arXiv:2302.08154v2 [math.AP] 7 Feb 2024

# ¨超曲面上具有奇异势的薛定谔算子的传播

JEFFREY GALKOWSKI 和 JARED WUNSCH

Abstract. 本文研究黎曼流形（$M, g$）上薛定谔算子 $-h^2\Delta_g + V$ 的缺陷测度传播，其中流形维数为 $n$，势 $V$ 沿超曲面 $Y$ 具有余法奇异性，具体而言，沿与 $Y$ 相切的向量场求导不会改变 $V$ 的正则性。我们证明，只要势绝对连续，标准传播定理就适用于横截穿过曲面 $Y$ 的双特征曲线。此外，即使双特征曲线恰好与 $Y$ 一阶相切，只要势的一阶导数绝对连续，标准传播定理仍然成立。

## 1. Introduction

设（$M, g$）是一个光滑黎曼流形， $Y \subset M$ 是一个光滑超曲面。设 $V$ 为实值函数，且在 $Y$ 之外光滑；它在 $Y$ 上具有余法奇异性，具体而言，沿与 $Y$ 相切的向量场求导不会改变 $V$ 的正则性。本文利用半经典缺陷测度研究薛定谔算子

$$P := -h^2\Delta_g + V.$$

令 $p = |\xi|_g^2 + V$ 表示 $P$ 的半经典主符号，并令 $H_p$ 表示与 $p$ 相关联的哈密顿向量场。回顾一下，若函数序列 $u_h$ 满足 $h \downarrow 0$ ，则存在（不一定唯一的）缺陷测度 $\mu$ ，使得沿某个子列 $h_j \downarrow 0$

$$\langle \mathrm{Op}(a)u_{h_j}, u_{h_j}\rangle_{L^2(M)} \to \int_{T^*M} a d\mu$$

对所有 $a \in C_c^\infty(T^*M)$ 均成立。缺陷测度的标准传播定理指出，若 $V \in C^\infty(M; \mathbb{R})$,

$$(-h^2\Delta_g + V)u = o(h)_{L^2}, \qquad \|u\|_{L^2} = 1,$$

且 $u$ 具有缺陷测度 $\mu$，则 $\mu$ 支集于 $p$ 的特征集上，并在 $p$的哈密顿流下保持不变。另一方面，如果 $V$ 在 $Y$ 上不连续，例如在 $Y$上具有跳跃奇异性，则可以证明有正比例的能量可能会从 $Y$ 反射回来（见 [1], [7, 第 1.2], [5] 节）。相比之下，下面的定理 1.3 表明，只要 $V$ 在 $Y$处绝对连续，就不会沿着横向于 $Y$的双特征曲线发生反射。

在陈述我们的结果之前，我们先介绍几类余法向势。

定义 1.1. 设 $\mathcal{B}$ 表示定义在 $M$上的函数巴拿赫空间。若对于所有 $k$和 $X_1$，.....， $X_k$ 与 $Y$相切的光滑向量场，我们有

$$V \in \mathcal{B}, \qquad X_1 \dots X_k V \in \mathcal{B}.$$

本文将主要关注以下情形： $\mathcal{B} = W^{k,\,p}$其中 $k = 1$、2，且$p = 1, \infty$。请注意，这里我们用共法向空间来表述假设；主要结果实际所需的假设，可以用相对于超曲面 $Y$的费米正规坐标，以较弱的形式表述：设 $(x, y)$ 是 $Y$ 附近的费米正规坐标，其中 $x$ 是到 $Y$的有向距离。通常，我们只需要 $V$在 $Y$ 的费米邻域之外光滑，并且对于定义在 $\mathbb{R}$上的巴拿赫空间函数 $\mathcal{B}$ ，

$$V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_x; C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_y)).$$

在最初的表述中，我们将使用共法向空间给出定理的坐标不变版本；我们实际证明这些结果时所采用的较弱假设，将在本节末尾附近讨论。

我们首先讨论在较低正则性假设下双特征流的存在性。这里我们大量利用势的结构化性质；请注意，对于非结构化奇异系数的情形，近期已有非常强的结果见 [2]。

令 $f$ 表示超曲面 $Y$的定义函数， $\pi$ 表示投影映射 $\pi\colon T^*M \to M$，并令 $\mathcal{H} \subset T^*M$ 表示双曲集

$$\mathcal{H} = \{p = 0\} \cap (\{f \neq 0\} \cup \{H_p \pi^* f \neq 0\}),$$

该双曲集包含 $Y$之外的点，也包含位于 $Y$ 上且双特征流横截于 $Y$的点。令

$$\mathcal{G}_2 = \{p = 0\} \cap \{f = H_p \pi^* f = 0,\ H_p^2 \pi^* f \neq 0\}$$

表示位于 $Y$ 上且流恰好以二阶“掠射”的点 ."

定理 1.1. 若 $V \in IW^{1,1}$，则对 $\mathcal{H}$ 中的每一点，都存在一条位于 $\mathcal{H}$中的 $H_p$的唯一极大积分曲线。若 $V \in IW^{2,1}$，则对 $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}_2$中的每一点，都存在一条位于 $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}_2$中的 $H_p$ 的唯一极大积分曲线。

在 $Y$ 上，双曲区域中的积分曲线通常满足系数仅为 $L^1$ 的常微分方程；其解是关于 $t$ 的绝对连续函数，且方程以弱形式成立。请注意，这种系数正则性水平（$L^1$）低于皮亚诺存在定理所要求的连续性，因此解的存在性取决于奇点的结构。相较之下，一旦达到 $V$的 $IW^{2,\,1}$ 正则性，哈密顿向量场的系数便是绝对连续的，因此根据皮亚诺定理，解存在，但不具有唯一性；在这里，唯一性同样是由奇点结构的特殊性质恢复的。

我们用 $\varphi_t(\bullet)$ 表示 $\mathcal{H}$ 或 $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}_2$ 上的哈密顿流，具体取决于 $V$ 的正则性。

现在我们转而讨论缺陷测度的传播结果。我们首先给出一个适用于非结构化奇异势（即尚未采用上述余法向性概念）的一般低正则性传播结果。请注意，该结果也可由 [2] 的（更强）结果得到；我们在此纳入该结果是为了完整性，而非出于新颖性。

定理 1.2。设 $V \in \mathcal{C}^1(M)$ 取实值，且 $u$ 满足

$$\|(-h^2\Delta_g + V)u\|_{L^2} = o(h), \qquad \|u\|_{L^2} \leq C,$$

并具有缺陷测度 $\mu$。则 $\operatorname{supp} \mu \subset \{p = 0\}$，并且对所有 $a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$，$\mu(H_p(a)) = 0$。

请注意，在这一系数正则性水平（连续）下，双特征曲线存在，但一般而言可能不唯一，因此我们的结论涉及 $H_p(a)$，但并未讨论沿各条双特征曲线的传播，或在（未定义的）流下的不变性问题。（在 [2], 中，作为一个推论表明，$\mu$ 的支集确实必须是（非唯一的）积分曲线的并集。）

在流良好定义的 $T^*M$ 区域中，定理 1.2 给出缺陷测度在流下的不变性；特别地，结合定理 1.1，它在双曲型点和二阶掠射点处给出如下结果；此处对 $V$ 加强的正则性假设保证了流的存在：

推论 1.2. 假设 $V \in IW^{2,\ 1}(Y)$ 为实值，且 $u$ 满足

$$\|(-h^2\Delta_g + V)u\|_{L^2} = o(h), \qquad \|u\|_{L^2} \leq C,$$

并且具有缺陷测度 $\mu$。若 $B \subset \{p = 0\}$ 为博雷尔集且

$$\inf_{0 \leq t \leq T, \rho \in B} |H_p^2(\pi^* f)(\varphi_t(\rho))| + |H_p(\pi^* f)(\varphi_t(\rho))| + |\pi^* f(\varphi_t(\rho))| > 0,$$

*then*

$$\mu(B) = \mu(\varphi_T(B)).$$

与积分曲线的存在理论一样，我们可以将奇性传播的正则性假设降低至 $W^{1,\ 1}$，方法是设 $V$ 的奇性具有相对于某个超曲面的余法向分布结构，并将讨论范围限定为 $\mathcal{H} \subset T^*M$。

定理 1.3. 假设 $V \in IW^{1,\ 1}(Y)$ 为实值，且 $u$ 满足

$$\|(-h^2\Delta_g + V)u\|_{L^2} = o(h), \qquad \|u\|_{L^2} \leq C,$$

并且具有缺陷测度 $\mu$。那么 $\operatorname{supp} \mu \subset \{p = 0\}$，且对所有满足下述条件的 $B \subset \{p = 0\}$ 博雷尔集和 $T > 0$

$$\inf_{0 \leq t \leq T, \rho \in B} |H_p(\pi^* f)(\varphi_t(\rho))| + |\pi^* f(\varphi_t(\rho))| > 0,$$

我们有

$$\mu(B) = \mu(\varphi_T(B)).$$

回顾一下，根据定理 1.1，流 $\varphi_t := \exp(tH_p) : B \to T^*M$ 对于 $t \in [0,T]$ 定义良好。

如上所述，本文的结果是在比上述共法向假设更弱的条件下得到的。主要定理陈述中采用共法向性假设，其优点在于它在流形上具有不变的意义（独立于度量），并且与先前研究 [7], 中的假设相衔接；在该研究中，余法向性起着至关重要的作用。然而，事实上我们只需采用以下较弱的假设（由于定理具有局部性质，以下在 $Y = \{x = 0\}$附近作局部陈述）。定理 1.1 只需假设$V \in W^{1,1}(\mathbb{R}_x; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d-1}_y))$ 或 $W^{2,1}(\mathbb{R}_x; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d-1}_y))$ 分别在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}_2$ 处成立。推论 1.2 同样只需要求 $W^{2,1}(\mathbb{R}_x; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d-1}_y))$。最后，定理 1.3 只需要求 $V \in W^{1,1}(\mathbb{R}_x; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d-1}_y))$。

本文的组织结构如下（请注意，这在一定程度上偏离了上述结果的陈述顺序）。定理 1.1 将在下文第 3 节中证明，其中定理的双曲型版本和掠射版本分别见引理 3.1 和引理 3.3。定理 1.2 与这里提出的其他主要结果不同，其假设在 $V$ 上没有结构性限制；它由非常一般的椭圆估计引理 5.2（用于得到 $\operatorname{supp}\mu \subset \{p = 0\}$）以及本文最后一节中的传播结果引理 8.2 推出。最后，关于双曲传播的定理 1.3，由椭圆估计引理 5.2 与双曲传播估计引理 7.3 结合得到。

