测量三体混沌吸收率可预测混沌结果分布

Viraj Manwadkar, [1, 2]★ Alessandro A. Trani, [3,4,5]† BarakKol[6]‡

[1] 物理系，斯坦福大学，*382 Via Pueblo Mall*，斯坦福，加利福尼亚州 *94305*，美国[2] 卡弗里粒子天体物理与宇宙学研究所，邮政信箱 *2450*，斯坦福大学，斯坦福，加利福尼亚州 *94305*，美国[3]尼尔斯·玻尔国际研究院，尼尔斯·玻尔研究所，*Blegdamsvej 17*，*2100* 哥本哈根，丹麦[4]早期宇宙研究中心，东京大学理学部，日本东京 *113-0033*[5]冲绳科学技术大学院大学，*1919-1 Tancha*，恩纳村，冲绳 *904-0495*，日本[6] 拉卡物理研究所，希伯来大学，耶路撒冷 *9190401*，以色列

接收日期 XXX。以原始形式接收日期 YYY；ZZZ

arXiv:2302.08312v1 [math.DS] 9 Feb 2023

摘要

非层级三体系统的基于通量的统计理论预言，混沌结果分布可归结为混沌发射率函数与一个已知函数——渐近通量——的乘积。在本文中，我们通过模拟测量混沌发射率函数（或等价地，吸收率）。更准确地说，我们跟踪数百万次散射事件，直到能够判定散射是规则的还是混沌的。通过这种方式，我们测量了一个三变量吸收率函数。利用该函数，我们确定了关于双星束缚能和角动量的混沌结果分布的基于通量的理论预言，并发现其与测得的分布吻合良好。这不仅详细验证了基于通量的理论，还表明，为确定混沌结果分布，所需的计算量可以大幅减少。

关键词： 混沌、引力、天体力学、行星与卫星：动力学演化与稳定性

1 引言

牛顿三体问题是物理学中最丰富、最具成果且历史最悠久的开放问题之一。它是一片沃土，孕育了包括微扰理论、力学的辛表述（泊松括号）、（流形）拓扑学和混沌在内的众多科学理论。

自庞加莱以来，人们便认为不可能获得确定性的通解（庞加莱（1890年））。已知可进行解析处理的特殊情形包括呈现轨道层级的月球极限，以及由一个主导质量构成、因而具有质量层级的行星极限。然而，人们认为，一般的非层级情形无法通过解析的确定性方法处理。从Agekyan & Anosova(1967)开始，研究人员使用计算机模拟这一系统，并测量其结果分布。统计理论由Monaghan(1976)提出，近来，Stone& Leigh (2019)和Ginat & Perets (2020)对其作出了重要改进。然而，这一统计理论存在一些缺陷，包括引入了一个伪参数——强相互作用区域，它既充当截断，也粗略地区分了规则运动和混沌运动。

受Stone & Leigh (2019) 启发，Kol (2020提出的基于通量的统计理论解决了这一问题，并将概率与相空间体积（如以往理论所主张的）区分开来，而是将其与相空间通量联系起来。其核心结论是将.....归约为混沌结果分布

$$d\Gamma(u) = \frac{1}{\bar{\sigma}}\,\mathcal{E}(u)\,dF(u) \tag{1}$$

其中，u 是结果参数的统称；$d\Gamma(u)$是混沌微分衰变率，即从混沌态衰变至结果参数的一个元素 du 的单位时间概率，因此 $d\Gamma(u)$与混沌结果分布成正比；$\bar{\sigma}$ 是 Dandekar 等（2022）确定的正则化混沌相体积；$\mathrm{E}(u)$是混沌发射率函数，表示具有结果参数 u 的出射态源自混沌运动的概率；最后，$dF(u)$是渐近通量的分布。该关系实现了化简，因为 $dF(u)$已被以闭式确定，见下文（5），而 $\bar{\sigma}$ 只是一个与 u无关的归一化，从而将对 $d\Gamma(u)$的研究化简为对 $\mathrm{E}(u)$的研究。

基于通量的统计理论的部分内容通过以下研究中的模拟得到了验证：Manwadkar 等人(2020）和Manwadkar 等人(2021），下文简称 MKTL21。此外，该理论促成了对三体系统的一种新表述，这种表述能够实现自然的动力学化简（Kol 2021）。

本文旨在通过测量混沌发射率函数 1（通量理论的主要约化，$\mathcal{E}(u)$），检验该理论。根据时间反演对称性，$\mathcal{E}$ 也可解释为吸收函数，即具有入射参数 u 的入射态进入混沌运动的概率。换言之，类比基尔霍夫热辐射定律，混沌吸收率与发射率相同。测得混沌吸收率函数后，即可预测混沌结果分布

★ 电子邮箱：virajmanwadkar@gmail.com †
电子邮箱：aatrani@gmail.com ‡ 电子邮箱：
barak.kol@mail.huji.ac.il

© 2021 作者

并将其与测得的分布进行比较。本文采用的研究路径如图 1所示。

测量混沌吸收率只需模拟入射态的演化，直到三个天体相遇（以及此后不久）；而测量结果分布则需要将系统演化到解体为止，这通常耗时更长。从这个意义上说，(1)为测量混沌结果分布提供了有意义的计算简化。未来对 $\mathcal{E}$ 的解析表达式或近似方法可能进一步简化计算。

本文结构安排如下。第 2节建立问题并回顾基于通量的理论。第 3节介绍我们的测量方法，第 4 节介绍模拟。第 5节呈现数据分析和结果。最后，我们在第 6节进行总结与讨论。

2 统计理论

本节简要建立问题，并回顾 Kol (2020提出的基于通量的理论。随后，我们将重述并讨论本文所要检验的预测。

设置。三体问题可通过哈密顿量定义

$$H\left(\{\vec{r}_c,\,\vec{p}_c\}_{c=1}^{3}\right) := \sum_{c=1}^{3}\frac{\vec{p}_c^{\,2}}{2m_c} - \left(\frac{G\,m_1\,m_2}{r_{12}} + cyc.\right) \tag{2}$$

其中 $m_c,\, c=1,2,3$ 表示三个天体的质量，$\vec{r}_c$ 表示天体的位置矢量，$\vec{p}_c$ 表示它们的动量，G 是牛顿引力常数，且 $r_{cd}=|\vec{r}_c-\vec{r}_d|$。

守恒荷包括总线动量、总角动量和总能量，分别记为 P, E, L。我们在质心参考系中进行研究。

守恒定律允许系统解体。通常，非层级三体运动最终会以这种方式结束。假设总能量为负，出射态由一对双星和一颗单星组成，后者也称为逃逸体。当它们相距甚远时，系统解耦为一个双星子系统，以及一个有效层级系统；后者通过将双星压缩至其质心，并以一个虚拟天体取而代之来定义。该有效系统描述双星与单星之间的相对运动。结果参数 u 为

$$u = \left(s,\,\epsilon_B,\,\vec{l}_B,\,\psi_B,\,\epsilon_F,\,\vec{l}_F,\,\psi_F\right) \tag{3}$$

其中，$s=1$、2、3表示逃逸星身份；ϵ_B，l_B，ψ_B 分别表示解耦双星的能量、角动量和近心点角（相对于交线测量）；而 ϵ_F，l_F，ψ_F 则表示有效系统的对应量。这些变量满足显然的关系 $\epsilon_B+\epsilon_F=E$，$\vec{l}_B+\vec{l}_F=\vec{L}$。因此，总共有 6 个独立连续结果参数。关于绕 L旋转的对称性意味着，依赖于 u的量本质上只取决于 5 个结果参数。

