arXiv:2302.08233v1 [math.FA] 16 Feb 2023

多项式增长加权 Hardy 空间上的复合算子

BINGZHE HOU 和 CHUNLAN JIANG

摘要。本文研究作用于多项式增长加权 Hardy 空间的复合算子，关注其范数、谱以及（半）Fredholm 性。首先，我们估计符号函数为圆盘自同构的复合算子的范数。其次，我们讨论符号函数为圆盘自同构的复合算子的谱。特别地，我们证明，符号函数为任意抛物型圆盘自同构的复合算子的谱总是单位圆。第三，我们考察复合算子C_φ 的 Fredholm 性，其中符号函数 φ 是闭单位圆盘上的解析自映射。我们证明，作用于多项式增长加权 Hardy 空间的 C_φ 具有闭值域（半Fredholm 性），当且仅当 φ 是有限 Blaschke 乘积。此外，我们还证明， C_φ 是 Fredholm 算子，当且仅当 φ 是圆盘自同构。

目录

1. 引言 1 2. 以圆盘自同构为符号函数的复合算子范数估计 5 3. 以圆盘自同构为符号函数的复合算子的谱 14 4. 具有闭值域的复合算子与 Fredholm 性 20 参考文献 24

1. 引言

分别用 Hol($\mathbb{D}$) 和 Hol($\overline{\mathbb{D}}$) 表示开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 和闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 上所有解析函数构成的空间。用 Aut($\mathbb{D}$) 表示 $\mathbb{D}$ 上的解析自同构群，即从 $\mathbb{D}$ 到其自身的所有解析双射所构成的集合。众所周知，每个 $\varphi \in$ Aut($\mathbb{D}$)，称为圆盘自同构或莫比乌斯变换，都可以写成以下形式

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \cdot \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \text{for some } z_0 \in \mathbb{D}.$$

2010年 数学主题分类。 主类 47B33、47A30、47A25、47A53；次类 47B38、46E20。关键词与短语。 复合算子、多项式增长加权 Hardy 空间、范数、谱、（半）Fredholm 算子。

对于任意 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，用下式表示 $f(z)$ 的泰勒展开

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k.$$

设 $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个正数序列。记 $\beta = \{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$,

$$\beta_0 = 1, \quad \text{and} \quad \beta_k = \prod_{j=1}^{k} w_j, \quad \text{for } k \geq 1.$$

由权重序列 w （或 β）诱导的加权 Hardy 空间 H^2_β 定义为

$$H^2_\beta = \{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k; \ \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \beta_k^2 < \infty\}.$$

此外，加权 Hardy 空间 H^2_β 是一个复可分 Hilbert 空间，其内积定义如下：对任意 f、$g \in H^2_\beta$

$$\langle f, g \rangle_{H^2_\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 \overline{\widehat{g}(k)} \widehat{f}(k)$$

于是，任意 $f \in H^2_\beta$ 都赋予如下范数

$$\|f(z)\|_{H^2_\beta} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{H^2_\beta}} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 |\widehat{f}(k)|^2}.$$

可以看出，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$。此外，我们记作用于 H^2_β 上的线性算子 T 的算子范数为 $\|T\|_{H^2_\beta}$。另外，我们记函数 f 在 H^2 中的范数为$\|f\|$，并记作用于 H^2 上的线性算子 T 的算子范数为 $\|T\|$。

在本文中，我们始终假设权重序列 w 满足如下正则条件

$$\lim_{k \to \infty} w_k = 1.$$

则每个加权 Hardy 空间 H^2_β 都包含于 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 中。

一个解析自映射 $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 诱导出一个线性算子 $C_g : \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，定义为

$$C_g(f) = f(g), \quad \text{for any } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}).$$

于是，算子 C_g 被称为复合算子。本文关注的是以闭单位圆盘上的解析函数为符号函数、作用于多项式增长加权 Hardy 空间上的复合算子，所涉及的问题包括范数、谱以及（半）Fredholm 性。

研究作用于加权 Hardy 空间 H^2_β上的复合算子 C_g 的有界性或范数，是一个自然的问题。许多作者对此作出了贡献，例如参见
[43], [29], [13], [36], [21], [4], [22], [17] 和 [18] 。我们已经知道，由某些解析自映射诱导的复合算子作用于某些加权 Hardy 空间。例如，由线性分式变换诱导的复合算子在经典 Hardy 空间 H^2、加权 Bergman 空间、大于 H^2的加权 Hardy 空间、加权 Dirichlet 空间等上是连续的。然而，仍有一个未解决的问题

：一般而言，确定作用于加权 Hardy 空间 H^2_β 上的复合算子 C_g 的有界性仍是一个未解决的问题，即使对于由圆盘自同构诱导的复合算子也是如此。最近，受 M. Gromov 在几何群论 [20], 方面工作的启发，作者在此前的一篇文章 [24] 中引入了多项式增长加权 Hardy 空间的概念，并证明了每个由圆盘自同构诱导、作用于多项式增长加权 Hardy 空间的复合算子都是有界的；而由圆盘自同构诱导、作用于中间增长加权 Hardy 空间的复合算子则可能无界。

定义 1.1. 设 $w=\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个正数序列，且满足 $w_k\to 1$。

(1) 若 $\sup_k (k+1)|w_k-1|<\infty$，则称加权 Hardy 空间 H^2_β 具有多项式增长。

(2) 若 $\sup_k (k+1)|w_k-1|=\infty$，则称加权 Hardy 空间 H^2_β 具有中间增长。

备注 1.2。请注意，许多函数空间，例如经典 Hardy 空间、加权 Bergman 空间和加权 Dirichlet 空间，都属于多项式增长加权 Hardy 空间。

此外，条件 $\sup_k(k+1)|w_k-1|<\infty$ 成立，当且仅当存在一个正数 M，使得对每个 $k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{k+1}{k+M+1}\le w_k\le\frac{k+M+1}{k+1}.$$

此外，这类加权 Hardy 空间 H^2_β 称为具有 M阶多项式增长。

本文关注作用于多项式增长加权 Hardy 空间上的复合算子。在第 2 节中，我们将估计由圆盘自同构的符号函数诱导、作用于多项式增长加权 Hardy 空间上的复合算子的范数。

关于复合算子谱的研究，正式始于 Nordgren 的论文 [38], ，他在文中确定了作用于经典 Hardy 空间 H^2上的可逆复合算子的谱。随后，Kamowitz 分别在 H^p 和圆盘代数上研究了同一问题，见 [27] 和 [28], 。此后数十年间，这一课题广受关注；关于相关研究背景，可参见 C. Cowen[13] 及其中的参考文献。值得注意的是，在考察小空间（包含于 H^2 的加权 Hardy 空间，例如 Dirichlet 空间和加权 Dirichlet 空间）时，所用的有效技巧不同于研究经典 Hardy 空间或 Bergman空间时的技巧。根据 P. Hurst [26], 、E. Gallardo-Gutiérrez 和 A. Montes-Rodríguez [16], 、W. Higdon [23], 、A. Pons [41], 、J. Pau 和 P. Pérez [39], 、E. Gallardo-Gutiérrez 和 R. Schroderus [18], 的研究，可以了解由圆盘自同构和线性分式非自同构诱导、作用于加权 Dirichlet 空间上的复合算子的谱。在第 3 节中，我们将讨论由圆盘自同构的符号函数诱导、作用于多项式增长加权 Hardy 空间上的复合算子的谱。特别地，我们证明，由任意抛物型圆盘自同构的符号函数诱导的复合算子，其谱总是单位圆。

回顾一下，在希尔伯特空间上作用于其自身的有界线性算子 T，若其值域闭，且 dim Ker(T) $<\infty$和 dim Ker(T^*) $<\infty$ 中至少一个成立，则称其为半弗雷德霍姆算子。此外，若 T ……，则称其为弗雷德霍姆算子，

若 T 的值域闭，且 dim Ker(T) $< \infty$ 和 dim Ker(T^*) $< \infty$ 均成立。文献 [10], [3] 和 [5], 刻画了开单位圆盘上的 Hardy 空间上的 Fredholm 复合算子；文献 [2] 和 [3], 刻画了 Bergman空间上的 Fredholm 复合算子；文献 [11]刻画了 Dirichlet 空间上的 Fredholm 复合算子。此外，还有许多其他论文研究了定义在复数域 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{C}^n$中区域上的全纯函数空间上的 Fredholm 算子，例如参见 [6], [15], [30], [31], [44] 和 [45] 。特别地，曹刚、L. He 和朱克 [7] 于2019年证明：对于复数域 $\mathbb{C}^n$中区域 Ω 上的全纯自映射 g，若该希尔伯特空间的再生核 $K(w,w)$ 在 w 趋近 Ω 的边界时趋于无穷大，则 C_g 是 Fredholm 算子，当且仅当 C_g 是 Fredholm 算子；这又当且仅当 g 是圆盘自同构。最近，曹刚、L. He 和 J. Li [8] 在不假设 $K(w,w) \to \infty$ 在 w 趋近 Ω 的边界 ∂时成立的情况下，得到了相同的结论。

请注意，由非平凡解析自映射诱导、作用于加权 Hardy 空间上的复合算子总是单射。因此，这类复合算子若具有闭值域，则为半Fredholm算子。各种函数空间上的闭值域复合算子也一直备受关注。1974年，J. Cima、J. Thompson 和 W. Wogen [10] 通过诱导映射的边界行为，确定了 H^2 上具有闭值域的复合算子。随后，N. Zorboska[44] 通过诱导映射在单位圆盘上的像集性质，刻画了具有闭值域的复合算子，从而回答了 [10]中的一个问题。D. Luecking 在 [32], [33], 中研究了 Bergman空间上的闭值域复合算子；J. Akeroyd 和 S. Fulmer 在 [2], 中研究了加权 Bergman 空间上的闭值域复合算子。从中可以看出，对于经典 Hardy 空间和加权 Bergman 空间上的闭值域复合算子，诱导反Carleson测度的 Nevanlinna计数函数是一个充要条件。然而，对于 Dirichlet 空间，情况似乎更为复杂。Luecking 在 [34], 中证明，诱导反Carleson测度的 Nevanlinna计数函数是 Dirichlet 空间上闭值域复合算子的必要条件，但在 [35]中指出这并非充分条件。最近，曹刚和 L. He [9] 给出了 Dirichlet 空间上闭值域复合算子的一个充要条件。

在第4节中，我们考察符号函数为闭单位圆盘上的解析自映射 φ 的复合算子 C_φ 的 Fredholm 性。我们证明，作用于多项式增长加权 Hardy 空间上的 C_φ 具有闭值域（半Fredholm性）当且仅当 φ 是有限 Blaschke 乘积。此外，我们还证明，C_φ 是 Fredholm 当且仅当 φ 是圆盘自同构。