对于具有余法奇异性的算子，奇性传播已在波动方程 [4] 和半经典情形 [7]中得到研究。在 [7], 中，Gannot 和第二作者利用微局部分析中的精细技术，在对势 $V$ 作出更强假设的条件下，量化了奇性不发生衍射的程度（以 $h$ 的幂次表示），其情形为奇性从 $Y$ 衍射出去。相比之下，本文所用的方法仅依赖基本的伪微分演算。我们认为，在比 [7], 中更宽松的 $V$ 假设下，本文的方法也可能得到更精细的估计，但这里不作探讨；我们旨在给出一种相对简单且易于理解的证明。

文献 [2], 最近研究了无结构假设的粗糙度量下的奇性传播，其中作者探讨了 $\mathcal{C}^1$ 度量下波动方程的零可控性问题。

Acknowledgements.
作者感谢两位匿名审稿人对稿件提出的宝贵意见。JG 感谢英国工程与自然科学研究委员会提供的资助，项目编号为 EP/V001760/1 和 EP/V051636/1。JW 的部分研究工作得到了西蒙斯基金会资助（项目编号 631302）、美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS–2054424）以及西蒙斯学者奖的支持。
Data Availability Statement. 本项目未生成任何数据。

## 2. Conormal distributions

我们首先澄清关于 $V$ 的共法向正则性假设。如上所述，设 $Y \subset M$ 是一个光滑嵌入超曲面，且 $n =$维数为 $M$。遵循 H¨ormander [9, 第 18.2], 节，我们回顾共法向分布的定义： $u \in I^m(M, Y)$，若对所有 $N \in \mathbb{N}$ 以及所有与 $Y$ 相切的光滑向量场 $L_1$、$\dots L_N$，

$$L_1 \dots L_N u \in {}^{\infty}H^{\mathrm{loc}}_{(-m-n/4)}(M).$$

这里我们不讨论 Besov空间 $H^{\mathrm{loc}}_{(-m-n/4)}(M)$ 的具体细节；相反，我们指出一种等价定义（ [9]中的定理18.2.8）： $u$ 应在 $Y$之外光滑，并且在 $Y$附近的局部坐标 $x$中，$y$ 在 $Y$的一个领状邻域内，其中 $x$ 是边界定义函数，

$$u = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} a(x, y, \xi)\, d\xi,$$

其中

$$a \in S^{m+n/4-1/2}(\mathbb{R}^n_{x,y} \times \mathbb{R}_\xi)$$

是一个 Kohn–Nirenberg符号，即，

$$a \in S^m(\mathbb{R}^n_{x,y} \times \mathbb{R}_\xi) \iff |\partial^\alpha_{(x,y)} \partial^\beta_\xi a(x, \xi)| \le C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}.$$

现在，我们将这一众所周知的空间尺度与我们假设中出现的分布空间联系起来。

引理 2.1. 设 $k \in \mathbb{N}$。则对所有 $\varepsilon > 0$,

$$I^{-n/4+1/2-k-\varepsilon}(M, Y) \subset IW^{k,1}(Y) \subset I^{-n/4+1/2-k}(M, Y). \tag{2.1}$$

证明。上述所有分布空间在远离 $Y$ 的局部区域内都与 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 一致，因此我们在 $Y$ 附近的局部坐标 $(x, y)$ 中进行讨论。给定 $u(x, y)$，记 $\check{}u(\xi, y)$ 为关于变量 $x$ 的部分傅里叶变换。于是

$$u \in IW^{k,1}(Y) \Longrightarrow (\xi\partial_\xi)^j \partial^\alpha_y \xi^\ell \check{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n_{x,y} \times \mathbb{R}_\xi) \text{ for all } \ell \le k,\ j \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}.$$

因此,

$$u \in IW^{k,1}(Y) \Longrightarrow \check{u} \in S^{-k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

从而得到 (2.1) 中的第二个包含关系。

为得到第一个包含关系，注意对于 $I^{-n/4+1/2-k-\varepsilon}(M, Y)$,

$$\mathcal{F}^{-1}(x\partial_x)^j \partial^\alpha_y \partial^\beta_{x,y} u \in S^{-k+|\beta|-\varepsilon}$$

对所有 $j, \alpha, \beta$ 均成立，因此若 $|\beta| \le k$

$$(x\partial_x)^j \partial^\alpha_y \partial^\beta_{x,y} u(x, y) = \int e^{ix\xi} b(x, y, \xi)\, d\xi$$

对于某个 $b \in S^{-\varepsilon}$。现在只需证明右端属于 $L^1$。为此，我们作如下分解

$$\int e^{ix\xi} b(x, y, \xi)\, d\xi = \int_{|\xi|<|x|^{-1-\varepsilon}} e^{ix\xi} b(x, y, \xi)\, d\xi + \int_{|\xi|\ge|x|^{-1-\varepsilon}} e^{ix\xi} b(x, y, \xi)\, d\xi \equiv W_< + W_>.$$

然后，由于被积函数有界，$|W_<| \leq C\,|x|^{-1-\varepsilon}$；因此该项属于 $L^1$。在 $W_>$ 中利用向量场 $x^{-1}D_\xi$ 作分部积分，得到一个边界项$O(|x|^{-1+\varepsilon(1-\varepsilon)})$（也属于 $L^1$），以及一个积分

$$x^{-1}\int_{|\xi|\geq|x|^{-1-\varepsilon}} e^{ix\xi}b'\,d\xi$$

属于 $b'\in S^{-1-\varepsilon}$。后一个项由下式控制：

$$Cx^{-1}\int_{|\xi|>|x|^{-1-\varepsilon}}^{\infty}|\xi|^{-1-\varepsilon}\,d\xi,$$

再次得到一个属于 $L^1$ 的项。这就证明了 (2.1) 中的第一个包含关系。

□

注意，通过向量场测试定义的共法向分布空间 $IW^{k,\,1}$ 有一个优点：它们显然是坐标不变的；而在法坐标中局部定义的空间$W^{k,\,1}((-\delta,\delta);\,\mathcal{C}^\infty(Y))$ 更大，通常足以满足我们的需要，但在没有度量的情况下，它们的定义不具不变性；在 $Y$ 之外也不能全局定义。

引理 2.2。包含关系 $IW^{k,\,1}(M,Y)\,\subset W^{k,\,1}((-\delta,\delta);\,\mathcal{C}^\infty(Y))$ 成立，且该包含关系是连续的。

证明。设 $u\in IW^{k,\,1}(Y)$。由于 $u$ 在 $Y$ 之外光滑，我们只需在 $Y$ 附近进行局部讨论。设 $(x,y)$ 是 $Y$ 附近的费米坐标，并取 $u\in IW^{k,\,1}(Y)$。于是，对每个固定的 $x$ 以及每个 $j\leq k$ 和 $\beta\in\mathbb{N}^{n-1}$，关于变量 $y$ 的 Sobolev 嵌入给出

$$\|\partial_x^j\partial_y^\beta u(x,\cdot)\|_{L^\infty_y}\leq\|\partial_x^j\partial_y^\beta u(x,\cdot)\|_{L^1_y}+\sum_{|\alpha|=n}\|\partial_y^\alpha\partial_x^j\partial_y^\beta u(x,\cdot)\|_{L^1_y},$$

对 $x$ 积分，得到

$$\|\partial_x^j\partial_y^\beta u\|_{L^1_xL^\infty_y}\leq\|\partial_x^j\partial_y^\beta u\|_{L^1(M)}+\sum_{|\alpha|=n}\|\partial_y^\alpha\partial_x^j\partial_y^\beta u\|_{L^1(M)}<\infty,$$

其中，右端有限是由 $u\in IW^{k,\,1}(M,Y)$ 得出的。由于 $\beta$ 是任意的，且 $|j|\leq k$ 是任意的，这就证明了该引理。□

## 3. On the bicharacteristic flow

本节将建立关于双特征流的引理，并结合这些引理证明定理 1.1。

3.1. 双曲集中的双特征流。我们首先考虑沿着横截穿过超曲面 $Y$ 的轨迹的双特征流。为此，我们采用相对于超曲面 $Y$ 的法坐标，其中 $x$ 表示到 $Y$ 的有向距离，而 $y = (y_1, \dots, y_{d-1})$ 为切向变量，因此度量（我们回顾一下，根据假设，它处处$\mathcal{C}^\infty$ 且非退化）具有如下形式

$$g = dx^2 + h(x, y, dy) = dx^2 + h_{ij}(x, y)dy^i dy^j, \tag{3.1}$$

其中 $h(x, y, dy)$ 是 $Y$ 上 $x$ 度量的光滑族。该度量在 $T^*M$ 上诱导出对偶度量，定义为

$$\xi^2 + h^{ij}(x, y)\eta_i\eta_j,$$

其中 $h^\bullet$, $\bullet$ 是 (3.1) 中 $h$ 的逆函数，并使用典范一形式为

$$\xi dx + \eta \cdot dy.$$

Then

$$\sigma_h(-h^2\Delta_g) = \xi^2 + h^{ij}(x, y)\eta_i\eta_j$$

and

$$p \equiv \sigma_h(P) = \xi^2 - r$$

with

$$r = -V - h^{ij}\eta_i\eta_j. \tag{3.2}$$

哈密顿运动方程现在写作

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\xi \\ \dot{\xi} &= \frac{\partial r}{\partial x} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial r}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

引理 3.1. 设 $V \in W^{1,\,1}(\mathbb{R}_x;\, C^\infty(\mathbb{R}^{d-1}_y))$，并令 $(x_0, \xi_0, y_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2(d-1)}$，其中 $\xi_0 \neq 0$。那么存在唯一的绝对连续函数 $(x(t)\ \xi(t)\ y(t)\ \eta(t))$，对于邻域 $t = 0$ 内几乎处处的 $t$，它们满足 (3.3)，且初始数据为 $(x_0, \xi_0, y_0, \eta_0)$。

证明。首先，我们利用常微分方程的 Carath´eodory 理论求解一个辅助方程组。由于在 $t = 0$ 的某个邻域内 $\dot{x} = 2\xi \neq 0$，我们将 $x$ 作为自变量。考虑绝对连续函数 $(x(t)\ \xi(t)\ y(t)\ \eta(t))$，它们对几乎处处的 $t$ 满足方程 (3.3)，且初始数据满足 $\xi \neq 0$。只要 $\xi \neq 0$，就有 $\dot{x} = 2\xi \neq 0$，其中 $x(t) \in \mathcal{C}^1$。我们可以改变自变量

从 $t$ 变为 $x$，并等价地求解

$$\begin{aligned} dt/dx &= (2\xi)^{-1} \\ d\xi/dx &= (2\xi)^{-1}\frac{\partial r}{\partial x} \\ dy/dx &= -(2\xi)^{-1}\frac{\partial r}{\partial \eta} \\ d\eta/dx &= (2\xi)^{-1}\frac{\partial r}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

