arXiv:2302.08306v2 [math.RA] 9 Mar 2024

# 幂零莱布尼茨代数与李架的同位

GianmarcoLa Rosa†, Manuel Mancini†巴勒莫大学数学与信息学系,
意大利巴勒莫 Via Archirafi 34，邮编 90123 gianmarco.larosa@unipa.it,
ORCID：0000-0003-1047-5993 manuel.mancini@unipa.it，ORCID：
0000-0003-2142-6193

Gábor P. Nagy†
布达佩斯科技经济大学代数与几何系，匈牙利布达佩斯 Műegyetem rkp 3，邮编 H-1111

塞格德大学 Bolyai 研究所，匈牙利塞格德 Aradi Vértanúk
Tere 1，邮编 H-6720 nagyg@math.u-szeged.hu，ORCID：
0000-0002-9558-4197

**摘要**

本文研究二步幂零代数的同位类。我们证明，每个维数为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=1$ 的幂零莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$，都同位于海森堡李代数或海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$，其中 $J_1$ 是特征值为 1 的 $n\times n$ 若尔当块。我们还证明，两个这样的代数同位，当且仅当与之积分的李架同位。这给出了切空间在单位元处为交换子理想一维的幂零莱布尼茨代数的李架分类。最后，我们为莱布尼茨代数和李架引入了新的同位不变量。

关键词：莱布尼茨代数、李架、coquecigrue 问题、同位。2020 年数学主题分类：17A32、17A36、17B30、20M99、22A30。

†前两位作者获得巴勒莫大学、“代数与几何结构及其应用国家小组”（GNSAGA – INdAM）、国家复苏与韧性计划（NRRP）第四使命第二组成部分投资1.1项下的资助。该资助来自意大利大学与研究部（MUR）于2022年9月14日发布的第1409号招标，由欧盟 NextGenerationEU 资助，项目名称为**逻辑、计算与自然过程的量子模型**（**QM4NP**）– CUP **B53D23030160001**– 资助分配法令第1371号，由意大利大学与研究部（MUR）于2023年9月1日通过；此外还获得**可持续发展决策框架**（**SDF**）研究项目资助 – CUP **B79J23000540005**– 资助分配法令第5486号，于2023年8月4日通过。第三位作者获得 NKFIH-OTKA资助项目 SNN 132625，以及布达佩斯科技经济大学卓越计划 TKP2021-NVA-02 的资助。

# 引言

莱布尼茨代数最初由 J.-L. Loday 于 [20] 提出，是李代数的一种非反对称版本。此前，A. Blokh 曾研究过这类代数结构，并将其称为 D-代数 [7]，因为它们与导子有着密切联系。莱布尼茨代数在数学和物理学的不同领域中发挥着重要作用。

李代数的许多结果也在莱布尼茨代数的框架下得以建立。其中之一是 *Levi*分解 （见 [4]），它指出，对于域 $\mathbb{F}$上满足 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$的每个有限维莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$，其都是一个可解理想（ $\mathfrak{g}$的根基 ）与一个半单子代数的半直积，而后者是一个李代数。这说明了李代数和莱布尼茨代数分类问题的重要性；自20世纪以来，人们一直在研究这一问题（例如仅举几例，见 [5], [6], [3], [8], [22], [11] 和 [10], ）。然而，一般来说，给定两个莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$，很难检验 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是否同构。正如我们将看到的，在某些情况下，验证它们之间是否存在一个同位 会更加容易，即是否存在一个线性同构三元组 $(f, g, h) : \mathfrak{g} \leftrightarrows \mathfrak{h}$，使得对于任意 $x, y \in \mathfrak{g}$，均有 $[f(x)\ g(y)]_{\mathfrak{h}} = h([x, y]_{\mathfrak{g}})$。

在域 $\mathbb{F}$ 上的 [18] 二步幂零代数中，当 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ 时，已完成分类并将其积分为李架。然而，确定这些代数的同构类这一问题仍未解决，即使在 $\mathbb{F}$ 为复数域的情况下也是如此。

本文旨在运用 同位 这一概念。该概念由 A. A. Albert 于 1942年 提出（见 [1], [2] 和 [16]），用于对非结合代数进行分类；随后又在 [14] 和 [15] 中用于对有限域上的丝状李代数进行分类。借助这一概念，我们将确定具有一维交换子理想的幂零莱布尼茨代数的完整分类。我们证明，两个此类代数同位，当且仅当与之积分的李架同位。利用这一结果，我们能够确定其单位元处切空间为具有一维交换子理想的幂零莱布尼茨代数的李架的同位类。

在第1节和第2节中，我们概述了关于二步幂零代数[18, 19]的分类与积分的主要结果。我们回顾一下，在同构意义下，交换子理想为一维的不可分解幂零莱布尼茨代数只有三类，即海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{A}$，其由维数 $2n+1$ 和典范形矩阵 $A$ 参数化；克罗内克代数 *Kronecker* 代数 $\mathfrak{k}_n$ 和迪厄多内代数 *Dieudonné* 代数 $\mathfrak{d}_n$，这两类都仅由维数参数化。我们还回顾了积分二步幂零代数的李架的构造。

在第3节中，我们给出莱布尼茨代数和李架的同位定义。我们回顾一下，每个同位都同构于一种所谓的主同位，并给出海森堡李代数 $\mathfrak{h}_3$ 与幂零非李莱布尼茨代数之间同位的显式构造。

在第4节中，我们为莱布尼茨代数和李架引入了新的同位不变量，并证明每个不可分解幂零莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$

其维数为$_{\mathbb{F}}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=1$ 的要么同构于海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$，其中$J_1$ 是特征值为 1 的 $n\times n$ 若尔当块；要么与海森堡李代数 $\mathfrak{h}_{2n+1}$同位。最后，我们证明，如果 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是实莱布尼茨代数，且维数分别为$_{\mathbb{R}}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=$和$_{\mathbb{R}}[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=1$，而 $X$、$Y$是与它们积分的李架，那么 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}$ 同位，当且仅当 $X$ 与 $Y$同位。这意味着，与维数为$_{\mathbb{R}}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=1$的莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$积分的李架 $X$，要么同构于海森堡架 $R_{2n+1}^{J_1}$，要么与海森堡李群的共轭作用 Conj($H_{2n+1}$)同位。

# 1 预备知识

我们假设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 $\mathrm{char}(\mathbb{F})\neq 2$。关于一般理论，请参阅 [4]和 [20]。

**定义 1.1.** 设 $\mathbb{F}$ 上的一个左莱布尼茨代数 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 $\mathfrak{g}$，其上赋有一个双线性映射（称为 *commutator* 或 *bracket*） $[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，并满足左莱布尼茨恒等式

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]],\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

同样，利用右莱布尼茨恒等式，可以定义右莱布尼茨代数

$$[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]],\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

既是左莱布尼茨代数又是右莱布尼茨代数的莱布尼茨代数称为对称莱布尼茨代数。从现在起，我们假设 $\dim_{\mathbb{F}}\mathfrak{g}<\infty$。