迄今为止，已有大量关于作用于经典 Hardy 空间、加权 Bergman 空间和加权 Dirichlet 空间的复合算子的研究，其中测度方法（积分表示、卡尔leson测度、Nevanlinna计数函数等）发挥着重要作用。然而，在一般情形下研究加权 Hardy 空间时，我们可能没有合适的测度可用。本文所采用的技术涉及算子理论、基理论和一些拓扑学，也涉及复合算子理论、函数论和复分析。

为避免混淆，我们用 $(f)^n$ 或 $(f(z))^n$ 表示函数f的 n次幂；若迭代有意义，则用 f^n 表示函数 f 的 n次迭代。

2. 圆盘自同构符号函数对应的复合算子范数估计

在研究 [24],中解析函数的相似表示时，作者得到了符号函数为圆盘自同构的复合算子作用于多项式增长加权 Hardy 空间时的有界性。对于解析函数 $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，记 M_g 为乘法算子，即对于任意 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，$M_g(f(z)) = g(z)f(z)$。

定理 2.1 ([24]中的定理 3.1）。设 H^2_β 为由权重序列 $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$诱导的多项式增长加权 *Hardy* 空间。那么，对任意 $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$，$M_z \sim M_\varphi$，即 M_z 在 H^2_β上弱齐次。事实上，复合算子C_φ： $H^2_\beta \to H^2_\beta$ 是一个同构。

此外，已有研究探讨了有限 Blaschke 乘积和解析自映射作为符号函数时，在多项式增长加权 Hardy 空间上作用的复合算子。

定理 2.2 ([24]中的定理 3.3）。设 H^2_β 为由权重序列 $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$诱导的多项式增长加权 *Hardy* 空间。若 $\psi(z)$ 是 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的解析函数，且 $\psi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$，则 C_ψ 在 H^2_β上有界。

定理 2.3 （定理 3.2，见 [24]）。设 H^2_β 是一个多项式增长加权 *Hardy* 空间，且设 B（z）是一个在 $\mathbb{D}$上阶为 m 的有限 *Blaschke* 乘积。则

$$M_B \sim \bigoplus_1^m M_z.$$

注 2.4。注意到 $M_B C_B = C_B M_z$。于是，根据上述定理可知，符号函数为阶为 m 的有限 Blaschke 乘积的复合算子具有闭值域。因此它们是半Fredholm 的，因为

$$\dim \mathrm{Ker}(T) = 0 < \infty \quad \text{and} \quad \dim \mathrm{Ker}(T^*) = \begin{cases} 0, & \text{if } m = 1 \\ \infty, & \text{if } m > 1 \end{cases}.$$

现在，我们已经知道由圆盘自同构诱导的、作用于多项式增长加权 Hardy 空间上的复合算子的有界性。此外，我们将给出这些复合算子的范数估计。首先，让我们回顾一下 [24], 中的一些记号和基本论述，它们与基理论有关（参见 [42] 和 [37]）。

设 H 是一个复可分 Hilbert 空间，且设 $\mathfrak{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\mathfrak{y} = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 H中的两个向量序列。定义

$$\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle_H = (\langle x_j, y_i \rangle_H)_{i,j}.$$

特别地，$\mathfrak{x}$ 在 H 上的 Gram 矩阵定义为

$$\Gamma_H(\mathfrak{X}) = \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \rangle_H = (\langle x_i, x_j \rangle_H)_{i,j}.$$

设 $\mathfrak{F} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是加权 Hardy 空间 H^2_β 中的一个向量序列。那么，$\mathfrak{F}$ 在 H^2_β 上诱导出一个线性算子 $X_{\mathfrak{F}}$，定义如下:

$$X_{\mathfrak{F}}(z^n) = f_n(z), \quad \text{for } n = 0, 1, \ldots.$$

此外，算子 $X_{\mathfrak{F}}$ 在正交基 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ 下的矩阵表示如下:

$$X_{\mathfrak{F}}=\begin{bmatrix}\widehat{f_0}(0) & \widehat{f_1}(0) & \widehat{f_2}(0) & \cdots & \widehat{f_k}(0) & \cdots\\ \widehat{f_0}(1) & \widehat{f_1}(1) & \widehat{f_2}(1) & \cdots & \widehat{f_k}(1) & \cdots\\ \widehat{f_0}(2) & \widehat{f_1}(2) & \widehat{f_2}(2) & \cdots & \widehat{f_k}(2) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \widehat{f_0}(k) & \widehat{f_1}(k) & \widehat{f_2}(k) & \cdots & \widehat{f_k}(k) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}.$$

我们称算子 $X_{\mathfrak{F}}$ 为序列 $\mathfrak{F}$的变换算子。特别地，若对某个 $g\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，有 $\mathfrak{F}=\{(g)^n\}_{n=0}^{\infty}$ 且 $g(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$，则变换算子 $X_{\mathfrak{F}}$ 恰为复合算子 C_g。

定义算子 D_β: $H^2_\beta\to H^2$ 如下

$$D_\beta(z^k)=\beta_k z^k \quad \text{for } n=0,1,\dots.$$

众所周知， D_β 是一个等距同构。此外， D_β 和 D_β^{-1} 在正交基 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ 下的矩阵表示如下

$$D_\beta=\begin{bmatrix}\beta_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ 0 & \beta_1 & \cdots & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_k & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix},\quad D_\beta^{-1}=D_{\beta^{-1}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\beta_0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ 0 & \frac{1}{\beta_1} & \cdots & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\beta_k} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}.$$

于是， $D_\beta X_{\mathfrak{F}} D_\beta^{-1}$ 是经典 Hardy 空间 H^2上的一个线性算子。

从现在起，我们总是写作 $\varphi_{z_0}(z)=\frac{z_0-z}{1-\overline{z_0}z}$、 $z_0\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 以及 $B_0(z)=z\varphi_{z_0}(z)$。记

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{F}=\{(B_0(z))^n\}_{n=0}^{\infty},\\
&\mathfrak{F}_\beta=\{\frac{(B_0(z))^n}{\beta_n}\}_{n=0}^{\infty},\\
&\widetilde{\mathfrak{F}}_1=\{(B_0(z))^n, z(B_0(z))^n; n=0,1,\dots\},\\
&\widetilde{\mathfrak{F}}_2=\{(B_0(z))^n, \varphi_{z_0}(z)(B_0(z))^n; n=0,1,\dots\},\\
&\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,\beta}=\{\frac{(B_0(z))^n}{\beta_n}, \frac{z(B_0(z))^n}{\beta_n}; n=0,1,\dots\},\\
&\widetilde{\mathfrak{F}}_{2,\beta}=\{\frac{(B_0(z))^n}{\beta_n}, \frac{\varphi_{z_0}(z)(B_0(z))^n}{\beta_n}; n=0,1,\dots\}.
\end{aligned}$$

由 $B_0(z)=z\varphi_{z_0}(z)$ 和 $\varphi_{z_0}(\varphi_{z_0}(z))=z$ 可知，对于每个 $n=0, 1, 2, \dots,$

$$\begin{aligned}
&C_{\varphi_{z_0}}((B_0(z))^n)=(B_0(\varphi_{z_0}(z)))^n=(B_0(z))^n,\\
&C_{\varphi_{z_0}}(z(B_0(z))^n)=\varphi_{z_0}(z)(B_0(\varphi_{z_0}(z)))^n=\varphi_{z_0}(z)(B_0(z))^n.
\end{aligned}$$

那么，复合算子 $C_{\varphi_{z_0}}$ 只是从$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$Riesz 基 $\mathfrak{F}_{1,\beta}$ 到 Riesz 基 $\mathfrak{F}_{2,\beta}$的一个基变换算子。可以看出， C_B 在 H^2_β和 $H^2_{\beta^{-1}}$上有界。因此， $D_\beta X_{\mathfrak{F}} D_\beta^{-1}$ 和 $D_\beta^{-1} X_{\mathfrak{F}} D_\beta$ 在 H^2上有界。

此外，设

$$D_{tm}=\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots \\ 0 & D_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & w_1^{-1}\overline{z_0} & 0 & 0 & \cdots \\ w_1z_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & w_2^{-1}\overline{z_0} & \cdots \\ 0 & 0 & w_2z_0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

其中

$$D_n=\begin{bmatrix} 1 & w_n^{-1}\overline{z_0} \\ w_nz_0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{for any } n\in\mathbb{N}.$$

现在，我们开始估计由圆盘自同构诱导、作用于多项式增长的加权 Hardy 空间上的复合算子的范数。

定理 2.5. 设 H^2_β 为由权重序列 $w=\{w_k\}_{k=1}^\infty$诱导的多项式增长加权 *Hardy* 空间。那么对于任意 $\varphi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。

$$(D_\beta X^*_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}D_\beta^{-1})(D_\beta M^*_{\frac{\sqrt{1-|z_0|^2}}{1-\overline{z_0}z}}D_\beta^{-1})(D_\beta M_{\frac{\sqrt{1-|z_0|^2}}{1-\overline{z_0}z}}D_\beta^{-1})(D_\beta X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}D_\beta^{-1})=D_{tm}, \tag{2.1}$$

$$(D_\beta X^*_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}D_\beta^{-1})(D_\beta X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}D_\beta^{-1})=D_{tm}. \tag{2.2}$$

此外，

$$\|C_\varphi^{-1}\|_{H^2_\beta}=\|C_{\varphi^{-1}}\|_{H^2_\beta}=\|C_\varphi\|_{H^2_\beta}=\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}^{-1}\|_{H^2_\beta}\le\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}\|_{H^2_\beta}\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}\|_{H^2_{\beta^{-1}}}\|D_{tm}^{-1}\|.$$

证明。 $\varphi\in$ Aut(𝔻)中的每个元素都可以写成如下形式

$$\varphi(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{z_0-z}{1-\overline{z_0}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\varphi_{z_0},\quad \text{for some } z_0\in\mathbb{D}.$$

由于 $C_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z}$ 是等距映射，我们有

$$\|C_\varphi\|_{H^2_\beta}=\|C_{\frac{z_0-z}{1-\overline{z_0}z}}C_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z}\|_{H^2_\beta}=\|C_{\varphi_{z_0}}\|_{H^2_\beta}.$$

因此，只需考虑 $\varphi_{z_0}(z)$。经过一些计算（详见 [24]中定理 3.1 的证明），可知等式 (2.1) 和 (2.2) 成立。

由于 $C_{\varphi_{z_0}}(\widetilde{\mathfrak{F}_1})=\widetilde{\mathfrak{F}_1}$，我们有

$$C_{\varphi_{z_0}}X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}=X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}.$$