由于 $V \in W^{1,1}(\mathbb{R}_x; C^\infty(\mathbb{R}_y^{d-1}))$，且 $g \in C^\infty$、$\partial r/\partial y$和 $\partial r/\partial \eta$均属于$W^{1,1}(\mathbb{R}_x; C^\infty(\mathbb{R}^{2(d-1)}{}_{(y,\ \eta)}))$，而 $\partial r/\partial x \in L^1(\mathbb{R}_x; C^\infty(\mathbb{R}^{2(d-1)}{}_{(y,\ \eta)}))$。特别地，

$$\|\partial^\beta_{(y,\eta)}\partial r/\partial x\|_{L^1_x} \leq C_\beta.$$

因此，中值定理给出了如下估计

$$|\partial_x r(x,y_0,\eta_0) - \partial_x r(x,y_1,\eta_1)| \leq C \sup_{y,\eta\in\Omega} |\nabla_{y,\eta}\partial_x r(x,y,\eta)| \in L^1(\mathbb{R}_x)$$

对于固定邻域 $\Omega$ 中给定的 $(\overline{y},\overline{\eta})$ 的所有点对 $(y_0,\eta_0)$、$(y_1,\eta_1)$，均成立。更进一步，对于 $\partial_y r$、$\partial_\eta r$，同样的估计（事实上是更好的估计）也成立。因此，Carathéodory 存在唯一性定理的假设成立（参见 [8, 定理 5.3]），该定理表明：对于 $(-\varepsilon,\varepsilon)_x \times \Omega$ 中的初始数据，该方程存在唯一的解，并且数据到解映射是连续的。

现在，我们只需通过 $t(x)$ 的逆函数定义 $x : (-\delta,\delta)_t \to \mathbb{R}$。该逆函数存在，因为 $t$ 绝对连续，且其导数有正的下界。于是，方程 (3.3) 的唯一解为 $(x(t)\ \xi(x(t))\ y(x(t))\ \eta(x(t)))$. □

3.2. 掠射附近的双特征流。现在我们关注与 $Y$ 相切相遇的轨迹。为了处理这种情形下的流，我们将对势 $V$ 和曲面 $Y$作一些额外假设。具体而言，我们假设 $V \in W^{2,1}(\mathbb{R}_x; C^\infty(\mathbb{R}_y^{n-1}))$，并假设曲面 $Y$（局部）满足：对于任意定义函数 $f$：$M \to \mathbb{R}$，其对应的曲面为 $Y$，

$$\{p = 0,\ f = 0,\ H_p\pi^* f = 0,\ H_p^2\pi^* f = 0\} = \emptyset, \tag{3.5}$$

其中 $\pi$：$T^*M \to M$ 是典范投影。这个假设值得稍作说明，因为先验而言 $H_p^2$ 并未良好定义。然而，由于 $\pi^* f$ 仅依赖于 $M$中的位置变量，$H_V f \equiv 0$，并且我们将 $H_p^2\pi^* f$ 解释为

$$H_p^2\pi^* f = (H_{|\xi|_g^2} + H_V)(H_{|\xi|_g^2}\pi^* f),$$

这是定义良好的。

这里我们以 $Y$ 的黎曼几何为基础，给出条件 (3.5) 的另一种刻画。

命题 3.2. 曲率条件 (3.5) 等价于以下条件

$$\nabla_N V \notin \mathrm{conv}(2Vk_1, \dots 2Vk_{d-1}) \tag{3.6}$$

其中 $N$ 表示对 $Y$所选取的一个单位法向量， $k_j$ 是 $Y$的主曲率，而 conv 表示凸包。

注意，改变 $Y$ 的定向会改变 $N$ 和主曲率的符号，因此条件 (3.6) 与定向无关。

证明。条件 (3.5) 等价于：沿哈密顿流在能量曲面上到 $M$ 的投影，我们始终不会有 $x=0$、 $\dot{x}=0$、 $\ddot{x}=0$。

由于我们的哈密顿量的勒让德变换为 $L(z,\dot{z}) = (1/4)|\dot{z}|_g^2 - V(z)$，底空间中的运动方程为（其中 $\nabla$ 表示列维-奇维塔联络）

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = -2\nabla V.$$

因此，若 $\gamma(0) \in Y$ 且 $\dot\gamma(0) = v \in TY$ （即 $\dot{x}=0$），则（其中 $N = \nabla x$ 表示定向单位法向量场）

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \nabla_v\langle\dot\gamma, N\rangle \\ &= \langle\nabla_v\dot\gamma, N\rangle + \langle v, \nabla_v N\rangle \\ &= \langle -2\nabla V, N\rangle - \langle \mathrm{II}(v,v), N\rangle,\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中我们用到了运动方程（以及 $v=\dot\gamma$ 这一事实），而 II 表示第二基本形式。

因此，条件 (3.5) 现在等价于

$$\langle \mathrm{II}(v,v) + 2\nabla V, N\rangle \neq 0 \tag{3.7}$$

对于 $v = \dot\gamma \in TY$。现在，由于哈密顿量守恒，我们有 $|v|_g^2 = -4V$，因此方程 (3.7) 等价于

$$\langle 2V\mathrm{II}(\hat{v},\hat{v}) - \nabla V, N\rangle \neq 0$$

其中 $\hat{}v$ 是沿 $v$ 方向的单位向量。$\langle \mathrm{II}(\bullet,\bullet)\ N\rangle$ 在单位切空间上的值域是主曲率的凸包，因此条件是 $\langle \nabla V, N\rangle$ 不属于这些值的 $2V$ 倍凸包。□

引理 3.3. 假设 $V \in W^{2,\,1}(\mathbb{R}_x;\, C^\infty(\mathbb{R}_y^{n-1}))$ 和 $\rho_0 = (x_0, \xi_0, y_0, \eta_0)$ 满足

$$x_0 = 0,\ \xi_0 = 0, \qquad (H_p^2 x)(\rho_0) = (H_p\xi)(\rho_0) \neq 0,$$

于是，存在 $t=0$ 的一个邻域，使得具有初始条件（$x_0$， $\xi_0$， $y_0$， $\eta_0$）的方程（3.3）的解存在且唯一。

证明。首先注意到

$$(H_p\xi)(\rho_0) = \partial_x r(\rho_0) \neq 0.$$

对于 $t>0$，定义

$$R_1(t) := \int_{-2|\partial_x r(\rho_0)|t^2}^{2|\partial_x r(\rho_0)|t^2} \sup_{y,\eta}(|\partial_x^2 r(s,y,\eta)|)ds + |t|.$$

注意，由于 $r \in W^{2,1}$,

$$\lim_{t\to 0} R_1(t) = 0. \tag{3.8}$$

另请注意，对于 $t > 0$, $R_1(t)$ 是递增且严格为正的。

由于 (3.3) 的右端是连续的，(3.3) 存在绝对连续解；剩下的工作是证明唯一性。

设 $\rho(t) := (\rho'(t)\ \xi(t))$，其中 $\rho'(t) = (x(t)\ y(t)\ \eta(t))$ 是 (3.3) 的一个绝对连续解，且 $(x(0)\ \xi(0)\ y(0)\ \eta(0)) = (0,0,y_0,\eta_0) =: \rho_0$。那么我们断言 $\rho'(t) \in \mathcal{C}^2$、 $\xi(t) \in \mathcal{C}^1$，并且

$$\begin{aligned}
x(t) &= \partial_x r(\rho_0)t^2 + O(t^2 R_1(t)),\\
\xi(t) &= \partial_x r(\rho_0)t + O(tR_1(t))\\
y(t) &= y_0 - \partial_\eta r(\rho_0)t + \frac{t^2}{2}(\partial^2_{y\eta} r(\rho_0)\partial_\eta r(\rho_0) - \partial^2_\eta r(\rho_0)\partial_y r(\rho_0)) + O(t^2 R_1(t)),\\
\eta(t) &= \eta_0 + \partial_y r(\rho_0)t + \frac{t^2}{2}(\partial^2_{y\eta} r(\rho_0)\partial_y r(\rho_0) - \partial^2_y r(\rho_0)\partial_\eta r(\rho_0)) + O(t^2 R_1(t)).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

首先，注意到

$$\rho(t) = \rho(0) + \int_0^t F(\rho(s))ds,$$

其中 $F \in W^{1,\ 1}$。因此，由于 $\rho$ 是连续的 $\dot\rho \in \mathcal{C}^0$，从而 $\rho \in \mathcal{C}^1$。接下来，注意到由于 $\xi \in \mathcal{C}^1$,

$$\xi(t) = \partial_x r(\rho_0)t + o(t),$$

接下来，我们考虑 $x(t)$。首先注意到

$$x(t) = \int_0^t 2\xi(s)ds = \partial_x r(\rho_0)t^2 + o(t^2),$$

并且，由于 $\xi \in \mathcal{C}^1$, $x(t) \in \mathcal{C}^2$。

现在我们证明式 (3.9) 中的误差估计。首先注意到

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \int_0^t \partial_x r(\rho(w))dw\\
&= t\partial_x r(\rho_0) + \int_0^t \int_0^w \langle \nabla \partial_x r(x(s), y(x), \eta(s)), \dot\rho(s)\rangle\, ds\, dw\\
&= t\partial_x r(\rho_0) + \int_0^t \int_0^w \langle \nabla_{(y,\eta)} \partial_x r(x(s), y(s), \eta(s)), (\dot y(s), \dot\eta(s))\rangle\, ds\, dw\\
&\quad + \int_0^t \int_0^w \partial_x^2 r(x(s), y(s), \eta(s))\dot x(s)\, ds\, dw\\
&= t\partial_x r(\rho_0) + \int_0^t \int_0^w \langle \nabla_{(y,\eta)} \partial_x r(x(s), y(s), \eta(s)), (\dot y(s), \dot\eta(s))\rangle ds dw\\
&\quad + \int_0^t \int_0^{x(w)} \partial_x^2 r(z, y(s(z)), \eta(s(z)))\, dz\, dw.
\end{aligned}$$

这里 $s\colon [0,x(t)]\to[0,t]$ 是映射 $x\colon [0,t]\to[0,x(t)]$的逆函数。因此，当$|t|$ 足够小时，由于 $\rho\in\mathcal{C}^1$ 和 $|x(w)|=|\partial_x r(\rho_0)|w^2+o(w^2)$,

$$\left|\xi(t)-t\partial_x r(\rho_0)\right|\le CtR_1(t). \tag{3.10}$$

此外,

$$\begin{aligned} x(t)&=\int_0^t 2\int_0^s \partial_x r(\rho(w))dwds\\ &=t^2\partial_x r(\rho_0)+\int_0^t 2\int_0^s\int_0^w \langle\nabla\partial_x r(x(s'),y(s'),\eta(s')),\dot\rho(s')\rangle ds'dwds. \end{aligned}$$