每个李代数都是莱布尼茨代数，而每个交换子为斜对称的莱布尼茨代数都是李代数。$\mathfrak{g}$的莱布尼茨核

$$\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})=\langle [x,x]\,|\,x\in\mathfrak{g}\rangle$$

是 $\mathfrak{g}$ 的最小双边理想，使得 $\mathfrak{g}/\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$ 是一个李代数。这定义了 [21] 上李代数范畴 **Lie** 与 $\mathbb{F}$ 上莱布尼茨代数范畴**Leib** 之间的一个伴随。满嵌入$i$: **Lie** $\to$ **Leib** 的左伴随是 $\pi$: **Leib** $\to$ **Lie**，定义为 $\pi(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}/\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$。

对于莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$，其左中心和右中心分别为

$$\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,[x,\mathfrak{g}]=0\},\ \mathrm{Z}_r(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,[\mathfrak{g},x]=0\}$$

当 $\mathfrak{g}$ 是李代数时，两者重合。$\mathfrak{g}$ 的中心是 $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})=\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})\cap\mathrm{Z}_r(\mathfrak{g})$。我们回顾一下，一般而言，$\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$ 是左莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 的一个理想，而右中心甚至不是一个子代数。此外，$\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})\subseteq\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$，因为

$$[[x,x],y]=[x,[x,y]]-[x,[x,y]]=0,\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

现在回顾可解莱布尼茨代数和幂零莱布尼茨代数的定义。

**定义 1.2.** 设 $\mathfrak{g}$是一个定义在 $\mathbb{F}$ 上的左莱布尼茨代数，并设

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k], \quad \forall k \geq 0$$

是 $\mathfrak{g}$的导出级数。 $\mathfrak{g}$ 是 $n$步可解的，如果 $\mathfrak{g}^{n-1} \neq 0$ 且 $\mathfrak{g}^n = 0$。

**定义1.3**。 设 $\mathfrak{g}$是域 $\mathbb{F}$ 上的左莱布尼茨代数，并设

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k)}], \quad \forall k \geq 0$$

是 $\mathfrak{g}$的下中心列。 $\mathfrak{g}$ 是 $n$步幂零的，如果 $\mathfrak{g}^{(n-1)} \neq 0$ 且 $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$。

当 $n = 2$时，二步幂零莱布尼茨代数属于不同的非结合代数簇，例如结合代数、交错代数和Zinbiel代数。因此，我们将其称为二步幂零代数，并有如下结果。

**命题1.4**。 *[18]* 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 $n$步幂零莱布尼茨代数。

*(i)* 若 $n = 2$，则 $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ 且 $\mathfrak{g}$ 是一个对称莱布尼茨代数；

*(ii)* 若维数$_{\mathbb{F}}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1$，则 $n = 2$。

具有一维交换子理想的幂零莱布尼茨代数已在 [18]中分类。文中证明，除同构外，具有一维交换子理想的不可分解幂零莱布尼茨代数只有以下三类。

**定义1.5**。 *[18]*令 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 为首一不可约多项式。令$k \in \mathbb{N}$ ，并令 $A = (a_{ij})_{i,\ j}$ 为 $f(x)^k$的伴随矩阵。海森堡莱布尼茨代数$\mathfrak{l}^A_{2n+1}$是一个$2n+1()$维莱布尼茨代数，其基为$\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, z\}$，莱布尼茨括号定义如下：

$$[e_i, f_j] = (\delta_{ij} + a_{ij})z, \ [f_j, e_i] = (-\delta_{ij} + a_{ij})z, \ \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

若 $A$ 是零矩阵，则对任意 $i$、 $j = 1$、.....、 $n$，可得海森堡代数 $\mathfrak{h}_{2n+1}$，即具有 $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h$的（$2n+1$）–维李代数，其中 $\delta_{ij}$ 为克罗内克δ。

**定义1.6**。 *[18]* 设 $n \in \mathbb{N}$。克罗内克莱布尼茨代数 $\mathfrak{k}_n$ 是一个$(2n+1)$维莱布尼茨代数，其基为 $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, z\}$，莱布尼茨括号定义如下：

$$\begin{aligned}
&[e_i, f_i] = [f_i, e_i] = z, \ \forall i = 1, \ldots, n \\
&[e_i, f_{i-1}] = z, [f_{i-1}, e_i] = -z, \ \forall i = 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

**定义1.7**。 *[18]*设 $n \in \mathbb{N}$。迪厄多内 莱布尼茨代数 $\mathfrak{d}_n$ 是一个$(2n+2)$维莱布尼茨代数，其基为 $\{e_1, \ldots, e_{2n+1}, z\}$，莱布尼茨括号定义如下：

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_{n+2}] = z, \\
&[e_i, e_{n+i}] = [e_i, e_{n+i+1}] = z, \ \forall i = 2, \ldots, n, \\
&[e_{n+1}, e_{2n+1}] = z, \\
&[e_i, e_{i-n}] = z, \ [e_i, e_{i-n-1}] = -z, \ \forall i = n+2, \ldots, 2n+1.
\end{aligned}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，克罗内克代数 $\mathfrak{k}_n$ 和迪厄多内代数 $\mathfrak{d}_n$都不是李代数，并且在同构意义下唯一。

现在我们回顾域$\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{C}$或 $\mathbb{R}$时 Heisenberg代数的描述。

## 1.1 复海森堡代数

设 $n \in \mathbb{N}$，且 $f(x) = x - a \in \mathbb{C}[x]$。那么， $f(x)^n$的伴随矩阵 $A$与特征值为 $a$ 的 $n \times n$ 若尔当块 $J_a$ 相似。因此 $\mathfrak{l}_{2n+1}^A \cong \mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}$，非平凡交换子为

$$\begin{aligned}&[e_i, f_i] = (1+a)h, \quad [f_i, e_i] = (-1+a)h, \quad \forall i = 1, \dots, n,\\ &[e_i, f_{i-1}] = [f_{i-1}, e_i] = h, \quad \forall i = 2, \dots, n,\end{aligned}$$

其中 $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, h\}$ 是$\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}$的一组基。可以验证

$$\mathrm{Z}_l(\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a})) = \mathrm{Z}_r(\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a})) = [\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}, \mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}] = \mathbb{F}h, \quad \forall a \neq \pm 1$$

$$\mathrm{Z}_l(\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}) = \mathrm{Z}_r(\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_{-1}}) = \langle f_n, h\rangle,$$
$$\mathrm{Z}_r(\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}) = \mathrm{Z}_l(\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_{-1}}) = \langle e_1, h\rangle.$$

并且有如下结论。

**命题 1.8**。 *[18]* 设 $a \in \mathbb{C}$。海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}$ 和 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_{-a}}$ 同构。

我们注意到，确定复 Heisenberg代数的同构类这一问题仍未解决，但当 $n = 1$ 时，命题 1.8 的逆命题也成立。

**命题 1.9**。 *[18]* 设 $a, a' \in \mathbb{C}$。那么， $\mathfrak{l}_3^a$ 与 $\mathfrak{l}_3^{a'}$ 同构，当且仅当 $a' = \pm a$。

在定理 4.4 中，我们将证明，对于任意 $a \neq \pm 1$，存在一个同位，连接 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}$ 与 Heisenberg 李代数 $\mathfrak{h}_{2n+1}$。