结合 $\varphi_{z_0}^{-1}=\varphi_{z_0}$，可知

$$\|C_{\varphi_{z_0}}^{-1}\|_{H^2_\beta}=\|C_{\varphi_{z_0}^{-1}}\|_{H^2_\beta}=\|C_{\varphi_{z_0}}\|_{H^2_\beta}=\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}^{-1}\|_{H^2_\beta}\le\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}\|_{H^2_\beta}\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}^{-1}\|_{H^2_\beta}.$$

由等式 (2.2),

$$\begin{aligned}\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}^{-1}\|_{H^2_\beta}=&\|D_\beta X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}^{-1}D_\beta^{-1}\|\\ =&\|D_{tm}^{-1}(D_\beta X^*_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}D_\beta^{-1})\|\\ \le&\|D_{tm}^{-1}\|\|D_\beta X^*_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}D_\beta^{-1}\|\\ =&\|D_{tm}^{-1}\|\|D_\beta^{-1}X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}D_\beta\|\\ =&\|D_{tm}^{-1}\|\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}\|_{H^2_{\beta^{-1}}}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

那么，我们的任务是估计 $\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}\|_{H^2_\beta}$、 $\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}\|_{H^2_{\beta^{-1}}}$ 和 $\|D_{tm}^{-1}\|$。

引理 2.6。 沿用上述记号。我们有

$$\|D_{tm}^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{1+|z_0|^2 \sup\limits_n (w_n^2+w_n^{-2})}}{1-|z_0|^2} \quad and \quad \|D_{tm}\| \leq \sqrt{1+|z_0|^2 \sup_n (w_n^2+w_n^{-2})}.$$

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n^* D_n = \begin{bmatrix} 1+|w_n z_0|^2 & (w_n+w_n^{-1})\overline{z_0} \\ (w_n+w_n^{-1})z_0 & 1+|z_0 w_n^{-1}|^2 \end{bmatrix}.$$

它有两个特征值如下

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2 - \sqrt{(1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2)^2 - 4(1-|z_0|^2)^2}}{2},$$

$$\lambda_2^{(n)} = \frac{1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2 + \sqrt{(1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2)^2 - 4(1-|z_0|^2)^2}}{2}.$$

因此,

$$\|D_n\| = |\lambda_2^{(n)}|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{1+|z_0|^2(w_n^2+w_n^{-2})},$$

$$\begin{aligned} \|D_n^{-1}\| =& |\lambda_1^{(n)}|^{-\frac{1}{2}} \\ =& \left| \frac{2}{1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2 - \sqrt{(1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2)^2 - 4(1-|z_0|^2)^2}} \right|^{\frac{1}{2}} \\ =& \left| \frac{1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2 + \sqrt{(1+(w_n^2+w_n^{-2})|z_0|^2)^2 - 4(1-|z_0|^2)^2}}{2(1-|z_0|^2)^2} \right|^{\frac{1}{2}} \\ \leq& \frac{\sqrt{1+|z_0|^2(w_n^2+w_n^{-2})}}{1-|z_0|^2}. \end{aligned}$$

那么,

$$\|D_{tm}\| = \sup_n \|D_n\| \leq \sqrt{1+|z_0|^2 \sup_n (w_n^2+w_n^{-2})},$$

$$\|D_{tm}^{-1}\| = \sup_n \|D_n^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{1+|z_0|^2 \sup\limits_n (w_n^2+w_n^{-2})}}{1-|z_0|^2}.$$

□

引理 2.7。 记号同上。我们有

$$\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H_\beta^2} \leq \|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}\|_{H_\beta^2} \leq (1+\|M_z\|_{H_\beta^2})\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H_\beta^2}$$

and

$$\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H_{\beta^{-1}}^2} \leq \|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}\|_{H_{\beta^{-1}}^2} \leq (1+\|M_{\varphi_{z_0}}\|_{H_{\beta^{-1}}^2})\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H_{\beta^{-1}}^2}.$$

证明。可以看出

$$\Gamma_{H^2_\beta}(\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,\beta})=\langle\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,\beta},\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,\beta}\rangle_{H^2_\beta}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}\\ \Gamma_{21}&\Gamma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle\mathfrak{F}_\beta,\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}&\langle\mathfrak{F}_\beta,M_z\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}\\ \langle M_z\mathfrak{F}_\beta,\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}&\langle M_z\mathfrak{F}_\beta,M_z\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}\end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}&=\langle\mathfrak{F}_\beta,\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}=(D_\beta^{-1}X^*_{\mathfrak{F}}D_\beta)(D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1}),\\
\Gamma_{12}&=\langle\mathfrak{F}_\beta,M_z\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}=(D_\beta^{-1}X^*_{\mathfrak{F}}D_\beta)(D_\beta^{-1}M_z^*D_\beta)(D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1}),\\
\Gamma_{21}&=\langle M_z\mathfrak{F}_\beta,\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}=(D_\beta^{-1}X^*_{\mathfrak{F}}D_\beta)(D_\beta M_zD_\beta^{-1})(D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1}),\\
\Gamma_{22}&=\langle M_z\mathfrak{F}_\beta,M_z\mathfrak{F}_\beta\rangle_{H^2_\beta}=(D_\beta^{-1}X^*_{\mathfrak{F}}D_\beta)(D_\beta^{-1}M_z^*D_\beta)(D_\beta M_zD_\beta^{-1})(D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1}).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_{11}\|=\|D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1})\|^2=\|X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_\beta},\\
&\|\Gamma_{12}\|\le\|D_\beta^{-1}X^*_{\mathfrak{F}}D_\beta\|\|D_\beta^{-1}M_z^*D_\beta\|\|(D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1}\|=\|M_z\|_{H^2_\beta}\|X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_\beta},\\
&\|\Gamma_{21}\|\le\|D_\beta^{-1}X^*_{\mathfrak{F}}D_\beta\|\|D_\beta M_zD_\beta^{-1}\|\|D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1}\|=\|M_z\|_{H^2_\beta}\|X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_\beta},\\
&\|\Gamma_{22}\|\le\|D_\beta^{-1}X^*_{\mathfrak{F}}D_\beta\|\|D_\beta M_zD_\beta^{-1}\|^2\|D_\beta X_{\mathfrak{F}}D_\beta^{-1}\|=\|M_z\|^2_{H^2_\beta}\|X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_\beta}.
\end{aligned}$$

Then,

$$\|X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_\beta}=\|\Gamma_{11}\|\le\|\Gamma_{H^2_\beta}(\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,\beta})\|=\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}\|^2_{H^2_\beta}$$

and

$$\begin{aligned}
\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}\|^2_{H^2_\beta}=\Gamma_{H^2_\beta}(\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,\beta})\le&\|\Gamma_{11}\|+\|\Gamma_{12}\|+\|\Gamma_{21}\|+\|\Gamma_{22}\|\\
\le&(1+\|M_z\|_{H^2_\beta})^2\|X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_\beta}.
\end{aligned}$$

所以，

$$\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_\beta}\le\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_1}\|_{H^2_\beta}\le(1+\|M_z\|_{H^2_\beta})\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_\beta},$$

类似地，我们有

$$\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_{\beta^{-1}}}\le\|X_{\widetilde{\mathfrak{F}}_2}\|_{H^2_{\beta^{-1}}}\le(1+\|M_{\varphi_{z_0}}\|_{H^2_{\beta^{-1}}})\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_{\beta^{-1}}}.$$

□

回顾一下，对于 $\lambda>0$，加权 Dirichlet 空间 D^2_λ 由定义在 $\mathbb{D}$ 上的那些解析函数 f 构成，满足

$$\|f\|_{D^2_\lambda}=\left(|f(0)|^2+\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2(1-|z|^2)^{\lambda-1}\mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

其中，$\mathrm{d}A(z)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{D}$上的归一化面积测度。众所周知，加权 Dirichlet 空间 D^2_λ 可视为一个加权 Hardy 空间 $H^2_{\beta^{(\lambda)}}$，其中 $\beta^{(\lambda)}_0=1$，并且对于 $k=1,2,\ldots,\beta^{(\lambda)}_k=\prod_{j=1}^k w^{(\lambda)}_j$，有 $w^{(\lambda)}_j=\sqrt{\frac{j+2\lambda+1}{j+1}}$。

对于 $N\in\mathbb{N}$，设 $\beta^{(N,1)}=\{\beta^{(N,1)}_k\}_{k=0}^\infty$ 和 $\beta^{(N,2)}=\{\beta^{(N,2)}_k\}_{k=0}^\infty$，其中

$$w^{(N,1)}_j=\frac{j+N}{j},\quad\beta^{(N,1)}_k=\prod_{j=1}^k w^{(N,1)}_j=C^k_{N+k}=\frac{(N+k)!}{N!\cdot k!},$$

and

$$w_j^{(N,2)} = \frac{(j+1)^N}{j^N}, \quad \beta_k^{(N,2)} = \prod_{j=1}^{k} w_j^{(N,2)} = (k+1)^N.$$

此外，分别用 $D^2_{N,\ 1}$ 和 $D^2_{N,\ 2}$ 表示加权 Hardy 空间 $H^2_{\beta^{(N,1)}}$ 和$H^2_{\beta^{(N,2)}}$。不难看出，$D^2_{N,\ 1}$ 和$D^2_{N,\ 2}$ 都是加权 Dirichlet 空间 D^2_N，且范数等价。

引理 2.8。设 H^2_β 是由权重序列 $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$诱导的具有 N 多项式增长的加权 *Hardy* 空间。那么

$$\|M_{z^n}\|_{H^2_\beta} \le C^k_{N+k} = \beta_n^{(N,1)}, \quad \|M_{\frac{1}{1-\overline{z}_0 z}}\|_{H^2_\beta} \le \frac{1}{(1-|z_0|)^{N+1}},$$

and

$$\|M_{\frac{z_0-z}{1-\overline{z}_0 z}}\|_{H^2_\beta} \le \frac{N+2}{(1-|z_0|)^{N+1}}.$$

证明。由于对所有 $n = 1,\ 2,\ ...,$ 都有 $w_n \le \frac{n+1+N}{n+1} < \frac{n+N}{n} = w_n^{(N,1)}$，且 $\{w_n^{(N,1)}\}$ 是正数递减序列，因此容易看出

$$\|M_{z^n}\|_{H^2_\beta} \le \|M_{z^n}\|_{D^2_N} = C^n_{N+n} = \beta_n^{(N)}.$$

此外,

$$\|M_{\frac{1}{1-\overline{z}_0 z}}\|_{H^2_\beta} = \|\sum_{n=0}^{\infty} z_0^n M_{z^n}\|_{H^2_\beta} \le \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n \|M_{z^n}\|_{H^2_\beta} \le \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n \beta_n^{(N,1)}.$$