因此，按照上文的论证，并再次利用 $\rho\in\mathcal{C}^1$,

$$\left|x(t)-t^2\partial_x r(\rho_0)\right|\le Ct^2R_1(t)$$

对于 $y(t)$，我们写作

$$\begin{aligned} y(t)&=y_0-\int_0^t \partial_\eta r(\rho(s))ds\\ &=y_0-\partial_\eta r(\rho_0)t+\int_0^t\int_0^w \partial^2_{y\eta}r(\rho(s))\partial_\eta r(\rho(s))-\partial^2_{x\eta}r(\rho(s))2\xi(s)-\partial^2_\eta r(\rho(s))\partial_y r(\rho(s))\,ds\,dw. \end{aligned}$$

由于 $\partial_y r,\partial_\eta r,\partial^2_{y\eta}r,\partial^2_\eta r\in\mathcal{C}^1$, $\partial^2_{x\eta}r\in\mathcal{C}^0$, $\xi\in\mathcal{C}^1$，不难验证 $y\in\mathcal{C}^2$，并且 (3.9) 中关于 $y(t)$ 的方程成立。对于 $\eta(t)$ 的论证完全相同。

现在我们可以证明解的唯一性。假设 $\rho_1(t)=(\rho_1'(t)\ \xi_1(t))$ 和 $\rho_2(t)=(\rho_2'(t)\ \xi_2(t))$ 满足 (3.3)，且 $\rho_1(0)=\rho_2(0)=(0,y_0,\eta_0,0)$，那么

$$\begin{aligned} |\dot\xi_1-\dot\xi_2|(t)&\le|\partial_x r(\rho_1'(t))-\partial_x r(\rho_2'(t))|\\ &\le\int_0^1\partial_x^2 r(\rho_1'(t)s+(1-s)\rho_2'(t))(x_1(t)-x_2(t))ds\\ &\qquad+\int_0^1\langle\nabla_{(y,\eta)}\partial_x r(\rho_1'(t)s+(1-s)\rho_2'(t)),(y_1,\eta_1)(t)-(y_2,\eta_2)(t)\rangle ds\\ &\le\Big(\int_0^1|\partial_x^2 r(\rho_1'(t)s+(1-s)\rho_2'(t))|ds+C\Big)|\rho_1'(t)-\rho_2'(t)| \end{aligned} \tag{3.11}$$

接下来注意，由于 $|\partial(\partial_y r,\partial_\eta r)|\le C$,

$$\begin{aligned} |\dot\rho_1'(t)-\dot\rho_2'(t)|&\le 2|\xi_1(t)-\xi_2(t)|+|(\partial_y r,\partial_\eta r)(\rho_1'(t))-(\partial_y r,\partial_\eta r)(\rho_2'(t))|\\ &\le 2|\xi_1(t)-\xi_2(t)|+C|\rho_1'(t)-\rho_2'(t)|. \end{aligned}$$

In particular, for $0 \le t < 1$,

(3.12)

$$
\begin{aligned}
&|\rho_1'(t) - \rho_2'(t)|e^{-Ct} \\
&\le 2\int_0^t e^{-Cs}|\xi_1(s) - \xi_2(s)|ds \\
&\le 2\int_0^t e^{-Cs}\int_0^s\int_0^1 \Big(|\partial_x^2 r(\rho_1'(w)s' + \rho_2'(w)(1-s'))| + C\Big)|\rho_1'(w) - \rho_2'(w)|\,ds'\,dw\,ds \\
&\le C\int_0^1\int_0^t\int_0^s \Big(|\partial_x^2 r(\rho_1'(w)s' + \rho_2'(w)(1-s'))| + C\Big)|\rho_1'(w) - \rho_2'(w)|w^{-2}R_1^{-1}(w)w^2R_1(w)dw\,ds\,ds' \\
&\le C\||\rho_1'(\cdot) - \rho_2'(\cdot)|(\cdot)^{-2}R_1^{-1}(\cdot)\|_{L^\infty(0,t)}\int_0^1\int_0^t\int_0^s \Big(|\partial_x^2 r(\rho_1'(w)s' + \rho_2'(w)(1-s'))| + C\Big)w^2R_1(w)dw\,ds\,ds'.
\end{aligned}
$$

对于最后一个不等式，注意到 (3.9) 意味着 $\||\rho_1'(\cdot)-\rho_2'(\cdot)|(\cdot)^{-2}R_1^{-1}(\cdot)\|_{L^\infty(0,t)} \le C < \infty$。现在作变量代换，以 $z = s'x_1(w)$ 替换 $w + (1-s')x_2(w)$；令 $w(z)$ 表示逆映射。我们进一步拆分 $\rho' = (x,\rho'')$，即 $\rho'' = (y,\eta)$。由于

$$\inf_{s'\in[0,1]} |s'\dot{x}_1(w) + (1-s')\dot{x}_2(w)| \ge c|w|,$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^s \Big(|\partial_x^2 r(\rho_1'(w)s' + \rho_2'(w)(1-s'))|w^2R_1(w)\,dw\,ds \\
&= \int_0^t\int_0^{x(s)} \Big(|\partial_x^2 r(z,\rho_1''(w(z))s' + \rho_2''(w(z))(1-s'))|\frac{|w(z)|^2R_1(w(z))}{|s'\dot{x}_1(w(z)) + (1-s')\dot{x}_2(w(z))|}\,dz\,ds \\
&\le CtR_1(t)\int_0^t\int_0^{x(s)} |\partial_x^2 r(z,\rho_1''(w(z))s' + \rho_2''(w(z))(1-s'))|\,dz\,ds \\
&\le Ct^2[R_1(t)]^2.
\end{aligned}
$$

将此代入 (3.12) 可得，对于 $0 \le t < 1$,

$$|\rho_1'(t) - \rho_2'(t)|t^{-2}R_1^{-1}(t) \le C_0\||\rho_1'(\cdot) - \rho_2'(\cdot)|(\cdot)^{-2}R_1^{-1}(\cdot)\|_{L^\infty(0,t)}R_1(t). \tag{3.13}$$

因此，由 (3.13) 和 (3.8) 可知

$$\lim_{t\to 0^+} |\rho_1'(t) - \rho_2'(t)|t^{-2}R_1^{-1}(t) = 0. \tag{3.14}$$

Let

$$t_0 := \inf\{t > 0 \,:\, R_1(t) > C_0^{-1}\},$$

并假设存在 $0 < t_* < t_0$，使得 $|\rho_1'(t_*) - \rho_2'(t_*)| > 0$ ($t_0 < \infty$ 由 (3.8) 得出)。那么，由于 $\rho_1', \rho_2'$ 连续且 (3.14) 成立，存在 $0 < t_m \le t_*$，使得

$$
\begin{aligned}
0 < \||\rho_1'(\cdot) - \rho_2'(\cdot)|(\cdot)^{-2}R_1^{-1}(\cdot)\|_{L^\infty(0,t_*)} &= |\rho_1'(t_m) - \rho_2'(t_m)|t_m^{-2}R_1^{-1}(t_m) \\
&\le C_0\||\rho_1'(\cdot) - \rho_2'(\cdot)|(\cdot)^{-2}R_1^{-1}(\cdot)\|_{L^\infty(0,t_m)}R_1(t_m) \\
&\le C_0\||\rho_1'(\cdot) - \rho_2'(\cdot)|(\cdot)^{-2}R_1^{-1}(\cdot)\|_{L^\infty(0,t_*)}R_1(t_*).
\end{aligned}
$$

两边除以 $\||\rho_1'(\cdot) - \rho_2'(\cdot)|(\cdot)^{-2}R_1^{-1}(\cdot)\|_{L^\infty(0,\ t_*)}$，得到

$$1 < C_0 R_1(t_*),$$

这是矛盾的，因为 $R_1(t_*) < C_0^{-1}$。

因此，在 $[0, t_0]$ 上有 $\rho_1'(t) = \rho_2'(t)$，从而根据（3.11），对于$t \in [0, t_0]$，有 $\rho_1(t) = \rho_2(t)$。对于 $t \in [-t_0, 0]$，同样的论证也适用。

□

## 4. Semiclassical preliminaries

4.1. 缺陷测度。这里回顾缺陷测度的概念。设 $h_n \to 0$and $\{u(h_n)\}_{n=1}^\infty \subset L^2(M)$。对于 $T^*M$上的拉东测度 $\mu$，如果存在一个子列{subsequence} $h_{n_k}$，使得对于所有 $a \in C_c^\infty(T^*M)$，则称 $\mu$是族 $\{u(h_n)\}$ 的缺陷测度，

$$\lim_{j\to\infty} \langle \mathrm{Op}(a)u(h_{n_k}), u(h_{n_k})\rangle_{L^2(M)} = \int a\, d\mu. \tag{4.1}$$

现在回顾以下关于缺陷测度存在性的事实（见 [10,定理 5.2]）。

引理 4.1. 假设 $\sup_n \|u(h_n)\|_{L^2} < \infty$。那么存在一个子列 $n_k \to\infty$ 以及一个正拉东测度 $\mu$，使得 $u(h_{n_k})$具有缺陷测度 $\mu$。

注 4.2. 根据引理 4.1，有界族存在缺陷测度；然而，一般而言，缺陷测度并不一定唯一。我们的结果适用于与薛定谔方程解族相关的任意缺陷测度。尽管如此，根据引理 4.1，我们不妨取一个纯子列，使得 (4.1) 成立。从现在起，我们将不加说明地这样做，并且只关注这个纯子列。

此外，为了简化下文的记号，我们通常会进一步省略整个序列记号，直接说 $u$ 具有缺陷测度 $\mu$，而将序列隐含在表述中。

4.2. 切向算子。在双曲区域分析算子时，我们将使用一族切向伪微分算子，现于此定义。关于半经典伪微分算子、半经典波前集和微支集的简要介绍，请参见 [6,附录 E]。

定义 4.3. 给定 $\mathcal{W}$ $\mathbb{R}$ 上的一个函数赋范空间，我们记作

$$^{\mathcal{W}}\Psi^m_{\mathsf{T}} := \{\mathcal{W}(\mathbb{R}_x; \Psi^m(\mathbb{R}^{d-1}_y))\}.$$

我们用 $^{\mathcal{W}}\Psi^{\mathrm{comp}}{}_{\mathsf{T}}$ 表示满足以下条件的族 $A(x)$：对于所有 $x$，$\mathrm{WF}_{\mathrm{h}}(A(x))$ 都包含于 $T^*\mathbb{R}_y$ 的某个固定紧子集内。

对于符号 $a \in \mathcal{W}(\mathbb{R}; S^m(\mathbb{R}^{2(d-1)}))$，令

$$\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)u(x,y) = \frac{1}{(2\pi h)^{d-1}} \int e^{\frac{i}{h}\langle y-y',\eta\rangle} a(x,y,\eta)u(x,y)d\eta dy.$$