由下式定义的双星常数具有特殊作用：

$$k := \frac{m_a\,m_b}{m_a+m_b}\,(G m_a m_b)^2 \tag{4}$$

其中，m_a，m_b 是构成双星的质量。k_s 表示由逃逸体 $s=1$、2 或 3 定义的双星的双星常数。

如需更完整的设置，请参见Kol (2020)。

基于通量的统计理论。基于通量的理论与以往所有统计处理方法均不相同，这些方法始于Monaghan(1976，并延续至综述著作Valtonen& Karttunen (2006以及结果分布的闭式确定 Stone & Leigh (2019)。此前所有处理方法都假定微正则系综，即根据相空间体积分配概率。此外，它们还引入所谓的强相互作用半径，以确保相空间体积有限，并排除相空间中无关的部分（这部分对应于因果上无法到达的逃逸情形）。使用微正则系综，隐含地假设系统是封闭的、相空间有界，并且运动是随机的（严格来说，即遍历的）；然而，三体系统的相空间无界，可能发生解体，其相空间也分为规则运动区域和混沌运动区域。此外，强相互作用半径的取值多少带有任意性。

基于通量的理论（Kol 2020）通过关注相空间体积通量而非相空间体积本身，弥补了这些缺陷。对于一个正在解体的系统而言，这是很自然的。通量本身有限，且与测量位置无关，因此不会出现无限概率，也不再需要截断。

我们注意到，三体系统的时间演化可分为三种运动：至少有一个天体远离其他天体的渐近运动、混沌相互作用，以及亚逃逸偏离。在亚逃逸偏离过程中，系统明显分离为一个双星和一颗彼此远离的单星，但它们的相对速度低于逃逸速度，因此仍受束缚，必将回落至质心附近并发生相互作用。因此，亚逃逸偏离也可称为准渐近态。这种相空间划分与文献中的划分相似，甚至可能完全相同。具体而言，本文所说的“规则散射”与 McMillan & Hut （1996）所用术语“非共振相互作用”相似；“混沌相互作用”与其所说的“民主共振”相似；而亚逃逸偏离则与其所说的“层级共振”相似。

基于通量的理论的第一部分将系统的概率分布视为随时间变化的变量。概率测度分布于遍历区域、亚逃逸往返过程和渐近态之中，后两者还会根据其参数进一步连续分布。这种分布不同于以往研究中的微正则系综。分布的时间演化通过Kol (2020的方程组（2.35）加以描述，其解刻画了结果参数和衰变时间的统计特性。

理论的第二部分涉及遍历区域的微分衰变率，这是上述系统统计演化方程中的关键要素。它在所有渐近态参数上的分布 u 记为 $d\Gamma(u)$，可以证明，它严格按照（1）因式分解，其中渐近通量的分布 $dF(u)$ 由下式给出

$$dF(u) = 2\pi\,\frac{\sqrt{k_s}\,d\epsilon_B}{(-2\epsilon_B)^{3/2}}\,\frac{1}{l_B\,l_F}\,d^3l_B\,d^3l_F\,\delta^{(3)}\left(\vec{l_B}+\vec{l_F}-\vec{L}\right)\,d\psi_B\,d\psi_F \tag{5}$$

其中 $s=1$，2，3 是逃逸星身份，$\mathcal{E}$ 是混沌发射率（= 吸收率），而 k_s 定义见（4）。变量 ϵ_B，l_B 的取值范围为

$$-2\,\epsilon_B\,l_B^2 \le k_s\,, \qquad \epsilon_B \le E\,. \tag{6}$$

混沌吸收率 $\mathrm{E}(u)$ 定义为：单星以随机平近点角（沿轨道的时间位置）飞掠双星时，最终演化为混沌轨迹而非

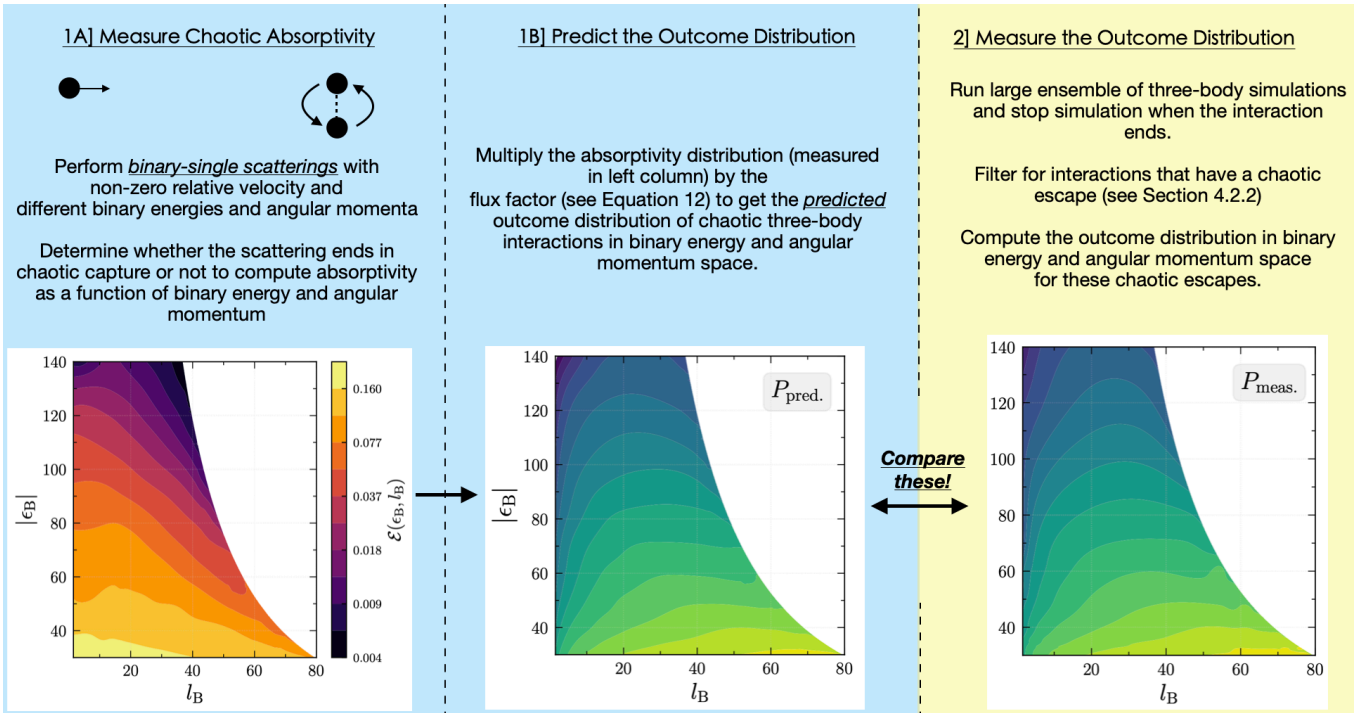

图1。 该图展示了本文工作的总体框架。（左图）描述了如何从不同构型下的双星—单星散射相互作用中测量混沌吸收率。（中图）描述了如何利用左图中的混沌吸收率测量结果，预测混沌三体相互作用的结果分布。（右图）描述了如何通过三体相互作用模拟，独立测量混沌三体结果分布。本文的目标是比较这一测得的结果分布与预测结果分布，以检验 Kol （2020）中提出的基于通量的理论的有效性。