## 1.2 实 Heisenberg代数

设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$是一个不可约首一多项式。若 $f(x) = x - a$，则$\mathfrak{l}_{2n+1}^A \cong \mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}$，与复数情形一样。因此我们假设 $f(x) = x^2 + bx + c$，其中 $b^2 - 4c < 0$。

设 $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ 是 $f(x)$ 的一个根。那么 $f(x) = (x - z)(x - \bar{z})$，且 $f(x)^n$ 的伴随矩阵 $A$ 与实分块矩阵 $2n \times 2n$ 相似。

$$J_R = \begin{pmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ I_2 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_2 & R \end{pmatrix}, \quad \text{where } R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

是复数 $z$ 的实化。因此 $\mathfrak{l}^{A}_{4n+1} \cong \mathfrak{l}^{J_R}_{4n+1}$，当 $n=1$ 时，我们有如下结果。

**命题 1.10**。*[18]* 设 $f(x)$ $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ 是二次不可约首一多项式。设 $z, z' \in \mathbb{C}$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的根，并设 $R, R'$ 分别是 $z$ 和 $z'$ 的实化。那么 $\mathfrak{l}^{R}_{5} \cong \mathfrak{l}^{R'}_{5}$ 当且仅当 $R' = \pm R$。

# 2 幂零莱布尼茨代数的 coquecigrue 问题

本节中，任意向量空间的底域都是 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$。

**定义 2.1**。一个（左）rack 是一个集合 $X$，其上定义了一个二元运算 $\triangleright$: $X \times X \to X$，该运算是（左）自分配的，

$$x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z), \quad \forall x, y, z \in X$$

并且满足：对于每个 $x \in X$，$x \triangleright -$: $X \to X$ 都是一个双射。若存在一个元素 $1 \in X$，称为单位元，使得对于每个 $x \in X$，$1 \triangleright x = x$ 且 $x \triangleright 1 = 1$，则称 *rack* 是有基点的。若对于每个 $x \in X$，$x \triangleright x = x$（即 $\triangleright$ 是幂等的），则 *rack* $(X, \triangleright)$ 是一个quandle。

这里我们研究带基点 rack。

**定义 2.2**。设 $(X, \triangleright, 1)$ 和 $(Y, \triangleright_Y, 1_Y)$ 为带基点 *rack*。带基点架同态 是一个映射 $f: X \to Y$，满足 $f(1) = 1_Y$ 以及 $f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright_Y f(y)$，对每个 $x, y \in X$ 均成立。

**定义 2.3**。*[12]* 带基点 *rack* $(X, \triangleright, 1)$ 的非空子集 $Z$ 称为 $X$ 的子架，如果对每个 $x, y \in Z$ 都有 $1 \in Z$ 和 $x \triangleright y \in Z$。$X$ 的子架 $Z$ 称为左（相应地，右）理想，如果对于任意 $x \in X$ 和任意 $y \in Z$，$x \triangleright y \in Z$（相应地 $y \triangleright x \in Z$）。$X$ 的子架 $Z$ 如果既是左理想又是右理想，则称为双边理想，或简称为 $X$ 的理想。

带基点 rack 的基本例子是任意一个赋予共轭运算的群 $G$。我们将其记为 Conj($G$)。在这种情况下，单位元是该群 $G$ 的单位元 $1_G$，Conj($G$) 是一个 quandle，其左理想恰好是 $G$ 的正规子群。更一般地，定义了一个函子 Conj: **Grp** $\to$ **PRack**，其中 **Grp** 是群范畴，**PRack** 是带基点架范畴，并且存在一个左伴随 [21] As$_p$: **PRack** $\to$ **Grp**，其定义为 As$_p$($X$) =As($X$)/$\langle [1] \rangle$，其中

$$\mathrm{As}(X) = \mathrm{F}(X) / \overline{\langle \{ xyx^{-1} (x \triangleright y^{-1}) \mid x, y \in X \} \rangle},$$

F($X$) 是由 $X$ 生成的自由群，而 $\langle [1] \rangle$ 是 As($X$) 的子群，由 rack $X$ 的单位元 1 的类 $[1]$ 生成。

**定义 2.4.** 李架是一个带基点 *rack* $(X, \triangleright, 1)$，满足 $X$ 是光滑流形，$\triangleright$ 是光滑映射，并且对于每个 $x \in X$，$x \triangleright -$ 都是一个微分同胚。

在[17] M. K. Kinyon 证明，李架$\mathrm{T}_1 X$的单位元处的切李架$(X, \triangleright, 1)$赋予括号

$$[x, y] = \mathrm{ad}_x(y),$$

其中 $\mathrm{ad} : \mathrm{T}_1 X \to \mathfrak{gl}(\mathrm{T}_1 X)$ 是映射 $\Phi\colon X \mapsto \mathrm{GL}(\mathrm{T}_1 X), \Phi(x) = \mathrm{T}_1(x \triangleright -)$ 的微分，对于每个 $x \in X$，它都是一个莱布尼茨代数。

**命题 2.5。** *[17]* 设 $(X, \triangleright, 1)$ 是一个李架。那么上述括号$[x, y] = \mathrm{ad}x(y)$在 $\mathrm{T}_1 X$ 上定义了一个莱布尼茨代数结构。

换言之，对于每个 $x, y \in \mathrm{T}_1 X$，我们有

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{s,t=0} \gamma_1(s) \triangleright \gamma_2(t) = [x, y],$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2$ 是光滑路径，满足 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 1, \gamma_1'(0) = x$ 且 $\gamma_2'(0) = y$。

反向问题，即寻找一个赋有光滑运算的流形，使得该流形在指定点处的切空间配备此运算的微分后，得到一个与给定莱布尼茨代数同构的莱布尼茨代数，这一问题称为 coquecigrue 问题。M. K. Kinyon 解决了分裂莱布尼茨代数类的*coquecigrue* 问题 [17]。最近，S. Covez 在 [9]中展示了如何将每个莱布尼茨代数积分为一个局部李 rack。一般的 coquecigrue 问题仍未解决。在 [18] 中，作者证明幂零实莱布尼茨代数总是存在整体积分。他们还显式地积分了上一节中分类的、具有一维交换子理想的不可分解幂零莱布尼茨代数。

每个左莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 都可视为一个李子代数 $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$的阿贝尔扩张，其模为 $\mathfrak{g}_0$–模 $\mathfrak{a}$ [9]。例如，可以取 $\mathfrak{a} = \mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$ 和 $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$，其中 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$，由 $\mathrm{ad}_x = [x, -]$ 对任意 $x \in \mathfrak{g}$ 定义，它就是左伴随映射。我们将 $\mathfrak{g}$ 与短正合列联系起来：

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \rightarrowtail \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_0 \longrightarrow 0$$