Then

$$\frac{1}{(1-|z_0|)^{N+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n C^n_{N+n} = \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n \beta_n^{(N,1)} \ge \|M_{\frac{1}{1-\overline{z}_0 z}}\|_{H^2_\beta}$$

因此,

$$\|M_{\frac{z_0-z}{1-\overline{z}_0 z}}\|_{H^2_\beta} \le (|z_0| + \|M_z\|_{H^2_\beta})\|M_{\frac{1}{1-\overline{z}_0 z}}\|_{H^2_\beta} \le \frac{N+2}{(1-|z_0|)^{N+1}}.$$

证明至此完成。 □

定义 D_w、D：$H^2_\beta \to H^2_\beta$，对于任意 $f(z) \in H^2_\beta$

$$D_w f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{k+1} \widehat{f}(k) z^k \ \text{ and } \ Df(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k+1} \cdot \widehat{f}(k) z^k.$$

我们可以将两个算子 D_w 和 D 在正交基 $\{z^k\}_{k=0}^\infty$ 下写成如下矩阵形式,

$$D_w = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & w_3 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_k & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \ \text{ and } \ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \frac{k+1}{k} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

令 $\widetilde{\beta}_n=(n+1)\beta_n$，其中 $n=0,\ 1,\ \ldots\ldots$，并令 $\widetilde{w}_k=\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}=w_k\cdot\frac{k+1}{k}$，其中 $k=1,\ 2,\ \ldots\ldots$。此外，定义 $D_{\widetilde{w}}\colon\ H^2_\beta\to H^2_{\widetilde{\beta}}$，对于任意 $f(z)\in H^2_\beta$

$$D_wf(z)=\sum_{k=0}^{\infty}w_{k+1}\widehat{f}(k)z^k,$$

在正交基 $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ 下可写成如下矩阵形式，

$$D_{\widetilde{w}}=DD_w=\begin{bmatrix}\widetilde{w_1}&0&0&\cdots&0&\cdots\\0&\widetilde{w_2}&0&\cdots&0&\cdots\\0&0&\widetilde{w_3}&\cdots&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&w_k&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}.$$

引理 2.9. 设 H^2_β 为由权重序列$\sim\quad\sim\qquad\qquad\sim w=\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 诱导的加权 *Hardy* 空间，其中 $w_k\to1$。记 $\beta=\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$，其中 $\beta_n=(n+1)\beta_n$。那么，

$$\|C_{B_0}\|_{H^2_{\widetilde{\beta}}}\le\|D_{\widetilde{w}}\|\cdot\|M_{B_0'}\|_{H^2_\beta}\cdot\|C_{B_0}\|_{H^2_\beta}.$$

证明。根据 [24], 中命题 2.15 的证明可知，

$$\langle\frac{(B_0)^{i+1}}{\widetilde{\beta}_i},\frac{(B_0)^{j+1}}{\widetilde{\beta}_j}\rangle_{H^2_{\widetilde{\beta}}}=\langle DD_wM_{B_0'}\left(\frac{(B_0)^i}{\beta_i}\right),DD_wM_{B_0'}\left(\frac{(B_0)^j}{\beta_j}\right)\rangle_{H^2_\beta},$$

然后

$$\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}\left(\left\{\frac{(B_0)^{n+1}}{\widetilde{\beta}_n}\right\}_{n=0}^{\infty}\right)=\Gamma_{H^2_\beta}\left(\left\{DD_wM_{B_0'}\left(\frac{(B_0)^n}{\beta_n}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}\right).$$

注意到

$$\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}\left(\left\{\frac{(B_0)^n}{\widetilde{\beta}_n}\right\}_{n=0}^{\infty}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}(\{\frac{B_0^n}{\widetilde{\beta}_n}\}_{n=1}^{\infty})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&D_{\widetilde{w}}^{-1}\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}(\{\frac{B_0^{n+1}}{\widetilde{\beta}_n}\}_{n=0}^{\infty})D_{\widetilde{w}}^{-1}.\end{bmatrix}$$

那么，

$$\begin{aligned}\|X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_{\widetilde{\beta}}}&=\left\|\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}\left(\left\{\frac{(B_0)^n}{\widetilde{\beta}_n}\right\}_{n=0}^{\infty}\right)\right\|\\&=\max\left\{1,\left\|D_{\widetilde{w}}^{-1}\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}\left(\left\{\frac{(B_0)^{n+1}}{\widetilde{\beta}_n}\right\}_{n=0}^{\infty}\right)D_{\widetilde{w}}^{-1}\right\|\right\}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\left\|D_{\widetilde{w}}^{-1}\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}\left(\left\{\frac{(B_0)^{n+1}}{\widetilde{\beta}_n}\right\}_{n=0}^{\infty}\right)D_{\widetilde{w}}^{-1}\right\| &\leq \left\|\Gamma_{H^2_{\widetilde{\beta}}}\left(\left\{\frac{(B_0)^{n+1}}{\widetilde{\beta}_n}\right\}_{n=0}^{\infty}\right)\right\| \\ &= \left\|\Gamma_{H^2_{\beta}}\left(\left\{DD_wM_{B_0'}\left(\frac{(B_0)^{n}}{\beta_n}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}\right)\right\| \\ &= \|D_{\widetilde{w}}M_{B_0'}X_{\mathfrak{F}}\|^2_{H^2_{\beta}} \\ &\leq (\|D_{\widetilde{w}}\|_{H^2_{\beta}}\|M_{B_0'}\|_{H^2_{\beta}}\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_{\beta}})^2 \\ &= (\|D_{\widetilde{w}}\|\|M_{B_0'}\|_{H^2_{\beta}}\|C_{B_0}\|_{H^2_{\beta}})^2,\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\|C_{B_0}\|_{H^2_{\widetilde{\beta}}} &= \|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_{\widetilde{\beta}}} \\ &\leq \max\{1, \|D_{\widetilde{w}}\|\|M_{B_0'}\|_{H^2_{\beta}}\|C_{B_0}\|_{H^2_{\beta}}\} \\ &= \|D_{\widetilde{w}}\|\|M_{B_0'}\|_{H^2_{\beta}}\|C_{B_0}\|_{H^2_{\beta}}.\end{aligned}$$

□

C. Cowen 的以下结果 [12] 对我们的估计也很有用。

定理 2.10 （见 [12]）。 设 H^2_β 和 $H^2_{\beta'}$ 是加权 *Hardy* 空间，且

$$w_{k+1} = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} \geq \frac{\beta'_{k+1}}{\beta'_k} = w'_{k+1}, \quad for\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

设 ψ（z） 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数，满足 ψ（$\mathbb{D}$） $\subseteq \mathbb{D}$ 且 ψ（0） $= 0$。若 C_ψ 在 H^2_β上有界，则 C_ψ 在$H^2_{\beta'}$ 上有界，且$\|C_\psi\|_{H^2_\beta} \geq \|C_\psi\|_{H^2_{\beta'}}$。

现在，基于前面的所有预备知识，我们可以估计由 B_0 和圆盘自同构诱导、作用于具有 N-多项式增长的加权 Hardy 空间上的复合算子的范数。

命题 2.11。 设 H^2_β 是一个具有 N-多项式增长的加权 *Hardy* 空间。则

$$\|C_{B_0}\|_{H^2_\beta} \leq \frac{K_2K_1^N\prod_{j=1}^N(j^3+5j^2+2j)}{(1-|z_0|)^{N(N+1)}},$$

其中 K_1 和 K_2 是正常数。

证明。 显然,

$$B_0'(z) = \left(z\cdot\frac{z_0-z}{1-\overline{z_0}z}\right)' = \frac{z_0-2z+\overline{z_0}z^2}{(1-\overline{z_0}z)^2}.$$

根据引理 2.8，对于 $j = 1$、2、.....、 N,

$$\begin{aligned}\|M_{B_0'}\|_{D^2_{j-1,1}} &\leq (|z_0|+2\|M_z\|_{D^2_{j-1,1}} + |z_0|\|M_{z^2}\|_{D^2_{j-1,1}})\|M_{\frac{1}{1-\overline{z_0}z}}\|^2_{D^2_{j-1,1}} \\ &\leq \frac{1+2j+j(j+1)/2}{(1-|z_0|)^{2j}} \\ &= \frac{j^2+5j+2}{2(1-|z_0|)^{2j}}.\end{aligned}$$

此外，由于 $D^2_{N,\,1}$ 和 $D^2_{N,\,2}$ 都是范数等价的加权 Dirichlet 空间 D^2_N，因此存在常数 $K_1>0$ 和 $K_2>0$，使得

$$\|M_{B_0'}\|_{D^2_{j-1,2}} \le K_1\|M_{B_0'}\|_{D^2_{j-1,1}} \le \frac{K_1(j^2+5j+2)}{2(1-|z_0|)^{2j}}$$

and

$$\|C_{B_0}\|_{D^2_{N,1}} \le K_2\|C_{B_0}\|_{D^2_{N,2}}.$$

此外，对于 $j=1,2,\dots,N$,

$$\|DD_{w^{(j-1,1)}}\| = 2j.$$

那么，根据引理 2.9 以及 C_{B_0} 在经典 Hardy 空间上是等距映射,

$$\begin{aligned}\|C_{B_0}\|_{D^2_{N,2}} \le& \prod_{j=1}^{N}\|DD_{w^{(j-1,1)}}\|\cdot\prod_{j=1}^{N}\|M_{C_{B_0'}}\|_{D^2_{j-1,2}}\cdot\|C_{B_0}\|_{D^2_{0,2}}\\ \le& \prod_{j=1}^{N}(2j)\cdot\prod_{j=1}^{N}\frac{K_1(j^2+5j+2)}{2(1-|z_0|)^{2j}}\cdot\|C_{B_0}\|\\ =& \frac{K_1^N\prod_{j=1}^{N}(j^3+5j^2+2j)}{(1-|z_0|)^{N(N+1)}}.\end{aligned}$$

因此，由定理 2.10 可得

$$\|C_{B_0}\|_{H^2_\beta} \le \|C_{B_0}\|_{D^2_{N,1}} \le K_2\|C_{B_0}\|_{D^2_{N,2}} \le \frac{K_2K_1^N\prod_{j=1}^{N}(j^3+5j^2+2j)}{(1-|z_0|)^{N(N+1)}}.$$