我们还定义符号映射 $\sigma_{\mathsf{T}}$： ${}^{\mathcal{W}}\Psi^m_{\mathsf{T}} \to \mathcal{W}(\mathbb{R}; S^m(\mathbb{R}^{2(d-1)}))$，其定义如下：

$$\sigma_{\mathsf{T}}(A)(x,y,\eta) = \sigma(A(x))(y,\eta).$$

我们需要以下关于将切向算子与具有紧支集符号的普通半经典伪微分算子复合的结果。

引理 4.4。设 $a \in \mathcal{C}^\infty_c((-\varepsilon,\varepsilon); \mathcal{C}^\infty_c(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$ 和 $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(T^*M)$。则

$$\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)\,\mathrm{Op}(\chi) \in \Psi^{\mathrm{comp}}_h$$

且该算子的主符号为 $a\chi$。

证明。该结果可由写出

$$\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a) = \mathrm{Op}(a(x,y,\eta))$$

其中，我们将 $a$ 视为关于 $\xi$ 变量（与 $x$对偶）的常数符号。于是，该复合就是符号属于 $S(1)$ 的伪微分算子的通常复合，如 [10,第 4 节所述。□

## 5. Technical estimates

5.1. 椭圆估计。我们首先给出势 $V$ 仅为连续函数时的椭圆估计。

引理 5.1. 设 $P = -h^2\Delta_g + V$满足 $V \in \mathcal{C}^0$，且 $p = |\xi|^2_g + V$。那么，对于所有满足 $\mathrm{WF_h}(A) \subset \{p \neq 0\}$ 的 $A \in \Psi^2_h(M)$，存在 $C > 0$，使得对于所有满足 $\limsup_{h\to 0} \|u\|_{L^2} < \infty$ 的 $u \in L^2(M)$，

$$\limsup_{h\to 0} \|Au\|_{L^2} \leq C \limsup_{h\to 0} \|Pu\|_{L^2}.$$

证明。由于 $V \in \mathcal{C}^0$，存在 $V_\varepsilon \in C^\infty$，使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|V_\varepsilon - V\|_{\mathcal{C}^0} = 0.$$

事实上，可以按如下方式在局部构造 $V_\varepsilon$。设 $\{\chi_i\}_{i=1}^N \subset C^\infty_c(M)$ 是 $M$ 上的单位分解，满足 $\mathrm{supp}\ \chi_i \subset U_i$，且 $(\psi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^d, U_i)$ 是 $M$ 上的一个坐标系。然后，令 $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$，其中 $\int \phi = 1$，定义 $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\phi(\varepsilon^{-1}x)$，并令

$$V_\varepsilon := \sum_i \left[(\chi_i V)\circ\psi_i^{-1} * \phi_\varepsilon\right]\circ\psi_i$$

现在，令 $P_\varepsilon = -h^2\Delta_g + V_\varepsilon$。于是，对于满足 $\mathrm{WF_h}(A) \subset \{p \neq 0\}$ 的 $A$，当$\varepsilon$ 充分小时，我们有 $\mathrm{WF_h}(A) \subset \{|p_\varepsilon| = ||\xi|_g^2 + V_\varepsilon| > c > 0\}$，因此由标准椭圆估计 [6, 定理 E33],

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0} \|Au\|_{L^2} &\leq C \limsup_{h\to 0} \|P_\varepsilon u\|_{L^2} \\ &\leq C \limsup_{h\to 0} \|Pu\|_{L^2} + C \limsup_{h\to 0} \|(V - V_\varepsilon)u\|_{L^2} \\ &\leq C \limsup_{h\to 0} \|Pu\|_{L^2} + C\|V - V_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0} \limsup_{h\to 0} \|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

由于左侧与 $\varepsilon > 0$ 无关，因此令 $\varepsilon \to 0$ 后即可得到该引理。

□

在陈述下一个引理之前，我们回顾一下，纯序列是指沿着该序列，$\langle \mathrm{Op}\ au_h, u_h\rangle$ 收敛于 $\mu(a)$，其中 $a$ 为唯一的缺陷测度。

引理 5.2。设 $V \in \mathcal{C}^0$, $\|u\|_{L^2} \leq C$和 $Pu = (-h^2\Delta_g + V)u = o(1)_{L^2}$。则存在 $\chi \in C_c^\infty(T^*M)$，使得

$$\| \mathrm{Op}(1 - \chi)u\|_{H_h^2} = o(1). \tag{5.1}$$

此外，如果 $u_h$ 是缺陷测度为 $\mu$ 的纯序列，则 $\mathrm{supp}\,\mu \subset \{p = 0\}$，并且

$$\mu(\{p = 0\}) = \lim_{h\to 0} \|u\|_{L^2}^2.$$

证明。令 $\chi \equiv 1$ 取在 $\{p = 0\}$ 附近。然后，我们将引理 5.1 应用于 $A = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^2(1-\chi))$, 得到（5.1）。

为证明 $\mathrm{supp}\ \mu \subset \{p = 0\}$，令 $a \in C_c^\infty(T^*M)$，且 $\mathrm{supp}\ a \subset \{p \neq 0\}$。于是，由引理 5.1

$$\| \mathrm{Op}(a)u\|_{L^2} \leq C\|Pu\|_{L^2} + o(1) = o(1).$$

特别地,

$$|\mu(a)| = |\lim_{h\to 0} \langle \mathrm{Op}(a)u, u\rangle| \leq C \limsup_{h\to 0} \| \mathrm{Op}(a)u\|_{L^2} = 0.$$

最后，为证明 $\mu(\{p = 0\}) = \lim_{h\to 0} \|u\|_{L^2}$，注意到，由 (5.1)

$$\limsup_{h\to 0} \|u\|_{L^2}^2 = \limsup_{h\to 0} \langle u, u\rangle = \limsup_{h\to 0} \langle \mathrm{Op}(\chi)u, u\rangle = \mu(\chi).$$

同理,

$$\liminf_{h\to 0} \|u\|_{L^2}^2 = \mu(\chi)$$

因此，$\lim_{h\to 0} \|u\|_{L^2}^2 = \mu(\chi)$，这就得出了最终结论。 □

5.2. $L^\infty L^2$ 估计。本节及下一节中，我们讨论界面 $Y$ 附近双曲集中的半经典算子的因式分解及其推论；相关计算也可参见 [3,第 2] 节。

首先，我们探讨任意算子具有因子化形式对能量估计的影响。本节中，我们考虑两个（可能不同的）因子化算子 $\Upsilon_\pm$:

$$\begin{aligned}\Upsilon_+ &= (hD_x - \Lambda_0)(hD_x + \Lambda_0) + hE_+,\\ \Upsilon_- &= (hD_x + \Lambda_0)(hD_x - \Lambda_0) + hE_-,\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $E_-$、$E_+ \in {}^{L^1}\Psi^1_{\mathsf{T}}$ 和 $\Lambda_0 \in {}^{L^\infty}\Psi^1_{\mathsf{T}}$ 具有实值主符号。实际中，算子 $\Upsilon_\pm$ 将几乎相等。

引理 5.3. 假设对于所有 $x \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$，$\Lambda_0(x)$ 在 $\mathrm{WF}_{\mathrm{h}}(u(x))$ 上是椭圆的。那么存在 $C > 0$ 使得

$$\|hD_x u\|_{L^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)_x)L^2_y} + \|u\|_{L^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)_x)L^2_y} \le C(\|u\|_{H^1_h} + h^{-1}(\|\Upsilon_+ u\|_{L^2} + \|\Upsilon_- u\|_{L^2})).$$

证明. 假设 $\Upsilon_\pm u = f_\pm$，并令

$$v_\pm = (hD_x \pm \Lambda_0)u \tag{5.3}$$

使得

$$(hD_x \mp \Lambda_0)v_\pm = f_\pm - hE_\pm u.$$

对于 $\chi \in C_c^\infty((-2\varepsilon, 2\varepsilon))$，在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上等于 1，

$$(hD_x \mp \Lambda_0)\chi(x)v_\pm = \chi f_\pm + [hD_x, \chi]v_\pm - h\chi E_\pm u.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\chi(x)v_\pm(x)\|^2_{L^2_y} &= -ih^{-1}\int_x^\infty hD_s\|\chi(s)v_\pm(s)\|^2_{L^2_y}ds\\ &= h^{-1}\int_x^\infty 2\,\mathrm{Im}\langle \pm\Lambda_0\chi(s)v_\pm(s), \chi(s)v_\pm(s)\rangle_{L^2_y} + 2\,\mathrm{Im}\langle \chi f_\pm(s), \chi(s)v_\pm(s)\rangle_{L^2_y}\\ &\qquad + 2\,\mathrm{Im}\langle i^{-1}h\chi'(s)v_\pm(s), \chi(s)v_\pm(s)\rangle - 2\,\mathrm{Im}\langle h\chi(s)E_\pm u(s), \chi(s)v_\pm(s)\rangle_{L^2_y}ds\\ &\le C\|v_\pm\|^2_{L^2} + Ch^{-2}\|f_\pm\|^2_{L^2} + C\int_x^\infty g(s)(\|\chi(s)v_\pm(s)\|^2_{L^2_y} + \|\chi(s)u(s)\|^2_{H^1_{h,y}})ds,\end{aligned}$$

其中 $g(s) \in L^1_{\mathrm{loc}}$，并且在估计上面对应项时，我们利用了 $\Lambda_0$ 具有实主符号这一事实。考虑到 $v_+ - v_-$，并利用 $\Lambda_0$ 在 $\mathrm{WF}_{\mathrm{h}}(u(x))$ 上的椭圆性，我们得到

$$\begin{aligned}\|\chi(x)u(x)\|^2_{H^1_{h,y}} &\le C(\|\chi(x)v_+(x)\|^2_{L^2_y} + \|\chi(x)v_-(x)\|^2_{L^2_y} + O(h^\infty)\|u(x)\|_{L^2_y})\\ &\le C(\|v_+\|^2_{L^2} + \|v_-\|^2_{L^2} + O(h^\infty)\|u\|_{H^1_h} + Ch^{-2}(\|f_+\|^2_{L^2} + \|f_-\|^2_{L^2}\\ &\qquad + C\int_x^\infty g(s)(\|\chi(s)v_+(s)\|^2_{L^2_y} + \|\chi(s)v_-(s)\|^2_{L^2_y} + \|\chi(s)u(s)\|^2_{H^1_{h,y}})ds.\end{aligned}$$

因此，由于 $\|v_\pm\|_{L^2} \le C\|u\|_{H_h^1}$，综上可得

$$\begin{aligned}&\|\chi(x)u(x)\|_{H_{h,y}^1}^2 + \|\chi(x)v_+(x)\|_{L_y^2}^2 + \|\chi(x)v_-(x)\|_{L_y^2}^2\\ &\le C(\|u\|_{H_h^1}^2 + Ch^{-2}(\|f_+\|_{L^2}^2 + \|f_-\|_{L^2}^2)\\ &\qquad + C\int_x^\infty g(s)(\|\chi(s)v_+(s)\|_{L_y^2}^2 + \|\chi(s)v_-(s)\|_{L_y^2}^2 + \|\chi(s)u(s)\|_{H_{h,y}^1}^2)ds.\end{aligned}$$

