，给定一个对称型 α，若序列u_n 属于 α 的定义域，且 α-收敛到 $u \in \mathcal{H}$（不一定属于 α的定义域），若

$$u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \text{ in } \mathcal{H} \quad \text{and} \quad \alpha(u_n - u_m, u_n - u_m) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.$$

引理 17（弗里德里希斯扩张的刻画）。设 T_0 是一个对称半有界算子，并设 T 是 T_0 的一个自伴扩张。那么，当且仅当 $D(T)$ 包含于 α 闭包 $D(T_0)$ 中时，T 是 T_0 的弗里德里希斯扩张，也就是说，

对于所有的 $u \in D(T)$，都存在一个序列 $u_n \in D(T_0)$，使得 $u_n \to_\alpha u$.

引理 2 的证明。我们旨在应用引理 17，并考虑在 (15) 中定义的二次型α_γ。证明归结为证明 α_γ-闭包包含 (i) 当 $\gamma \geq 0$ 时的 $C^\infty(\mathbb{D})$，以及 (ii) 当 $\gamma < 0$ 时的 $x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$。$\alpha_\gamma$-闭包的定义域关于图范数也是闭的，因此它包含 $C^\infty(\mathbb{D})$（分别为 $x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$）的图范数闭包，其中 $\gamma \geq 0$（分别为 $\gamma < 0$）。

我们简要说明为什么 (i) 蕴含 (ii)。对于 $\gamma < 0$ 和 $f \in x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$，假设 (i) 成立，则 $x^\gamma f$ 可以在 $\alpha_{-\gamma}$ 范数下由 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 中的一列 f_n 逼近。利用交织性质 (8)，我们便可得到 $\alpha_{-\gamma}(f_n - x^\gamma f) = \alpha_\gamma x^{-\gamma} f_n - f \to 0$，其中 $x^{-\gamma}f_n \in C_c^\infty(\mathbb{D})$。因此，$x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$ 包含于 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 的 α_γ-闭包中，故 (ii) 成立。

下面证明 (i)。对于 $\gamma \geq 0$，我们回顾一下，$(\mathcal{L}_\gamma, C^\infty(\mathbb{D}))$ 的闭包是一个具有特征基 $\{G_{n,k}^\gamma\}_{n\geq 0,\ 0\leq k\leq n}$ 的自伴算子，其中的特征基按 (16) 定义，并满足

$$\mathcal{L}_\gamma G_{n,k}^\gamma = (n+1+\gamma)^2 G_{n,k}^\gamma, \qquad G_{n,k}^\gamma|_{\mathbb{S}^1}(e^{i\omega}) = e^{i(n-2k)\omega},$$

其中，第二个性质使用了 [23, 公式 (2.10)]。定义域等于 $\widetilde{H}^{2,\gamma}_D$ 按 (17) 定义，也可表征为

$$\widetilde{H}_D^{s,\gamma} = \left\{ f = \sum_{n,k} f_{n,k}\, \widehat{G_{n,k}^\gamma} \,:\, \sum_{n,k} (n+\gamma+1)^{2s} |f_{n,k}|^2 < \infty \right\}$$

其中 $\widehat{G_{n,k}^\gamma} = G_{n,k}^\gamma / \|G_{n,k}^\gamma\|_{L^2_\gamma}$。根据引理 17，只需证明：对于每个 $f \in \widetilde{H}^{2,\gamma}_D$，存在 $f^{(j)}$ 属于 α_γ-$C_c^\infty(\mathbb{D})$-闭包，使得

$$f^{(j)} \xrightarrow{j\to\infty}_{\alpha_\gamma} f.$$

注意到，每个 f 都可以在 $\widetilde{H}^{2,\gamma}_D$ 中由泽尔尼克多项式 $G_{n,k}^\gamma$ 的有限线性组合逼近，并且在 $\widetilde{H}^{2,\gamma}_D$ 中收敛的序列也将 α_γ-收敛，因此只需在 $f = G_{n,k}^\gamma$ 时证明上述逼近结论。

根据定理 14.(ii)，我们注意到，对于所有 $\gamma > -1$（特别是对于 $\gamma \geq 0$），$xC^\infty(\mathbb{D}) \subset C_c^\infty(\mathbb{D})^{n_\gamma}$。特别地，$xC^\infty(\mathbb{D})$包含于 α_γ- $C_c^\infty(\mathbb{D})$-闭包中。因此，我们现在旨在证明：若对于某些 n, k，$f = G_{n,k}^\gamma$，则存在序列 $f_{(j)} \in xC^\infty(\mathbb{D})$，使得

$$f^{(j)} \xrightarrow{j\to\infty}_{\alpha_\gamma} f.$$

注意，当且仅当 $f|_{\mathbb{S}^1} = 0$ 时，$f \in C^\infty(\mathbb{D})$ 属于 $xC^\infty(\mathbb{D})$。此外，对于写成 $\sum_{n,k} f_{n,k} G_{n,k}^\gamma$ 形式的多项式，我们有

$$\sum_{n,k} f_{n,k} G_{n,k}^\gamma\big|_{\mathbb{S}^1}(e^{i\omega}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n-2k=m} f_{n,k} \right) e^{im\omega}.$$

因此，对于固定的 (n,k)，令 $m=n-2k$，并选取一个试探形式

$$f^{(j)}=G^{\gamma}_{n,k}-\sum_{n'-2k'=m} f^{(j)}_{n',k'}G^{\gamma}_{n',k'} \tag{44}$$

其中，对于每个 j，只有有限多个系数 $f^{(j)}_{n',k'}$ 非零，使得 $f_{(j)}\in C^{\infty}(\mathbb{D})$，并且我们有

$$\sum_{n'-2k'=m} f^{(j)}_{n',k'}=1 \tag{45}$$

使得 $\tau^{N}_{\gamma}f_{(j)}=0$，即 $f_{(j)}\in xC^{\infty}(\mathbb{D})$。我们的目标是选取这些系数，使得

$$\|f^{(j)}-G^{\gamma}_{n,k}\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}_{D}}\xrightarrow{j\to\infty}0.$$

注意到

$$\|f^{(j)}-G^{\gamma}_{n,k}\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}_{D}}=\left\|\sum_{n'-2k'=m} f^{(j)}_{n',k'}G^{\gamma}_{n',k'}\right\|^{2}_{\widetilde{H}^{1,\gamma}_{D}}=\sum_{n'-2k'=m}(n'+1+\gamma)^{2}\|G^{\gamma}_{n',k'}\|^{2}_{L^{2}_{\gamma}}|f^{(j)}_{n',k'}|^{2}.$$

现在我们使用以下初等引理，其证明见附录A.2：

引理 18. 设 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是满足 $\sum_{k=1}^{\infty}1/a_k=\infty$ 的正数列。则存在一个数列的数列 $\{\{c^{(j)}_k\}_{k=1}^{\infty}\}_{j=1}^{\infty}$，对于任意固定的 j，其中仅有有限多个数 $c^{(j)}_k$ 非零，且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}c^{(j)}_k=1,\qquad and\quad \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_k|c^{(j)}_k|^{2}=0.$$

因此，我们的目标是找到 $f^{(j)}_{n',k'}$ 满足 (45) 并且使得

$$\sum_{n'-2k'=m}(n'+1+\gamma)^{2}\|G^{\gamma}_{n',k'}\|^{2}_{L^{2}_{\gamma}}|f^{(j)}_{n',k'}|^{2}\xrightarrow{j\to\infty}0.$$

根据引理 18，应用于 $a_{k'}=(n'+1+\gamma)^{2}\|G^{\gamma}_{n',\,k'}\|^{2}_{L^{2}_{\gamma}}$ 和 $c^{(j)}_{k'}=f^{(j)}_{n',\,k'}$（其中 $n'-2k'=m$），我们看到这是可行的，条件是

$$\sum_{n'-2k'=m}\frac{1}{(n'+1+\gamma)^{2}\|G^{\gamma}_{n',k'}\|^{2}_{L^{2}_{\gamma}}}=\infty.$$

注意，对于固定的 m，我们可以用 k' 对上述和中的各项进行参数化，其中 $k' \in \mathbb{N}, k' \geq \max(0, -m)$，且

$$n' = 2k' + m \implies n' - k' = k' + m.$$

Thus

$$\begin{aligned}(n'+1+\gamma)^2 \|G^{\gamma}_{n',k'}\|^2_{L^2_\gamma} &= (n'+1+\gamma)^2 \frac{\pi (n'-k')!(k')!(\gamma!)^2}{(n'+\gamma+1)(n'-k'+\gamma)!(k'+\gamma)!} \\ &= (2k'+m+1+\gamma)^2 \frac{\pi (k'+m)!(k')!(\gamma!)^2}{(2k'+m+\gamma+1)(k'+m+\gamma)!(k'+\gamma)!},\end{aligned}$$

且后者与 $2\pi(\gamma!)^2(k')^{1-2\gamma}$ 当 $k' \to \infty$ 时渐近。由此可得

$$\sum_{n'-2k'=m} \frac{1}{(n'+1+\gamma)^2 \|G^{\gamma}_{n',k'}\|^2_{L^2_\gamma}} = \infty$$

只要 $1 - 2\gamma \leq 1$，或者等价地， $\gamma \geq 0$。 □

考察上面的证明，事实上我们可以证明以下结果，这将在后续章节中发挥作用。

Co推论 19. 对于 $\gamma \in (-1, 1)$，$C_c^\infty(\mathbb{D}^{int})$ 在 $\mathcal{A}_{\gamma,\ D}$ 关于 $\widetilde{H}^{1,\ \gamma}$ 拓扑是稠密的 .

证明。回忆一下，二次型 α_γ 和 $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^1,\gamma}$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 上相等。对于 $\gamma \in (-1,0)$，$\mathcal{A}_{\gamma,D} = xC^\infty(\mathbb{D}) + x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$，其中 $x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$ 包含于 $C_c^\infty(\mathbb{D}^{int})^{\alpha_\gamma}$，这由前面的证明可知；而 $xC^\infty(\mathbb{D})$ 包含于 $C_c^\infty(\mathbb{D}^{int})^{n_\gamma}$，这由定理 14.(ii) 可知，而后者本身又包含于 $C_c^\infty(\mathbb{D}^{int})^{\alpha_\gamma}$（这是因为由柯西 - 施瓦茨不等式，我们立即得到 $\alpha_\gamma(f) \leq n_\gamma(f)^2$）。对于 $\gamma = 0$ 和 $\gamma \in (0, 1)$ 的情形，证明类似。 □

3.3 定理3的证明

现在我们可以证明定理3了，即证明 $\mathcal{L}_{\gamma,min}$ 对于 $|\gamma| \geq 1$是自伴的，只需证明 $\mathcal{L}_{\gamma,min} = \mathcal{L}_{\gamma,D}$。这相当于证明：(i) 对于 $\gamma \geq 1$, $C_c^\infty(\mathbb{D})^{n_\gamma} = C^\infty(\mathbb{D})^{n_\gamma}$，以及 (ii) 对于 $\gamma \leq -1$, $C_c^\infty(\mathbb{D})^{n_\gamma} = x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})^{n_\gamma}$。

假设 (i) 成立，则可以如下证明 (ii)。固定 $\gamma \leq -1$ 和 $f \in x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$。根据 (i)， $x^\gamma f \in C^\infty(\mathbb{D})$ 可以在 $n_{-\gamma}$ 中由序列 $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{D}^{int}$逼近，然后利用交织关系（8），
$\|x^{-\gamma}f_n - f\|_{n_\gamma} = \|f_n - x^\gamma f\|_{n_{-\gamma}} \to 0$作为 $n \to \infty$，即序列 $x^{-\gamma}f_n \in C_c^\infty(\mathbb{D}^{int})$ 在 f中逼近 n_γ拓扑。

现在证明 (i)，固定 $\gamma \geq 1$。若 $\gamma > 1$，则结论由定理 14.(ii) 得出。极限情形 $\gamma = 1$需要特别处理，下面的证明对所有 $\gamma \geq 1$情形更是如此。根据定理 14.(ii)，有 $xC^\infty(\mathbb{D}) \subset C_c^\infty(\mathbb{D}^{int})^{n_\gamma}$，因此只需证明 ~~$C^\infty(\mathbb{D})$~~ $\subset xC^\infty(\mathbb{D})^{n_\gamma}$。由于每个 $f \in C^\infty(\mathbb{D})$ 都可以写成一个 n_γ-收敛

泽尔尼克多项式之和，只需证明每个泽尔尼克多项式 $G_{n,\ k}^{\gamma}$ 都可以由 n_{γ}-逼近于 $xC^{\infty}(\mathbb{D})$。因此固定 (n,k)，并令 $m=n-2k$，我们旨在用序列 $G_{n\ ,k}^{\gamma}$ 来逼近 $\{f^{(j)}\}_j$，其中 $xC^{\infty}(\mathbb{D})$ 中的元素具有式 (44) 的形式，其系数选取为满足 (45)，以确保 $f^{(j)}|_{\mathbb{S}^1}=0$，并且使得

$$\|f^{(j)}-G_{n,k}^{\gamma}\|_{\widetilde{H}_D^{2,\gamma}}=\left\|\sum_{n'-2k'=m}f_{n',k'}^{(j)}G_{n',k'}^{\gamma}\right\|_{\widetilde{H}_D^{2,\gamma}}\xrightarrow{j\to\infty}0.$$

在这种情况下，我们有

$$\left\|\sum_{n'-2k'=m}f_{n',k'}^{(j)}G_{n',k'}^{\gamma}\right\|_{\widetilde{H}_D^{2,\gamma}}^2=\sum_{n'-2k'=m}(n'+1+\gamma)^4\|G_{n',k'}^{\gamma}\|_{L_{\gamma}^2}^2|f_{n',k'}^{(j)}|^2.$$