导致即时弹射的规则散射（例如飞掠或规则交换）的概率。显然，$\mathrm{E}(u)$ 用于描述相空间划分为规则运动区域和混沌运动区域的情况。我们通常会省略形容词“混沌”，因为本文不讨论其他类型的发射率。

渐近通量 $dF(u)$体现了这样一个事实：该理论建立在开放的混沌系统框架上，而非封闭的混沌系统框架中；在这一框架下，相空间体积的通量取代体积本身，作为概率的度量。因此，该理论被称为基于通量的理论。为了对通量因子的形式有所了解，请注意，$2\pi\sqrt{k_s}/(-2\epsilon_B)^{3}/2$ 是双星周期，而分母中的因子l_B，l_F 分别源自相应系统的中心力性质。

根据定义，$\mathcal{E}(u)$ 的取值范围为 $0 \le \mathcal{E}(u) \le 1$。除此之外，到目前为止，它仍是渐近参数$u$的未知函数。这样，(1)就分离出了出射通量，并将确定 $d\Gamma(u)$ 的问题简化为确定$\mathcal{E}(u)$。推导过程见Kol (2020)。

3 测量方法

本节介绍测量方法的几个方面：边缘化、吸收判据，以及我们选择的参数值。

边缘化。微分衰变率 (1) 分布在结果参数 u构成的六维空间中。实际测量时，我们测量它在一组较少参数 v上的分布，从而

$$u = (v, w) \tag{7}$$

其中， w 表示其余结果参数。

边缘化衰变率定义为

$$\frac{d\Gamma}{dv}(v) := \int \frac{d\Gamma}{dvdw}(v, w)\, dw \tag{8}$$

约化式 (1)意味着它可以写成

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dv}(v) &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \int \mathcal{E}(v, w)\, \frac{dF}{dvdw}(v, w)\, dw \\ &= \frac{1}{\bar{\sigma}}\, \mathcal{E}(v)\, \frac{dF}{dv}(v)\end{aligned} \tag{9}$$

其中，边缘化渐近通量和吸收率定义为

$$\frac{dF}{dv}(v) := \int \frac{dF}{dvdw}(v, w)\, dw \tag{10a}$$

$$\mathcal{E}(v) := \frac{1}{dF/dv} \int \mathcal{E}(v, w)\, \frac{dF}{dvdw}(v, w)\, dw \tag{10b}$$

下一节将使用最后一个关系来定义边缘化或平均吸收率。换言之，这意味着对$\mathcal{E}$ 的平均是根据渐近通量加权的。请注意，除上述边缘化外，根据定义，测量$\mathcal{E}$ 还需要对双星相位（更准确地说，对平近点角）取平均（Kol 2020）。

实际上，我们考虑两种特定的边缘化。第一种边缘化是对近心点角 $w = (\psi_B,\ \psi_F)$ 进行边缘化。在这种情况下，通量加权相当于 $\int d\psi_B/(2\pi)\ d\psi_F/(2\pi)$，即均匀权重。其余的结果参数为 $v = (\epsilon_B,\ \vec{l}_B)$。

在第二次边缘化中，我们进一步对$\vec{\ }$ $\vec{\ }$与 l_B 和 L之间的 σ 角度进行边缘化，使 E 仅按 l_B大小分布，即 $v = (\epsilon_B,\ l_B)$。其上的积分测度为

σ 给定为

$$\frac{d\cos\sigma}{l_F} \equiv -\frac{dl_F}{L\,l_B} \tag{11}$$

其中 $l_F^2(\sigma) = L^2 + l_B^2 - 2\,L\,l_B$ 余弦 σ。特别地，我们记录下一般边缘化通量的显式表达式，以备后用（10a）

$$\frac{dF}{d\epsilon_B\,dl_B} \propto \frac{l_B}{(-\epsilon_B)^{3/2}}\,. \tag{12}$$

推导如下： $dF \propto d\epsilon_B/(-\epsilon_B)^{3/2}\,d^3l_B/(l_B\,l_F) = d\epsilon_B/(-\epsilon_B)^3/^2\,l_B\,dl_B\int d^2\Omega/l_F = d\epsilon_B/(-\epsilon_B)^{3/2}\,l_B\,dl_B 4\pi/L \propto d\epsilon_B\,l_B\,dl_B/(-\epsilon_B)^3/2$。倒数第二个表达式由牛顿壳层定理（与恒等式 (11) 相关）得到，该定理依赖于不等式 $l_B \le L$；对于当前情形的参数值，该不等式成立（本节稍后将详细说明）。

混沌吸收判据。本节第 4 节（第 4.2.1 节第二段以及方程 15 下方）将完整介绍这一判据。这里我们说明其动机并作非正式描述。

一般而言，三体系统所定义的入射态到出射态的映射，既包含规则岛，也包含混沌区域。对三体系统相图的研究（例如 Manwadkar 等人(2020) 的图 3）揭示了两类岛：一类与一次近距离遭遇相关，另一类则与连续两次近距离遭遇相关。

我们将近距离遭遇定义为两个天体彼此接近的状态，此时距离呈现层级关系，同时这两个天体在其质心参考系中的能量为正，也就是说，两者未被束缚。

这一观察表明，若一个时间演化过程中，在某个天体弹射出去之前发生了 3 次或更多次近距离遭遇，就可将其视为混沌吸收。然而，我们发现，足够接近等边构型或民主构型的数量，比近距离遭遇的次数更能作为稳健的观测量。通常，在弹射之前出现的民主构型数量，比近距离遭遇次数多一次（因为每个时间演化过程都始于一个民主构型，此后近距离遭遇和民主构型通常交替出现）。因此，若一个时间演化过程在某个天体逃逸或发生偏离过程之前，产生了 4 个或更多民主构型，我们就将其视为混沌吸收。对此可以非正式地概括为

$$\text{no. of democratic config's before 1st ejection} \ge 4 \implies \text{chaotic absorption} \tag{13}$$

参数值。我们选择相等的质量参数，这是最对称的选择，因此是很好的起点。质量设为 $m_1 = m_2 = m_3 = 15$，以 $\mathrm{M}_\odot$ 为单位，或者等价地，以 N-体质量单位表示。

这些守恒荷对应于一类状态，该状态由一个圆轨道双星和一个远处静止的第三体组成。这些是 Manwadkar 等人（2020，2021）用来测量结果分布的初始条件。在 N-体单位制中，牛顿引力常数设为 $1\ G = 1$，我们有 E =−27，$L = 75\sqrt{3}/2 \simeq 91$。86。这对应于一个半径为 5 个模拟长度单位的圆轨道双星，其质心与第三体之间的距离约为 100。此处双星常数 k_s（4）与 s 无关，即$k_s = k$，而守恒荷定义了一个无量纲参数 $2|E|L^2/k = 1$。2。