□

定理 2.12. 设 H^2_β 是由权重序列 $w=\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$诱导的具有 N-多项式增长的加权 *Hardy* 空间。那么对于任意 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，存在一个正数 K 使得

$$\|C_\varphi\|_{H^2_\beta} \le \frac{K}{(1-|z_0|)^{2N^2+3N+2}}.$$

证明。 根据定理 2.5,

$$\|C_\varphi\|_{H^2_\beta} \le (1+\|M_z\|_{H^2_\beta})(1+\|M_\varphi\|_{H^2_{\beta-1}})\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_\beta}\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_{\beta-1}}\|D_{tm}^{-1}\|,$$

只需估计上述不等式右侧的各项。由引理 2.8 可知

$$\|M_z\|_{H^2_\beta} \le N+1 \quad\text{and}\quad \|M_{\frac{z_0-z}{1-\bar{z}_0z}}\|_{H^2_\beta} \le \frac{N+2}{(1-|z_0|)^{N+1}}.$$

根据命题 2.11，我们有

$$\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_\beta} = \|C_{B_0}\|_{H^2_\beta} \le \frac{K_2K_1^N\prod_{j=1}^{N}(j^3+5j^2+2j)}{(1-|z_0|)^{N(N+1)}}$$

and

$$\|X_{\mathfrak{F}}\|_{H^2_{\beta-1}} = \|C_{B_0}\|_{H^2_{\beta-1}} \le \frac{K_2K_1^N\prod_{j=1}^{N}(j^3+5j^2+2j)}{(1-|z_0|)^{N(N+1)}}.$$

注意到

$$\sqrt{1+|z_0|^2\sup_n(w_n^2+w_n^{-2})} \le \sqrt{\sup_n(1+w_n^2+w_n^{-2})} \le \sqrt{\sup_n(w_n+w_n^{-1})^2} \le N+2.$$

于是由引理 2.6,

$$\|D_{tm}^{-1}\| = \sup_n \|D_n^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{1+|z_0|^2 \sup_n (w_n^2 + w_n^{-2})}}{1-|z_0|^2} \leq \frac{N+2}{1-|z_0|^2} \leq \frac{N+2}{1-|z_0|}.$$

因此，若令

$$K = K_2^2 K_1^{2N} (N+2)^2 (N+3) \prod_{j=1}^{N} (j^3+5j^2+2j)^2,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi\|_{H_\beta^2} \leq & (1+\|M_z\|_{H_\beta^2})(1+\|M_\varphi\|_{H_{\beta-1}^2}) \|X_{\mathfrak{F}}\|_{H_\beta^2} \|X_{\mathfrak{F}}\|_{H_{\beta-1}^2} \|D_{tm}^{-1}\| \\
\leq & (N+2)\left(1+\frac{N+2}{(1-|z_0|)^{N+1}}\right)\left(\frac{K_2 K_1^N \prod_{j=1}^{N}(j^3+5j^2+2j)}{(1-|z_0|)^{N(N+1)}}\right)^2 \frac{N+2}{1-|z_0|} \\
\leq & \frac{K_2^2 K_1^{2N} (N+2)^2 (N+3) \prod_{j=1}^{N} (j^3+5j^2+2j)^2}{(1-|z_0|)^{2N^2+3N+2}} \\
\leq & \frac{K}{(1-|z_0|)^{2N^2+3N+2}}.
\end{aligned}$$

□

显然，若 H_β^2 是具有 M 次多项式增长的加权 Hardy 空间，其中 $M>0$, 则对于任意大于 M 的正整数 N， H_β^2 也是具有 N 次多项式增长的加权 Hardy 空间。因此，我们可以估计圆盘自同构诱导的复合算子在任意多项式增长加权 Hardy 空间上的范数。

3. 符号函数为圆盘自同构的复合算子的谱

本节研究符号函数为圆盘自同构、作用于多项式增长加权 Hardy 空间上的复合算子的谱。Aut($\mathbb{D}$) 中的每个元素在 $\mathbb{C}$ 中都有两个不动点（按重数计），因此可根据不动点的位置进行分类。

定义 3.1。对于 Aut$\mathbb{D}$ 中的元素 φ，

(1) 若φ 在 $\mathbb{D}$ 中有一个不动点，且在$\overline{\mathbb{D}}$的补集中有一个不动点，则称其为椭圆型；(2) 若 φ 在单位圆$\partial\mathbb{D}$ 上恰有一个不动点（重数 2），则称其为抛物型；(3) 若 φ 在 $\partial\mathbb{D}$上有两个不同的不动点，则称其为双曲型。

若存在一个圆盘自同构 τ，使得两个圆盘自同构 φ 和 ψ 满足

$$\psi = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}.$$

共形等价的主要优势在于不动点的位置。每个椭圆型圆盘自同构都共形等价于一个在 $\mathbb{D}$ 中不动点为 0 的自同构。

引理 3.2. 设 φ 是一个在 $\mathbb{D}$中不动点为 α 的椭圆型圆盘自同构。那么φ 与 $\psi(z) = \lambda z$ 共形等价，其中 $\lambda = \varphi'(\alpha)$。

这一结果广为人知，其证明可见于 [1] （其中的引理 2.1）。

每个抛物型圆盘自同构都与一个不动点（重数 2）为 1 的抛物型圆盘自同构共形等价。

引理 3.3 （其中的引理 4.1.2 [40]）。 设 φ 为一个抛物型圆盘自同构。那么φ 共形等价于以下两者之一

$$\psi_1(z) = \frac{(1+\mathbf{i})z - 1}{z + \mathbf{i} - 1} \quad or \quad \psi_2(z) = \frac{(1-\mathbf{i})z - 1}{z - \mathbf{i} - 1}.$$

注记 3.4。 经过直接计算可知

$$\psi_1(z) = \psi_2^{-1}(z),$$

且对任意正整数 n,

$$\psi_1^n(z) = \underbrace{\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_1}_{n}(z) = \frac{(n+\mathbf{i})z - n}{nz + \mathbf{i} - n},$$

and

$$\psi_2^n(z) = \underbrace{\psi_2 \circ \cdots \circ \psi_2}_{n}(z) = \frac{(n-\mathbf{i})z - n}{nz - \mathbf{i} - n}.$$

此外，对任意正整数 n， $\psi_1^n(z)$ 与 $\psi_1(z)$ 共形等价，且 $\psi_2^n(z)$ 与 $\psi_2(z)$ 共形等价。事实上，设

$$\tau_n(z) = \frac{(n+1)z + (n-1)}{(n-1)z + (n+1)},$$

then

$$\tau_n \circ \psi_1 \circ \tau_n^{-1} = \psi_1^n \quad \text{and} \quad \tau_n \circ \psi_2 \circ \tau_n^{-1} = \psi_2^n.$$

每个双曲型圆盘自同构都与某个圆盘自同构共形等价，后者在 $\partial\mathbb{D}$ 中的不动点为 1 和 -1。

引理 3.5 （ [38]中的定理 6）。 设 φ 是一个双曲型圆盘自同构。那么，φ 与下列对象共形等价:

$$\psi(z) = \frac{z + r}{1 + rz},$$

其中 $r = |\varphi(0)|$。

引理 3.6。 设 H_β^2 是一个多项式增长加权 *Hardy* 空间。若 φ 和 ψ 是共形等价的圆盘自同构，则它们在 H_β^2 上诱导的复合算子 C_φ 和 C_ψ 相似。

证明。 由于 φ 与 ψ 共形等价，存在一个圆盘自同构τ ，使得

$$\psi = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}.$$

由定理 2.5 可知， C_τ 是 H_β^2上的可逆有界算子。对于任意 $f \in H_\beta^2$，有

$$C_\tau^{-1} \circ C_\varphi \circ C_\tau(f) = C_{\tau^{-1}} \circ C_\varphi \circ C_\tau(f) = C_{\tau\circ\varphi\circ\tau^{-1}}(f) = C_\psi(f),$$

那么，作用在 H_β^2 上的 C_φ 和 C_ψ 相似。 □

定理3.7. 设 H^2_β 是一个多项式增长加权 *Hardy* 空间。若 φ 是一个在 $\mathbb{D}$ 中的不动点为 α 的椭圆型圆盘自同构，则作用在 H^2_β 上的 C_φ 是一个对角算子，因而是一个正规算子。此外，作用在 H^2_β 上的 C_φ 的谱如下

$$\sigma(C_\varphi) = \overline{\{(\varphi'(\alpha))^n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}}.$$

证明。根据引理 3.2，φ 与 $\psi(z) = \lambda z$共形等价，其中 $\lambda = \varphi'(\alpha)$。由于由圆盘自同构诱导的复合算子是作用于 H^2_β上的可逆有界算子，因此 C_φ 与作用于 H^2_β上的 C_ψ 相似。注意，复合算子 C_ψ 是一个对角算子，更准确地说，它在正交基 $\{\frac{z^n}{\beta_n}\}_{k=1}^\infty$下的矩阵表示如下

$$C_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda^2 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \lambda^n & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

于是，作用于 H^2_β 上的 C_φ 是一个对角算子，因而是正规算子。此外，

$$\sigma(C_\varphi) = \sigma(C_\psi) = \overline{\{(\varphi'(\alpha))^n;\ n = 0, 1, 2, \}}.$$

□

定理3.8。设 H^2_β 是一个多项式增长加权 *Hardy* 空间。若 φ 是一个抛物型圆盘自同构，则作用于 H^2_β 上的 C_φ 的谱为单位圆。

证明。设 H^2_β 是一个 N-多项式增长加权 Hardy 空间。根据引理 3.3、注 3.4 和引理 3.6，只需考察以下算子的谱

$$\psi(z) = \frac{(1+\mathbf{i})z - 1}{z + \mathbf{i} - 1} \quad \text{and} \quad \psi^{-1}(z) = \frac{(1-\mathbf{i})z - 1}{z - \mathbf{i} - 1}.$$

我们将分三步证明 C_ψ 在 H^2_β 上作用的谱是单位圆。

(1) C_ψ 在 H^2_β 上作用的谱包含于单位圆。

根据定理 2.12，对于任意正整数 n，存在一个正数 K，使得

$$\|C^n_\psi\|_{H^2_\beta} = \|C_{\psi^n}\|_{H^2_\beta} \leq \frac{K}{(1 - |\frac{n}{n+\mathbf{i}}|)^{2N^2+3N+2}},$$

and

$$\|C^{-n}_\psi\|_{H^2_\beta} = \|C_{\psi^{-n}}\|_{H^2_\beta} \leq \frac{K}{(1 - |\frac{n}{n-\mathbf{i}}|)^{2N^2+3N+2}}.$$

因此

$$\rho(C_\psi) = \lim_{n\to+\infty} \|C^n_\psi\|^{\frac{1}{n}}_{H^2_\beta} \leq 1,$$

and

$$\rho(C^{-1}_\psi) = \lim_{n\to+\infty} \|C^{-n}_\psi\|^{\frac{1}{n}}_{H^2_\beta} \leq 1.$$