根据引理 18，将其应用于 $a_{k'}=(n'+1+\gamma)^4\|G_{n',\ k'}^{\gamma}\|_{L_{\gamma}^2}^2$ 和 $c_{k'}^{(j)}=f_{n'}^{(j)}{}_{,\ k'}$（其中 $n'-2k'=m$），只要满足以下条件，我们就能找到所需的序列：

$$\sum_{n'-2k'=m}\frac{1}{(n'+1+\gamma)^4\|G_{n',k'}^{\gamma}\|_{L_{\gamma}^2}^2}=\infty.$$

注意，对于固定的 m，我们可以用 k' 对上述和中的各项进行参数化，其中 $k'\in\mathbb{N}$,$k'\geq\max(0,-m)$，并且

$$n'=2k'+m\implies n'-k'=k'+m.$$

Thus

$$\begin{aligned}(n'+1+\gamma)^4\|G_{n',k'}^{\gamma}\|_{L_{\gamma}^2}^2&=(n'+1+\gamma)^4\frac{\pi(n'-k')!(k')!(\gamma!)^2}{(n'+\gamma+1)(n'-k'+\gamma)!(k'+\gamma)!}\\&=(2k'+m+1+\gamma)^4\frac{\pi(k'+m)!(k')!(\gamma!)^2}{(2k'+m+\gamma+1)(k'+m+\gamma)!(k'+\gamma)!},\end{aligned}$$

当 $k'\to\infty$ 时，它与 $2\pi(\gamma!)^2(k')^{3-2\gamma}$ 渐近相等。由此可得

$$\sum_{n'-2k'=m}\frac{1}{(n'+1+\gamma)^4\|G_{n',k'}^{\gamma}\|_{L_{\gamma}^2}^2}=\infty$$

只要 $3-2\gamma\leq1$，也就是说 $\gamma\geq1$。因此，我们可以构造 $f^{(j)}\in xC^{\infty}(\mathbb{D})\subset\mathrm{dom}\ (\mathcal{L}_{\gamma,\ min})$，使其在图范数下逼近任意$G_{n\ ,\ k}^{\gamma}$ 这就完成了情形 $\gamma\geq1$的证明。定理3 的证明至此完成。

4 引理 4、定理 5 和 6

本节旨在证明第一个主要定理，即定理5。证明思路如下。

在第 4.1 节中，我们首先证明引理 4，其内容是为 $\mathcal{A}_\gamma$ 中的函数定义适当的 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 内积，使格林恒等式成立。接着，第 4.2 节介绍将 τ_γ^D 满射扩张至 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$，如以下定理 20 所述。这需要结合第 4.2.1 节推导的一维迹的基本估计，以及边界坐标中的傅里叶展开，从而在第 4.2.2 节完成定理 20 的证明。在第 4.3 节中，我们首先证明引理 25 中的预备性质：空间 $\widetilde{H}^{1}_{,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$ 的刻画、不含边界项的格林第一恒等式，以及 $\mathcal{L}_\gamma$ 有界的弱形式。转而证明定理 5 时，尚需通过对偶论证将诺伊曼迹扩张至 W_γ^2，并通过稠密性论证扩展格林恒等式。最后，我们在第 4.4 节证明定理 6。

4.1 引理4的证明

情形 $-1 < \gamma < 0$。此情形是“最简单”的，因为 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 空间不需要使用辅助函数 ϕ_γ，或者等价地，$\phi_\gamma = 1$ 可以使用，定义（23）等价于

$$\mathcal{A}_\gamma \ni f, g \mapsto (f,g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} := \left(\sqrt{x}\,\partial_\rho f, \sqrt{x}\,\partial_\rho g\right)_{L^2_\gamma} + \left(\rho^{-1}\partial_\omega f, \rho^{-1}\partial_\omega g\right)_{L^2_\gamma} + (1+\gamma)^2 (f,g)_{L^2_\gamma}, \quad (46)$$

因此不依赖于 b。注意τ_γ^D，τ_γ^N：$\mathcal{A}_\gamma \to C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 在（20）中定义，具有简化形式

$$\tau_\gamma^D f = f|_{x=0}, \qquad \tau_\gamma^N f = \lim_{x\to 0}(-x^{\gamma+1}\partial_\rho f), \qquad f \in \mathcal{A}_\gamma.$$

于是，将25）中的 $R \to 1$ 代入（3），即可得到（

情形 $0 \le \gamma < 1$。我们先简要说明还需要进行哪些处理，并解释 $\gamma \in (0,1)$ 的情况，尽管情形 $\gamma = 0$ 类似。可以考虑将空间 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 定义为 $C^\infty(\mathbb{D})$ 关于由内积 (46) 导出的范数的完备化，但可能会发现，这样的空间无法具有良好的迹；例如，直接应用推论 19 可知，对于任意 $\gamma \in (0,1)$，$C_c^\infty(\mathbb{D})$ 关于由内积 (46) 导出的范数在 $C^\infty(\mathbb{D})$ 中稠密。由于指标根 $r = -\gamma$ 最奇异，可以考虑关于同一范数对 $\mathcal{A}_\gamma$ 取完备化，但这会引出另一个问题：$x^{-\gamma}C^\infty$ 中元素的范数 (46) 通常并非有限。在 Sturm–Liouville理论中，这种情况是奇异端点处于极限圆情形的典型特征；对于这一情形，一维情况下的系统性解决方法可见例如 [1, 第 6.9] 节。我们将这些思想改用于当前的二维情形。

我们先将函数 ϕ_γ（在第 2.3 节中引入）$x \in (0, 1)$ 显式写出，并定义

$$\phi_\gamma(x) := \begin{cases} (-\gamma)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\gamma}}{k-\gamma}, & \gamma \in (0,1), \\ \log x - \log(1-x) - c_0, & \gamma = 0, \end{cases} \tag{47}$$

其中 $c_0 > \log(e^4 - 1)$ 是一个固定常数。对于任意 $\gamma \in [0,1)$，ϕ_γ 是 $\mathcal{L}_\gamma \phi_\gamma = (\gamma+1)^2 \phi_\gamma$ 的径向解（这可简化为 $\partial_\rho(x^{\gamma+1}\rho\partial_\rho\phi_\gamma) = 0$），并满足相应的极限 (19)。此外，存在 $x_\gamma > 0$，使得 ϕ_γ 在 $(0, x_\gamma)$ 上非零。若 $x \in (0,1)$，则 x_γ 满足隐式方程 $\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k-\gamma} = 1$；若 $\gamma = 0$，则 $x_0 = 1/(1+e^{-c_0})$。令 $b_\gamma := \sqrt{1-x_\gamma}$。

固定 $\gamma \in [0,1)$，并为简洁起见记 $\phi = \phi_\gamma$。记作[5]

$$N_\phi f := \phi\, \partial_\rho\left(\frac{f}{\phi}\right) = \partial_\rho f - \frac{\partial_\rho\phi}{\phi} f. \tag{48}$$

给定 $b \in (b_\gamma, 1)$，定义双线性型如下 (23)

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_{\gamma,b}[f,g] = &\left(\sqrt{x}N_\phi f, \sqrt{x}N_\phi g\right)_{x^\gamma, A_{b,1}} - b(x(b))^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}(b)\int_{C_b} f\bar{g} + \left(\sqrt{x}\partial_\rho f, \sqrt{x}\partial_\rho g\right)_{x^\gamma,\mathbb{D}_b} \\ &+ \left(\rho^{-1}\partial_\omega f, \rho^{-1}\partial_\omega g\right)_{L^2_\gamma} + (\gamma+1)^2\left(f,g\right)_{L^2_\gamma}, \end{aligned} \tag{49}$$

其中，对于 $0 \le a < c \le 0$，我们用 $A_{a,\ c}$ 表示环域 $\{a < \rho < c\}$。

引理的证明 4。 我们先推导一些恒等式。计算得

$$\mathcal{L}_\gamma f\ \rho x^\gamma \bar{g} = -\partial_\rho(x^{\gamma+1}\rho\partial_\rho f)\bar{g} - \bar{g}\rho^{-2}\partial_\omega^2 f \rho x^\gamma + (\gamma+1)^2 f\bar{g}\rho x^\gamma.$$

右侧的第一项改写为

$$\begin{aligned} -\partial_\rho(x^{\gamma+1}\rho\partial_\rho f)\bar{g} &= -\partial_\rho(x^{\gamma+1}\rho\partial_\rho(\phi f/\phi))\bar{g} \\ &= -\partial_\rho(x^{\gamma+1}\rho(\partial_\rho\phi)f/\phi))\bar{g} - \bar{g}\partial_\rho\left(x^{\gamma+1}\rho N_\phi f\right) \\ &= -\cancel{\partial_\rho(x^{\gamma+1}\rho\partial_\rho\phi)}(f/\phi)\bar{g} - x^{\gamma+1}\rho\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}(N_\phi f)\bar{g} - \bar{g}\partial_\rho\left(x^{\gamma+1}\rho N_\phi f\right) \\ &= -x^{\gamma+1}\rho\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}(N_\phi f)\bar{g} + \partial_\rho\bar{g}x^{\gamma+1}\rho N_\phi f - \partial_\rho\left(\bar{g}x^{\gamma+1}\rho N_\phi f\right) \\ &= (N_\phi\bar{g})x^{\gamma+1}\rho(N_\phi f) - \partial_\rho\left(\bar{g}x^{\gamma+1}\rho N_\phi f\right). \end{aligned}$$

[5]这一概念在思想上与 [1, 第 (6.9.2) 式第443] 页有所不同，主要有两点：其中没有将 $\sqrt{p}$ 因式分解；导数是 ∂_ρ 我们这个情形特有的。

因此，在环域 $A_{a,b}=\{a<\rho<b\}$ 上，我们得到分部积分公式

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\gamma f,g)_{x^\gamma,A_{a,b}}=&\left(\sqrt{x}N_\phi f,\sqrt{x}N_\phi g\right)_{x^\gamma,A_{a,b}}+\left(\rho^{-1}\partial_\omega f,\rho^{-1}\partial_\omega g\right)_{x^\gamma,A_{a,b}}\cdots\\&-\left[x(\rho)^{\gamma+1}\rho\int_{C_\rho}\bar{g}N_\phi f\right]_{\rho=a}^{\rho=b}+(\gamma+1)^2\left(f,g\right)_{x^\gamma,A_{a,b}}.\end{aligned}\tag{50}$$

现在我们重写 $N_\phi f N_\phi\bar{g}$ 项:

$$\begin{aligned}(N_\phi f)(N_\phi\bar{g})\rho x^{\gamma+1}&=\rho x^{\gamma+1}\left(\partial_\rho f-f\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\right)\left(\partial_\rho\bar{g}-\bar{g}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\right)\\&=\rho x^{\gamma+1}\partial_\rho f\partial_\rho\bar{g}-\rho x^{\gamma+1}\partial_\rho(f\bar{g})\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}+\rho x^{\gamma+1}f\bar{g}\left(\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\right)^2\\&=\rho x^{\gamma+1}\partial_\rho f\partial_\rho\bar{g}-\partial_\rho\left(\rho x^{\gamma+1}f\bar{g}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\right)+f\bar{g}\partial_\rho\left(\rho x^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\right)+\rho x^{\gamma+1}f\bar{g}\left(\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\right)^2\\&\overset{(19)}{=}\rho x^{\gamma+1}\partial_\rho f\partial_\rho\bar{g}-\partial_\rho\left(\rho x^{\gamma+1}f\bar{g}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\right),\end{aligned}$$

因此

$$\left(\sqrt{x}N_\phi f,\sqrt{x}N_\phi g\right)_{x^\gamma,A_{a,b}}=\left(\sqrt{x}\partial_\rho f,\sqrt{x}\partial_\rho g\right)_{x^\gamma,A_{a,b}}-\left[\rho x^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}\int_{C_\rho}f\bar{g}\right]_{\rho=a}^{\rho=b}.\tag{51}$$

证明 (1)。若 $\sqrt{1-x_\gamma}<a<b<1$，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_{\gamma,b}[f,g]-\mathfrak{t}_{\gamma,a}[f,g]=&-\left(\sqrt{x}N_\phi f,\sqrt{x}N_\phi g\right)_{x^\gamma,A_{a,b}}-b(x(b))^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}(b)\int_{C_b}f\bar{g}\\&+a(x(a))^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}(a)\int_{C_a}f\bar{g}+\left(\sqrt{x}\partial_\rho f,\sqrt{x}\partial_\rho g\right)_{x^\gamma,A_{a,b}}\overset{(51)}{=}0,\end{aligned}$$

因此 $\mathfrak{t}_{\gamma,\ b}$ 不依赖于 $b\in(b_\gamma,1)$。

证明 (2)。我们注意到，若 $f\in\mathcal{A}_\gamma$ 且 $\gamma\in(-1,0)$，或 $f\in\mathcal{A}_{\gamma,\ D}$ 且 $\gamma\in[0,1)$，则

$$\lim_{b\to1}\left[b(x(b))^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}(b)\int_{C_b}|f|^2\right]=0.$$

事实上，如果 $\gamma\in(-1,0)$，那么 $\partial_\rho\phi\equiv0$；否则

$$b(x(b))^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi}(b)=\begin{cases}O(x(b)^\gamma), & \gamma\in(0,1)\\ O\left(\frac{1}{|\log(x(b))|}\right), & \gamma=0\end{cases}=o(1)$$