4 模拟

4.1 TSUNAMI N体代码

与 MKTL21 一样，我们使用正则化的 N体代码 TSUNAMI（Trani et al. 2019；Trani 与 Spera 2022）运行三体模拟。与其他积分器相比，TSUNAMI 的主要优势在于它实现了 Mikkola 与 Tanikawa（1999a，b）的算法正则化方案。该方案显著提高了积分精度，确保模拟在近距离遭遇期间不会停滞或损失精度。结合 Bulirsch-Stoer 外推方案（Stoer 等人 1980）和链坐标系（Mikkola 与 Aarseth 1993），使得 TSUNAMI 特别适合模拟少体相互作用。有关该代码的更多细节，请参阅 MKTL21 和（Trani 与 Spera 2022）。由于我们在此仅关注点质量的牛顿动力学，因此禁用了后牛顿修正（Blanchet 2014）和潮汐力（Hut 1981；Samsing 等人 2018）等附加力。同样，我们忽略粒子之间的碰撞。

为确定三体系统的状态，我们采用了与Manwadkar 等人（2020）和 MKTL21 使用的类似分类方案。在每个时间步，我们通过选出束缚最紧的一对，并检查其相对于第三体的相对能量，来判断三体系统的层级状态。如果第三体受到双星束缚，三体系统可能正处于偏离过程中；在此期间，被以低于逃逸速度弹出的单星对双星的扰动相对较小。为判断这一点，我们首先检查单星是否会扰动双星。具体做法是使用以下无量纲量比较双星的相对力与单星产生的潮汐力：

$$f_{\rm tid} = \frac{F_{\rm tid}}{F_{\rm rel}} = \frac{2m_{\rm bin}m_3}{m_1m_2}\left(\frac{a_{\rm bin}(1+e_{\rm bin})}{R}\right)^3, \tag{14}$$

其中，$m_{\rm bin} = m_1 + m_2$ 是双星的总质量，m_3 是单星的质量，R 是单星到双星质心的距离，$a_{\rm bin}$和$e_{\rm bin}$ 分别是双星的半长轴和偏心率。当$f_{\rm tid} \ge 1$时，潮汐力大于双星在远心点处的相对力，因此我们将该相互作用视为非层级的。反之，如果$f_{\rm tid} < 1$，则将该相互作用标记为候选层级偏离过程，并在$f_{\rm tid} \ge 1$ 再次成立时判定其结束。随后，我们将偏离持续时间$t_{\rm ex}$与候选偏离过程中$\langle P_{\rm in}\rangle$ 的双星周期中位数进行比较；只有前者长于后者（$t_{\rm ex} > \langle P_{\rm in}\rangle$）时，才将该相互作用标记为偏离过程。

我们还通过使用 $\mathcal{R}\mathcal{H}$ 中采用的相似半径的一个改进版本，来监测系统的层级结构Manwadkar 等人(2020)：

$$\tilde{R}_{\mathcal{H}} = \frac{3r_{\rm min}^2}{\sum_{i\neq j} r_{i,j}^2} \tag{15}$$

对于 $i, j = 1, 2, 3$，其中 $r_{i,j}$是粒子 i与 j之间的相对距离，而 $r_{\rm 最小}$ 表示最小粒子间距离，即 $r_{\rm 最小} = \min\{r_{i,j}\}$。该量的取值范围为 $0 \le \tilde{R}_{\mathcal{H}} \le 1$：˜极限 $\mathcal{R}\mathcal{H} = 1$ 对应等距构型（等边），而 $\tilde{R}_{\mathcal{H}} = 0$ 对应层级构型。修˜正后的相似半径 $\mathcal{R}\mathcal{H}$ 相较于 $\mathcal{R}\mathcal{H}$有一个优点：作为三角形几何的函数，它更加平滑，因为它的分母中不含最大值函数（这意味着 $\mathcal{R}\mathcal{H}$ 在层级等腰构型处是平滑的。）

˜每当 $\mathcal{R}\mathcal{H}$ 的值升至高于选定的阈值$\tilde{R}_{\mathcal{H},\ \mathrm{D}} = 0$。33，随后又降至低于 $\tilde{R}_{\mathcal{H},\ \mathrm{D}}$ 时，就计作一次足够接近等边（或拉格朗日）构型的情况，简而言之

民主构型。我们用 $N_{\rm D}$ 表示一次相互作用中出现的民主构型总数。

4.2 初始设置与判定方案

为了将混沌吸收率的测量结果与微分衰变率进行比较，我们采用不同的初始设置和停止条件，进行了两种不同类型的模拟。

4.2.1 混沌吸收率的测量

对于混沌吸收率，初始构型为双星与单体之间的一次双曲线遭遇。对于每组模拟，我们将总能量 E 和角动量L 保持为第 3 节最后部分所述的数值，并以网格方式探测双星能量 ϵ_B 和角动量 l_B 构成的参数空间。我们在 -30 和 -150之间等间距采样 ϵ_B的 100 个取值，并选择 l_B = 1.5、2.5、7.5、10、20、30、40、50、60、70。注意，ϵ_B–l_B空间存在一个禁区，其边界对应于圆轨道（见图 2），对于这些轨道

$$l_{B,\max}(\epsilon_B) = \sqrt{\frac{-k}{2\epsilon_B}} \tag{16}$$

（另见公式 6）。我们通过纳入以下模拟组来对这一区域边界进行采样：每个 $l_{B,\ \text{最大}}$ 均考虑 ϵ_B。我们选择的初始条件汇总于表 1。在所选参考系中，双星位于 x-y 平面内，近心点沿 x 轴。因此，我们设近心点幅角 ψ_B，并将双星轨道的倾角 i_B 设为零。我们对双星 M_b的平近点角、双曲线轨道的近心点幅角 ψ_F以及双曲线轨道的角动量 $\vec{l}_F$ 进行随机化。具体而言，大小 l_F 从区间 $[L-l_B, L+l_B]$中均匀抽取，遵循公式（11）；同时，调整双曲线轨道的倾角，以守恒 l_B 和 L。随后，从 $[0, 2\pi]$中均匀抽取双曲线轨道升交点经度。单星相对于双星质心的初始位置设为初始双星半长轴的 20 倍。

为了确定一次相互作用是否被混沌吸收，我们持续运行模拟，直到发生偏离过程。随后，根据上述判据，统计民主构型的数量 $N_{\rm D}$。如果 $N_{\rm D} \geq 4$，我们就认为该相互作用已被吸收。

上述集合旨在测量 $l_{\rm B}$-$\epsilon_{\rm B}$ 空间中的双变量混沌吸收率。此外，我们还通过固定双曲线轨道的角动量，运行一组网格模拟；

。这也可以理解为固定 $\vec{l}_B$ 与 $\vec{l}_F$ 之间的角度（见第5.2节）。这样，我们便可根据 lB,x、 lB,y 和 ϵB 测量三变量吸收率。对于这组数据，我们选取 ϵ_B，其取值范围为 -30 至 -160，间隔为 10；另选取 -160 至 -300，间隔为 20。对于每个 ϵ_B 值，我们在 $l_{B,x}$–$l_{B,y}$ 空间中取样一个网格，其中 $l_{B,x}$ 是与 $\vec{L}$ 对齐的 $\vec{l}_B$ 分量。利用 $\vec{l}_B$ $\vec{L}$ 之间的角度（我们称之为 σ，见第 3 节），l_B 的分量可写为 $l_{B,x} = l_B \cos\sigma$ 和 $l_{B,y} = l_B \sin\sigma$。$l_{B,x}$–$l_{B,y}$ 中的网格由切比雪夫节点构建，并叠加一个半径较小的均匀网格（见图3）。采用两个叠加网格的目的是提高圆盘中心和边缘处网格插值的精度。考虑到所需网格点数量及相应精度，这种网格设置被证明适用于圆盘插值且效率较高。受.....启发