因此，根据格朗沃尔不等式，对所有 $x$，

$\|\chi(x)u(x)\|_{H_{h,\ y}^1}^2 + \|\chi(x)v_+(x)\|_{L_y^2}^2 + \|\chi(x)v_-(x)\|_{L_y^2}^2 \le C(\|u\|_{H_h^1}^2 + h^{-2}(\|f_+\|_{L^2}^2 + \|f_-\|_{L^2}^2))e^{C\|g\|_{L^1}}$，

从而得到关于 $u$ 、适用于 $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 的所需点态估计，其中 $\chi = 1$。

关于 $hD_x u$ 的估计现在可由下式推出：

$$\|hD_x u(x)\|_{L_y^2} \le C(\|u(x)\|_{H_{h,y}^1} + \|v_+(x)\|_{L_y^2}). \quad \square$$

## 6. 薛定谔方程的估计

现在我们考虑低正则性余法向势下薛定谔方程解的缺陷测度。具体而言，我们假设 $V \in W^{1,1}((-2\varepsilon, 2\varepsilon); \mathcal{C}^\infty(Y))$，并使用相对于 $\{x = 0\}$ 的费米正规坐标，使得在（3.2）的记号下，

$$P = (hD_x)^2 - r(x, y, hD_y) + h\big(a(x, y)hD_x + r'(x, y, hD_y)\big),$$

其中 $r \in IW^{1,1}(\{x = 0\}; S^2(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$、 $r' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x; S^1(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$ 和 $a \in \mathcal{C}^\infty$。现在用 $e^{\frac{i}{2}\int_0^x a_{(s,y)}ds}$ 进行共轭，得到

$$\Upsilon := e^{\frac{i}{2}\int_0^x a(s,y)ds} P e^{-\frac{i}{2}\int_0^x a(s,y)ds} = (hD_x)^2 - r(x, y, hD_y) + h\tilde{a}(x, y, hD_y),$$

其中 $\tilde{a} \in C^\infty(\mathbb{R}_x; S^1(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$。

引理 6.1. 设 $V \in W^{1,1}((-2\varepsilon, 2\varepsilon); \mathcal{C}^\infty(Y))$。假设 $\chi \in C_c^\infty((-2\varepsilon, 2\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，且 $\operatorname{supp}(\chi) \subset \{r > 0\}$。那么存在满足以下条件的 $\Lambda \in {}^{W^{1,1}}\Psi_{\mathsf{T}}^1$

$$\begin{aligned}\Upsilon \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) &= (hD_x - \Lambda)(hD_x + \Lambda)\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + hE_+ \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}}\\ &= (hD_x + \Lambda)(hD_x - \Lambda)\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + hE_- \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}},\end{aligned}$$

其中 $E_\pm \in {}^{L^1}\Psi_{\mathsf{T}}$ ，且符号 $\Lambda$ 满足

$$\sigma(\Lambda)\chi = \sqrt{r(x, y, \eta)}\chi(x, y, \eta).$$

证明。设 $\tilde{\chi} \in C_c^\infty((-2\varepsilon, 2\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，且 $\tilde{\chi} \equiv 1$ 在 $\operatorname{supp}\chi$ 和 $\operatorname{supp}\tilde{\chi} \subset \{r > 0\}$ 上。令 $\Lambda = \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\sqrt{r}\tilde{\chi}) \in {}^{W^{1,1}}\Psi^{\mathrm{comp}}{}_{\mathsf{T}}$。于是，

$(hD_x - \Lambda)(hD_x + \Lambda) = ((hD_x)^2 - \Lambda^2 + [hD_x, \Lambda]) = (hD_x)^2 - \text{算子}^{\mathsf{T}}(r\tilde{\chi}^2) + O(h)_{W^{1,1}\Psi^{\mathrm{comp}}{}_{\mathsf{T}}} + [hD_x, \Lambda].$

现在，由于 $\Lambda \in {}^{W^{1,\ 1}}\Psi_{\mathsf{T}}^1$，

$$[hD_x, \Lambda] \in h^{L^1}\Psi_{\mathsf{T}}^1.$$

接下来，注意到，由于 $\tilde\chi \equiv 1$ 在 $\operatorname{supp}\chi$ 上，

$$\Upsilon \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) = [(hD_x)^2 - \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(r\tilde\chi^2)] \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}}$$

特别是，

$$\Upsilon \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) = (hD_x - \Lambda)(hD_x + \Lambda) \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + hE_+ \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}},$$

其中 $E_+ \in {}^{L^1}\Psi^1_{\mathsf{T}}$。

同样的论证表明

$$\Upsilon \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) = (hD_x + \Lambda)(hD_x - \Lambda) \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + hE_- \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) + O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}},$$

其中 $E_-$，如所述。 □

引理 6.2。设 $X \in {}^{C^\infty}\Psi^0_{\mathsf{T}}$，且 $\mathrm{WF}_{\mathrm{h}}(X) \subset \{r > 0\}$。那么

$$\|hD_x X u\|_{L^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)_x)L^2_y} + \|Xu\|_{L^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)_x)H^1_{h,y}} \leq C(\|u\|_{L^2} + h^{-1}\|Pu\|_{L^2}).$$

证明。首先注意到，对于足够大的 $|(\xi,\eta)|$，$\sigma(\Upsilon) = \xi^2 - r(x,y,\eta)$ 是椭圆的。因此，由引理 5.1，存在 $\chi \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$，使得

$$\|\operatorname{Op}(1-\chi)v\|_{H^2_h} \leq C(\|v\|_{L^2} + \|\Upsilon u\|_{L^2}).$$

特别地，

$$\|v\|_{H^2_h} \leq C(\|v\|_{L^2} + \|\Upsilon v\|_{L^2} + \|\operatorname{Op}(\chi)v\|_{H^2_h}) \leq C(\|v\|_{L^2} + \|\Upsilon v\|_{L^2}). \tag{6.1}$$

现在，令 $\tilde X = e^{\frac{i}{2}\int_0^x a_{(s,y)}ds} X e^{-\frac{i}{2}\int_0^x a(s,y)^{ds}} \in {}^{C^\infty}\Psi^0_{\mathsf{T}}$，并注意 $\mathrm{WF}_{\mathrm{h}}(\tilde X) = \mathrm{WF}_{\mathrm{h}}(X) \subset \{r > 0\} \subset \mathsf{ell}(\Lambda)$，因此存在 $\chi \in C_c^\infty((-2\varepsilon, 2\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，使得 $\tilde\chi \equiv 1$ 在 $\mathrm{WF}_{\mathrm{h}}(X)$ 上且 $\operatorname{supp}\chi \subset \{r > 0\}$。特别地，

$$\tilde X v = \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)\tilde X v + O(h^\infty)_{C^\infty\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}} v.$$

因此，引理 6.1 现在推出 $Xv$ 满足方程

$$\begin{aligned}\Upsilon \tilde X v &= (hD_x - \Lambda)(hD_x + \Lambda)\tilde X v + hE_+ \tilde X v - R_+ v \\ &= (hD_x + \Lambda)(hD_x - \Lambda)\tilde X v + hE_- \tilde X v - R_- v.\end{aligned}$$

with

$$R_\pm = O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}}.$$

现在令

$$\begin{aligned}\Upsilon_+ &= (hD_x - \Lambda)(hD_x + \Lambda) + hE_+, \\ \Upsilon_- &= (hD_x + \Lambda)(hD_x - \Lambda) + hE_-.\end{aligned}$$

Thus

$$\Upsilon_\pm(\tilde X v) = \Upsilon(\tilde X v) + R_\pm v,$$

因此，引理 5.3 表明，对所有 $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{X}v\|_{L_x^\infty H^1_{h,y}} &\le C(\|\tilde{X}v\|_{H^1_h} + h^{-1}\|\Upsilon\tilde{X}v\|_{L^2} + h^N\|v\|_{L^2})\\ &\le C(\|v\|_{H^1_h} + h^{-1}\|\tilde{X}\Upsilon v\|_{L^2})\\ &\le C(\|v\|_{L^2} + h^{-1}\|\Upsilon v\|_{L^2}).\end{aligned}$$

令 $v = e^{\frac{i}{2}\int_0^x a(s,\ y)^{ds}}u$，使得 $\Upsilon v = e^{\frac{i}{2}\int_0^x a(s,\ y)^{ds}}Pu$，并注意到，由于 $a \in L^1((-\varepsilon,\varepsilon);\ C^\infty(\mathbb{R}^{d-1}))$,

$$\begin{aligned}\|Xu\|_{L_x^\infty H^1_{h,y}} \le C\|\tilde{X}v\|_{L_x^\infty H^1_{h,y}} &\le C(\|v\|_{L^2} + Ch^{-1}\|\Upsilon v\|_{L^2})\\ &\le C(\|u\|_{L^2} + Ch^{-1}\|Pu\|_{L^2}).\end{aligned}$$

此外，由于 $a \in L^\infty((-2\varepsilon,2\varepsilon);\ C^\infty(\mathbb{R}^{d-1}))$,

$$\begin{aligned}\|hD_xXu\|_{L_x^\infty H^1_{h,y}} &\le C(\|hD_x\tilde{X}v\|_{L_x^\infty H^1_{h,y}} + h\|\tilde{X}v\|_{L_x^\infty H^1_{h,y}})\\ &\le C(\|v\|_{L^2} + Ch^{-1}\|\Upsilon v\|_{L^2})\\ &\le C(\|u\|_{L^2} + Ch^{-1}\|Pu\|_{L^2}).\end{aligned}$$

□

## 7. Defect measures for the Schrödinger equation

本节继续假设 $V \in W^{1,\ 1}((-2\varepsilon,2\varepsilon);\ \mathcal{C}^\infty(Y))$。这里的主要结果是引理 7.3，它与引理 5.2 中的椭圆估计一起，证明了定理 1.3。

现在假设 $Pu = o(h)_{L^2}$, $\|u\|_{L^2} \le C$，并研究 $u$ 的缺陷测度。再次回忆，纯序列是指这样一个序列：沿着该序列，$\langle \mathrm{Op}\ au_h, u_h\rangle$ 收敛到 $\mu(a)$，对应唯一的缺陷测度。

引理 7.1. 假设 $\|u\|_{L^2} \le C$, $Pu = O(h)_{L^2}$，且 $u_h$ 是一个缺陷测度为 $\mu$ 的纯序列。那么，对于 $a \in L^1((-\varepsilon,\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，若 $\mathrm{supp}\ a \subset \{r>0\}$,

$$\limsup_{h\to 0} |\langle \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)u,u\rangle| + |\langle \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)hD_xu,u\rangle| \le C\|a\|_{L^1_xL^\infty_{y\eta}}. \tag{7.1}$$