当 $b \to 1$ 时，且 $f \in \mathcal{A}_{\gamma,\ D}$ 意味着，当 $x \to 0$ 时，f 一致有界；当 $\mathcal{A}_{\gamma,\ D} = C^\infty(\mathbb{D}) + x^{1-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$（若 $\gamma \in (0,1)$），或 $\mathcal{A}_{\gamma,\ D} = C^\infty(\mathbb{D}) + x(\log x)C^\infty(\mathbb{D})$（对于 $\gamma = 0$）。因此，鉴于

$$\lim_{b\to 1} \|\sqrt{x}N_\phi f\|^2_{x^\gamma, A_{b,1}} = 0$$

由于 $\sqrt{x}N_\phi f \in L^2_\gamma$ 在边界附近，因此我们可以令 $b \to 1$ 在（49）中取极限，得到所需的（24）。

（3）的证明。利用对于 $b \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{x^\gamma, \mathbb{D}_b} = &-\int_{C_b} x^{\gamma+1}\rho g\partial_\rho f + \left(\sqrt{x}\partial_\rho f, \sqrt{x}\partial_\rho g\right)_{x^\gamma,\mathbb{D}_b} \\ &+ \left(\rho^{-1}\partial_\omega f, \rho^{-1}\partial_\omega g\right)_{x^\gamma,\mathbb{D}_b} + (\gamma+1)^2 (f,g)_{x^\gamma,\mathbb{D}_b},\end{aligned}$$

结合（49），可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_\gamma[f,g] = &\left(\sqrt{x}N_\phi f, \sqrt{x}N_\phi g\right)_{x^\gamma,A_{b,1}} + \left(\rho^{-1}\partial_\omega f, \rho^{-1}\partial_\omega g\right)_{x^\gamma,A_{b,1}} + (\gamma+1)^2 (f,g)_{x^\gamma,A_{b,1}} \\ &- \int_{C_b} \underbrace{(\rho x^{\gamma+1}\frac{\partial_\rho\phi}{\phi} f\bar{g} - x^{\gamma+1}\rho\bar{g}\partial_\rho f)}_{(\bar{g}/\phi)W(f,\phi)} + (\mathcal{L}_\gamma f, g)_{x^\gamma,\mathbb{D}_b}.\end{aligned}$$

于是令 $b \to 1$，即可得到方程（25）。

（4）的证明。我们依次讨论 $\gamma \in (-1,0)$、$\gamma \in (0,1)$ 和 $\gamma = 0$。

对于 $\gamma \in (-1,0)$，注意到由于 $\phi_\gamma \equiv 1$，实际上对于任意 $f \in \mathcal{A}_\gamma$

$$(f,f)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} = \|\sqrt{x}\partial_\rho f\|^2_{L^2_\gamma} + \|\rho^{-1}\partial_\omega f\|^2_{L^2_\gamma} + (\gamma+1)^2\|f\|^2_{L^2_\gamma} \geq (1+\gamma)^2\|f\|^2_{L^2_\gamma}. \tag{52}$$

情形 $\gamma \in (0,1)$ 可通过交织从情形 $\gamma \in (-1,0)$ 推得。首先注意，若$f \in \mathcal{A}_\gamma$，则 $x^\gamma f \in \mathcal{A}_{-\gamma}$。假设以下结论成立

$$(f,g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} = (x^\gamma f, x^\gamma g)_{\widetilde{H}^{1,-\gamma}}, \qquad f,g \in \mathcal{A}_\gamma, \tag{53}$$

利用情形 $\gamma \in (-1,0)$ 即可得到该结果：对于任意 $f \in \mathcal{A}_\gamma$,

$$(f,f)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} = (x^{-\gamma}f, x^{-\gamma}f)_{\widetilde{H}^{1,-\gamma}} \geq (1+(-\gamma))^2\|x^{-\gamma}f\|^2_{L^2_{-\gamma}} = (1-|\gamma|)^2\|f\|^2_{L^2_\gamma},$$

其中不等式由（52）得出。为证明（53），还需注意，微分交织性质（8）蕴含对所有 $\mathcal{L}_\gamma f = x^{-\gamma}\mathcal{L}_{-\gamma}(x^\gamma f)$ 均有 $f \in \mathcal{A}_\gamma$。现在我们来计算

$$\begin{aligned}(f,g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} &\overset{(25)}{=} (\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L^2_\gamma} - \left(\tau^N_\gamma f, \tau^D_\gamma g\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)} \\ &= \left(x^{-\gamma}\mathcal{L}_{-\gamma}(x^\gamma f), x^{-\gamma}(x^\gamma g)\right)_{L^2_\gamma} - \left(\tau^N_\gamma f, \tau^D_\gamma g\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)} \\ &\overset{(22)}{=} (\mathcal{L}_{-\gamma}(x^\gamma f), x^\gamma g)_{L^2_{-\gamma}} - \left(\tau^N_{-\gamma}(x^\gamma f), \tau^D_{-\gamma}(x^\gamma g)\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)} \overset{(25)}{=} (x^\gamma f, x^\gamma g)_{\widetilde{H}^{1,-\gamma}}.\end{aligned}$$

最后，$\gamma = 0$ 的情形需要特别处理。回顾一下，$\phi_0(x) = \log x - \log(1-x) - c_0$ 按（47）中的定义。令 $x_0 > 0$ 满足如下性质：对所有 $\phi_0(x) < 0$ 均有 $x \in (0, x_0)$。那么，对任意$b > b_0 :=\sqrt{1-x_0}$，在（23）中略去所有一阶项，可得粗略估计

$$(f,f)_{\widetilde{H}^{1,0}} \geq \|f\|_{L^2}^2 - \frac{bx(b)\partial_\rho\phi_0(x(b))}{\phi_0(x(b))}\int_{C_b}|f|^2.$$

注意到对所有 b，$bx(b)\partial_\rho\phi_0(x(b)) = -2$，将两边乘以 $-b\,\phi_0(x(b))/2$，再从 $b = b_0$ 积分到 $b = 1$，得到

$$c(f,f)_{\widetilde{H}^{1,0}} \geq c\|f\|_{L^2}^2 - \|f\|_{A_{b_0,1}}^2, \quad \text{where} \quad c := \int_{b_0}^1 \frac{-\phi_0(x(b))}{2} b\,db = \int_0^{x_0}\frac{-\phi_0(x)}{4}\,dx.$$

我们可以如下关联常数 c 和 c_0：首先注意到条件 $\phi_0(x_0) = 0$ 给出 $x_0 = \frac{1}{1+e^{-c_0}}$。然后通过分部积分，得到

$$\int_0^{x_0} -\phi_0(x)\,dx = \underbrace{[-x\phi_0(x)]_{x\to 0}^{x=x_0}}_{=0} + \int_0^{x_0} x\phi_0'(x)\,dx = \int_0^{x_0}\frac{dx}{1-x} = -\log(1-x_0) = \log(1+e^{c_0}),$$

因此 $c = \frac{1}{4}\log(1+e^{c_0})$。回到估计，我们得到

$$(f,f)_{\widetilde{H}^{1,0}} \geq \|f\|_{L^2}^2 - c^{-1}\|f\|_{A_{b_0,1}}^2 \geq (1-c^{-1})\|f\|_{L^2}^2,$$

特别地，若 $c > 1$，则 $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^{1,0}}$ 正定，这等价于条件 $c_0 > \log(e^4 - 1)$。

引理 4的证明完毕。 □

~4.2 狄利克雷迹到 $H^{1,\gamma}$ 的扩张

定理 5 的第一部分是将狄利克雷迹扩展到 $\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})$，我们将其表述为一个独立的结果。

定理 20. 对于任意 $\gamma \in (-1,1)$ 且满足 $\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})$，$H_{(\gamma)}$ 分别定义于 (27) 和 (29)，由 τ_γ^D在 (20) 中定义的狄利克雷迹可扩展为一个有界满射算子

$$\tau_\gamma^D \colon \widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}) \to H_{(\gamma)}.$$

右逆 $R\colon H_{(\gamma)} \to \widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})$ 是将连续算子 $R\colon C^\infty(\mathbb{S}^1) \to \mathcal{A}_\gamma$扩展到 $H_{(\gamma)}$所得。

在 $\gamma \in (-1,0)$ 的情形下，$\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 的构造与具有正则边界点的算子相关，在这种情况下，构造相对直接。$\gamma \in (0,1)$ 的构造与处于极限圆情形且具有奇异点的算子相关，因此需要采用正则化方法，并将其与前一类情形 $\gamma \in (-1,0)$ 联系起来。最后，情形 $\gamma = 0$ 与重指标根和对数加权索伯列夫空间相关，同样需要正则化，故单独处理。

4.2.1 一些一维迹估计

设 $a > 0$。我们首先证明一个引理，它将用于情形 $\gamma \in (-1, 0)$。定义 $\widetilde{H}^{1,\gamma}[0,a]$ 为 $C^\infty([0,a])$ 关于范数的完备化

$$\|f\|^2_{\widetilde{H}^{1,\gamma}[0,a]} = \|\sqrt{x}\partial_x f\|^2_{L^2_\gamma[0,a]} + (1+\gamma)^2\|f\|^2_{L^2_\gamma[0,a]}, \tag{54}$$

其中 $\|f\|^2_{L^2_\gamma[0,a]} = \int_0^a |f(x)|^2 x^\gamma \, dx$。我们证明以下迹估计

引理 21. 取值映射 $C^\infty([0,a]) \ni f \mapsto f(0)$ 可通过稠密性延拓至 $\widetilde{H}^{1,\gamma}[0,a]$，并且对所有 $\ell \in (0,a)$，我们有以下估计

$$\ell^\gamma |f(0)|^2 \le (\gamma+1)\left(\ell^{-1}\|f\|^2_{L^2_\gamma[0,a]} + \frac{2}{-\gamma}\|\sqrt{x}f'\|^2_{L^2_\gamma[0,a]}\right). \tag{55}$$

证明. 根据关系式 $f(0) = f(x) - \int_0^x f'(t)\, dt$，我们推出

$$|f(0)|^2 \le 2|f(x)|^2 + 2\left|\int_0^x f'(t)\, dt\right|^2 \le 2|f(x)|^2 + 2\underbrace{\int_0^x t^{-\gamma-1}\, dt}_{x^{-\gamma}/(-\gamma)}\int_0^x t|f'(t)|^2\, t^\gamma dt.$$

现在乘以 x^γ，并从 0 积分到 ℓ，得到

$$\frac{\ell^{\gamma+1}}{\gamma+1}|f(0)|^2 \le 2\|f\|^2_{L^2_\gamma[0,a]} + 2\frac{\ell}{-\gamma}\|\sqrt{x}f'\|^2_{L^2_\gamma[0,a]},$$

等价于 (55). □

现在考虑一个与 $\gamma = 0$ 相关的对数型权重，定义 $\widetilde{H}^1_{,\ 0\log}[0,a]$ $C^\infty[0,a] + \ {}^1_{\log x}C^\infty[0,a]$ 在该范数下的闭包

$$\|f\|^2_{\widetilde{H}^{1,0}_{\log}} = \int_0^a (x|f'(x)|^2 + |f(x)|^2)\log^2 x\, dx. \tag{56}$$

引理 22. 取值映射 $C^\infty[0,a] + \ {}^1_{\log x}C^\infty[0,a] \ni f \mapsto f(0)$ 可延拓为定义在 $\widetilde{H}^1_{,0\log}[0,a]$ 上的有界映射。更准确地说，对于每个 $\ell \in (0,a]$，

$$\frac{\int_0^\ell \log^2 x\, dx}{\int_0^\ell -\log x\, dx}|f(0)|^2 \le \frac{2}{\int_0^\ell -\log x\, dx}\int_0^a (\log x)^2|f(x)|^2\, dx + 2\int_0^a x\log^2 x|f'(x)|^2\, dx. \tag{57}$$

证明. 若 $f \in C^\infty + \frac{1}{\log x} C^\infty$，则 f' 在 0 附近可积，因此对任意 $x \le a, f(0) = f(x) - \int_0^x f'(t)\ dt$。接下来我们计算

$$|f(0)|^2 \le 2|f(x)|^2 + 2\left|\int_0^x f'(t)\ dt\right|^2 \le 2|f(x)|^2 + 2\underbrace{\int_0^x \frac{dt}{t\log^2 t}}_{-1/\log x}\int_0^a t\log^2 t|f'(t)|^2\ dt.$$

乘以 $\log^2 x$，并从 0 积分到 $\ell \in (0, a)$，得到[6]

$$\int_0^\ell \log^2 x\ dx|f(0)|^2 \le 2\int_0^a (\log x)^2|f(x)|^2\ dx + 2\int_0^\ell (-\log x)\ dx\int_0^a t\log^2 t|f'(t)|^2\ dt.$$

除以 $\int_0^\ell -\log\ x\ dx$，得到（57）。 □

引理 23. 等式 $\int_0^\ell -\log\ x\ dx = \varepsilon$ 导出一个函数 $\ell\colon [0,1] \to [0,1]$，该函数连续、递增，且 $\ell(0) = 0$，$\ell(1) = 1$，并满足 $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\ell(\varepsilon))}{\log \varepsilon} = 1$。

证明。由反函数定理和求导可得其存在性及递增性。该等式也可写作 $\ell(1 - \log \ell) = \varepsilon$，这意味着显然有界 $\ell \le \varepsilon$，因而极限为零。为得到渐近性质：由 log 的单调性，我们已有 $\log \ell \le \log \varepsilon$。此外，对于每个 $\alpha \in (0, 1)$，当 ℓ 足够小时，有 $1 + \log \frac{1}{\ell} \le C_\alpha \frac{1}{\ell^\alpha}$，因此

$$\varepsilon = \ell(1 - \log \ell) \le \ell^{1-\alpha} C_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \log \varepsilon \le \log C_\alpha + (1 - \alpha)\log \ell.$$

这些不等式意味着 $\frac{1}{1-\alpha} \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \ell}{\log \varepsilon} \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \ell}{\log \varepsilon} \le 1$ 对每个 $\alpha > 0$ 都成立，因此结论得证。 □