并且我们有一个莱布尼茨代数 2–余循环 $\omega\colon \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{a}$，使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus_\omega \mathfrak{a}$。此外，$\mathfrak{g}$ 的莱布尼茨代数结构由下式给出

$$[(x, a), (y, b)] = \left([x, y]_{\mathfrak{g}_0}, \rho_x(b) + \omega(x, y)\right),$$

其中 $\rho\colon \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 对 $\mathfrak{a}$ 的作用。

**定理 2.6.** *[9]* 每个莱布尼茨代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus_\omega \mathfrak{a}$ 都可以积分为如下形式的李局部架

$$G_0 \times_f \mathfrak{a}$$

其运算定义为

$$(g,a)\triangleright(h,b)=\left(ghg^{-1},\phi_g(b)+f(g,h)\right)$$

以及单位元$(1,\ 0)$，其中 $G_0$ 是一个李群，满足$\mathrm{Lie}(G_0)\ =\ \mathfrak{g}_0$，$\phi$ 是作用 $\rho$ 的指数映射，$f$：$G_0\times G_0\to\mathfrak{a}$是由下式定义的李局部架 $2-cocycle$

$$f(g,h)=\int_{\gamma_h}\left(\int_{\gamma_g}\tau^2(\omega)^{eq}\right)^{eq},\quad\forall g,h\in G_0$$

并且 $\tau^2(\omega)\in\mathrm{ZL}^1(\mathfrak{g}_0,\ \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{a}))$由 $\tau^2(\omega)(x)(y)=\omega(x,\ y)$定义，其中对每个$x$, $y\in\mathfrak{g}_0$均成立。

在将莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 积分为李架且该李架是 quandle 的情况下，我们有如下结果。

**定理 2.7**。 *[18]* 设 $X$ 是积分莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$的李架。 $X$是 ***quandle***，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是李代数。此外，$X$ =Conj$(G)$，其中$\mathrm{Lie}(G)\ =\mathfrak{g}$，且 Lie: **LieGrp** $\to$ **Lie** 是一个函子，它将每个实李群 $G$ 映射为其李代数 $\mathrm{Lie}(G)$。

对于幂零莱布尼茨代数这一类，S. Covez 提出的积分是全局的。

**定理 2.8**。 *[18]*每个幂零实莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 都可以全局积分为一个李架。

当 $\mathfrak{g}$ 是二步幂零代数时，无需对与 $\mathfrak{g}$相关联的莱布尼茨代数 $2-$余循环进行积分，也可以定义一个积分 $\mathfrak{g}$ 的李架，因为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$。

**定理 2.9**。 *[18]*设 $\mathfrak{g}$是一个二步幂零代数，设 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 且设 $\omega$：$\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0\to[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$是与短正合列相关联的莱布尼茨代数 $2-$余循环

$$0\longrightarrow[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\hookrightarrow\mathfrak{g}\twoheadrightarrow\mathfrak{g}_0\longrightarrow 0.$$

那么乘法

$$(x,a)\triangleright(y,b)=(y,b)+[(x,a),(y,b)]=(y,b+\omega(x,y))$$

在向量空间 $\mathfrak{g}_0\times[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$上定义了李架结构，其中 $(0,\ 0)$ 是单位元，且 $\mathrm{T}^{(0,0)}($ $\mathfrak{g}_0\times[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\ \triangleright)$ 是一个与 $\mathfrak{g}$同构的莱布尼茨代数。

现在回顾如何对上一节列出的、交换子理想为一维的不可分解幂零实 Leibniz 代数进行积分。我们假设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是不可约首一多项式 $f(x)$ $\in\mathbb{R}[x]$ 的幂的伴随矩阵。因此，$A$ 与特征值为 $a\in\mathbb{R}$ 的 $n\times n$ 若尔当块相似；或者 $A$ 与 $J_R$ 相似，其中 $R\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 是某个复数 $z=\alpha+i\beta$ 的实化。

**例 2.10**。令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}_{2n+1}^{A}$，并令 $\{e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n,h\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基。对 $\mathfrak{g}$ 进行积分的李全局架为 $R_{2n+1}^{A}=(\mathfrak{g}_0\times\mathbb{R}h,\ \triangleright)$，其乘法为

$$(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z)\triangleright(x_1',\ldots,x_n',y_1',\ldots,y_n',z')=$$
$$=\left(x_1',\ldots,x_n',y_1',\ldots,y_n',z'+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\delta_{ij}+a_{ij}\right)x_iy_j'+\left(-\delta_{ij}+a_{ij}\right)x_i'y_j\right]\right).$$

**定义 2.11.** *[18]* $(R_{2n+1}^{A},\triangleright)$ 称为海森堡架。

当 $A$ 是零矩阵时，即当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_{2n+1}$ 是（$2n+1$）–维海森堡李代数时，我们有 $R_{2n+1}^{0_{n\times n}}$ =Conj($H_{2n+1}$)。

同样地，我们可以找到积分 Kronecker 代数和 Dieudonné 代数的李架。

**定义 2.12.** *[18]*设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}_n$，并设 $\{e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n,h\}$ 为$\mathfrak{g}$的一组基。*Kronecker* 架 $K_n=(\mathfrak{g}_0\times\mathbb{R}h,\triangleright)$ 是乘法为下式的李架

$$x\triangleright y=y+[x,y]_{\mathfrak{k}_n},\quad \forall x,y\in K_n.$$

**定义 2.13.** *[18]*设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{d}_n$，并设 $\{e_1,\ldots,e_{2n+1},h\}$ 为 $\mathfrak{g}$的一组基。*Dieudonné* 架 $D_n=(\mathfrak{g}_0\times\mathbb{R}h,\triangleright)$ 是乘法为下式的李架

$$x\triangleright y=y+[x,y]_{\mathfrak{d}_n},\quad \forall x,y\in D_n.$$

可以验证 $\mathrm{T}_{(0,0)}\,K_n\cong\mathfrak{k}_n$ 和 $\mathrm{T}_{(0,0)}\,D_n\cong\mathfrak{d}_n$。

# 3 同位

两个代数结构之间的同位概念由 A. A. Albert 于 [1]引入（另见 [2] 和 [16]），旨在通过推广同构的概念来对非结合代数进行分类。这里我们为莱布尼茨代数和架定义同位。

**定义 3.1.** 设 $(\mathfrak{g},[-,-])$ 和 $(\mathfrak{h},[-,-]_{\mathfrak{h}})$ 是定义在 $\mathbb{F}$ 上的左莱布尼茨代数。$\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 之间的同位是由线性同构构成的三元组

$$(f,g,h)\colon\mathfrak{g}\leftrightarrows\mathfrak{h}$$

使得

$$[f(x),g(y)]_{\mathfrak{h}}=h([x,y]),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

我们称 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是同位的 莱布尼茨代数。

如果满足 $f=h$，则称同位为右同位；如果满足 $g=h$，则称为左同位。我们注意到，如果 $f\colon\ \mathfrak{g}\leftrightarrows\mathfrak{h}$ 是莱布尼茨代数的同构，那么三元组（$f$、$f$、$f$）是一个（左、右）同位。