此外，对于 $a \in L^1((-\varepsilon,\varepsilon);\ C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，若 $\mathrm{supp}\ a \subset \{r>0\}$,

$$\lim_{h\to 0}\langle \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)u,u\rangle \to \mu(a), \qquad \lim_{h\to 0}\langle \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)hD_xu,u\rangle \to \mu(a\xi).$$

特别地，如果 $a \in L^1_xL^\infty_{y\eta}$ 且 $\mathrm{supp}\, a \subset \{r>0\}$，那么 $a,\ a\xi \in L^1(\mu)$。

证明。我们先证明 (7.1)。设 $a \in L^1((-\varepsilon,\varepsilon);\ C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，且 $\mathrm{supp}\ a \subset\{r>0\}$。取 $\chi \in \mathcal{C}^\infty((-\varepsilon,\varepsilon);\ C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，使其在 $\mathrm{supp}\ a$ 上等于 1，且支集包含于 $\{r>0\}$；于是 $\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)^*\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) = \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a) + O(h^\infty)^{L^1_x\Psi^{-\infty}{}_{\mathsf{T}}}$。利用引理 6.2 估计 $\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u$，并利用引理 5.2 估计 $\|u\|_{H^2_h}$，可得

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{h\to 0} |\langle \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)u, u\rangle| \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \Big| \int \langle (\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)^* \,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u)(x), u(x)\rangle_{L^2_y} dx \Big| + \limsup_{h\to 0} O(h^\infty)\|u\|^2_{L^\infty_x L^2_y} \\
&= \limsup_{h\to 0} \Big| \int \langle (\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u)(x), (\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u)(x)\rangle_{L^2_y} dx \Big| + \limsup_{h\to 0} O(h^\infty)\|u\|^2_{H^1_h} \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \int \|\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)(x)\|_{L^2_y\to L^2_y} \|(\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u)(x)\|^2_{L^2_y} dx \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \|\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u\|^2_{L^\infty_x L^2_y} \int \|\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)(x)\|_{L^2_y\to L^2_y} dx \\
&\leq \limsup_{h\to 0} (\|u\|^2_{L^2} + h^{-2}\|Pu\|^2_{L^2}) \int \|\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)(x)\|_{L^2_y\to L^2_y} dx \\
&\leq C \limsup_{h\to 0} \int \|\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)(x)\|_{L^2_y\to L^2_y} dx \\
&\leq C \int \sup_{y,\eta} |\sigma(a)(x,y,\eta)| dx \\
&\leq C\|\sigma(a)\|_{L^1_x L^\infty_{y\eta}}.
\end{aligned}
$$

这里，我们关键地利用引理 6.2，根据 $u$ 和 $Pu$ 对 $\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u$ 进行估计。

通过同样的论证思路（再次使用引理 6.2，以及交换子上的 $O(h)$ 界）

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{h\to 0} |\langle \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a) hD_x u, u\rangle| \\
&= \limsup_{h\to 0} \Big| \int \langle (\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)^* \,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi) hD_x u)(x), u(x)\rangle_{L^2_y} dx \Big| \\
&\qquad + \limsup_{h\to 0} O(h^\infty)\|u\|_{L^\infty_x L^2_y} \|hD_x u\|_{L^\infty_x L^2_y} \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \Big| \int \langle (\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a) hD_x\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u)(x), \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u(x)\rangle_{L^2_y} dx \Big| \\
&\qquad + \Big| \int \langle (\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)[\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi), hD_x]u)(x), \mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u(x)\rangle_{L^2_y} dx \Big| \\
&\qquad + \limsup_{h\to 0} O(h^\infty)\|u\|^2_{H^2_h} \\
&= \limsup_{h\to 0} \Big| \int \langle (\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)^* \,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u)(x), (hD_x\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi))u)(x)\rangle_{L^2_y} dx \Big| \\
&\qquad + \limsup_{h\to 0} Ch\|u\|^2_{L^\infty_x L^2_y} \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \int \|\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(a)^*(x)\|_{L^2_y\to L^2_y} \|(hD_x\,\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi))u)(x)\|_{L^2_y} \|(\mathrm{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u)(x)\|_{L^2_y} dx
\end{aligned}
$$

$$\le \limsup_{h\to 0} \|hD_x \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u\|_{L^\infty_x L^2_y} \|\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\chi)u\|_{L^\infty_x L^2_y} \int \|\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)^*(x)\|_{L^2_y\to L^2_y} dx$$
$$\le \limsup_{h\to 0} (\|u\|^2_{L^2} + h^{-2}\|Pu\|^2_{L^2}) \int \|\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)^*(x)\|_{L^2_y\to L^2_y} dx$$
$$\le C\|\sigma(a)\|_{L^1_x L^\infty_{y\eta}}.$$

这就完成了对（7.1）的证明。

现在证明引理的其余部分。根据引理 5.2，存在 $\chi \in C_c^\infty(T^*M)$，使得 $(1 - \operatorname{Op}(\chi))u = O(h)_{H^2_h}$，因此对于 $a \in C_c^\infty((-\varepsilon,\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，由引理 4.4，

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)u, u\rangle &= \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)\operatorname{Op}(\chi)u, u\rangle + O(h) \to \mu(a\chi) = \mu(a), \\ \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)hD_x u, u\rangle &= \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)hD_x \operatorname{Op}(\chi)u, u\rangle + O(h) \to \mu(a\chi\xi) = \mu(a\xi). \end{aligned} \tag{7.2}$$

因此，由（7.1），

$$|\mu(a)| + |\mu(a\xi)| \le C\|a\|_{L^1_x L^\infty_{y\eta}}.$$

特别地，由稠密性，如果 $a \in L^1_x L^\infty_{y\eta}$ with supp $a \subset \{r > 0\}$，则 $a, a\xi \in L^1(\mu)$。

现在，令 $\psi \in C_c^\infty((-1,1))$，满足 $\int \psi(x)dx = 1$，并定义 $\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\psi(\varepsilon^{-1}x)$，再令 $a \in L^1((-\varepsilon,\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，且 supp $a \subset \{r > 0\}$。定义 $a_\varepsilon := \psi_\varepsilon * a$，使得 $a_\varepsilon \to a$ in $L^1((-\varepsilon,\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，并且当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，supp $a_\varepsilon \subset \{r > 0\}$。

于是，由 (7.1)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{h\to 0} |\langle (\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_\varepsilon) - \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a))u, u\rangle| + |\langle (\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_\varepsilon) - \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a))hD_x u, u\rangle| = 0$$

并由 (7.2)

$$\lim_{h\to 0} \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_\varepsilon)u, u\rangle = \mu(a_\varepsilon), \qquad \lim_{h\to 0} \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_\varepsilon)hD_x u, u\rangle = \mu(a_\varepsilon\xi).$$

因此，由于

$$\{a \in L^1_x L^\infty_{y\eta} : \operatorname{supp} a \subset \{r > 0\}\} \subset L^1(\mu),$$

我们有

$$\lim_{h\to 0} \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)u, u\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu(a_\varepsilon) = \mu(a), \qquad \lim_{h\to 0} \langle \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)hD_x u, u\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu(a_\varepsilon\xi) = \mu(a\xi).$$

□

现在我们计算某些特殊测试算子 $a$ 的 $\mu(H_p a)$。

引理 7.2。设 $\|u\|_{L^2} \le C$、$Pu = o(h)_{L^2}$，且 $u_h$ 是一个具有缺陷测度 $\mu$ 的纯序列。则对于 supp $a_j \subset \{r > 0\}$ 的 $a_j \in C_c^\infty((-\varepsilon,\varepsilon); C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，

$$\mu(H_p(a_0 + a_1\xi)) = 0.$$

证明。首先注意到，由引理 5.2，$\|u\|_{H_h^1} \leq C$，

$$\begin{aligned}|\langle [P, \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_0) + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1) hD_x]u, u\rangle| \\ &\leq |\langle (\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_0) + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1) hD_{x_1})u, Pu\rangle| + |\langle (\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_0) + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1) hD_{x_1})Pu, u\rangle| \\ &\leq C\|u\|_{H_h^1}\|Pu\|_{L^2} = o(h).\end{aligned}$$

现在，对于 $a \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon);\, C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$

$$ih^{-1}[P, \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a)] = 2\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x a) hD_x - \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\{r, a\}) + h\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(e_1) + O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}}$$

$$ih^{-1}[P, hD_x] = \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x r) + h\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(e_2) hD_x + O(h^\infty)_{W^{1,1}\Psi_{\mathsf{T}}^{-\infty}}$$

对于某个 $e_i \in W^{1,1}((-\varepsilon, \varepsilon);\, C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，其 $\operatorname{supp}\, e_i \subset \operatorname{supp}\, a$。因此，

$$\begin{aligned}&ih^{-1}\langle [P, \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_0) + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1) hD_x]u,\ u\rangle \\ &= ih^{-1}\langle ([P, \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_0)] + [P, \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1)] hD_x + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1)[P, hD_x])u, u\rangle \\ &= \big\langle \big(2\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x a_0) hD_x - \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\{r, a_0\})\big)u, u\big\rangle \\ &\quad + \big\langle \big((2\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x a_1) hD_x - \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\{r, a_1\}))hD_x + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1)\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x r)\big)u, u\big\rangle \\ &\quad + h\langle (\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(b_0) + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(b_1) hD_x)u, u\rangle \\ &= \big\langle \big(2\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x a_0) hD_x - \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\{r, a_0\})\big)u, u\big\rangle \\ &\quad + \big\langle \big((-\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\{r, a_1\}))hD_x + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1)\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x r)\big)u, u\big\rangle + \big\langle 2\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(\partial_x a_1)(P + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(r))u, u\big\rangle \\ &\quad + h\langle (\operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(b_0) + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(b_2) hD_x)u, u\rangle\end{aligned}$$

其中 $b_i \in L^1((-\varepsilon, \varepsilon);\, C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^{d-1}))$，且 $\operatorname{supp}\, b_i \subset \{r > 0\}$。

利用引理 7.1，再结合 $\|u\|_{H_h^1} \leq C$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{h\to 0} ih^{-1}\langle [P, \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_0) + \operatorname{Op}^{\mathsf{T}}(a_1) hD_x]u, u\rangle \\ &= \mu(2\partial_x a_0 \xi - \{r, a_0\} - \{r, a_1\}\xi + a_1\partial_x r + 2\partial_x a_1(p + r)) \\ &= \mu(H_p(a_0 + a_1\xi)),\end{aligned}$$

引理得证。 □

最后，我们将前一个引理推广到任意测试函数 $a \in C_c^\infty(T^*M)$。

引理 7.3. 假设 $\|u\|_{L^2} \leq C$, $\|Pu\|_{L^2} = o(h)$，且 $u$ 的缺陷测度为 $\mu$。那么，对于所有支集足够靠近 $\{x = 0\}$ 且满足 $\operatorname{supp}\, a \subset \{r > 0\}$ 的 $a \in C_c^\infty(T^*M)$,

$$\mu(H_p a) = 0.$$

证明。定义

$$a_e := \tfrac{1}{2}(a(x, \xi, y, \eta) + a(x, -\xi, y, \eta)), \qquad a_o := \tfrac{1}{2\xi}(a(x, \xi, y, \eta) - a(x, -\xi, y, \eta)).$$