4.2.2 定理20证明

定理 20 的证明依次讨论以下情形：$\gamma \in (-1, 0)$，$\gamma \in (0, 1)$，以及 $\gamma = 0$。

情形 $\gamma \in (-1, 0)$。在边界 $[0, a]_x \times \mathbb{S}^1_\omega$（其中 $\partial\mathbb{D} = \{x = 0\}$）的管状邻域内，可以将一个光滑函数展开为型 $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)e^{in\omega}$。将（55）应用于每个 f_n，其中 $\ell = a/\langle n\rangle^2$，对 n 求和可得

$$a^\gamma \sum_n \langle n\rangle^{-2\gamma}|f_n(0)|^2 \le (\gamma + 1)\left(a^{-1}\sum_n \langle n\rangle^2 \|f_n\|^2_{L^2_\gamma[0,a]} + \frac{2}{-\gamma}\sum_n \|\sqrt{x} f_n'\|^2_{L^2_\gamma[0,a]}\right),$$

[6]可以更明确地利用 $\int_0^\ell \log^2 t\ dt = \ell((1 - \log\ \ell)^2 + 1)$ 和 $\int_0^\ell \log\ t\ dt = \ell(\log\ \ell - 1)$，但这可能没有用

注意到右侧等价于 f 的 $\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})$ 范数的平方，而左侧是 $\omega \mapsto f(0,\omega)$ 的 $H^{-\gamma}(\mathbb{S}^1)$-范数的平方，因此这一有界性估计可通过稠密性推广至 $\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})$。

为证明满射性，我们来为 τ_γ^D 构造一个显式的右逆。固定满足 $g(0) = 1$ 的 $g \in C_c^\infty([0,a)\ \mathbb{R})$，并考虑映射

$$R\left(\sum_n a_n e^{in\omega}\right) = \sum_n a_n e^{in\omega} g(n^2 x).$$

容易看出，$R(C^\infty(\mathbb{S}^1)) \subset C^\infty([0,a]_x \times \mathbb{S}^1_\omega)$，且 $\tau_\gamma^D R = id|_{C^\infty(\mathbb{S}^1)}$。要证明 R 可延拓为有界映射 $H^{-\gamma}(\mathbb{S}^1) \to \widetilde{H}^{1,\gamma}([0,a]_x \times \mathbb{S}^1_\omega)$，只需证明对于$f_n(x) := g(n^2x)$，有 $n^2\|f_n\|^2_{L^2_\gamma([0,a])} \sim \|\sqrt{x}f_n'(x)\|^2_{L^2_\gamma([0,a])} \lesssim n^{-2\gamma}$，其中一致常数取自 $n \in \mathbb{Z}$。为此，注意到 $f_n'(x) = n^2 g'(n^2x)$，于是

$$n^2 \int_0^a f^2(x) x^\gamma \, dx \overset{u=n^2x}{=} n^{-2\gamma} \int_0^{n^2} g(u)^2 u^\gamma \, du = n^{-2\gamma} \int_0^a g(u)^2 u^\gamma \, du,$$
$$\int_0^a (f'(x))^2 x^{\gamma+1} \, dx \overset{u=n^2x}{=} n^{-2\gamma} \int_0^{n^2} g'(u)^2 u^{\gamma+1} \, du = n^{-2\gamma} \int_0^a g'(u)^2 u^{\gamma+1} \, du,$$

这就完成了定理 20 在 $\gamma \in (-1,0)$. 情形下的证明。

情形 $\gamma \in (0,1)$。证明基于将前一种情形与便于使用的交织性质（8）结合起来。固定 $\gamma \in (0,1)$，并令 ψ 为一个径向函数，在 $[0, x_\gamma/2)_x$ 上等于 ϕ_γ，在 $\mathbb{D}^{int}$ 上属于 C^∞ 类，且有正下界。映射 $m_{1/\psi}$: $\mathcal{A}_\gamma \ni f \mapsto f/\psi \in \mathcal{A}_{-\gamma}$ 可通过稠密性延拓为同胚 $\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}) \to \widetilde{H}^{1,-\gamma}(\mathbb{D})$。事实上，直接计算可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f}{\psi}\right\|^2_{\widetilde{H}^{1,-\gamma}} &= \left\|\sqrt{x}\partial_\rho \frac{f}{\psi}\right\|^2_{L^2_{-\gamma}} + \left\|\rho^{-1}\partial_\omega \frac{f}{\psi}\right\|^2_{L^2_{-\gamma}} + (1-\gamma)^2 \left\|\frac{f}{\psi}\right\|^2_{L^2_{-\gamma}} \\ &= \left\|\sqrt{x}\frac{x^{-\gamma}}{\psi} N_\psi f\right\|^2_{L^2_\gamma} + \left\|\rho^{-1}\frac{x^{-\gamma}}{\psi}\partial_\omega f\right\|^2_{L^2_\gamma} + (1-\gamma)^2 \left\|\frac{x^{-\gamma}}{\psi} f\right\|^2_{L^2_\gamma}.\end{aligned}$$

函数 $\frac{x^{-\gamma}}{\psi} \in C^\infty(\mathbb{D})$ 的上下界均为正常数。上界保证映射 $m_{1/\psi}$ 有界，并可通过稠密性进行延拓。下界则保证强制性，再由开映射定理可知其为同胚。将此与前一种情形结合，并注意到 $\tau_\gamma^D = \tau_{-\gamma}^D \circ m_{1/\psi}$，即可得到结论。

情形 $\gamma = 0$。尽管奇异情形 $\gamma \in (0,1)$ 可以利用空间 $\widetilde{H}^{1,\ -\gamma}$ 该空间与一个“正则”二次型相关联，但我们需要构造一个“预正则化”的类似物

在情形 $\gamma = 0$ 下具有良好迹估计的二次型。为此，在边界 $\mathbb{S}^1_a = [0,a]_x \times \mathbb{S}^1_\omega$ 的一个邻域上，我们定义 $C^\infty(\mathbb{S}^1_a)$ 上的范数

$$\|f\|^2_{\widetilde{H}^{1,0}_{\log}(\mathbb{S}^1_a)} := \|\sqrt{x}\log x\partial_x f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1_a)} + \|\log x\partial_\omega f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1_a)} + \|\log x f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1_a)}. \tag{58}$$

在 $x = 0$ 附近写作 $f(x,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_n(x)e^{in\omega}$，这个范数看起来是

$$\|f\|^2_{\widetilde{H}^{1,0}_{\log}(\mathbb{S}^1_a)} = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\|\sqrt{x}\log x\partial_x f_n\|^2_{L^2[0,a]} + (n^2+1)\|\log x f_n\|^2_{L^2[0,a]}\right).$$

定义 $H_{(0)}$ 如式（29）所示后，我们现在证明以下结论：

引理 24. 取值映射 $C^1(\mathbb{S}^1_a) \ni f \mapsto f(0,\omega) \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 可延拓为有界、满射的迹映射 $\widetilde{H}^{1,0}_{\text{对数}}(\mathbb{S}^1_a) \to H_{(0)}$。

证明。为证明连续性，在 $f(x,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_n(x)e^{in\omega}$ 附近写作 $x = 0$，并在 f_n 上使用（57），取 $\ell_n \in (0, a]$ (不妨假设 $a \le 1$ WLOG) 使得

$$\int_0^{\ell_n} -\log x\ dx = \frac{a}{\langle n\rangle^2}.$$

由引理23，ℓ_n 存在且唯一，并且

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\ell_n}{\log(a/\langle n\rangle^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\ell_n}{-2\log\langle n\rangle}.$$

此外，利用洛必达法则证明 $\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t \log^2 x\ dx}{\log t\int_0^t \log x\ dx} = 1$，我们得到

$$\frac{\int_0^{\ell_n}\log^2 x\ dx}{\int_0^{\ell_n} -\log x\ dx} \sim -\log\ell_n \sim 2\log\langle n\rangle, \qquad \text{as} \quad n\to\infty.$$

接下来证明满射性，还需要构造一个右逆。为此，固定 $h \in C^\infty_c([0,a)\ \mathbb{R})$，使得 $h(0) = 1$，并定义 $R\colon C^\infty(\mathbb{S}^1) \to C^\infty(\mathbb{S}^1_a)$ + ^{1}对数 $_x C^\infty(\mathbb{S}^1_a)$ 如下：

$$R\colon \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\omega} \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\omega}\underbrace{h(n^2x)\left(1 + \frac{2\log n}{\log x}\right)}_{f_n(x)} \tag{59}$$

要证明 $R\colon\ H_{(0)} \to \widetilde{H}^{1,0}_{\log}(\mathbb{S}^1_a)$ 有界，只需证明当 $|n|$ 足够大时，该量

$$\frac{1}{\log n}\left(\|\sqrt{x}\log x\partial_x f_n\|^2_{L^2[0,a]} + n^2\|\log x f_n\|^2_{L^2[0,a]}\right) \tag{60}$$

被一个与 n 无关的常数一致有界。为此，注意到$f_n(x) = h(n^2x)\log(n^2x)\log x$以及 $f_n'(x) = n^2\left(h'(n^2x)\frac{\log(n^2x)}{}+\log x \quad -2\log n \quad h_{(n^2x)n^2x\log^2 x}\right)$，我们现在计算

$$\int_0^a (n^2 f_n(x)^2 + x f_n'(x)^2)\log^2 x\, dx$$

$$\overset{u=n^2x}{=} \int_0^{an^2} \left(h^2(u)\log^2 u + u\left(h'(u)\log u - 2\log n\frac{h(u)}{u\log(u/n^2)}\right)^2\right) du$$

$$= \int_0^{an^2} \left((h^2(u)+uh'(u)^2)\log^2 u - 4\frac{\log n\; h'(u)h(u)\log u}{\log(u/n^2)} + 4\log^2 n\frac{h^2(u)}{u\log^2(u/n^2)}\right) du$$

$$= I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}.$$

项 $I_{n,\ 1}$ 与一个常数具有渐近关系，因此为 $o(\log n)$。对于 $I_{n,\ 2}$，我们改写为

$$-4\log n\frac{h'(u)h(u)\log u}{\log(u/n^2)} = 2\frac{h'(u)h(u)\log u}{1-\frac{\log u}{2\log n}},$$

其被可积函数 $2|h'(u)h(u)\log u|$ 所控制，并且逐点收敛于$2h'(u)h(u)\log u$。根据控制收敛，$I_{n,\ 2}$ 也与常数具有渐近关系，因此为 $o(\log n)$。对于 $I_{n,\ 3}$，我们写为

$$I_{n,3} = 4\log^2 n\int_0^{n^2a}\frac{h^2(u)}{u\log^2(u/n^2)}\, du$$

$$\overset{u=n^2x}{=} 4\log^2 n\int_0^a \frac{h^2(n^2x)}{x\log^2 x}\, dx$$

$$= 4\log^2 n\left[\cancel{\int_0^a \frac{d}{dx}\left(\frac{h^2(n^2x)}{-\log x}\right)dx} + 2\int_0^a \frac{n^2h'(n^2x)h(n^2x)}{\log x}\, dx\right]$$

$$\overset{u=n^2x}{=} 8\log^2 n\int_0^{n^2a}\frac{h'(u)h(u)}{\log(u/n^2)}\, du$$

$$= -4\log n\int_0^{n^2a}\frac{h'(u)h(u)}{1-\frac{\log u}{2\log n}}\, du.$$

与对 $I_{n,\ 2}$ 的分析类似，该项与 $-4\log n\int_0^a h'(u)h(u)\ du = 2\log n$ 具有渐近关系。综上，(60) 如所述是一致有界的，并且在 (59) 中定义的映射从 $H_{(0)}$ 到 $\widetilde{H}^{1,\ 0}{}_{\log}(\mathbb{S}^1_a)$ 是有界的。引理 24 得证。 □

下面证明定理 20。令 ψ 为一个径向函数，在 $[0, x_0/2)_x$上等于 ϕ_0，属于C^∞ 类 $\mathbb{D}^{int}$，且有正下界。可以将 τ_0^D视为以下映射的复合：

$$\log x C^\infty(\mathbb{D}) + C^\infty(\mathbb{D}) \ni f \mapsto \frac{f}{\psi} \in C^\infty + \frac{1}{\log x}C^\infty$$

（它可延拓为一个同胚 $\widetilde{H}^{1,\,0}(\mathbb{D}) \;\to\; \widetilde{H}^{1,\,0}{}_{\text{对数}}(\mathbb{D})$），再与引理 24中的限制映射复合。

定理 20 的证明完毕。

4.3 定理 5 的证明

下面的引理汇集了一些重要的预备事实。

引理 25. 利用定理 τ_D^γ 20中定义的扩展狄利克雷迹，有

$$\widetilde{H}_0^{1,\gamma}(\mathbb{D}) = \widetilde{H}_D^{1,\gamma} = \widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}) \cap \ker \tau_D^\gamma.$$

(2) 对于每个 $f \in W_\gamma^2$ 和 $g \in \widetilde{H}^{1,\,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$，有

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L^2_\gamma} = (f, g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})}. \tag{61}$$

(3) 算子 $\mathcal{L}_\gamma$: $\widetilde{H}^{1,\,\gamma}(\mathbb{D}) \to (\widetilde{H}^{1,\,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D}))'$ 是有界的。

引理 *25* 的证明。证明 (1)。我们首先证明 $\widetilde{H}^{1}_{,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D}) = \widetilde{H}^{1}_{,D}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$。我们使用引理 2，即狄利克雷定义域 $\widetilde{H}^{2}_{,D}{}^{\gamma}$ 与弗里德里希斯扩张的定义域重合。