**定义 3.2**。设（$X$、$\triangleright$、$1$）和（$Y$、$\triangleright_Y$、$1_Y$）是左 *pointed rack*。$X$ 与 $Y$ 之间的同位是指由三个双射组成的三元组

$$(f,g,h)\colon X \leftrightarrows Y$$

使得 $f(1) = g(1) = h(1) = 1_Y$ 并且

$$f(x) \triangleright_Y g(y) = h(x \triangleright y), \quad \forall x, y \in X.$$

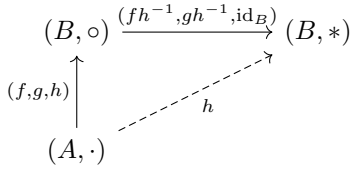
此外，在这种情况下，每个 rack 同构都可以视为一个左同位和右同位。此外，可以通过要求 $f$、$g$、$h$ 为微分同胚来定义*Lie rack* 拟同构 的概念。

下面是 A. A. Albert 在 [2]中针对拟群的同位结果的推广。

**注 3.3.** 两个代数结构之间的每个同位$(f,g,h)$都同构于一个主同位，即形如$(f, \tilde{g}, \mathrm{id})$的同位。更准确地说，设$(A,\cdot)$和$(B,\circ)$是两个代数结构，并设$(f,g,h)$: $A \leftrightarrows B$是一个同位。我们定义二元运算 $*\colon B\times B\to B$为

$$h(x) * h(y) = h(xy), \quad \forall x, y \in A.$$

这样，*(A,·)* 和 *(B,∗)* 同构，并且 $h(x) * h(y) = f(x) \circ g(y)$。因此，$(hf^{-1})(\bar{x}) * (hg^{-1})(\bar{y}) = \bar{x} \circ \bar{y}$，其中 $\bar{x} = f(x)$，$\bar{y} = g(y)$，由此得到主同位 $(fh^{-1}, gh^{-1}, \mathrm{id}_B)\colon (B,\circ) \leftrightarrows (B,*)$。




对于 $(A,\cdot)$ 和 $(B,\circ)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上有限维非结合代数（如莱布尼茨代数）的情形，我们可以将 $A$ 和 $B$ 的底层向量空间视为 $\mathbb{F}^n$，其中 $n = \dim_{\mathbb{F}} A = \dim_{\mathbb{F}} B$，且 $\mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{\mathbb{F}^n}$。

由定义 3.1 可知，同构与同位的区别在于，可以找到一个与非李 Leibniz 代数同位的李代数，如下例所示。

**例 3.4**。设 $\mathfrak{h}_3$ 为三维海森堡李代数，设 $A = (a_{ij})_{i,\,j} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$、$B = (b_{ij})_{i,\,j} = A\cdot\mathrm{diag}\{\lambda,\mu\}$，其中 $\lambda$，$\mu \in \mathbb{F}^*$，并设 $\mathfrak{g}^A_{\lambda,\,\mu}$ 为交换子理想为一维、结构矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} & 0 \\ a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则线性同构三元组 $(f,\ g,\ \mathrm{id}_{\mathbb{F}^3})$: $\mathfrak{g}^{A}_{\lambda,\ \mu} \leftrightarrows \mathfrak{h}_3$，其中 $f$和 $g$分别由以下矩阵定义

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \ and \ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},\ with\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}^*$$

是一个主同位。事实上，对于每个 $x \equiv (x_1,\ x_2,\ x_3)\ y \equiv (y_1,\ y_2,\ y_3) \in \mathbb{F}^3$，我们有

$$\begin{aligned}[f(x), g(y)]_{\mathfrak{h}_3} =& (0, 0, (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(b_{11}y_1 + b_{12}y_2)) \\ =& (0, 0, (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12})x_1y_2 - (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})x_2y_1) = [x, y]_{\mathfrak{g}^{A}_{\lambda,\mu}},\end{aligned}$$

因为 $a_{11}b_{21} - b_{11}a_{21} = a_{12}b_{22} - b_{12}a_{22} = 0$。
可以验证，若 $\lambda = \dfrac{-\mu}{2\det(A)}$，则 $\mathfrak{g}^{A}_{\lambda,\ \mu} = \mathfrak{l}^{\alpha}_3$，其中 $\alpha = \mu \det(A) - 1$。
事实上，$\mathfrak{g}^{A}_{\lambda,\ \mu}$ 和 $\mathfrak{l}^{\alpha}_3$ 具有相同的结构矩阵，即

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu\det(A) & 0 \\ -\lambda\det(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha & 0 \\ -1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

反过来，对于每个 $\alpha \in \mathbb{F}^* \backslash \{\pm 1\}$，若我们选择 $A = \mathrm{I}_2$，$\lambda = 1-\alpha$ 和 $\mu = 1+\alpha$，则 $\mathfrak{g}^{\mathrm{I}_2}_{\lambda,\ \mu} = \mathfrak{l}^{\alpha}_3$。因此，对于任意 $\alpha \in \mathbb{F}$、$\alpha \neq \pm 1$，$\mathfrak{h}_3$ 和 $\mathfrak{l}^{\alpha}_3$ 是同位的。我们注意到，若 $\alpha = \pm 1$，这一结果并不成立；事实上，在下一节中我们将证明 $\mathfrak{l}^{\pm 1}_3$和 $\mathfrak{h}_3$ 不同位。

类似地，若 $\mu = -\lambda = \dfrac{1}{\det(A),}$ 则 $\mathfrak{g}^{A}_{\lambda,\ \mu}$ 的结构矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

也就是说，$\mathfrak{g}^{A}_{\lambda,\ \mu} = \mathfrak{k}_1$ 是克罗内克代数。因此，对每个 $\alpha \neq \pm 1$，$\mathfrak{l}^{\alpha}_3$ 与 $\mathfrak{k}_1$ 同位。

# 4 二步幂零代数与李架的同位

本节的主要目标是研究域 $\mathbb{F}$ 上交换子理想为一维且不可分解的幂零莱布尼茨代数的同位类，其中 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$。此外，我们将证明，当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时，这类莱布尼茨代数同位，当且仅当与之积分的李架同位。为此，我们需要找出莱布尼茨代数和李架的新同位不变量。

我们先给出以下定义，该定义由 M. Elhamdadi 和 E. M. Moutuou 提出，见 [12]。

**定义 4.1**。 $X$ 是一个左架。 $X$ 的中心为

$$\mathrm{Z}(X) = \{x \in X \mid x \triangleright y = y,\ \forall y \in X\}.$$

我们注意到，$\mathrm{Z}(X)$ 是 $X$ 的子架，因为 $1 \triangleright y = y$ 且

$$(x \triangleright x') \triangleright y = x' \triangleright y = y$$

对每个 $x$， $x' \in \mathrm{Z}(X)$ 以及对每个 $y \in X$。在 [12] 中， $X$ 的中心称为稳定子 , $X$ 记作 $\mathrm{Stab}(X)$。基于以下原因，我们将其称为中心:

(1) 如果 $G$ 是群，则 $\mathrm{Z}(\mathrm{Conj}(G)) = \mathrm{Z}(G)$；(2) 如果 $X$ 是李架且 $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_1 X$，则 $\mathrm{T}_1\mathrm{Z}(X) = \mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$。

**命题 4.2**。

*(i)* 设 $\mathfrak{g}$， $\mathfrak{h}$ 为莱布尼茨代数，并设 $(f,\ g,\ h)$: $\mathfrak{g} \leftrightarrows \mathfrak{h}$ 是一个同位。则

$$f(\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})) = \mathrm{Z}_l(\mathfrak{h}), \quad g(\mathrm{Z}_r(\mathfrak{g})) = \mathrm{Z}_r(\mathfrak{h}), \quad h([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$$

左中心、右中心以及交换子理想的维数都是 同位不变量。

*(ii)* 设 $X, Y$ 是左架，且 $(f, g, g)$: $X \leftrightarrows Y$ 是一个左同位。那么

$$f(\mathrm{Z}(X)) = \mathrm{Z}(Y).$$

对于李架，中心的维数是左同位不变量。

证明。

(i) 设 $x, y \in \mathfrak{h}$ 满足 $x = f(\bar{x})$、 $y = g(\bar{y})$，其中 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{g}$。若 $\bar{x} \in \mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$，则

$$[x, y]_{\mathfrak{h}} = [f(\bar{x}), g(\bar{y})]_{\mathfrak{h}} = h([\bar{x}, \bar{y}]) = h(0) = 0$$

并且 $x \in \mathrm{Z}_l(\mathfrak{h})$。反之，若 $x \in \mathrm{Z}_l(\mathfrak{h})$，则

$$0 = [x, y]_{\mathfrak{h}} = [f(\bar{x}), g(\bar{y})]_{\mathfrak{h}} = h([x, y]).$$

因此 $[\bar{x}, \bar{y}] \in \mathrm{Ker}(h) = 0$，即 $\bar{x} \in \mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})$，且 $f(\mathrm{Z}_l(\mathfrak{g})) = \mathrm{Z}_l(\mathfrak{h})$。类似地，可以验证 $g(\mathrm{Z}_r(\mathfrak{g})) = \mathrm{Z}_r(\mathfrak{h})$。最后，对于每个 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{g}$

$$h([\bar{x}, \bar{y}]) = [f(\bar{x}), g(\bar{y})]_{\mathfrak{h}} \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}].$$

反过来，对于任意的 $x$、 $y \in \mathfrak{h}$，若 $x = f(\bar{x})$ 且 $y = g(\bar{y})$，则有

$$[x, y]_{\mathfrak{h}} = h([\bar{x}, \bar{y}]) \in h([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$$

以及 $h([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$。

(ii) 设 $x, y \in Y$ 满足 $x = f(\bar{x})$, $y = g(\bar{y})$, 且 $\bar{x}, \bar{y} \in X$。若 $\bar{x} \in \mathsf{Z}(X)$, 则

$$x \triangleright y = f(\bar{x}) \triangleright_Y g(\bar{y}) = g(\bar{x} \triangleright \bar{y}) = g(\bar{y}) = y$$

且 $x \in \mathsf{Z}(Y)$。反之, 若 $x \in \mathsf{Z}(Y)$, 则

$$g(\bar{y}) = y = x \triangleright_Y y = f(\bar{x}) \triangleright_Y g(\bar{y}) = g(\bar{x} \triangleright \bar{y})$$

且由于 $g$ 是单射, 命题得证。

□

根据上一个命题可知, 代数$\mathfrak{l}_3^{\pm 1}$与 $\mathfrak{h}_3$不同位, 因为 $\dim_{\mathbb{F}} \mathsf{Z}_l(\mathfrak{l}_3^1) = 2$ (见第 1.1 节), 且 $\dim_{\mathbb{F}} \mathsf{Z}(\mathfrak{h}_3) = 1$。此外, 回顾可知, 对任意 $\alpha \neq \pm 1$, $\mathfrak{l}_3^1$ 与 $\mathfrak{l}_3^{-1}$同构, 且 $\mathfrak{h}_3$ 与 $\mathfrak{l}_3^{\alpha}$同位, 因此 $\mathfrak{l}_3^{\alpha}$ 与 $\mathfrak{l}_3^{\pm 1}$不同位。这一观察与我们在上一节末尾提出的观察相结合, 便得到以下结论。

**命题 4.3.** 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$上的三维不可分解幂零莱布尼茨代数, 且其交换子理想为一维, 并且 特征$(\mathbb{F}) \neq 2$。那么, $\mathfrak{g}$ 或者同构于海森堡代数 $\mathfrak{l}_3^1$, 或者 $\mathfrak{g}$ 与海森堡李代数 $\mathfrak{h}_3$同位。

现在我们希望将这一结果推广到 $\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g} > 3$ 的情形。

**定理 4.4.** 设 $\mathbb{F}$ 是一个满足 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ 的域, 且 $\mathfrak{g}$ 是一个幂零莱布尼茨代数, 满足 $\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g} = t \geq 3$ 和 $\dim_{\mathbb{F}}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1$。

*(i)* 若 $t = 2n + 2$, 则 $\mathfrak{g}$ 同构于 迪厄多内 代数 $\mathfrak{d}_n$。

*(ii)* 若 $t = 2n + 1$, 则 $\mathfrak{g}$ 同构于海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$, 其中 $J_1$ 是特征值为 1 的 $n \times n$ 阶若尔当块; 或者 $\mathfrak{g}$ 与海森堡李代数 $\mathfrak{h}_{2n+1}$ 同位。

*(iii)* 海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$ 和 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_{-1}}$ 与任何李代数都不同位。

证明。

(i) 如果 $\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}$ 为偶数, 那么 $\mathfrak{g}$ 必须同构于迪厄多内代数 $\mathfrak{d}_n$, 其中 $t = 2n + 2$。

(ii) 如果 $\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g} = 2n + 1$ 且 $\mathfrak{g}$ 不同构于 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$, 那么 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{k}_n$ 或 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{l}_{2n+1}^{A}$, 其中 $A$ 是不可约首一多项式 $p(x)^k \in \mathbb{F}[x]$ 的幂的伴随矩阵, 且它与若尔当块 $J_1$ 和 $J_{-1}$ 均不相似。我们要证明这两个莱布尼茨代数都与海森堡李代数 $\mathfrak{h}_{2n+1}$ 同位。莱布尼茨代数 $\mathfrak{k}_n$ 通过左主同位 $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t}, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t})$ 与 $(2n + 1)$ 维海森堡李代数同位, 其中

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z) =$$
$$= (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n, -y_1, y_1 - y_2, y_2 - y_3, \ldots, y_{n-1} - y_n, z),$$

对每个 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in \mathbb{F}^t$。海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^A$ 与 $\mathfrak{h}_{2n+1}$ 同位，其同位三元组为 $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t}, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t})$，其中 $f$ 是由以下矩阵定义的线性同构