于是，$a_e$、$a_o \in C_c^\infty(T^*M)$，且两者都是关于 $\xi$ 的偶函数。此外，

$$a = a_e + a_o\xi.$$

由于 $a_e$、 $a_o$ 都是关于 $\xi$ 的偶函数，因此存在 $\tilde{a}_e$、 $\tilde{a}_o \in C_c^\infty(T^*M)$，使得

$$a_{e/o}(x,\xi,y,\eta) = \tilde{a}_{e/o}(x,\xi^2,y,\eta).$$

最后，令

$$b_{e/o}(x,y,\eta) := \tilde{a}_{e/o}(x,r(x,y,\eta),y,\eta).$$

于是， $b_{e/o} \in W^{1,\ 1}((-\varepsilon,\ \varepsilon);\ C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n-1}_{\xi\ y\ \eta}))$，并且 $b_{e/o} = a_{e/o}$ 在 $\{p=0\}$上。

现在注意到，根据泰勒定理（首先将 $r$ 视为独立变量），

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{e/o}(x,\xi^2,y,\eta) &= \tilde{a}_{e/o}(x,r(x,y,\eta),y,\eta) + (\xi^2 - r(x,y,\eta))g_{e/o}(x,\xi^2,y,\eta,r(x,y,\eta)) \\ &= b_{e/o}(x,y,\eta) + (\xi^2 - r(x,y,\eta))g_{e/o}(x,\xi^2,y,\eta,r(x,y,\eta))\end{aligned}$$

其中 $g_{e/o}$ 在其所有自变量上均光滑。因此

$$a = \tilde{a}_e(x,\xi^2,y,\eta) + \xi\tilde{a}_o(x,\xi^2,y,\eta) = b_e(x,y,\eta) + \xi b_o(x,y,\eta) + pg(x,\xi^2,y,\eta,r(x,y,\eta)),$$

因此，我们有

$$H_p a|_{p=0} = [H_p(b_e + b_o\xi)]|_{p=0}.$$

因此，由引理 5.2，因 $\operatorname{supp}\mu \subset \{p=0\}$，可得

$$\mu(H_p a) = \mu(H_p(b_e + b_o\xi)),$$

从而引理由引理 7.2 得证。 □

## 8. Propagation for $\mathcal{C}^1$ potentials

现在我们聚焦于较简单的情形，即 $V \in \mathcal{C}^1$。在这种情形下，无需使用特殊的因式分解结构，可以直接应用缺陷测度不变性的标准论证。尽管本节的结果可由 [2]，得出，我们仍在半经典情形下给出一个简洁且自成一体的证明。这一结果结合引理 5.2 的椭圆估计，将证明定理 1.2 的传播估计。

引理 8.1. 假设 $a \in C_c^\infty(T^*M)$。那么存在 $C > 0$，使得对所有$V \in W^{1,\ \infty}$，

$$\|[\operatorname{Op}(a), V]\|_{L^2\to L^2} \le Ch\|V\|_{W^{1,\infty}}.$$

证明。首先注意到，我们可以局部地进行论证，因为对于 $\chi, \phi \in C^\infty(M)$，满足 $\operatorname{supp}\chi \cap \operatorname{supp}\phi = \emptyset$，任取 $N$，存在 $C_N > 0$ 使得

$$\|\chi \operatorname{Op}(a)\psi\|_{L^2\to L^2} \le C_N h^N,$$

因此

$$\|[\chi \operatorname{Op}(a)\psi, V]\|_{L^2\to L^2} \le Ch\|V\|_{L^\infty} \le Ch\|V\|_{W^{1,\infty}}.$$

因此，经过单位分解后，我们可以将 $a$ 替换为 $\tilde{\chi}\operatorname{Op}(a)\chi$，其中 $\chi, \tilde{\chi} \in C_c^\infty(M)$ 满足 $\operatorname{supp}\chi \cap \operatorname{supp}(1-\tilde{\chi}) = \emptyset$，且 $\tilde{\chi}$ 支集于一个坐标邻域中。

在局部坐标中， $[\tilde{\chi}\operatorname{Op}(a)\chi, V]$ 的核由下式给出:

$$K(x,y) := \frac{1}{(2\pi h)^d}\int e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}\tilde{\chi}(x)\tilde{a}(x,\xi)\chi(y)(V(y)-V(x))d\xi,$$

对于某个 $\tilde{a}\in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$。然后，对 $\xi$ 分部积分一次，得到

$$K(x,y) := \frac{1}{i(2\pi h)^d}\int e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}\frac{\langle y-x, h\partial_\xi\tilde{a}(x,\xi)\rangle}{|x-y|^2}\tilde{\chi}(x)\chi(y)(V(y)-V(x))d\xi.$$

然后，对 $L := \frac{h+\langle x-y}{h+h^{-1}|x-y|^2}, \frac{D_\xi\rangle}{}$ 分部积分，得到

$$K(x,y) := \frac{1}{i(2\pi h)^d}\int e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}\Big(\frac{h+\langle y-x, D_\xi\rangle}{h+h^{-1}|x-y|^2}\Big)^N\frac{\langle y-x, h\partial_\xi a(x,\xi)\rangle}{|x-y|^2}\tilde{\chi}(x)\chi(y)(V(y)-V(x))d\xi.$$

特别是,

$$|K(x,y)|\le Ch^{1-d}\langle h^{-1}|x-y|\rangle^{-N}\frac{|V(y)-V(x)|}{|x-y|}\le Ch^{1-d}\langle h^{-1}|x-y|\rangle^{-N}\|V\|_{W^{1,\infty}}$$

因此

$$\sup_x\int|K(x,y)|+\sup_y\int|K(x,y)|\le Ch\|V\|_{W^{1,\infty}}.$$

于是， $L^2$ 有界性的舒尔检验推出了该引理。 □

引理 8.2. 设 $V\in C^1$。那么，如果 $u\in L^2(M)$ 是下列方程的解

$$\|(-h^2\Delta_g+V)u\|_{L^2}=o(h)_{L^2},\qquad \|u\|_{L^2}\le C<\infty,$$

且其缺陷测度为 $\mu$。那么，对所有 $a\in C_c^\infty(T^*M)$,

$$\mu(H_pa)=0.$$

证明。设 $\{\chi_i\}_{i=1}^N\subset C_c^\infty(M)$ 是 $M$上的单位分解，满足 $\operatorname{supp}\chi_i\subset U_i$，并设 $(\psi_i\colon U_i\to\mathbb{R}^d, U_i)$ 是 $M$上的一个坐标系。于是，取满足 $\int\phi=1$ 的 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，定义 $\phi_\varepsilon(x):=\varepsilon^{-d}\phi(\varepsilon^{-1}x)$，并令

$$V_\varepsilon := \sum_i\big[(\chi_iV)\circ\psi_i^{-1}*\phi_\varepsilon\big]\circ\psi_i$$

于是,

$$\|V_\varepsilon\|_{C^1}\le C,\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\|V_\varepsilon-V\|_{W^{1,\infty}}=0.$$

令 $p_\varepsilon=|\xi|_g^2+V_\varepsilon$。那么，对于实值的 $a\in C_c^\infty(T^*M)$，有

$$\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to0}2h^{-1}\operatorname{Im}\langle Pu,\operatorname{Op}(a)u\rangle\\
&=\lim_{h\to0}-ih^{-1}(\langle\operatorname{Op}(a)^*Pu,u\rangle-\langle P\operatorname{Op}(a)u,u\rangle\\
&=\lim_{h\to0}-ih^{-1}(\langle\operatorname{Op}(a)Pu,u\rangle-\langle P\operatorname{Op}(a)u,u\rangle\\
&=\lim_{h\to0}ih^{-1}\langle[P,\operatorname{Op}(a)]u,u\rangle\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{h\to0}ih^{-1}\langle[-h^2\Delta_g+V_\varepsilon,\operatorname{Op}(a)]u,u\rangle+ih^{-1}\langle[V-V_\varepsilon,\operatorname{Op}(a)]u,u\rangle.
\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{h\to 0} ih^{-1}\langle[-h^2\Delta_g + V_\varepsilon, \mathrm{Op}(a)]u, u\rangle = \lim_{h\to 0}\langle \mathrm{Op}(H_{p_\varepsilon})u, u\rangle = \mu(H_{p_\varepsilon}).$$

对于第二项，注意到根据引理 8.1

$$|ih^{-1}\langle[V - V_\varepsilon, \mathrm{Op}(a)]u, u\rangle| \leq C\|V - V_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}},$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0} ih^{-1}\langle[V - V_\varepsilon, \mathrm{Op}(a)]u, u\rangle = 0.$$

综上，我们证明了

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu(H_{p_\varepsilon}a)$$

另一方面，根据控制收敛定理，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(H_{p_\varepsilon}a) = \mu(H_p a),$$

这就完成了证明。 □

## References

[1] M. V. Berry. 解析与非解析势垒上方的半经典弱反射。*J. Phys. A*，15(12):3693–3704，1982。[2] N. Burq、B. Dehman 和 J. Le Rousseau。沿 $C^0$-向量场的测度传播及粗糙紧流形上的波可控性。2022。[3] H. Christianson。量子单值化与闭半双曲轨道附近的非集中。 *Transactions of the American Mathematical Society*，363(7):3373–3438，2011。[4] M. de Hoop、G. Uhlmann 和 A. Vasy。余法奇异性产生的衍射。*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 48 2 351 408, 2015 ，( ): – 。[5] L. Demanet 和 O. Lafitte。分数阶反射体的反射系数。 *arXiv preprint arXiv:2305.04071* 2023 ，。[6] S. Dyatlov 和 M. Zworski。 *Mathematical theory of scattering resonances* 200 *Grad-* ，卷。*uate Studies in Mathematics* 2019 美国数学会，普罗维登斯，RI，。[7] O. Gannot 和 J. Wunsch。余法势奇异性的半经典衍射。*Ann. Sci. ENS* 56 3 713 800, 2023 ，( ): – 。[8] J. K. Hale。 *Ordinary differential equations*。Robert E. Krieger Publishing Co., Inc.，纽约州亨廷顿，第二版，1980。[9] L. Hörmander。 *The analysis of linear partial differential operators. III*，第274卷。*Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 1985 。Springer-Verlag，柏林，。伪微分算子。[10] M. Zworski。 *Semiclassical analysis*，第138卷。美国数学会，2012。

Department of Mathematics, University College London, London, United Kingdom
*Email address*: j.galkowski@ucl.ac.uk

Department of Mathematics, Northwestern University, Evanston, IL, USA
*Email address*: jwunsch@math.northwestern.edu