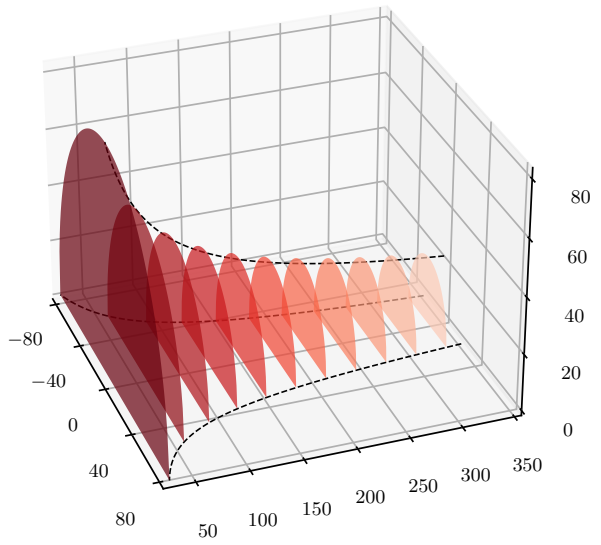

图 2。 三体相互作用结果分布的三维示意图。图中的每个半圆切片都对应于双星能量恒定的切片 $|\epsilon_{\rm B}|$。这些切片等同于图 5中的切片。

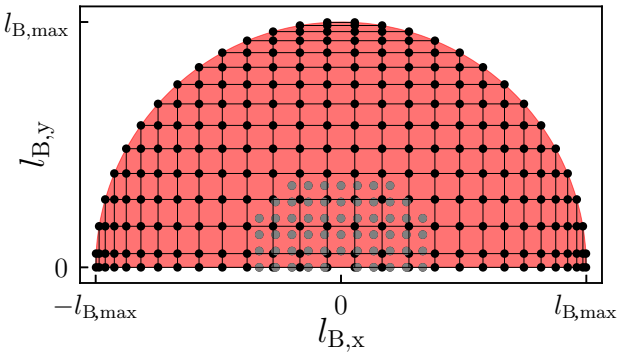

图3。 我们用于测量混沌吸收率的 $l_{\rm B,\ x} - l_{\rm B,\ y}$ 空间中的网格（在固定 $\epsilon_{\rm B}$的情况下）。在这些网格点上，我们分别进行一组双星-单星散射实验，以测量相应网格点处的混沌吸收率。为更好地对网格进行插值，我们使用两个相互叠加的网格。切比雪夫网格以黑色圆圈表示（并附有网格线以供参考）。较小的均匀网格以灰色圆圈表示。网格的详细信息请参见第 4.2.1 节。

对于一维切比雪夫网格，我们首先考虑半圆上的点 $(x_i,\ y_i)$（定义如下），然后按照网格状的方式连接所有这些点，从而构造二维类切比雪夫网格，如图 3所示。半圆上的点$(x_i,\ y_i)$ 定义如下：

$$(x_i, y_i) \in \left\{\left(l_{\rm B,max}\cdot\cos\left(\frac{2i-1}{2N}\pi\right), l_{\rm B,max}\cdot\sin\left(\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\right)\right\} \tag{17}$$

$$+\left\{(-l_{\rm B,max}, 0), (l_{\rm B,max}, 0)\right\} \tag{18}$$

对于偶数整数 N，取 $i \in \{1,\ 2,\ \cdots N\}$。较小的均匀网格覆盖半径为 $r = 0.4\cdot l_{\rm B,\ max}$ 的圆盘。对于二维切比雪夫网格，我们选择一个 $N = 28$ 值。

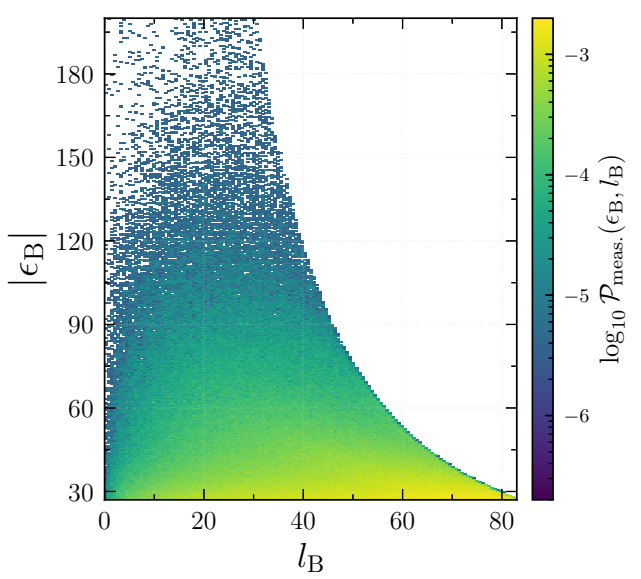

图4. 空间中发生混沌逃逸的相互作用的二维直方图分布。 $\epsilon_B - l_B$ 有关考虑发生混沌逃逸的相互作用时所采用的筛选条件，参见第 4.2.2 节。

4.2.2 结果分布的测量

对于结果分布，我们采用与 MKTL21 相同的初始条件。具体而言，我们模拟双星–单星遭遇，其中单星相对于双星质心初始静止（因此冲击参数未定义）。在此设置中，我们允许的仅有两个自由参数是双星的轨道相位，以及双星相对于连接双星质心与单星的直线的倾角。轨道相位在 0 与 2π之间均匀采样，而倾角则在余弦值 -1 与 1之间均匀采样。我们总共进行了 10^7 次实现。与测量混沌吸收的数值实验不同，我们运行模拟，直到发生最终解体。这组模拟的初始条件汇总于表 2。

由于本文关注的是混沌结果分布，我们必须对这个包含 10^7 个实现的总体应用适当的筛选条件，以分离出混沌逃逸。按照 Manwadkar 等人 （2020）和 MKTL21 中所进行的分析，我们首先根据整个三体相互作用的寿命进行筛选，以移除寿命较短的规则相互作用。这类筛选有助于移除相空间中的规则岛（见 Manwadkar 等人 2020 的图3）。具体而言，在本研究中，我们采用 $\tau_{寿命} > 50$ 年的筛选条件。此外，为确保发生混沌逃逸，我们仅考虑在弹射之前（但在最后一次偏离过程之后）具有 ≥ 4 个民主构型的相互作用。民主构型的定义与第 4.1 节所述双星-单星散射实验中使用的定义相同。通过这些筛选条件来分离混沌逃逸后，剩下的实现占总 10^7 个实现的 $\sim 11\%$。图 4 展示了这些发生混沌逃逸的相互作用的双星能量 ϵ_B 和角动量 l_B 的二维直方图分布。为检验我们的混沌逃逸样本是否合理，我们考察了3个等质量单星的弹射可能性。在混沌逃逸极限下，3个等质量单星的弹射概率应当相等，即为1/3。采用这些筛选条件后，我们得到3个质量的弹射概率分别为0.332、0.334和0.333。

	双变量 E (l_B, ϵ_B)	三变量 $\mathcal{E}(l_{B,x}, l_{B,y}, \epsilon_B)$
ϵ_B	U[−30, −150]	间隔为 [−30, −300]
l_B	间隔为 [1。5, 70]	在 $[0, l_{B,max}]$中采样
l_F	U ($L - l_B$, $L + l_B$)	切比雪夫网格，$l_{B,\ x}$–$l_{B,\ y}$