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_n + A & \mathbf{0} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline \mathbf{0} & I_n - A^T & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 & 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 & 1 \end{array}\right)$$

我们注意到，$f$ 是一个双射，因为矩阵 $I_n + A$ 和 $I_n - A^T$ 是可逆的。事实上，有

$$\det(xI_n + A) = (-1)^n f(x),$$

$$\det(xI_n - A^T) = \det(xI_n - A) = f(x)$$

并且对于 $x = 1$,

$$\det(I_n + A) = (-1)^n f(-1),$$

$$\det(I_n - A^T) = f(1).$$

因此，当且仅当 $p(1) = 0$ 或 $p(-1) = 0$时，$f$ 不可逆。由于 $p(x)$在 $\mathbb{F}$上不可约，这将意味着 $p(x) = x - 1$ 或 $p(x) = x + 1$，并且 $A$ 将与 $n \times n$ 若尔当块 $J_1$ 或 $J_{-1}$相似。矛盾在于，我们假设 $\mathfrak{g}$ 不同构于海森堡代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$。最后，根据命题 4.2，我们有$\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$ 和 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_{-1}}$不同位于 $\mathfrak{h}_{2n+1}$，因为

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Z}_l(\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_{\pm 1}}) = 2,$$

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Z}(\mathfrak{h}_{2n+1}) = 1$$

并且左中心的维数是一个同位不变量。

（iii）假设存在一个李代数 $\mathfrak{p}$ 以及一个同位

$$(f, g, h) \colon \mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1} \leftrightarrows \mathfrak{p},$$

于是，由命题 4.2，$\dim_{\mathbb{F}}[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 1$ and $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Z}(\mathfrak{p}) = 2$。关于交换子理想为一维的李代数的分类（见[13]的第3节），$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$，其中 $\mathfrak{p}_1$ 是阿贝尔代数，而 $\mathfrak{p}_2$ 要么是二维非阿贝尔李代数（即 $\mathfrak{p}_2$ 的基为 $\{e_1, e_2\}$，李括号由 $[e_1, e_2] = e_1$定义），要么是海森堡代数 $\mathfrak{h}_{2k+1}$。在第一种情况下，$\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{p}_1$ 必须为奇数。因此，$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Z}(\mathfrak{p})$也为奇数，因为$\mathrm{Z}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_1$。在第二种情况下，$\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{p}_1$ 必须为偶数，并且

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Z}(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{p}_1 + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Z}(\mathfrak{h}_{2k+1}) = \dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{p}_1 + 1$$

为奇数。因此，两种情况下都会产生矛盾，且$\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$ 不可能与李代数同位。对于莱布尼茨代数 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_{-1}}$，该结论同样成立，因为它与$\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$同构。

□

在上一个定理中，我们证明了，对于交换子理想为一维的两个幂零莱布尼茨代数 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$，它们之间的同位总可以取为 $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t}, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t})$ 的形式。在下一个引理中我们将证明，若 $\mathbb{F}$ 是实数域，这样的同位也恰好是积分 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$的李架之间的同位。我们回顾一下，根据定理 2.9，可以将积分一个两步幂零莱布尼茨代数的李架 $X$ 的底层向量空间与其切空间 $\mathrm{T}_1 X$ 等同。

**引理 4.5.** 设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 和 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ 是两个二步幂零代数，且 维数$_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{g}$ =维数$_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{h}=t$。设 $X$, $Y$ 分别是积分 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 的李架。

*(i)* 若 $(f,g,g)\colon \mathfrak{g}\leftrightarrows\mathfrak{h}$ 是左莱布尼茨代数同位，则它也是 $X$ 和 $Y$ 之间的 ***Lie rack*** 拟同构。*(ii)* 若 $(f,g,h)\colon X\leftrightarrows Y$ 是 ***Lie rack*** 拟同构，则 $g=h$，并且它恰好是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$之间的莱布尼茨代数同位。*(iii)* 设 维数$_{\mathbb{R}}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=$ 维数$_{\mathbb{R}}[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=1$。那么 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}$ 同位，当且仅当 $X$ 与 $Y$ 同位。

证明。李架 $X$ 和 $Y$ 的乘法可写为

$$x\rhd y=y+[x,y]_{\mathfrak{g}},\quad x'\rhd_Y y'=y'+[x',y']_{\mathfrak{h}},\quad \forall x,y\in X,\ \forall x',y'\in Y.$$

(i) 若 $(f,g,g)\colon \mathfrak{g}\leftrightarrows\mathfrak{h}$ 是莱布尼茨代数的同位，则

$$f(x)\rhd_Y g(y)=g(y)+[f(x),g(y)]_{\mathfrak{h}}=g(y)+g([x,y])=g(x\rhd y),$$

对任意 $x,y\in X$,

(ii) 若 $(f,g,h)\colon X\leftrightarrows Y$是李架的同位，则

$$g(y)=1_Y\rhd_Y g(y)=f(1_X)\rhd_Y g(y)=h(1_X\rhd y)=h(y),\ \ \forall y\in X,$$

于是 $g=h$，三元组 $(f,g,g)$ 成为 $\mathfrak{g}$与 $\mathfrak{h}$之间的同位，因为

$$g(y)+[f(x),g(y)]_{\mathfrak{h}}=f(x)\rhd_Y g(y)=g(x\rhd y)=g(y)+g([x,y])$$

对每个 $x$、$y\in X$，然后

$$[f(x),g(y)]_{\mathfrak{h}}=g([x,y]).$$

(iii) 若 $X$ 和 $Y$ 是同位李架，则由 (ii) 可知， $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是同位莱布尼茨代数。反之，若 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是交换子理想为一维的同位幂零莱布尼茨代数，则根据定理 4.4，可以选取它们之间的一个同位，其形式为 $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t}, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t})$；再由 (ii)，它便成为 $X$ 和 $Y$ 之间的一个同位。

□

最后一个结果使我们能够描述积分不可分解幂零莱布尼茨代数且交换子理想为一维的李全局架的同位类。

**定理 4.6.** 设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，且 $X$ 是积分幂零莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 的李架，其中 维数 $_{\mathbb{F}}\mathfrak{g} = t$ 且 维数$_{\mathbb{F}}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1$。

*(i)* 若 $t = 2n + 2$，则 $X$ 同构于迪厄多内 架 $D_n$。*(ii)* 若 $t = 2n + 1$，则 $X$ 同构于海森堡架 $R^{J_1}_{2n+1}$（其中 $J_1$ 是特征值为1的 $n \times n$ 阶若尔当块），或者 $X$ 与海森堡李群$\mathrm{Conj}(H_{2n+1})$的共轭作用同位。

*(iii)* 海森堡架 $R^{J_1}_{2n+1}$ 和 $R^{J_{-1}}_{2n+1}$ 与任何李 *quand-le* 都不同位。

证明。

(i) 若 $t$ 为偶数，则 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_n$ 和 $X$ 同构于 Dieudonné 架 $D_n$。