因此，

$$\sigma(C_\psi) \subseteq \partial\mathbb{D}.$$

(2) C_ψ 在 H^2_β 上的谱要么是整个单位圆，要么是单点集 $\{1\}$。

由注 3.4 和引理 3.6 可知，对于任意正整数 n，C_ψ 在 H^2_β 上与 C^n_ψ相似，因此，

$$\sigma(C_\psi) = \sigma(C^n_\psi),$$

这意味着，如果 $\lambda \in \sigma(C_\psi)$，那么 $\lambda^n \in \sigma(C_\psi)$。

现在，假设 C_ψ 在 H^2_β 上的谱不等于整个单位圆。记$\lambda = \mathrm{e}^{t2\pi\mathbf{i}}$，$t \in \mathbb{R}$。那么，如果 t 是一个无理数，λ 不属于 $\sigma(C_\psi)$。因为如果 λ属于 $\sigma(C_\psi)$，那么

$$\sigma(C_\psi) \supseteq \overline{\{\lambda^n;\ n \in \mathbb{N}\}} = \partial\mathbb{D}.$$

如果 $\lambda \in \sigma(C_\psi)$ 且 $t = \frac{q}{p}$ 是有理数，其中 p 和 q 是两个互素正整数，那么

$$\{1, \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\cdot 2\pi\mathbf{i}}, \mathrm{e}^{\frac{2}{p}\cdot 2\pi\mathbf{i}}, \ldots, \mathrm{e}^{\frac{p-1}{p}\cdot 2\pi\mathbf{i}}\} \subseteq \sigma(C_\psi).$$

由于 $\sigma(C_\psi)$ 是 $\partial\mathbb{D}$ 的一个不含无理点的闭真子集，$\sigma(C_\psi)$ 是有限集，因此我们可以将 $\sigma(C_\psi)$ 写成如下形式

$$\sigma(C_\psi) = \{1, \mathrm{e}^{\frac{1}{p_1}\cdot 2\pi\mathbf{i}}, \ldots, \mathrm{e}^{\frac{p_1-1}{p_1}\cdot 2\pi\mathbf{i}}, \ldots, \mathrm{e}^{\frac{1}{p_M}\cdot 2\pi\mathbf{i}}, \ldots, \mathrm{e}^{\frac{p_M-1}{p_M}\cdot 2\pi\mathbf{i}}\},$$

其中 M 是正整数。此外，

$$\sigma(C_\psi) = \sigma(C^{p_1p_2\cdots p_M}_\psi) = \{\lambda^{p_1p_2\cdots p_M}; \lambda \in \sigma(C_\psi)\} = \{1\}.$$

因此，如果 $\sigma(C_\psi) \subsetneqq \partial\mathbb{D}$，则有 $\sigma(C_\psi) = \{1\}$。

（3） C_ψ 作用于 H^2_β 上的谱就是单位圆。

假设 $\sigma(C_\psi) = \{1\}$。我们还有 $\sigma(C_{\psi^{-1}}) = \sigma(C^{-1}_\psi) = \{1\}$，于是对于任意 $\epsilon > 0$，当 $m \in \mathbb{N}$ 足够大时，

$$\|C_{\psi^{-m}}\|_{H^2_\beta} = \|C^{-m}_\psi\|_{H^2_\beta} \leq (1+\epsilon)^m.$$

特别是，

$$\|\psi^{-2m}(z)\|_{H^2_\beta} = \|C_{\psi^{-2m}}(z)\|_{H^2_\beta} \leq (1+\epsilon)^{2m}.$$

考虑算子 $(C_\psi - \mathbf{I})^{4m}$，其中 I 是恒等算子。可以看出

$$(C_\psi - \mathbf{I})^{4m}(\psi^{-2m}) = \sum_{n=0}^{4m}(-1)^n C^n_{4m} \cdot C_{\psi^n}(\psi^{-2m}) = \sum_{n=0}^{4m}(-1)^n C^n_{4m} \cdot \psi^{n-2m}.$$

注意，对于任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi^k(0) = \frac{k}{k-\mathbf{i}} = \frac{k^2}{k^2+1} + \mathbf{i}\frac{k}{k^2+1} \quad \text{and} \quad \psi^{-k}(0) = \frac{k}{k+\mathbf{i}} = \frac{k^2}{k^2+1} - \mathbf{i}\frac{k}{k^2+1}.$$

那么，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}((C_\psi - \mathbf{I})^{4m}\psi^{-2m}(0)) =& \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{4m}(-1)^n C^n_{4m} \cdot \psi^{n-2m}(0)) \\ =& \sum_{n=0}^{4m}(-1)^n C^n_{4m} \cdot \frac{(n-2m)^2}{(n-2m)^2+1}.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{Re}((C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\psi^{-2m}(0))=(1-1)^{4m}-\mathrm{Re}((C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\psi^{-2m}(0))\\
=&\sum_{n=0}^{4m}(-1)^nC_{4m}^n-\sum_{n=0}^{4m}(-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{(n-2m)^2}{(n-2m)^2+1}\\
=&\sum_{n=0}^{4m}(-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{1}{(n-2m)^2+1}.
\end{aligned}$$

可以看出

$$\sum_{n=2m-1}^{2m+1}(-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{1}{(n-2m)^2+1}=-\frac{1}{2}C_{4m}^{2m-1}+C_{4m}^{2m}-\frac{1}{2}C_{4m}^{2m+1}>0,$$

并且对于 $k=1$、2、.....、$m-1$,

$$C_{4m}^{2k}\cdot\frac{1}{(2k-2m)^2+1}-C_{4m}^{2k-1}\cdot\frac{1}{(2k-1-2m)^2+1}>0,$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{2m-2}\left((-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{1}{(n-2m)^2+1}\right)\\
=&\sum_{k=1}^{m-1}\left(-C_{4m}^{2k-1}\cdot\frac{1}{(2k-1-2m)^2+1}+C_{4m}^{2k}\cdot\frac{1}{(2k-2m)^2+1}\right)\\
>&0.
\end{aligned}$$

此外，对于 $n=0$、$\mathbf{1}$、.....、$4m$,

$$(-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{1}{(n-2m)^2+1}=(-1)^{4m-n}C_{4m}^{4m-n}\cdot\frac{1}{((4m-n)-2m)^2+1},$$

因此

$$\sum_{n=2m+1}^{4m-1}\left((-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{1}{(n-2m)^2+1}\right)=\sum_{n=1}^{2m-2}\left((-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{1}{(n-2m)^2+1}\right)>0.$$

那么,

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{Re}((C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\psi^{-2m}(0))\\
=&\frac{1}{(2m)^2+1}+\left(\sum_{n=1}^{2m-2}+\sum_{n=2m-1}^{2m+1}+\sum_{n=2m+1}^{4m-1}\right)\left((-1)^nC_{4m}^n\cdot\frac{1}{(n-2m)^2+1}\right)\\
&+\frac{1}{(2m)^2+1}\\
\geq&\frac{2}{4m^2+1}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\left\|(C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\frac{\psi^{-2m}}{\|\psi^{-2m}\|_{H^2_\beta}}\right\|_{H^2_\beta}\\ \geq&\frac{1}{\|\psi^{-2m}\|_{H^2_\beta}}\cdot|(C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\psi^{-2m}(0)|\\ \geq&\frac{1}{\|\psi^{-2m}\|_{H^2_\beta}}\cdot|-\mathrm{Re}((C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\psi^{-2m}(0))|\\ \geq&\frac{1}{(1+\epsilon)^{2m}}\cdot\frac{2}{4m^2+1}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\rho(C_\psi-\mathbf{I})=&\lim_{m\to\infty}\|(C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\|_{H^2_\beta}^{\frac{1}{4m}}\\ \geq&\lim_{m\to\infty}\left\|(C_\psi-\mathbf{I})^{4m}\frac{\psi^{-2m}}{\|\psi^{-2m}\|_{H^2_\beta}}\right\|_{H^2_\beta}^{\frac{1}{4m}}\\ \geq&\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{(1+\epsilon)^{2m}}\cdot\frac{2}{4m^2+1}\right)^{\frac{1}{4m}}\\ =&\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}}\\ >&0,\end{aligned}$$

这与 $\sigma(C_\psi-\mathbf{I})=\{0\}$ 矛盾。

现在我们已经得到， C_ψ 作用于 H^2_β 时的谱是单位圆。此外,

$$\sigma(C_{\psi^{-1}})=\sigma(C_\psi^{-1})=\{\frac{1}{z};\ z\in\sigma(C_\psi)\}=\partial\mathbb{D}.$$

因此，对于任意抛物型圆盘自同构 φ， C_φ 作用于 H^2_β 时的谱是单位圆。

□

定理 3.9。 设 H^2_β 是由权重序列 $\beta=\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$诱导的多项式增长加权 *Hardy* 空间。若 φ 是双曲型圆盘自同构，则作用于 H^2_β 上的 C_φ 的谱包含于某个环域中。更确切地说,

$$\sigma(C_\varphi)\subseteq\{z\in\mathbb{C};\left(\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}\right)^{2N^2+3N+2}\leq|z|\leq\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{2N^2+3N+2}\}.$$

证明。 设 H^2_β 是具有 N-多项式增长的加权 Hardy 空间。根据引理 3.5，只需考虑

$$\psi(z)=\frac{z+r}{1+rz},$$

其中 $r=|\varphi(0)|$。经过直接计算可知

$$\psi^n(z)=\underbrace{\psi\circ\cdots\circ\psi}_{n}(z)=\frac{1+\frac{(1+r)^n-(1-r)^n}{(1+r)^n+(1-r)^n}}{1+\frac{(1+r)^n-(1-r)^n}{(1+r)^n+(1-r)^n}z},$$

那么，由定理 2.12，存在一个正数 K，使得

$$\|C_\psi^n\|_{H^2_\beta} = \|C_{\psi^n}\|_{H^2_\beta} \leq \frac{K}{\left(1-\frac{(1+r)^n-(1-r)^n}{(1+r)^n+(1-r)^n}\right)^{2N^2+3N+2}},$$

因此

$$\rho(C_\psi) = \lim_{n\to+\infty} \|C_\psi^n\|_{H^2_\beta}^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2N^2+3N+2}.$$

同样，我们还得到

$$\rho(C_\psi^{-1}) \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2N^2+3N+2}.$$

因此，

$$\sigma(C_\varphi) \subseteq \left\{z\in\mathbb{C}; \left(\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}\right)^{2N^2+3N+2} \leq |z| \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{2N^2+3N+2}\right\}.$$