表1。 用于测量混沌吸收率的模拟组初始条件。 ϵ_B：双星的能量，以 N 体单位表示。 l_B：双星的角动量，以 N 体单位表示。 l_F：双星 - 单星双曲轨道的角动量，以 N体单位表示。 $\mathcal{U}(a,\ b)$：在 a和 b之间的随机均匀分布。每组共运行 10^5次实现。更多详情请参见第4.2.1节。

m [$M_\odot$]	a_{bin} [au]	λ [rad]	余弦 i
15	5	U (0, 2π)	U (1, −1)

表2。 用于测量结果分布的一组模拟的初始条件。 m：三个天体的质量。 a_{bin}：双星的半长轴。 λ：双星的真经度。 i：双星相对于连接双星质心与单星的直线的倾角。 $\mathcal{U}$：在 a和 b之间的随机均匀分布。我们总共进行了 10^7次实现。更多详情见第4.2.2节。

5 吸收率结果

本节中，我们将讨论使用模拟（如第 4.2.1 节所述）对混沌吸收率 E 进行的直接测量，以及理论预测的混沌结果分布与实测结果之间的比较。

5.1 三变量吸收

三变量吸收率是吸收率 $\mathcal{E}$ 作为三个变量的函数，即双星能量 ϵ_B，以及双星角动量在总角动量矢量方向上的两个分量（$l_{B,x}$ 和 $l_{B,y}$），其中 $l_{B,x}$ 与 $\vec{L}$ 对齐。图 2 给出了这一三维空间的可视化。

为研究三变量吸收，我们按照第 4.2.1 节所述，在三维网格上对 E 进行多次测量。随后，我们在各圆盘上对网格进行插值（圆盘对应于 ϵ_B 恒定的切片），以计算不同双星能量 ϵ_B 下的 E 值分布图。图 5 展示了双星能量从 $\epsilon_B = -40$ 到 $\epsilon_B = -300$ 时的这些分布图。较暗的颜色表示吸收率较低的区域，较亮的颜色则表示吸收率较高的区域。请注意，每个面板的颜色范围都经过调整，使最亮的颜色对应于该面板中的最大吸收率（E_{max}）。色标在 $[0, E_{max}]$范围内按吸收率线性缩放。作为参考，每个面板中的最大吸收率值标注在相应面板的右上角。每个面板中圆盘对应的双星能量值标注在相应面板的左上角。

观察图5，我们可以发现一些规律。双星能量不仅会影响 $\mathcal{E}$的最大值，也会影响圆盘上$\mathcal{E}$ 值的整体分布。

首先，随着双星能量值从高（$\epsilon_B = -40$）降至低（$\epsilon_B = -300$），圆盘中越来越大的一部分不会被吸收到混沌运动中（即吸收率较低）。这是因为双星变得越紧密（ϵ_B越小），入射单粒子就越难将其扰乱，使其达到

[1] 在 YouTube 上搜索“测得的三体混沌吸收率”，或从以下网址下载视频：http://phys.huji.ac.il/~barak_kol/resrch_supp/3body/3d_calE.mp4。

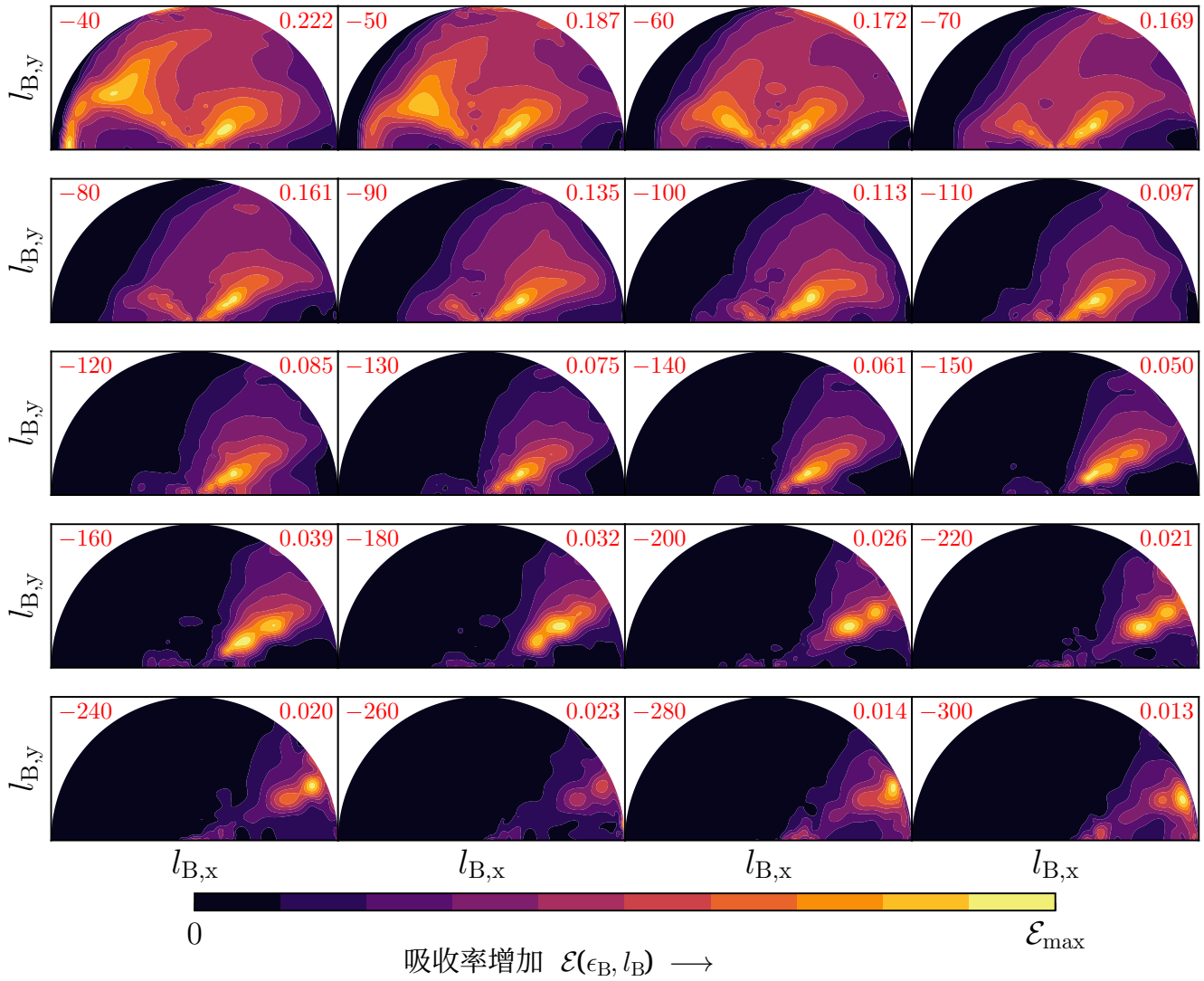

图 5. 混沌吸收率 E 随 $l_{B、x}$、$l_{B、y}$ 和 ϵ_B 变化的测量结果。注意，$l_{B、x}$、$l_{B、y}$ 是双星角动量的分量，而 ϵ_B 是双星能量。E $(l_{B、x}$、$l_{B、y}$、$\epsilon_B)$ 以一系列彩色等高线图呈现，每个二维切片对应于 ϵ_B 的一个固定值，该值显示在各面板的左上角。为清晰显示各面板中的吸收率结构，每个面板的颜色标度均相对于其最大吸收率值 E_{max} 进行缩放，该值显示在各面板的右上角。为了更清楚地观察这些吸收率结构如何随 ϵ_B 演变，我们根据这一系列切片制作了一段视频。请参阅 YouTube 或以下链接。[1]