根据弗里德里希斯扩张的构造，定义域中的每个元素都是 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 中函数在范数 $f \mapsto ((\mathcal{L}_\gamma f, f)^{L^2_\gamma})^{1/2}$ 下的极限；对于 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 中的函数，该范数与 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 范数重合。因此，狄利克雷定义域 $\widetilde{H}^{2}_{,D}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$ 包含于 $\widetilde{H}^{1}_{,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$。另一方面，由于 $C_c^\infty(\mathbb{D}) \subset \widetilde{H}^{2}_{,D}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$，取闭包可得 $\widetilde{H}^{1}_{,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$ 恰为 $\widetilde{H}^{2}_{,D}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$ 关于 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 范数的闭包。然而，由于

$$\|f\|^2_{\widetilde{H}^{s,\gamma}_D} = \sum_{n,k} (n+1+|\gamma|)^{2s} |a_{n,k}|^2 \quad \text{if } f = \sum_{n,k} a_{n,k} e_{n,k}$$

其中 $e_{n,\,k}$ 是 L^2_γ 归一化的 $G^\gamma_{n,\,k}$ 的倍数，若 $\gamma \geq 0$ 且 $x^{-\gamma} G^{-\gamma}_{n\,k}$，若 $\gamma < 0$，并且

$$\|f\|^2_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} = (\mathcal{L}_\gamma f, f)_{L^2_\gamma} = \sum_{n,k} (n+1+|\gamma|)^2 |a_{n,k}|^2 = \|f\|^2_{\widetilde{H}^{1,\gamma}_D},$$

由此可知，相对于 $\widetilde{H}^{1,\,\gamma}$ 范数，$\widetilde{H}^{2,\,\gamma}_{\,D}(\mathbb{D})$ 的闭包恰为 $\widetilde{H}^{1,\,\gamma}_{\,D}(\mathbb{D})$，证毕。

接下来，包含关系 $\widetilde{H}^{1,\,\gamma}_{\,0}(\mathbb{D}) \subset \widetilde{H}^{1,\,\gamma}(\mathbb{D}) \cap \ker \tau_D^\gamma$ 来自 τ_D^γ 在 $\widetilde{H}^{1,\,\gamma}(\mathbb{D})$ 上的连续性，以及这样一个事实：$\widetilde{H}^{1,\,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$ 中的每个元素都是 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 中函数的极限，而这些函数的迹均为零。

最后，为了证明 $\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}) \cap \ker \tau_D^\gamma \subset \widetilde{H}^{1}_{,0}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$，取 $f \in \widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}) \cap \ker \tau_D^\gamma$，并令 $f_n \in \mathcal{A}_\gamma$ 为一个在 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 中逼近 f 的序列。由 τ_D^γ 的连续性可知，必有 $\tau_D^\gamma f_n \to \tau_D^\gamma f = 0$

属于 $H_{(\gamma)^\circ}$ 取 R 为 τ_D^γ 的一个右逆，如定理 20 所示，则 $R\tau_D^\gamma f_n \to 0$ 属于 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$，因此$g_n := f_n - R\tau_D^\gamma f_n$ 是 $\mathcal{A}_{\gamma,D}$ 中的元素列，并在 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 中收敛到 f。最后，由推论 19，$C_c^\infty(\mathbb{D})$ 在 $\mathcal{A}_{\gamma,D}$ 中是 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$-稠密的，因此对每个 n，都存在 $h_n \in C_c^\infty(\mathbb{D})$ 使得 $\|g_n - h_n\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} < \frac{1}{n}$。序列 h_n 在 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 中收敛到 f，而后者属于 $\widetilde{H}^{1,\gamma}_0$。

证明（2）。只需证明当 $f \in W_\gamma^2$ 和 $g \in \dot{C}^\infty$ 时的（61），因为由稠密性，（61）随后可延拓至$\widetilde{H}^{1,\gamma}_0$。对于 $f \in W_\gamma^2 \subset \widetilde{H}^{1,\gamma}$，设 f_n 是 $\mathcal{A}_\gamma$ 中收敛于 f 的序列，且在 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$ 中收敛，并固定 $g \in C^\infty$。则对于每个 n，有

$$(f_n, g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} = (\mathcal{L}_\gamma f_n, g)_{L_\gamma^2} = \langle \iota_\gamma \mathcal{L}_\gamma f_n, g\rangle = \langle {}^t\mathcal{L}_\gamma \iota_\gamma f_n, g\rangle.$$

由于 $f_n \to f$ 属于 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$，因此 L_γ^2 中的 $\iota_\gamma f_n \to f$ 属于 $C^{-\infty}$，并且由序列连续性，${}^t\mathcal{L}_\gamma \iota_\gamma f_n \to {}^t\mathcal{L}_\gamma \iota_\gamma f$ 属于 $C^{-\infty}$。因此，我们可以在上述等式中令 $n \to \infty$ 趋于，得到

$$(f, g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} = \langle {}^t\mathcal{L}_\gamma \iota_\gamma f, g\rangle, \qquad \forall g \in \dot{C}^\infty(\mathbb{D}).$$

最后，假设 $\mathcal{L}_\gamma f \in L_\gamma^2$表明右侧等于（$\mathcal{L}_\gamma f$，$g$）$_{L_\gamma^2}$，于是（61）对 $f \in W_\gamma^2$和 $g \in \dot{C}^\infty$成立。

(3) 的证明。根据（61），我们有如下恒等式

$$|(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L_\gamma^2}| = |(f, g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})}| \le \|f\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} \|g\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}, \qquad f \in \mathcal{A}_\gamma, \qquad g \in \widetilde{H}_0^{1,\gamma}(\mathbb{D}).$$

这意味着 $\mathcal{L}_\gamma$: $\mathcal{A}_\gamma \to (\widetilde{H}^{1,\gamma}_0)'$是有界的，并且$\|\mathcal{L}_\gamma f\|_{(\widetilde{H}_0^{1,\gamma})'} \le \|f\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}$对所有 $f \in \mathcal{A}_\gamma$均成立。由于 $\mathcal{A}_\gamma$ 在 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$中稠密，后一个不等式允许将 $\mathcal{L}_\gamma$ 延拓到 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$，使其成为一个有界的（$\widetilde{H}^{1,\gamma}_0$）′值映射。 □

现在我们可以证明定理 5 了。

定理 5 的证明。我们首先证明诺伊曼迹可延拓为一个有界算子τ_γ^N: $W_\gamma^2 \to H'_{(\gamma)^\circ}$ 沿用 [11, 第 4.4 节4], 中的思路，我们结合定理 20 与第二格林恒等式。根据定理 20，令 R: $H_{(\gamma)} \to \widetilde{H}^{1,\gamma}$ 为τ_γ^D的一个有界右逆，该右逆源自连续算子 R: $C^\infty(\mathbb{S}^1) \to \mathcal{A}_{\gamma^\circ}$ 对于 $f \in W_\gamma^2$，定义映射

$$\psi_f(h) := (\mathcal{L}_\gamma f, Rh)_{L_\gamma^2} - (f, Rh)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}, \qquad h \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \tag{62}$$

很容易看出，它满足如下形式的估计

$$|\psi_f(h)| \le (\|\mathcal{L}_\gamma f\|_{L_\gamma^2} + \|f\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}) \|Rh\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} \le C(\|\mathcal{L}_\gamma f\|_{L_\gamma^2} + \|f\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}}) \|h\|_{H_{(\gamma)}},$$

其 C 的算子范数为 R。根据黎斯表示定理，这定义了唯一的元素 $\tau_\gamma^N f \in H'_{(\gamma)}$，并且还满足估计 $\|\tau_\gamma^N f\|_{H'(\gamma)} \leq C(\|\mathcal{L}_\gamma f\|_{L^2_\gamma} + \|f\|_{\widetilde{H}^{1,\gamma}})$。此外，对于 $f \in \mathcal{A}_\gamma$ 和 $h \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$，使得 $Rh \in \mathcal{A}_\gamma$，第一格林恒等式（25）给出

$$\psi_f(h) = \left(\tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D Rh\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \left(\tau_\gamma^N f, h\right)_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \langle \tau_\gamma^N f, h\rangle_{H'_{(\gamma)}, H_{(\gamma)}},$$

因此，τ_γ^N 在 W_γ^2 上的定义扩展了20在 $\mathcal{A}_\gamma$ 上的原始定义。

接下来，将格林第一恒等式扩展到（30）。给定 $g \in \widetilde{H}^{1,\gamma}$，我们将 $g = R\tau_\gamma^D g + g_0$ 分解为 $g_0 \in \widetilde{H}^{1,\gamma}_0$，并对 $f \in W_\gamma^2$ 写出：

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L^2_\gamma} - (f, g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} &= \left(\mathcal{L}_\gamma f, R\tau_\gamma^D g\right)_{L^2_\gamma} - \left(f, R\tau_\gamma^D g\right)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} + (\mathcal{L}_\gamma f, g_0)_{L^2_\gamma} - (f, g_0)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} \\ &\overset{(62)}{=} \langle \tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g\rangle_{H'_{(\gamma)}, H_{(\gamma)}} + (\mathcal{L}_\gamma f, g_0)_{L^2_\gamma} - (f, g_0)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}},\end{aligned}$$

最后两项因（61）而相互抵消。定理 5得证。 □

注 26. 与 *[1, 注 8.2.5]* 类似，τ_γ^N 的扩展可以推广到更大的空间 $\widetilde{W}_\gamma^2 = \{u \in \widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}) \;\; \mathcal{L}_\gamma u \in (\widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D}))'\}$，成为一个有界算子 τ_γ^N: $\widetilde{W}_\gamma^2 \to H'_{(\gamma)}$，由此可得到一个稍具一般性的格林第一恒等式

$$\langle \mathcal{L}_\gamma f, g\rangle_{(\widetilde{H}^{1,\gamma})', \widetilde{H}^{1,\gamma}} = (f, g)_{\widetilde{H}^{1,\gamma}} + \langle \tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g\rangle_{H'_{(\gamma)}, H_{(\gamma)}}, \qquad f \in \widetilde{W}_\gamma^2, \quad g \in \widetilde{H}^{1,\gamma}.$$

经过反对称化后，格林第二恒等式以显然的方式推广到 $f, g \in \widetilde{W}_\gamma^2$。

4.4 DN映射 -定理 6证明

我们以构造狄利克雷到诺伊曼映射结束本节，即证明定理 6。

定理 *6*证明。 DN映射的构造如下。考虑 R_γ^D: $H_{(\gamma)} \to \widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})$ 是一个连续右逆，作用于 τ_γ^D，如定理 20所述。对于 $f \in H_{(\gamma)}$，构造唯一解 $u_f \in W_\gamma^2 \cap \ker(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)$ 使其满足

$$(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)u = 0 \quad (\mathbb{D}), \qquad u|_{\mathbb{S}^1} = f \tag{63}$$

按如下方式完成：令 $\tilde{f} = R_\gamma^D f \in \widetilde{H}^{1,\gamma}(\mathbb{D})$，写作 $u_f = w + \tilde{f}$，其中 w 为未知量，而它应满足

$$(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)w = -(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)\tilde{f} \qquad (\mathbb{D}), \qquad w|_{\mathbb{S}^1} = 0, \tag{64}$$

其中，右侧属于 $(\widetilde{H}^{1,\gamma}_{0}(\mathbb{D}))'$，由引理 25.(3) 可知，这是一个与 $(\widetilde{H}^{1,\gamma}_{D}(\mathbb{D}))' = \widetilde{H}^{-1,\gamma}_{D}(\mathbb{D})$ 相同的空间，由引理 25.(1) 可知。通过建立弱形式并在 $\widetilde{H}^{1,\gamma}_{D}$ 上应用里斯表示定理，或者直接使用 $(\mathcal{L}_{\gamma,D}-\lambda)^{-1}$（对此已有充分认识），即可得到方程 (64) 在 $\widetilde{H}^{1,\gamma}_{D}$ 中的唯一解，其表达式为

$$w := -(\mathcal{L}_{\gamma,D}-\lambda)^{-1}(\mathcal{L}_{\gamma}-\lambda)\tilde{f}.$$

于是，$u_f = w + f$ 是（63）的一个解（该解也可证明是唯一的，因为$\mathcal{L}_{\gamma,D}-\lambda$是单射）。起初，它属于 $\widetilde{H}^{1,\gamma}$，因此特别地属于 L^2_γ，故（63）还意味着$\mathcal{L}_\gamma u_f \in L^2_\gamma$，从而 $u_f \in W^2_\gamma \cap \ker(\mathcal{L}_\gamma-\lambda)$。

更简洁地说，DN映射定义为

$$\Lambda_\gamma(\lambda)f := \tau^N_\gamma u_f = \tau^N_\gamma(id-(\mathcal{L}_{\gamma,D}-\lambda)^{-1}(\mathcal{L}_\gamma-\lambda))R^D_\gamma f,$$

由定理 $H'_{(\gamma)}$ 5，其有界地映入$H'_{(\gamma)}$

□

5 定理8的证明

其思路是遵循 [1, 定理 8.4.1 第601] 页的模板，为$\mathcal{L}_{\gamma,max}$ 构造边界三元组，其中 $\gamma \in (-1,1)$。在证明定理8时，我们首先在第5.1 节证明如何在狄利克雷索伯列夫尺度（17）上延拓诺伊曼迹；这表述为下文的命题27，并且关键地利用了广义泽尼克多项式的相关事实。在第5.2节，我们随后说明如何延拓狄利克雷迹，该结果表述于命题30中。最后，我们在第8 节的5.3部分完成定理7 的证明：首先证明关于最大定义域分解的引理，然后利用这些分解将格林第二恒等式延拓至（34）。

5.1 诺伊曼迹的延拓

命题 27. 对于 $\gamma \in (-1,1)$ 以及任意 $s > 1+|\gamma|$，映射 τ^N_γ定义于 (20) 可延拓为有界满射映射

$$\tau^N_\gamma : \widetilde{H}^{s,\gamma}_D(\mathbb{D}) \to H^{s-1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1), \tag{65}$$