□

4. 具有闭值域和 Fredholm 性的复合算子

本节将完整刻画作用在多项式增长加权 Hardy 空间上的、符号函数为闭单位圆盘上解析自映射的闭值域复合算子和 Fredholm 复合算子。

命题 4.1. 设 H^2_β 为多项式增长加权 *Hardy* 空间。设$\varphi:\overline{\mathbb{D}}\to\overline{\mathbb{D}}$ 为非平凡解析映射。若复合算子 C_φ 作用于H^2_β 时具有闭值域，则 $\mathbb{T}\subseteq\varphi(\overline{\mathbb{D}})$。

证明。 设 H^2_β 是具有 N-多项式增长的加权 Hardy 空间。若复合算子 C_φ 作用于 H^2_β 时具有闭值域，则存在一个正数 c，使得

$$\|C_\varphi(h)\|_{H^2_\beta} \geq c\|h\|_{H^2_\beta}, \qquad \text{for any } h\in H^2_\beta. \tag{4.1}$$

假设 $\varphi(\overline{\mathbb{D}})$不包含单位圆 $\mathbb{T}$。那么存在一点$\xi\in\mathbb{T}$ 和一个正数 $\epsilon<\frac{1}{2}$，使得

$$B(\xi,\epsilon)\bigcap\varphi(\overline{\mathbb{D}})=\emptyset,$$

其中 $B(\xi,\epsilon)=\{z\in\mathbb{C}; \ |z-\xi|<\epsilon\}$。此外，我们可以选取一个正数 $t\in(0,1)$，使得位于单位圆盘内、经过点 $t\xi$ 且与单位圆正交的弧 J 包含于 $B(\xi,\epsilon)$中。

令 $\eta(z)=\frac{1+z}{1-z}$ 为从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到右半平面 $\mathbb{H}_r$ 的映射，并令 $\varsigma(z)=\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}\cdot z$ 为从 $\mathbb{H}_r$ 到其自身的映射。定义 $\tau:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为

$$\tau=\eta^{-1}\circ\varsigma\circ\eta.$$

那么， η 是一个不动点为 $-\xi$ 的圆盘自同构，并将 J 映射到 $-J$，其中 $-J=\{-z; \ z\in J\}$。此外， η 将由 J 和单位圆上经过 $-\xi$ 的弧所围成的区域映射到由 $-J$ 和单位圆上经过 $-\xi$ 的弧所围成的区域（见图 1）。

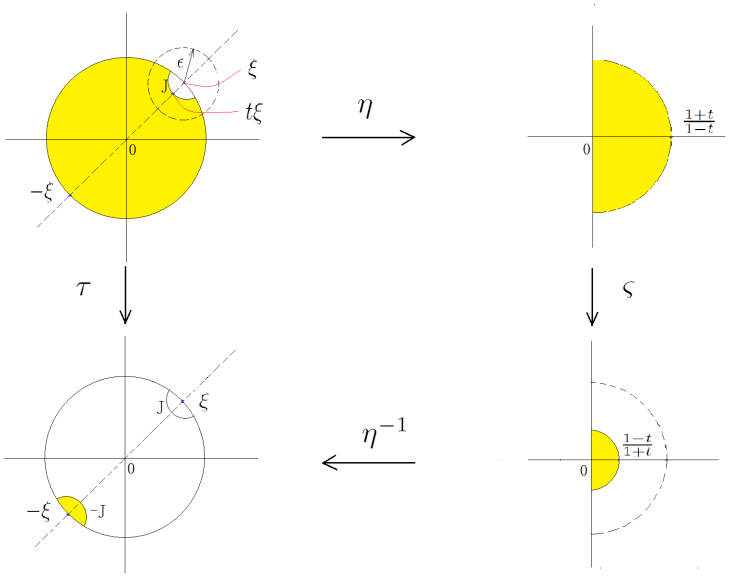

图 1. 圆盘自同构 τ

设 $g(z) = z + \xi$。考虑由下式定义的解析函数 f： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$$f(z) = g \circ \tau(z).$$

那么， $f \circ \varphi$ 将单位圆盘映入圆盘 $B(0, \epsilon)$（更准确地说， $f(\mathbb{D})$包含在黄色区域内，如图 2 所示。）

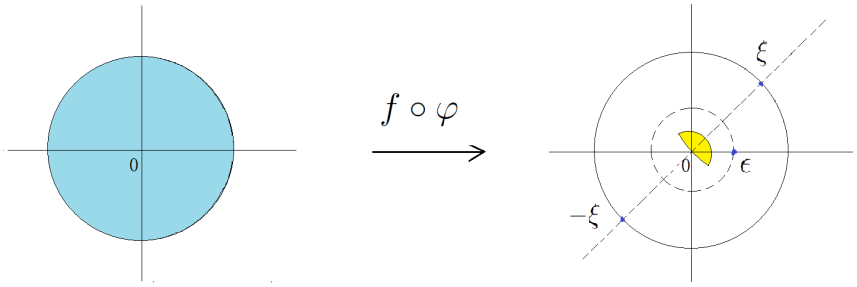

图 2. 解析函数 $f \circ \varphi$

现在令 $f_k(z) = (f(z))^k$，其中 $k = 1$、2、.....。记

$$F = C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad F_k(z) = (F(z))^k$$

and

$$C_\varphi(f_k(z)) = F_k = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{F_k}(n) z^n.$$

假设 φ 在圆盘 $B(0,R)$ 上解析，其中 $R>1$ 为某个确定值。那么，每个 F_k 在 $B(0,R)$ 上也解析。

由于 $f_k(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上的最大模小于 ϵ^k，由柯西不等式可得

$$|\widehat{F_k}(n)| \leq \frac{\epsilon^k}{R^n},$$

因此，当 $k\to\infty$ 时，

$$\|C_\varphi(f_k)\|_{H^2_\beta} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{F_k}(n)|^2\beta_n^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^{2k}\beta_n^2}{R^{2n}}} = \epsilon^k\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n^2}{R^{2n}}} \to 0.$$

注意，对每个 k,

$$\|(g(z))^k\|_{H^2_\beta} \geq |(g(0))^k| = |\xi^k| = 1.$$

此外，根据定理 2.1，我们已知 C_τ 是作用于 H^2_β 上的有界可逆算子，即存在正数 a 和 A，使得

$$a\|h\|_{H^2_\beta} \leq \|C_\tau(h)\|_{H^2_\beta} \leq A\|h\|_{H^2_\beta}, \qquad \text{for any } h\in H^2_\beta.$$

那么，对所有 k,

$$\|f_k\|_{H^2_\beta} = \|C_\tau((g(z))^k)\|_{H^2_\beta} \geq a\|(g(z))^k\|_{H^2_\beta} \geq a > 0.$$

这与不等式 (4.1) 矛盾。 □

为了继续我们的研究，我们需要一些与零维空间有关的结果（参见 [25]）。

定义 4.2 （ [25] 第 10 页中的定义 II 1）。若可分度量空间 X 中的点 p 具有任意小且边界为空的邻域，则称 p 在该点处的维数为零。若非空空间 X 中的每个点处的维数均为零，则称该空间为零维空间。

定理 4.3。以下所考虑的空间均为可分度量空间。于是

(1) 零维这一性质是一个拓扑不变量；也就是说，若空间 X 同胚于一个零维空间，则 X 也是零维的。（第 10 页中的 (A)） (2) 零维空间的任意非空子集都是零维的。（第 13 页中的定理 II 1） (3) 由可数个零维闭子集之和构成的空间本身也是零维的。（第 18 页中的定理 II 2） (4) 任何不包含区间的实数集都是零维的。（第 11 页中的例 II 4） (5) 连通的零维空间仅包含一个点。（第 15 页中的 (C)）

定理4.4。设 H^2_β 是由权重序列 $\beta=\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$诱导的多项式增长加权 *Hardy* 空间。设 $\varphi\colon\ \overline{\mathbb{D}}\to\overline{\mathbb{D}}$ 是一个非平凡解析映射。则以下命题等价。

(1) 复合算子 C_φ 是半*Fredholm*。(2) 复合算子 C_φ 具有闭值域。(3) $\mathbb{T}\subseteq\varphi(\overline{\mathbb{D}})$。(4) $\varphi(\mathbb{T})$ 在 $\mathbb{T}$中包含一段弧。(5) φ 是有限 *Blaschke* 乘积。

证明。显然，(1) 推出 (2)，而 (3) 推出 (4)。由命题 4.1 可知，(2) 推出 (3)。由定理 2.3 可知，(5) 推出 (1)。更确切地说，符号函数为阶 m 的有限 Blaschke 乘积的复合算子 C_φ 是一个具有闭值域的单射算子；若$m = 1$，其余维为 1；若 $m > 1$，其余维为无穷。因此，只需证明 (4) 推出 (5)。

假设 $\varphi(\mathbb{T})$ 在 $\mathbb{T}$ 中包含一段弧。由于 φ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上解析，我们可以写成 $\varphi = BF$，其中 B 是有限 Blaschke 乘积，而 F 是一个外函数，它也在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上解析（例如参见 [19] ）。注意，对所有 $\xi \in \mathbb{T}$，都有 $|B(\xi)| = 1$。于是，$F(\mathbb{T})$ 在 $\mathbb{T}$ 中包含一段闭弧，记为 J_1。显然， $F^{-1}(J_1)$ 是 $\mathbb{T}$ 中的一个闭子集。

现在我们断言， $F^{-1}(J_1)$ 是 $\mathbb{T}$ 中一个内部非空的闭子集。假设闭集 $F^{-1}(J_1)$ 在 $\mathbb{T}$ 中的内部为空。那么根据定理 4.3， $F^{-1}(J_1)$ 同胚于一个不包含任何区间的实数集合，因此是零维的。由于 $F(z)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上解析，对于某个 $R > 1$， F 在圆盘 $B(0, R)$ 上解析。为避免混淆，令 F_R 表示 $B(0, R)$ 上的解析函数，使得对于任意 $z \in \overline{\mathbb{D}}$， $F_R(z) = F(z)$。注意， $F_R'(z)$（或写作 $F'(z)$）在 $\mathbb{T}$ 上至多有有限个零点。于是我们可以选取 J_1 的一个子弧 J_2，使得对于任意 $\lambda \in F^{-1}(J_2)$， $F'(\lambda) \neq 0$。此外，可以选取一点 $\xi_0 \in J_2$ ，使得

$$\mathrm{Card}\{F^{-1}(\xi_0)\} = \mathrm{Card}\{\lambda \in \mathbb{T};\ F(\lambda) = \xi_0\} = \max_{\xi \in J_2} \mathrm{Card}\{\lambda \in \mathbb{T};\ F(\lambda) = \xi\}.$$