粗略均分状态，也就是进入混沌运动。此外，双星越紧密，其携带的角动量 l_B就越少。因此，单星携带的总角动量中占比更大，因而会具有更大的冲击参数，从而更有可能发生非混沌相互作用。这些非混沌相互作用要么是掠过，要么是即时交换。

其次，随着双星间距缩小，零吸收率区域（深色区域）从负值到正值 $l_{B,x}$（从右向左）逐渐扩大。这是因为单星相对于双星运动呈逆行（反向旋转）或顺行（同向旋转）。对于 $\epsilon_B \gtrsim -120$，顺行和逆行遭遇似乎都具有正吸收率，尽管这只出现在略微偏离共面的情形中（$\sigma \approx 20°$），因为共面情形（$\sigma \approx 0°$ 或 $180°$）大多表现为规则运动。对于能量最低的双星（例如 $\epsilon_B \lesssim -200$），吸收率通常非常低，且仅在顺行运动的情形下（正值 $l_{B,x}$）才非零。总体而言，图中似乎表明，当单星相对于双星的运动为顺行时，更有可能发生混沌散射。

第三，正如图 5 所示，E 空间的整体结构相当复杂。例如，在 $\epsilon = l_{B,x} = l_{B,y} = 0$ 和 $l_{B,x} = -40$ 中可以观察到这两条高吸收率轨迹；随着 ϵ_B 减小，这些轨迹会穿过 $l_{B,x}$ $l_{B,y}$ 点。请注意，$l_{B,x}$ $l_{B,y}$ 点对应于双星角动量为零、单星拥有全部角动量的情形。本文不讨论这些吸收率结构的物理起源及其随 ϵ_B 的演化。

5.2 双变量吸收与预测结果分布

双变量吸收率是吸收率 $\mathcal{E}$ 关于双星能量的函数 ϵ_B 以及双星角动量 l_B。如图 1所示，测量双变量吸收率的目的是能够预测混沌三体

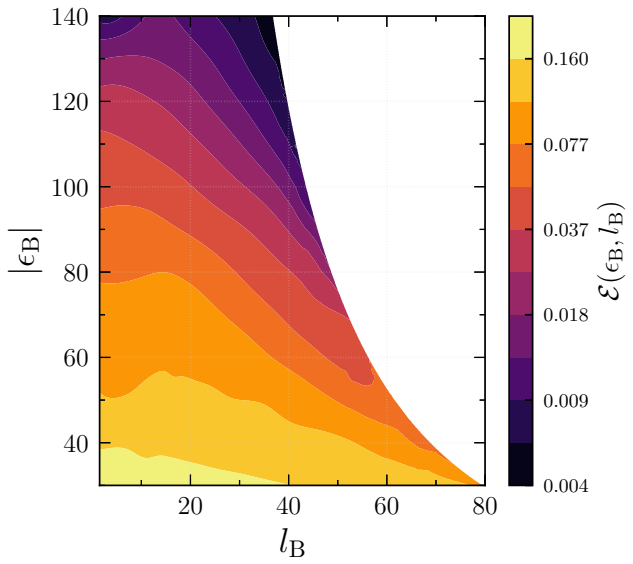

图6. 展示测得的双变量混沌吸收率 E 随双星能量 ϵ_B 和双星角动量 l_B 变化的等高线图。请注意，E 的等高线按对数间隔排列。

相互作用的结果分布，从而直接与模拟进行比较。本节将介绍我们对双变量吸收率的测量，以及由此得出的结果分布预测。

在三变量吸收率空间中，沿着 $l_B = \sqrt{l^2_{B,x} + l^2_{B,y}}$ 恒定的线，将~~具有相同~~ ϵ_B 的同心圆盘压缩后，便可直观呈现双变量吸收率分布（见图 2）。如第4.2.1节所述，为了计算双变量吸收率图，我们在 ϵ_B - l_B 空间的二维网格上运行多组模拟。为检验模拟结果的一致性，我们确认，在这个二维网格上测得的双变量吸收率，与通过对第5.1节测得的三变量吸收率进行边缘化而得到的双变量吸收率一致。对该网格进行二维插值后，我们在图6中展示了双变量吸收率图。请注意，等高线按对数间隔排列，但为便于阅读，相应的色标标签以线性值显示。如三变量吸收率图所示（见第5.1节），吸收率会随双星能量 ϵ_B 降低（或 $|\epsilon_B|$ 增大）而下降。在 ϵ_B 固定时，还可以观察到吸收率对双体角动量大小的依赖关系，这反映了图 5 中所见的复杂结构。

给定吸收率函数 $E(\epsilon_B,\ l_B)$，基于通量的统计理论预测如下结果分布

$$d\Gamma_s(\epsilon_B, l_B)_{\rm pred.} \propto \mathcal{E}(\epsilon_B, l_B) \cdot \frac{dF}{d\epsilon_B\, dl_B}\, d\epsilon_B\, dl_B \tag{19}$$

其中，边缘化通量由式（12）给出。

因此，我们通过以下步骤计算预测结果分布：i）取图6 中的吸收率网格，将每个网格点上的吸收率值乘以因子 $l_B/(-\epsilon_B)^{3}/2$；然后 ii）在整个网格上进行二维样条近似，以获得对结果分布的预测。请注意，将吸收率分布乘以该因子后，得到的结果分布不会归一化，因此我们必须通过一个常数对其进行显式归一化。然而，在这种情况下，我们不能像归一化概率分布那样，通过确保曲线下面积总和为一来归一化该分布。这是因为我们的 ϵ_B - l_B 网格所覆盖的区域仅限于空间中的某一部分，我们在该区域内计算吸收率（进而得到结果分布）：$\epsilon_B \in [-150, -30]$ 和 $l_B = [1。5, 70]$。为了能够与经过适当归一化的测得的结果分布进行比较，我们对预测结果分布进行缩放，使其在上述区域内的中位数与同一区域内测得的结果分布的中位数相匹配。请注意，此处归一化的具体数值并不重要，重要的是比较结果分布中相对的结构/概率。按照这些步骤，图7 左侧面板展示了我们预测的结果分布。

5.3 与测得的结果分布比较

如第4.2.2节所述，我们首先运行 10^7 次三体相互作用组成的系综，然后施加适当的筛选条件，以分离出混沌逃逸，从而测量混沌结果分布。图 7 右侧面板展示了测得的结果分布的等高线图。我们先将测得的结果分布分箱，得到归一化的二维直方图（见图 4）。从图 4可以看出，直方图边界上的分箱概率异常偏低，低于其紧邻的非边界分箱。提醒一下，边界是由于 $\epsilon_B - l_B$ 空间中存在禁区而形成的（见公式 16）。二维直方图出现这种边界效应，是因为直方图采用的矩形分箱与边界形状不相匹配。因此，在计算每个分箱中的概率密度时，分箱面积延伸到了边界之外，而分箱中的事件数/计数则完全位于边界之内，导致其概率密度相较于非边界邻近分箱异常偏低。为考虑这一效应，我们重新计算每个分箱的密度，仅计入位于边界内的分箱面积。需要注意的是，这并非完美的解决方案，但有助于减轻边界的影响。处理完这一问题后，我们再通过二维插值对直方图进行平滑，得到图 7右侧面板所示的等高线图。