其右逆可由连续算子 $C^\infty(\mathbb{S}^1)\, C^\infty\ \mathbb{D}$ $s=2$ $\widetilde{H}^2$ $\mathbb{D}$ $=$ $\to$ ( )
延拓到 $H^{s-1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$ 得到。特别地，对于，其中，$_D{}^\gamma$ ( ) dom $(\mathcal{L}_{\gamma,D})$

$$\tau^N_\gamma : dom\,(\mathcal{L}_{\gamma,D}) \to H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1) \tag{66}$$

是一个有界满射映射，并且我们还有以下进一步的刻画

$$dom\,(\mathcal{L}_{\gamma,min}) = \widetilde{H}^{2,\gamma}_D \cap \ker \tau^N_\gamma. \tag{67}$$

证明。 (情形 $0 \le \gamma < 1$) 设 $\{G^{\gamma}_{n,k}\}_{n,\ k}$ 定义见 (16)，所需的两个主要基本性质为

$$\tau^N_\gamma(G^\gamma_{n,k}) = c_\gamma G^\gamma_{n,k}|_{\mathbb{S}^1} = c_\gamma e^{i(n-2k)\beta} \tag{68}$$

$$\|G^\gamma_{n,k}\|^2_{L^2_\gamma} = \frac{\pi}{n+\gamma+1}\frac{(n-k)!\gamma!k!\gamma!}{(k+\gamma)!(n-k+\gamma)!} =: (n^\gamma_{n,k})^2, \tag{69}$$

这里简记 $x! := \Gamma(x+1)$，并且 $c_\gamma = 2\gamma$ 对于 $\gamma \in (0,1)$，以及 $c_0 = -2$。第一个等式用到了 [23, 式 (2.10)]。因此，对于 $u \in \widetilde{H}^{s,\ \gamma}_D$，具有 $u = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n u_{n,\ k} \frac{G^\gamma_{n,\ k}}{n^\gamma_{n,\ k}}$ 的形式，且满足 $\|u\|^2_{\widetilde{H}^{s,\ \gamma}_D} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n (n+1+\gamma)^{2s}|u_{n,\ k}|^2 < \infty$，我们有

$$\tau^N_\gamma u = c_\gamma \sum_{n,k} \frac{u_{n,k}}{n^\gamma_{n,k}} e^{i(n-2k)\beta} = c_\gamma \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{im\beta}[\tau^N_\gamma u]_m, \qquad [\tau^N_\gamma u]_m := \sum_{n-2k=m} \frac{u_{n,k}}{n^\gamma_{n,k}}.$$

Then

$$\begin{aligned}\|\tau^N_\gamma u\|^2_{H^{s-\gamma-1}} &= 2\pi c_\gamma^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \left|[\tau^N_\gamma u]_m\right|^2 \\ &\le 2\pi c_\gamma^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \left(\sum_{n-2k=m} (n+1+\gamma)^{2s}|u_{n,k}|^2\right)\left(\sum_{n-2k=m} \frac{(n+1+\gamma)^{-2s}}{(n^\gamma_{n,k})^2}\right)\end{aligned} \tag{70}$$

如果能够证明 $C_{m;s,\ \gamma} := \langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \sum_{n-2k=m} \frac{(n+1+\gamma)^{-2s}}{(n^\gamma_{n,\ k})^2}$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 一致有界，那么证明就完成了。注意到 $C_{m;s,\ \gamma} = C_{-m;s,\ \gamma}$，因此只需对 $m \ge 0$进行验证，此时我们有

$$\begin{aligned}C_{m;s,\gamma} &= \langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \sum_{\ell\ge 0} \frac{(m+2\ell+1+\gamma)^{-2s}}{(n^\gamma_{m+2\ell,\ell})^2} \\ &= \frac{\langle m\rangle^{2s-2\gamma-2}}{\pi(\gamma!)^2} \sum_{\ell\ge 0} (m+2\ell+1+\gamma)^{1-2s} \frac{(m+\ell+\gamma)!}{(m+\ell)!}\frac{(\ell+\gamma)!}{\ell!}.\end{aligned}$$

为此，我们给出以下估计，其证明见附录A.3:

引理 28. 存在 C'、$C'' > 0$，使得 $C' \le C_{m;s,\gamma} \le C''$ 对所有 $m \ge 0$均成立。

根据引理28，由此可见

$$\|\tau^N_\gamma u\|^2_{H^{s-\gamma-1}} \le 2\pi c_\gamma^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_{m;s,\gamma}\left(\sum_{n-2k=m} (n+1+\gamma)^{2s}|u_{n,k}|^2\right) \le 2\pi c_\gamma^2 \left(\sup_{m\in\mathbb{Z}} C_{m;s,\gamma}\right)\|u\|^2_{\widetilde{H}^{s,\gamma}_D(\mathbb{D})},$$

从而建立了正向迹估计。

为证明满射性，只需构造一个有界右逆 $R:\ H^{s-\gamma-1}(\mathbb{S}^1)$ $\to H^{s,\ \gamma}_{D}(\mathbb{D})$。我们构造如下映射：

$$R\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im\omega}\right) = \frac{1}{c_\gamma}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{a_m}{1+|m|} \sum_{n-2k=m, n\le 3|m|} G^\gamma_{n,k}. \tag{71}$$

注意到集合 $\{(n,k):\ \ n-2k=m,\ 0\le k\le n\}$ 可以参数化为

$$n = |m|+2\ell, \quad k = \frac{|m|-m}{2}+\ell = \max(0,-m)+\ell, \quad \ell\ge 0,$$

因此，内层求和遍历 $1+|m|$ 个元素。具体而言， R 将 $e^{im\omega}$ 映射为在$|m|+1$ 其迹等于 $e^{im\omega}$ 的最低次数加权泽尔尼克多项式上的平均值。特别地， R 是一个右逆，直接由性质（68）可得。

此外，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| R\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im\omega}\right)\right\|^2_{\widetilde{H}^{s,\gamma}_D(\mathbb{D})} &= \frac{1}{c_\gamma^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|a_m|^2}{(1+|m|^2)} \sum_{n-2k=m, n\le 3|m|} (n+1+\gamma)^{2s}(n^\gamma_{n,k})^2 \\
&= \frac{1}{c_\gamma^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle m\rangle^{2s-2\gamma-2}|a_m|^2 \frac{\langle m\rangle^2}{(1+|m|)^2} C'_m \\
&\le \left(\sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\langle m\rangle^2 C'_m}{c_\gamma^2(1+|m|)^2}\right) \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im\omega}\right\|^2_{H^{s-1-\gamma}},
\end{aligned}$$

其中我们定义了

$$C'_m := \langle m\rangle^{-2s+2\gamma} \sum_{n-2k=m, n\le 3|m|} (n+1+\gamma)^{2s}(n^\gamma_{n,k})^2.$$

因此，只要证明 C'_m 在 m 中是一致有界的，就可得 $R:\ \ H^{s-1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1) \to \widetilde{H}^{s,\ \gamma}_{D}(\mathbb{D})$ 是有界的。由下述渐近关系可知这一点

$$\sum_{n-2k=m, n\le 3|m|} (n+1+\gamma)^{2s}(n^\gamma_{n,k})^2 = O(\langle m\rangle^{2s-2\gamma}), \qquad \text{as} \quad |m|\to\infty, \tag{72}$$

现在证明这一点。与之前一样， $C'_{-m}=C'_m$，因此只需假设 $m\ge 0$；此时我们将 $n=m+2\ell$ 和 $k=\ell$ 参数化，其中 $0\le\ell\le m$。同样，与之前一样，我们假设 m 足够大，例如 $m>\gamma$。于是，该和变为

$$\sum_{n-2k=m, n\le 3|m|} (n+1+\gamma)^{2s}(n^\gamma_{n,k})^2 \overset{(69)}{=} \frac{\pi}{(\gamma!)^2}\sum_{\ell=0}^{m} (m+2\ell+1+\gamma)^{2s-1}\frac{(m+\ell)!}{(m+\ell+\gamma)!}\frac{\ell!}{(\ell+\gamma)!}.$$

利用渐近关系 $\lim_{x\to\infty} \frac{x!\,\Gamma(x+\gamma+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+1-\gamma)} = 1$，并利用 $m+2\ell+1+\gamma \le 4(m+1)$和 $2s-1 \ge 1+2\gamma \ge 1$，上面的和有界于某个常数倍的

$$\sum_{\ell=0}^{m} (m+2\ell+1+\gamma)^{2s-1}(m+\ell+1)^{-\gamma}(\ell+1)^{-\gamma} \lesssim (m+1)^{2s-\gamma-1}\sum_{\ell=0}^{m}(\ell+1)^{-\gamma}.$$

最后，函数 $x \mapsto (x+1)^{\gamma}$ 是递减的，因此我们可以估计

$$\sum_{\ell=0}^{m}(\ell+1)^{-\gamma} = 1+\sum_{\ell=1}^{m}(\ell+1)^{-\gamma} \le 1+\int_0^m (x+1)^{-\gamma}\,dx = 1+\frac{(m+1)^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}.$$

由此可得

$$\sum_{n-2k=m, n\le 3|m|} (n+1+\gamma)^{2s}(n_{n,k}^{\gamma})^2 \lesssim (m+1)^{2s-\gamma-1}\sum_{\ell=0}^{m}(\ell+1)^{\gamma} \lesssim (m+1)^{2s-2\gamma},$$

即（72）成立。

（情形 $\gamma<0$）注意，映射 $m_{x^\gamma}\colon x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D}) \ni f \mapsto x^\gamma f \in C^\infty(\mathbb{D})$ 可延拓为等距同构 $\widetilde{H}^s, {}_D{}^{\gamma} \mapsto \widetilde{H}^{s,}{}_D{}^{-\gamma}$，并且我们有 $\tau_\gamma^N = \tau_{-\gamma}^N \circ m_{x^\gamma}$。关于 $\gamma \in (-1,0)$ 的结论随即成立。

最后，我们证明极小定义域的刻画（67）。第二格林恒等式（26）对于 $f \in \widetilde{H}^2, {}_D{}^{\gamma}(\mathbb{D})$可延拓为方程

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L^2_\gamma} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L^2_\gamma} = (\tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g)_{L^2(\mathbb{S}^1)}, \quad g \in \mathcal{A}_\gamma. \tag{73}$$

由于 $\widetilde{H}^2, {}_D{}^{\gamma}(\mathbb{D})$ 是狄利克雷实现 $\mathcal{L}_\gamma, {}_D$ 的定义域，因此极小定义域包含于 $\widetilde{H}^2, {}_D{}^{\gamma}(\mathbb{D})$。因此，令 $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{L}_{\gamma,\ min})$；则 $f \in \widetilde{H}^2, {}_D{}^{\gamma}(\mathbb{D})$。此外，由于$\mathcal{L}_{\gamma,\ min} = (\mathcal{L}_{\gamma,\ max})^*$，可知对所有 $g \in \mathcal{L}_{\gamma,\ max}$，我们都有

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L^2_\gamma} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L^2_\gamma} = 0.$$

In 特别是，这对所有 $g \in \mathcal{A}_\gamma$ 都成立；此时结合（73）可得 s

$$(\tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g)_{L^2(\mathbb{S}^1)} = 0 \text{ for all } g \in \mathcal{A}_\gamma,$$

即，$\tau_\gamma^N f$在 $L^2(\mathbb{S}^1)$中与 $\tau_\gamma^D(\mathcal{A}_\gamma) = C^\infty(\mathbb{S}^1)$正交。由后者的稠密性可知，必有$\tau_\gamma^N f \equiv 0$。由此可得，$\mathrm{dom}(\mathcal{L}_{\gamma,\min}) \subset \widetilde{H}^2, {}_D{}^{\gamma}(\mathbb{D}) \cap \ker \tau_\gamma^N$。

为证明另一个包含关系，我们将采用稠密性论证。首先考虑情形$\gamma \in [0,1)$，注意到由定理 14.(ii)可得 $xC^\infty(\mathbb{D}) \subset C_c^\infty(\mathbb{D}) = \mathrm{dom}(\mathcal{L}_{\gamma,min})$，取 n_γ-闭包后，便有 $xC^\infty(\mathbb{D})^{n_\gamma} \subset \mathrm{dom}(\mathcal{L}_{\gamma,min})$。于是，只要满足

$$\widetilde{H}_D^{2,\gamma}(\mathbb{D}) \cap \ker \tau_\gamma^N = \overline{xC^\infty(\mathbb{D})}^{n_\gamma}. \tag{74}$$

包含关系 $\supset$ in (74) 显然成立，因为左侧空间是 n_γ-闭的，且包含 $xC^\infty(\mathbb{D})$。接下来证明包含关系 $\subset$: 对任意 $f \in \widetilde{H}^{2,\gamma}_{,D}(\mathbb{D})$，存在序列 $f_n \in C^\infty(\mathbb{D})$，使得 $f_n \to f$ in $\widetilde{H}^{2,\gamma}_{,D}(\mathbb{D})$。若 f 还满足 $\tau_\gamma^N f \equiv 0$，则 $\tau_\gamma^N f_n \to 0$ in $H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$。令 R 为式 (71) 中定义的 τ_γ^N 的右逆，则 $R\tau_\gamma^N f_n \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 且 $R\tau_\gamma^N f_n \to 0$ in $\widetilde{H}^{2,\gamma}_{,D}(\mathbb{D})$。考虑

$$g_n = f_n - R\tau_\gamma^N f_n \in C^\infty(\mathbb{D}),$$

因为 $\tau_\gamma^N g_n = \tau_\gamma^N f_n - \tau_\gamma^N R\tau_\gamma^N f_n = 0$，$g_n$ 实际上属于 xC^∞（$\mathbb{D}$），并且在 f 中 $\widetilde{H}^{2\text{收敛},\gamma}_{,D}$（$\mathbb{D}$）。由此得到（74）。