记 $F^{-1}(\xi_0) = \{\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n_0.\}$，其中 $n_0 =$Card$\{\lambda \in \mathbb{T};\ F(\lambda) = \xi_0\}$。由 $F_R'(\lambda_j) \neq 0$可知，对于 $j = 1, 2, \ldots, n_0$，存在 ξ_0 的一个邻域 V以及 λ_j 的一个邻域 U_j ，使得对于所有 j ， F_R 在 U_j上的限制是到 V的解析同胚。记 J_3 为 $J_2 \bigcap V$中的一个闭弧，并且记 $A_j = F^{-1}(J_3) \bigcap U_j$，其中 $j = 1, 2, \ldots, n_0$。根据定理 4.3，每个 A_j都是零维的，因此

$$J_3 = F_R(F^{-1}(J_3)) = F_R(\bigcup_{j=1}^{n_0} A_j) = \bigcup_{j=1}^{n_0} F_R(A_j)$$

也是零维的。然而，由定理 4.3 中的 (5) 可知，弧 J_3 不是零维的。这就产生了矛盾。

因此， $F^{-1}(J_1)$ 是 $\mathbb{T}$ 中具有非空内部的闭子集。此外，存在一条弧 J属于 $F^{-1}(J_1) \subseteq \mathbb{T}$，于是 $F(J) = \widetilde{J}$是 $J_1 \subseteq \mathbb{T}$ 中的一条子弧。

此外， $F(\mathbb{D})$ 包含于 $\mathbb{D}$ 中，且不包含零。然后根据~施瓦茨反射原理，可以得到定义在区域 $\Omega = J \bigcup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{T})$ 上的解析函数 F，它是 F 在 $\mathbb{D}$ 上的解析延拓。

~由于 F 在$\overline{\mathbb{D}}$ 上解析，并且在 $\mathbb{D}$上与 F 一致，根据解析函数的唯一性， F 可以解析延拓为$\mathbb{C}$上的整函数。此外，可以看出 $F(\overline{\mathbb{D}})$也不包含零点。若 $0 \in F(\overline{\mathbb{D}})$，则存在一个点序列 $z_n \in \mathbb{D}$ 趋近于某个点 $\xi \in \mathbb{T}$，使得 $F(z_n) \to 0$。根据施瓦茨反射原理，我们有 $\widetilde{F}(\frac{1}{z_n}) \to \infty$。然而，由于 $\frac{1}{z_n} \to \xi \in \mathbb{T}$，这是不可能发生的。于是， F 可以解析延拓为有界整函数，因此 F 必为模为 1 的常函数。因此， φ 就是一个有限 Blaschke 乘积。□

定理4.5。 </style}设 为一个多项式增长加权 Hardy 空间。设： $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ 为一个解析映射。则作用于 H^2_β 上的复合算子 C_φ 是 *Fredholm* 的，当且仅当 φ 是一个圆盘自同构。

证明。 注意，对于阶为 m 的有限 Blaschke 乘积 B，由定理 2.3 和注释2.4可知，复合算子 C_B 有限余维数当且仅当阶 m 等于 1。于是，由定理4.4可知，复合算子 C_φ 是 Fredholm 算子当且仅当 φ 是圆盘自同构。□

致谢

第二作者受到国家自然科学基金委员会资助（项目编号11831006、项目编号11920101001和项目编号11771117）。作者感谢 Guangfu Cao 教授和 Maofa Wang 教授就本文进行的诸多有益讨论。

参考文献

[1] R. Allen, T. Le, M. Pons, 《带自同构符号函数的复合算子的谱》, Involve: a Journal of Mathematics, 9(5)（2016）: 813-829。[2] J. R. Akeroyd, S. R. Fulmer, 《加权 Bergman 空间上的闭值域复合算子》, Integr. Equ. Oper. Theory, 72（2012）: 103-114。[3] P. S. Bourdon, 《Hardy 空间上的 Fredholm 乘法算子与复合算子》, Integr. Equ. Oper. Theory, 13（1990）: 607-610。[4] P. S. Bourdon, E. E. Fry, C. Hammond, C. H. Spofford, 《线性分式复合算子的范数》, T. Am. Math. Soc., 356（2004）: 2459-2480。[5] G. F. Cao, S. H. Sun, 《多变量 Hp空间上的复合算子》, Acta Math. Sin., 13（1997）: 281-288。[6] G. F. Cao, 《一般域上的复合算子与 Toeplitz算子》, Tohoku Math. J., 57（2005）: 11-22。[7] G. F. Cao, L. He, K. H. Zhu, 《Fredholm 复合算子与真全纯映射》, Bull. London Math. Soc., 51（2019）: 1104-1112。[8] G. F. Cao, L. He, J. Li, 《全纯函数 Banach 空间上的评价函数与复合算子》, 预印本, 参见 arXiv: 2211.12236。[9] G. F. Cao, L. He, 《Dirichlet 空间上的闭值域复合算子》, 预印本。[10] J. A. Cima, J. Thompson, W. R. Wogen, 《关于复合算子的若干性质》, 《印第安纳大学数学杂志》, 24（1974）: 215-220。[11] J. A. Cima, 《关于复合算子的一个定理》, 《数学讲义》, 604, 施普林格出版社（1976）: 21-24。[12] C. C. Cowen, 《Hadamard乘法在加权 Hardy 空间算子中的应用》, Linear Alg. Appl. 133（1990）: 21-32。[13] C. C. Cowen, B. D. MacCluer, 《解析函数空间上的复合算子》, 《高等数学研究》, CRC出版社, 佛罗里达州博卡拉顿, 1995。[14] E. Fricain, J. Mashreghi, 《关于有限 Blaschke 乘积的一种刻画》, Complex Var. Elliptic Equ. 59(3)（2014）: 362-368。[15] P. Galindo, T. Gamelin 和 M. Lindstrom, 《Banach 空间上解析函数代数的 Fredholm 复合算子》, 《函数分析杂志》, 258（2010）: 1504-1512。[16] E. A. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez, 《谱在复合算子循环行为中的作用》, 《美国数学会回忆录》167（791）（2004）, x+81。[17] E. A. Gallardo-Gutiérrez, J. R. Partington, 《加权 Hardy 空间上复合算子的范数》, Israel J. Math. 196(1)（2013）: 273-283。[18] E. A. Gallardo-Gutiérrez, R. Schroderus, 《加权 Dirichlet 空间上线性分式复合算子的谱》, 《函数分析杂志》, 271（2016）: 720-745。[19] J. B. Garnett, 《有界解析函数》, 学术出版社, 纽约, 1981。[20] M. Gromov, 《多项式增长群与扩张映射》, Publ. Math-Paris, 53(1)（1981）: 53-78。[21] C. Hammond, 《带线性分式符号函数的复合算子的范数》, Acta Sci. Math., 69（2003）: 813-829。

[22] C. Hammond, L. J. Patton, 《Hardy 空间与加权 Bergman 空间上复合算子的范数不等式》, 载于《算子理论专题》第1卷《算子、矩阵与解析函数》, 《算子理论：进展与应用》第202卷, Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2010年，第265-272页。[23] W. M. Higdon, 《由线性分式映射诱导的 Dirichlet 空间复合算子的谱》, 《函数分析杂志》, 220(1)（2005）：55-75。[24] B. Hou, C. Jiang, 《解析函数的解析自同构群与相似表示》, 预印本，参见 arXiv：2209.03852。[25] W. Hurewicz, H. Wallman, 《维数理论》, 普林斯顿数学丛书第4卷，普林斯顿大学出版社，1941年。[26] P. R. Hurst, 《不同加权 Hardy 空间上的复合算子之间的关系》, 《巴塞尔数学档案》, 68(6)（1997）：503-513。[27] H. Kamowitz, 《Hp 空间上复合算子的谱》, 《函数分析杂志》, 18（1975）：132-150。[28] H. Kamowitz, 《圆盘代数上一类算子的谱》, 《印第安纳大学数学杂志》, 27(4)（1978）：581-610。[29] T. L. Kriete, B. D. MacCluer, 《大型加权 Bergman 空间上的复合算子》, Indiana U. Math. J., 41（1992）：755-788。[30] A. Kumar, 《Fredholm 复合算子》, 《美国数学会会刊》, 79（1980）：233-236。[31] B. MacCluer, 《Fredholm 复合算子》, 《美国数学会会刊》, 125（1997）, 163-166。[32] D. H. Luecking, 《Bergman 空间上的不等式》, 《伊利诺伊数学杂志》, 25（1981）：1-11。[33] D. H. Luecking, 《加权 Bergman 空间上的闭值域限制算子》, 《太平洋数学杂志》, 110(1)（1984）：145-160。[34] D. H. Luecking, 《Bergman 空间函数及其导数的正向与反向 Carleson 不等式》, 《美国数学杂志》, 107（1985）：85-111。[35] D. H. Luecking, 《Dirichlet 空间上具有闭值域的有界复合算子》, 《美国数学会会刊》, 128(4)（1999）：1109-1116。[36] B. D. MacCluer, X. Zeng, N. Zorboska, 《小型加权 Hardy 空间上的复合算子》, 《伊利诺伊数学杂志》, 40（1996）：662-677。[37] N. K. Nikol'skiĭ, 《移位算子论》, 施普林格·柏林·海德堡, 1986年。[38] E. A. Nordgren, 《复合算子》, 《加拿大数学杂志》20（1968）：442-449。[39] J. Pau, P. A. Pérez, 《加权 Dirichlet 空间上的复合算子》, 《数学分析及其应用杂志》, 401(2)（2013）：682-694。[40] M. A. Pons, 《Besov 空间与 Dirichlet 型空间上的复合算子》, 博士论文, 弗吉尼亚大学，2007年。[41] M. A. Pons, 《复合算子的谱与 Calderón 复插值》, 载于"算子理论专题", 第1卷《算子、矩阵与解析函数》, 见：《算子理论：进展与应用》第202卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2010年，第451-467页。[42] I. Singer, 《Banach 空间中的基 I》, 施普林格出版社，纽约, 1970年。[43] N. Zorboska, 《$\mathcal{S}_a$ 空间上的复合算子》, 《印第安纳大学数学杂志》, 39（1990）：847-857。[44] N. Zorboska, 《具有闭值域的复合算子》, T. Am. Math. Soc., 344（1994）：791-801。[45] N. Zorboska, 《加权 Dirichlet 空间上的复合算子》, P. Am. Math. Soc., 126（1998）：2013-2023。Bingzhe Hou，吉林大学数学学院，130012，中华人民共和国长春电子邮箱：houbz@jlu.edu.cn

CHUNLAN JIANG，数学系，河北师范大学，050016，中华人民共和国石家庄电子邮件地址：cljiang@hebtu.edu.cn