(ii) 若 $t = 2n + 1$ 和 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{l}^{J_1}_{2n+1}$，则 $X$ 同构于海森堡架 $R^{J_1}_{2n+1}$。若情况并非如此，则 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}_{2n+1}$ 同位，且 $X$ 同构于 Kronecker 架 $K_n$ 或 $R^A_{2n+1}$，其中 $A = J_\alpha$ 满足 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$，或者 $A = J_R$ 和 $R = R_{\alpha,\ \beta}$ 如第 1.2 节所述。注意，最后一种情况成立当且仅当 $n$ 为偶数。由于 $\mathfrak{k}_n$ 和$\mathfrak{l}^A_{2n+1}$ 均通过左主同位 $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t}, \mathrm{id}_{\mathbb{F}^t})$ 与海森堡李代数 $\mathfrak{h}_{2n+1}$ 同位，根据引理 4.5，我们可以得出 $K_n$ 和$R^A_{2n+1}$ 均与 Conj($H_{2n+1}$) 同位。因此， $X$ 与海森堡李群的共轭作用同位。最后， $R^{J_1}_{2n+1}$ 与 Conj($H_{2n+1}$) 不同位。事实上，假设存在一个同位

$$(f, g, h) \colon R^{J_1}_{2n+1} \leftrightarrows \mathrm{Conj}(H_{2n+1}),$$

那么，根据引理 4.5， $g = h$ 我们便得到矛盾，因为 $(f, g, g)$ 将成为莱布尼茨代数$\mathfrak{l}^{J_1}_{2n+1}$ 与 $\mathfrak{h}_{2n+1}$之间的同位。另一种证明 $R^{J_1}_{2n+1}$ 和 Conj($H_{2n+1}$) 不是同位架的方法是观察到

$$\mathrm{Z}(R^{J_1}_{2n+1}) = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathrm{Z}(\mathrm{Conj}(H_{2n+1})) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

其中我们沿用例 2.10 中的记号，并且我们在命题 4.2 中证明了，李架的中心维数是一个左同位不变量。

(iii) 如果 $R_{2n+1}^{J_1}$ 与李夸代尔 $X$同位，那么 $\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$ 就会与莱布尼茨代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_1 X$同位。根据定理 2.7， $\mathfrak{g}$ 是李代数，并且$X$ =Conj($G$)，其中 Lie($G$) $= \mathfrak{g}$。因此，$\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_1}$ 将与一个李代数同位；而根据定理 4.4 的 (iii)，这就会产生矛盾。同样的论证也适用于李架 $R_{2n+1}^{J_{-1}}$。

□

在上一节中我们看到，尽管寻找复海森堡代数$\mathfrak{l}_{2n+1}^{J_a}$ 的同构类这一问题仍未解决，但同位的概念使我们能够对所有具有一维交换子理想的非同位幂零莱布尼茨代数进行分类。此外，这还对整合这类幂零莱布尼茨代数的非同位李架进行了分类。

# 参考文献

[1] A. A. Albert.《非结合代数：I. 基本概念与拟同》。《数学年刊》43.4（1942年），第685–707页。[2]A. A. Albert.《拟群 I》。《美国数学会会刊》54（1943），第507–519页。doi：https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1943-0009962-7。[3] S. Ayupov 和 B. Omirov.《三维莱布尼茨代数》。《乌兹别克数学杂志》1（1999），第9–14页。[4] S. Ayupov、B. Omirov 和 I. Rakhimov.《莱布尼茨代数：结构与分类》。CRC出版社，2019。isbn：9781000740004。[5] C. Bartolone、A. Di Bartolo 和 G. Falcone.《交换子理想为二维的幂零李代数》。《线性代数及其应用》434.3（2011），第650–656页。doi：https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.09.036。[6] C. Bartolone、A. Di Bartolo 和 G. Falcone.《类型为 {2n, 1,1} 的幂零复李代数的可解扩张》。《莫斯科数学杂志》18.4（2018），第607–616页。doi：http://dx.doi.org/10.17323%2F1609-4514-2018-18-4-607-616。[7] A. Blokh.《李代数概念的一种推广》。《苏联科学院通报》165.3（1965），第471–473页。[8] J. M. Casas、M. A. Insua、M. Ladra 和 S. Ladra.《三维复莱布尼茨代数分类算法》。《线性代数及其应用》436.9（2012），第3747–3756页。doi：https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.11.039。[9] S. Covez.《莱布尼茨代数的局部积分》63.1（2013），第1–35页。doi：https://doi.org/10.5802/aif.2754。

[10] I. Demir.《六维幂零莱布尼茨代数若干子类的分类》。《土耳其数学杂志》44.5（2020），第1012–1018页。doi：https://doi.org/10.3906/mat-2002-69。[11]I. Demir、K. C. Kailash C. Misra 和 E. Stitzinger.《关于四维幂零莱布尼茨代数的分类》。《代数通讯》45.3（2017），第1012–1018页。doi：https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1172626。[12] M. Elhamdadi 和 E. M. Moutuou.《拓扑架与拟群的基础》。《结理论及其应用杂志》25.3（2016），第1640002页。doi：https://doi.org/10.1142/S0218216516400022。[13] K. Erdmann 和 M. J. Wildon.《李代数导论》。伦敦施普林格，2006。isbn：9781846284908。[14] R. M. Falcón、O. J. Falcón 和 J. Núñez.《有限域上维数至多为七的丝状李代数的同构类与同位类》。《数学研究成果》71.3（2017），第1151–1166页。doi：https://doi.org/10.1007/s00025-016-0616-x。[15]R. M. Falcón、O. J. Falcón 和 J. Núñez.《有限域上某些李代数的同位类与同构类》。《数学研究成果》71.1（2017），第167–183页。doi：https://doi.org/10.1007/s00025-015-0502-y。[16] R. M. Falcón、O. J. Falcón 和 J. Núñez.《同位理论的历史视角》。《对称性》10.8（2018），第322–342页。doi：https://doi.org/10.3390/sym10080322。[17] M. K. Kinyon.《莱布尼茨代数、李架与双群》。《李理论杂志》17.1（2007），第99–114页。[18] G. La Rosa 和 M. Mancini.《两步幂零莱布尼茨代数》。《线性代数及其应用》637.7（2022），第119–137页。doi：https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.12.013。[19] G. La Rosa 和 M. Mancini.《两步幂零代数的导子》。《代数通讯》51.12（2023），第4928–4948页。doi：https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2222415。[20] J.-L. Loday.《李代数的非交换版本：莱布尼茨代数》。《数学教育》39.3-4（1993），第269–293页。[21] S. Mac Lane.《工作数学家的范畴》。第5卷，《数学研究生教材》。施普林格出版社，纽约，2013。isbn：9781475747218。[22] I. S. Rakhimov、I. M. Rikhsiboev 和 M. A. Mohammed.《任意域上三维莱布尼茨代数分类算法》。《JP代数、数论与应用杂志》40.2（2018），第181–198页。doi：https://doi.org/10.17654/NT040020181。