对于 $\gamma \in (-1, 0)$，我们采用类似的策略来证明 $\widetilde{H}^{2,\gamma}_{,D}(\mathbb{D}) \cap$ 属于 $\ker \tau_\gamma^N = \overline{x^{1-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})}^{n_\gamma}$，并注意到对于所有 $\gamma \in (-1, 0)$（事实上，对所有 $\gamma < 1$），$C_c^\infty(\mathbb{D})$ 在 $x^{1-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$ 中稠密。 □

由此，我们还可以证明:

引理29。对于 $\gamma \in (-1, 1)$，有 $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ max}) = \overline{\mathcal{A}_\gamma}^{n_\gamma}$。

Proof。考虑算子 $\mathcal{L}_{\gamma,\ \mathcal{A}_\gamma}$，其定义域为 $\mathcal{A}_\gamma$。只需证明

$$\mathrm{dom}\,((\mathcal{L}_{\gamma,\mathcal{A}_\gamma})^*) \subset \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,min}),$$

因为取伴随算子后，我们会得到

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max}) = \mathrm{dom}\,((\mathcal{L}_{\gamma,min})^*) \subset \mathrm{dom}\,((\mathcal{L}_{\gamma,\mathcal{A}_\gamma})^{**}) = \overline{\mathcal{A}_\gamma}^{n_\gamma}.$$

注意

$$\widetilde{H}^{2,\gamma}_D(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\mathcal{A}_\gamma})}^{n_\gamma}$$

通过对 $C^\infty(\mathbb{D})$ 或 $x^{-\gamma}C^\infty(\mathbb{D})$ 取闭包，再取伴随算子可得

$$\mathrm{dom}\,((\mathcal{L}_{\gamma,\mathcal{A}_\gamma})^*) \subset \widetilde{H}^{2,\gamma}_D(\mathbb{D}).$$

因此，设 $f \in \mathrm{dom}\,((\mathcal{L}_{\gamma,\mathcal{A}_\gamma})^*)$; 则 $f \in \widetilde{H}^{2,\gamma}_{,D}(\mathbb{D})$。对于所有 $g \in \mathcal{A}_\gamma$，方程 (73) 给出

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L^2_\gamma} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L^2_\gamma} = (\tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g)_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

但我们还有 $(f, \mathcal{L}_\gamma g) = (f, (\mathcal{L}_{\gamma,\mathcal{A}_\gamma})g) = ((\mathcal{L}_{\gamma,\mathcal{A}_\gamma})^* f, g) = (\mathcal{L}_\gamma f, g)$，因此我们有

$$(\tau_\gamma^N f, \tau_\gamma^D g)_{L^2(\mathbb{S}^1)} = 0 \text{ for all } g \in \mathcal{A}_\gamma.$$

与上述类似的推理可得 $\tau_\gamma^N f \equiv 0$；不过，由于现在已证明刻画式（67），我们可以得出 $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ min})$，正如所需。 □

5.2 狄利克雷迹的延拓

命题 30。 对于 $\gamma \in (-1,\ 1)$，到 W_γ^2上的狄利克雷迹 τ_γ^D（定义于定理 (20）可延拓为有界满射映射

$$\tilde{\tau}_\gamma^D \colon dom\ (\mathcal{L}_{\gamma,max}) \to H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1).$$

此外，对于任意 $f \in$dom $(\mathcal{L}_{\gamma,max})$ 和 $g \in \widetilde{H}^{2}{}_{,D}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$,

$$(\mathcal{L}_\gamma f, g)_{L_\gamma^2} - (f, \mathcal{L}_\gamma g)_{L_\gamma^2} = -\langle \tilde{\tau}_\gamma^D f, \tau_\gamma^N g\rangle_{H^{-1+|\gamma|}, H^{1-|\gamma|}}. \tag{75}$$

命题 *30* 的证明。设 $R\colon H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1) \to \widetilde{H}^{2}{}_{,D}{}^{\gamma}(\mathbb{D})$ 是映射（66）的一个右逆，特别地，对所有 $h \in H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$，有 $\tau_\gamma^N(Rh) = h$。对于 $f \in$dom $(\mathcal{L}_{\gamma,max})$，在 $H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$ 上定义泛函 ϕ_f，其定义为

$$\phi_f(h) = -(\mathcal{L}_\gamma f, Rh)_{L_\gamma^2} + (f, \mathcal{L}_\gamma Rh)_{L_\gamma^2}, \qquad h \in H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1). \tag{76}$$

映射 ϕ_f 显然满足

$$\begin{aligned}|\phi_f(h)| &\le \|\mathcal{L}_\gamma f\|_{L_\gamma^2}\|Rh\|_{L_\gamma^2} + \|f\|_{L_\gamma^2}\|\mathcal{L}_\gamma Rh\|_{L_\gamma^2}\\ &\le (\|f\|_{L_\gamma^2} + \|\mathcal{L}_\gamma f\|_{L_\gamma^2})(\|Rh\|_{L_\gamma^2} + \|\mathcal{L}_\gamma Rh\|_{L_\gamma^2}) \le C(\|f\|_{L_\gamma^2} + \|\mathcal{L}_\gamma f\|_{L_\gamma^2})\|h\|_{H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)},\end{aligned}$$

由 R 的有界性可知。根据黎斯表示定理，这定义了 $H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$ 中唯一的元素 $\tilde{\tau}_\gamma^D f$。若 $f \in W_\gamma^2$，则（31）意味着 $\phi_f(h) = \langle \tau_\gamma^N(Rh)\ \tau_\gamma^D f\rangle_{H'(\gamma)\ H(\gamma)}$，其中，由于 $\tau_\gamma^D f \in H_{(\gamma)} \subset H^{-1+|\gamma|}$，且由于 $\tau_\gamma^N(Rh) = h \in H^{1-|\gamma|}$，后一个配对也等于 $\langle \tau_\gamma^D f, h\rangle_{H^{-1+|\gamma|}, H^{1-|\gamma|}}$。特别地，若 $f \in W_\gamma^2$，则 $\tilde{\tau}_\gamma^D f = \tau_\gamma^D f$ 是 $H^{-1+|\gamma|}$ 中的元素。

接下来证明（75），取 $f \in$ dom $(\mathcal{L}_{\gamma,\ max})$ 和 $g \in \widetilde{H}^{2}{}_{,\ D}{}^{\gamma}$。记 $g = R\tau_\gamma^N g + g_{00}$ where$\tau_\gamma^N g_{00} = 0$ hence $g_{00} \in$dom $(\mathcal{L}_{\gamma,\ min})$。然后，为简洁起见，用 $(\cdot,\cdot)$ 表示 L_γ^2内积，

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\gamma f, g) - (f, \mathcal{L}_\gamma g) &= \left(\mathcal{L}_\gamma f, R\tau_\gamma^N g\right) - \left(f, \mathcal{L}_\gamma R\tau_\gamma^N g\right) + (\mathcal{L}_\gamma f, g_{00}) - (f, \mathcal{L}_\gamma g_{00})\\ &\overset{(76)}{=} -\langle \tilde{\tau}_\gamma^D f, \tau_\gamma^N g\rangle_{H^{-1+|\gamma|}, H^{1-|\gamma|}} + (\mathcal{L}_\gamma f, g_{00}) - (f, \mathcal{L}_\gamma g_{00})\end{aligned}$$

最后两项相互抵消，因为 $\mathcal{L}_{\gamma,\ max} = (\mathcal{L}_{\gamma,\ min})^*$。

为了证明 $\tilde{\tau}_\gamma^D$ 的满射性，我们现在构造一个右逆。由命题 27 和（18）可知，算子 $\Upsilon := \tau_\gamma^N \mathcal{L}_\gamma^{-1}{}_{,\ D}\colon L_\gamma^2 \to H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$ 连续且满射（在本证明中定义的 R 中，$\mathcal{L}_\gamma R$ 是 Υ 的右逆），因此转置 $\Upsilon'\colon H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1) \to L_\gamma^2$ 有界。

我们首先断言，Υ' 取值于 $\mathcal{N}_0(\mathcal{L}_{\gamma,\ max})$，其拓扑由 L_γ^2刻画。因此，Υ' 是一个连续的 dom $(\mathcal{L}_{\gamma,\ max})$ 值映射。为此，取 $f \in H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$ 使得

$\Upsilon' f \in L^2_\gamma$，我们来检查 $\mathcal{L}_\gamma \Upsilon' f = 0$ （在分布意义下，即 ${}^t\mathcal{L}_\gamma \iota_\gamma(\Upsilon' f) = 0$）：对于$\psi \in C^\infty$，

$$\langle {}^t\mathcal{L}_\gamma \iota_\gamma(\Upsilon' f), \psi\rangle = \big(\Upsilon' f, \mathcal{L}_\gamma \psi\big)_{L^2_\gamma} = \langle f, \tau_\gamma^N \mathcal{L}_{\gamma,D}^{-1} \mathcal{L}_\gamma \psi\rangle_{H^{-1+|\gamma|}, H^{1-|\gamma|}} = 0,$$

因为 $\psi \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ D})$ 和 $\tau_\gamma^N \psi = 0$。因此，Υ' 是一个连续的 $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ max})$ 值映射。

最后，我们证明 $\tilde{\tau}_\gamma^D \Upsilon' = id|_{H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1)}$。对于 $f \in H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$ 和 $h \in H^{1-|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$，有

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\tau}_\gamma^D \Upsilon' f, h\rangle_{H^{-1+|\gamma|}, H^{1-|\gamma|}} &\overset{(76)}{=} -(\cancel{\mathcal{L}_\gamma \Upsilon' f}, Rh)_{L^2_\gamma} + \big(\Upsilon' f, \mathcal{L}_\gamma Rh\big)_{L^2_\gamma} \\ &= \langle f, \tau_\gamma^N \mathcal{L}_{\gamma,D}^{-1} \mathcal{L}_\gamma Rh\rangle_{H^{-1+|\gamma|}, H^{1-|\gamma|}},\end{aligned}$$

并且由于 $Rh \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ D})$，$\tau_\gamma^N \mathcal{L}_\gamma^{-1}{}_{,D} \mathcal{L}_\gamma Rh = \tau_\gamma^N Rh = h$，因此 $\tilde{\tau}_\gamma^D \Upsilon' f = f$作为 $H^{-1+|\gamma|}(\mathbb{S}^1)$ 的元素。

命题 30 的证明完毕。 □

5.3 延拓 (34) 格林第二恒等式的

我们先证明引理 7。

引理 7 的证明。令 $\mathcal{L}_\gamma^{-1}{}_{,D}$ 如 (18) 中所定义，取 $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max})$。由于 $(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)f \in L^2_\gamma$，我们可以定义 $f_D := (\mathcal{L}_{\gamma,D} - \lambda)^{-1}(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)f \in \widetilde{H}^2$，使得 ${}_D{}^\gamma(\mathbb{D}) \subset \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max})$ 且满足 $(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)f_D = (\mathcal{L}_\gamma - \lambda)f$ 和 $\tau_\gamma^D f_D = 0$，并令 $f_\lambda := f - f_D$。显然 $f_\lambda \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,max})$，且 $(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)f_\lambda = 0$，即 $f_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{L}_{\gamma,max})$。

为证明唯一性，若 $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{\gamma,\ D}) \cap \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{L}_{\gamma,\ max})$, then $(\mathcal{L}_\gamma - \lambda)f = 0$ 且 $\tau_D f = 0$，由 $\mathcal{L}_\gamma$ 的单射性可知，$_D - \lambda$，这意味着 $f = 0$。引理 7 得证。 □

最后，我们证明如何将格林第二恒等式推广到（34）。本段中，未标下标的内积默认指 L^2_γ-内积。利用引理 7 及 $\lambda = 0$，我们计算得

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}_\gamma f, g) - (f, \mathcal{L}_\gamma g) \\ &\quad\overset{(33)}{=} (\mathcal{L}_\gamma f, g_D) + (\mathcal{L}_\gamma f, g_0) - (f_D, \mathcal{L}_\gamma g) - (f_0, \mathcal{L}_\gamma g) \\ &\quad\overset{(75)}{=} (f, \mathcal{L}_\gamma g_D) - \langle \tilde{\tau}_\gamma^D f, \tau_\gamma^N g\rangle_{-1+|\gamma|,1-|\gamma|} + (\mathcal{L}_\gamma f, g_0) \dots \\ &\qquad - (\mathcal{L}_\gamma f_D, g) + \langle \tilde{\tau}_\gamma^D g, \tau_\gamma^N f_D\rangle_{-1+|\gamma|,1-|\gamma|} - (f_0, \mathcal{L}_\gamma g) \\ &\quad\overset{(33)}{=} (f_D, \mathcal{L}_\gamma g_D) + \cancel{(f_0, \mathcal{L}_\gamma g_D)} - \langle \tilde{\tau}_\gamma^D f, \tau_\gamma^N g\rangle_{-1+|\gamma|,1-|\gamma|} + \cancel{(\mathcal{L}_\gamma f_D, g_0)} + \cancel{(\mathcal{L}_\gamma f_0, g_0)} \dots \\ &\qquad - (\mathcal{L}_\gamma f_D, g_D) - \cancel{(\mathcal{L}_\gamma f_D, g_0)} + \langle \tilde{\tau}_\gamma^D g, \tau_\gamma^N f_D\rangle_{-1+|\gamma|,1-|\gamma|} - \cancel{(f_0, \mathcal{L}_\gamma g_D)} - \cancel{(f_0, \mathcal{L}_\gamma g_0)}.\end{aligned}$$

最后，$(f_D, \mathcal{L}_\gamma g_D) = (\mathcal{L}_\gamma f_D, g_D)$，因为（$\mathcal{L}_\gamma, \widetilde{H}^2{}_{,D}{}^\gamma(\mathbb{D})$）是自伴的，于是得到（34）。

定理 8 的证明完成。

A 辅助引理的证明

A.1 弗里德里希斯扩张的刻画 - 引理17 的证明

引理 17 的证明。在将 T_0 调整为 I 的常数倍之后（注意这不会影响所涉及的任何定义域），我们可以假设 $T_0 \geq 1$。α- $D(T_0)$ 的闭包正是上文所述的空间 V，即相对于范数 $u \mapsto (\alpha(u,u))^{1/2}$ 而言的 $D(T_0)$ 的希尔伯特空间闭包。由于弗里德里希斯扩张的定义域是 (43) 中定义的 D_F，其中 $D_F \subset V$，因此，如果 T 是 T_0 的弗里德里希斯扩张，则 $D(T) = D_F$ 必须包含于 V 中，即 $D(T_0)$ 的 α-闭包。

反过来，假设 $D(T)$ 包含于 dom α 的 α-闭包中，即包含于 V 中。现在我们断言，对于将 α 扩张到 V 的 $\tilde{\alpha}$，

$$\tilde{\alpha}(u,v) = (Tu,v)_{\mathcal{H}}, \qquad u \in D(T), \qquad v \in V.$$

我们先在 $v \in D(T_0)$ 的情形下证明这一点。由于 $u \in D(T) \subset V$，可知存在一个序列$u_n \in D(T_0)$，使得 $u_n \to_\alpha u$。在这种情况下，我们还有 $\tilde{\alpha}(u,v) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\alpha}(u_n,v) = \lim_{n\to\infty} \alpha(u_n,v)$。但我们还有

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(u_n,v) = \lim_{n\to\infty} (T_0u_n,v)_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} (u_n,T_0v)_{\mathcal{H}} = (u,T_0v)_{\mathcal{H}} = (u,Tv)_{\mathcal{H}} = (Tu,v)_{\mathcal{H}}.$$

第二个等式由 T_0 的对称性得出。第三个等式成立，是因为 $u_n \to_\alpha u$ 必然意味着 $u_n \to u$ 属于 $\mathcal{H}$。第四个等式由 T 是 T_0 的扩张得出。最后一个等式则由 T 在 $D(T)$ 上的对称性得出，并注意到 u 和 v 均属于 $D(T)$。因此，对于 $u \in D(T)$ 和 $v \in$ dom α，有 $\tilde{\alpha}(u,v) = (Tu,v)_{\mathcal{H}}$。要将结果推广到 $v \in V$，注意到 $v \in V$ 蕴含存在 $v_n \in D(T_0)$，使得 $v_n \to_\alpha v$。于是

$$\tilde{\alpha}(u,v) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\alpha}(u,v_n) = \lim_{n\to\infty} (Tu,v_n)_{\mathcal{H}} = (Tu,v)_{\mathcal{H}}.$$

第二个等式由前面讨论的情形得出，而第三个等式则是因为 $v_n \to_\alpha v$ 必然意味着 $v_n \to v$ 属于 $\mathcal{H}$。因此，对于 $u \in D(T)$ 和 $v \in V$，我们有 $\tilde{\alpha}(u,v) = (Tu,v)_{\mathcal{H}}$。由此可得，对于 $u \in D(T)$，

$$|\tilde{\alpha}(u,v)| \leq \|Tu\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}},$$

即，$u \in D_F$。因此，$D(T)$包含在弗里德里希斯扩张的定义域中。由于 T也是自伴的，因此 T 必定就是弗里德里希斯扩张，因为一个自伴扩张的定义域不可能真包含于另一个自伴扩张的定义域中（这可通过取伴随得到）。

□

A.2 引理的证明 18

引理的证明 *18.* 令 $s_j = \sum_{j=1}^{k} 1/a_k$；则 $s_j \to \infty$ 当 $j \to \infty$ 时，根据假设。令

$$c_k^{(j)} = \begin{cases} \frac{1}{s_j a_k} & 1 \le k \le j, \\ 0 & k > j \end{cases}.$$

Then

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} = \frac{1}{s_j} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{a_k} = 1$$

根据构造，且

$$\sum_k a_k |c_k^{(j)}|^2 = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{s_j^2 a_k} = \frac{1}{s_j} \to 0$$

由于 $s_j \to \infty$ 根据假设。 □

A.3 引理的证明 28

回顾表达式

$$C_{m;s,\gamma} = \frac{\langle m \rangle^{2s-2\gamma-2}}{\pi(\gamma!)^2} \sum_{\ell \ge 0} (m + 2\ell + 1 + \gamma)^{1-2s} \frac{(m+\ell+\gamma)!}{(m+\ell)!} \frac{(\ell+\gamma)!}{\ell!} \tag{77}$$

注意，对于 $\gamma \ge 0$ 和 $s > \gamma + 1$，有

$$1 - 2s \le 1 - 2s + 2\gamma = -1 - 2(s - \gamma - 1) < -1.$$

注意到渐近关系 $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\gamma)!}{x!(x+1)^\gamma} = 1$，可知，(77) 中的被加数的上界和下界分别是 $(m + 2\ell + 1 + \gamma)^{1-2s}(m + \ell + 1)^\gamma(\ell + 1)^\gamma$ 的某个倍数。因此，只需为该和建立上界和下界

$$\langle m \rangle^{2s-2\gamma-2} \sum_{\ell \ge 0} (m + 2\ell + 1 + \gamma)^{1-2s} (m + \ell + 1)^\gamma (\ell + 1)^\gamma.$$

对于上界，注意到

$$m + 2\ell + 1 + \gamma \ge m + \ell + 1 \implies (m + 2\ell + 1 + \gamma)^{1-2s} \le (m + \ell + 1)^{1-2s}$$

由于 $1 - 2s < 0$，并且

$$\ell + 1 \le m + \ell + 1 \implies (\ell + 1)^\gamma \le (m + \ell + 1)^\gamma$$

由于 $\gamma > 0$。因此，我们可以估计

$$\begin{aligned} C_{m;s,\gamma} &\le C\langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \sum_{\ell\ge 0} (m+2\ell+1+\gamma)^{1-2s}(m+\ell+1)^{\gamma}(\ell+1)^{\gamma} \\ &\le C\langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \sum_{\ell\ge 0} (m+\ell+1)^{1-2s+2\gamma}, \end{aligned}$$

其中 C不依赖于 m。注意，由于 $1-2s+2\gamma < -1$，该级数确实收敛。由于$x \mapsto (m+x)^{1-2s+2\gamma}$单调递减，我们有

$$\sum_{\ell\ge 0} (m+\ell+1)^{1-2s+2\gamma} \le \int_0^\infty (m+x)^{1-2s+2\gamma}\, dx = \frac{m^{2-2s+2\gamma}}{2s-2\gamma-2}.$$

由此可得

$$C_{m;s,\gamma} \le C\langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \frac{m^{2-2s+2\gamma}}{2s-2\gamma-2} \le \frac{C}{2s-2\gamma-2},$$

从而得到了上界。对于下界，不失一般性，假设 m 足够大，例如 $m > \gamma$，并舍去 $0 \le \ell < m$ 对应的（正）项。对于其余各项，我们有

$$\begin{aligned} 2\ell+2 > m+\ell+1 \implies \ell+1 > \frac{1}{2}(m+\ell+1) \implies (\ell+1)^{\gamma} > 2^{\gamma}(m+\ell+1)^{\gamma}, \\ m+2\ell+1+\gamma < 2(m+\ell+1) \implies (m+2\ell+1+\gamma)^{1-2s} > 2^{1-2s}(m+\ell+1)^{1-2s}. \end{aligned}$$

我们得出

$$\begin{aligned} C_{m;s,\gamma} &\ge c\langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \sum_{\ell\ge m} (m+2\ell+1+\gamma)^{1-2s}(m+\ell+1)^{\gamma}(\ell+1)^{\gamma} \\ &\ge 2^{1-2s+\gamma} c\langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \sum_{\ell\ge m} (m+\ell+1)^{1-2s+2\gamma}, \end{aligned}$$

其中 c 不依赖于 m。再次利用 $x \mapsto (m+x)^{1-2s+2\gamma}$ 单调递减这一点，我们有

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} (m+\ell+1)^{1-2s+2\gamma} \ge \int_{m+1}^{\infty} (m+x)^{1-2s+2\gamma}\, dx = \frac{(2m+1)^{2-2s+2\gamma}}{2s-2\gamma-2}.$$

由此可得

$$C_{m;s,\gamma} \ge 2^{1-2s+\gamma} c\langle m\rangle^{2s-2\gamma-2} \frac{(2m+1)^{2-2s+2\gamma}}{2s-2\gamma-2} \ge c'$$

对所有的 $m > \gamma$，其中

$$c' = \frac{2^{1-2s+\gamma}c}{2s-2\gamma-2} \left(\inf_{m\ge 0} \frac{\langle m\rangle}{2m+1} \right)^{2s-2\gamma-2} = \frac{2^{1-2s+\gamma}5^{1-s+\gamma}c}{2s-2\gamma-2} > 0.$$

这就得到了所需的下界。

致谢。
作者感谢 NSF-CAREER 项目资助（资助编号 DMS-1943580）。作者谨向 Jussi Behrndt 致谢，感谢他对本项目的关注并提供了许多有益的意见和参考文献；同时感谢 Rafe Mazzeo、Andr´as Vasy 和 Charlie Epstein 对手稿早期版本提出的意见。作者还要感谢匿名审稿人，其意见帮助提升了本文的清晰度。

参考文献

[1] J. Behrndt, S. Hassi, and H. De Snoo, 《边值问题、Weyl函数与微分算子》，Springer Nature，2020年。5，12，15，23，24，35，36
[2] J. Behrndt and M. Langer, 《有界区域上椭圆偏微分算子的边值问题》，《函数分析杂志》，243（2007），第536–565页。5，12，13[3] ——, 《椭圆算子、狄利克雷到诺伊曼映射与拟边界三元组》，《边值问题的算子方法》，伦敦数学学会讲义丛书，第404卷（2012），第121–160页。5，12，13[4] J. Behrndt, M. Langer, V. Lotoreichik, and J. Rohleder, 《拟边界三元组与半有界自伴扩张》，《爱丁堡皇家学会会刊A辑：数学》，147（2017），第895–916页。14，16[5] A. C. Cavalheiro, 《加权索伯列夫空间与退化椭圆方程》，《巴拉那数学学会公报》，26（2008），第117–132页。3
[6] V. Derkach and M. Malamud, 《厄米算子的扩张理论与矩问题》，《数学科学杂志》，73（1995），第141–242页。12，13[7] C. Epstein and R. Mazzeo, 《广义Kimura和Heston扩散的几何微局部分析》，载于《非线性微分方程中的分析与拓扑》，施普林格，2014年，第241–266页。3[8] C. L. Epstein and R. Mazzeo, 《种群生物学中的退化扩散算子》，普林斯顿大学出版社，2013年。3[9] P. M. Feehan and C. A. Pop, 《数理金融中的退化椭圆算子与变分方程解的高阶正则性》，《微分方程进展》，20（2015），第361–432页。3[10] J. Galkowski and M. Zworski, 《Keldysh算子的解析拟椭圆性》，《伦敦数学学会会刊》，123（2021），第498–516页。3

[11] B. Helffer, 《谱理论及其应用》，第139号，剑桥大学出版社，2013年。18，34
[12] G. Lebeau and M. Zworski, 《关于带解析系数的Vasy算子的评论》，载于《美国数学会会刊》，第147卷，2019年，第145–152页。3[13] R. Mazzeo, 《微分边缘算子的椭圆理论 I》，《偏微分方程通讯》，16（1991），第1615–1664页。3
[14] R. Mazzeo and F. Monard, 《具有严格凸边界的流形上X 射线变换的双重 b-纤维化与去奇异化》，arXiv预印本 arXiv:2112.14904，（2021）。3[15] R. K. Mishra, F. S. Monard, and Y. J. Zou, 一类奇异加权 X 射线变换的 c^∞-同构性质，《逆问题》，39（2022），第024001页。1，3，4，5，6[16] F. Monard, 《常曲率圆盘上X 射线变换的函数关系、精确映射性质与正则化》，《SIAM 数学分析杂志》，52（2020），第5675–5702页。3[17] F. Monard, R. Nickl, and G. P. Paternain, 《X 射线变换的高效非参数贝叶斯推断》，《统计年刊》，47（2019），第1113–1147页。3[18] F. Monard, R. Nickl, and G. P. Paternain, 《带高斯过程先验的非线性逆问题中贝叶斯不确定性量化的统计保证》，《统计年刊》，49（2021），第3255–3298页。3[19] T. H. Otway, 《Keldysh 型椭圆-双曲型方程的狄利克雷问题》，第2043卷，施普林格，2012年。3
[20] E. Sawyer and R. Wheeden, 《退化 Sobolev 空间与次椭圆方程的正则性》，《美国数学会会刊》，362（2010），第1869–1906页。3[21] A. Vasy, 《由内而外 II：逆问题与应用》，MSRI 出版物第60号，剑桥大学出版社，2012年，章节《渐近双曲空间的微局部分析与高能预解算子估计》。3[22] A. Vasy, 《渐近双曲空间与Kerr-de Sitter 空间的微局部分析》（附 Semyon Dyatlov 的附录），《数学新进展》，194（2013），第381–513页。3
[23] A. Wünsche, 《广义Zernike多项式或圆盘多项式》，《计算与应用数学杂志》，174（2005），第135–163页。4，5，8，19，37

[24] M. Zworski，渐近双曲流形的共振：重新审视 Vasy方法，谱理论杂志，6 (2016)，第 1087–1114 页。3