图7 展示了我们预测的结果分布（左图）与模拟中测得的结果分布（右图）的并排对比。我们的预测结果与模拟测量结果相当相似。为进行直接比较，图8 的左图展示了将这两个分布的等高线叠加后的结果。总体而言，两者吻合良好；但在统计数据较少的区域（例如高 $|\epsilon_B|$ 和低 l_B）中，吻合程度有所下降。这很可能是因为在统计数据较少的区域，测得的结果分布受到插值不够稳健的影响。比较两者的另一种方法是考察这两个分布的残差比。图8 的右图展示了我们的预测结果分布与测得的结果分布之比（$P_{\rm pred.}/P_{\rm meas.}$）的等高线图。如果基于通量的理论成立，那么在整个 $\epsilon_B - l_B$ 空间中，该比值都应接近 1。如图所示，除受到 $P_{\rm meas.}$. 中统计数据较少影响的区域外，整个平面的大部分区域都吻合良好（~10% 的数值约为 1）。该等高线图的第 16 和第 84 个百分位数范围为 [0.94,1.05]，由此得到的误差估计为 ~ 6%。

总之，在统计数据良好的区域，我们发现，基于通量的理论对混沌结果分布的预测，与模拟中相应的测量结果吻合良好。

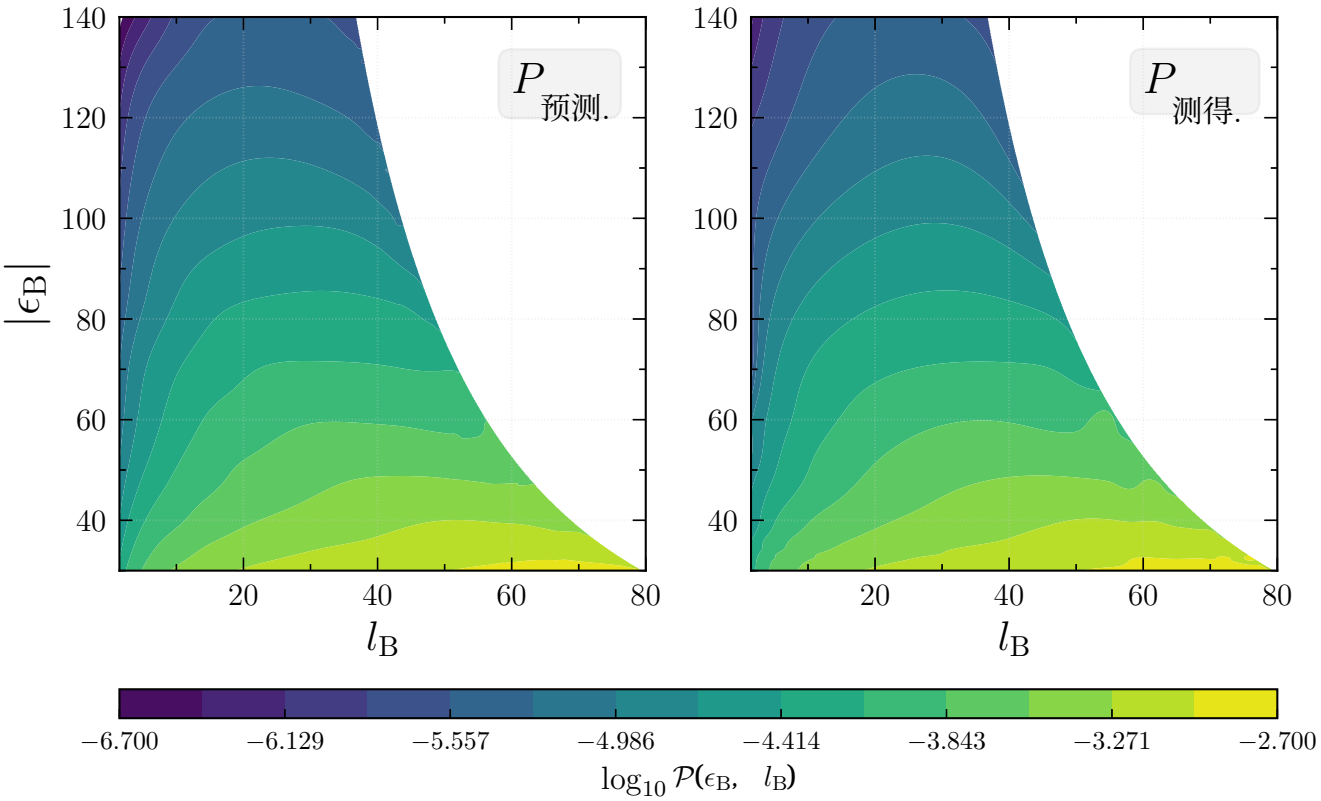

图7。 预测的（左）和测得的混沌结果分布，其为双星能量 ϵ_B 和双星角动量 l_B的函数。测得的结果分布（$P_{\rm meas.}$）通过运行一组由三体相互作用构成的集合并筛选出混沌逃逸来获得。预测结果分布（$P_{\rm pred.}$）通过计算混沌吸收率$\mathcal{E}$（通过第5节所述的双星-单星散射实验）获得，然后将其乘以通量因子（5）以得到上述预测结果。预测分布经过归一化因子缩放，使得上述区域中的中位概率值与测得的结果分布相同。有关此归一化的更多细节，请参阅第5.2 节。测得的混沌结果分布与理论预测的混沌结果分布之间存在显著相似性。

6 总结与讨论

结果总结。

• 我们首次测量了$\mathcal{E}$，即Kol (2020中定义的混沌吸收率函数。为便于具体说明，我们将质量设为相等，并测量了$\mathcal{E}$ 随其渐近守恒变量变化的函数关系，从而对两个近心点角取平均。结果见图5。我们采用的混沌吸收判据详见第3节。

• 我们通过（1、5、12）获得了通量理论所预测的结果分布。

• 我们通过两种方式改进了 MKTL21 中对混沌结果分布的测量：i）将三体等质量系统的数量从一百万次增加到一千万次实现；ii）调整了混沌逃逸的判据，详见第 5节，使其与本文混沌吸收率直接测量中所采用的判据一致。

• 最后，我们比较了预测的混沌结果分布与测量结果，发现二者吻合良好，见图7、8。

讨论。预测结果分布与测量结果分布在整个二维参数空间内的误差估计均不超过 ∼ 6%。我们认为这种吻合十分细致且精确。考虑到这一吻合是基于两个截然不同的测量量——吸收率和结果分布——这一点尤为难得。我们认为，残差源于结果分布平滑过程引入的误差，尤其是在参数空间边界附近；此外，在较大的$|\epsilon_B|$ 和较小的 l_B 条件下，结果统计量也较低。

开放问题。

• 构建混沌吸收率函数的解析模型。这类模型可以部分替代我们所进行的测量。图 5 表明，这并非易事。另一方面，在当前语境下，Ginat & Perets （2020）所发现的与结果分布之间的一致性，应被理解为对 $\mathcal{E}$的这类解析模型的一项提议。关于$\mathcal{E}$ 的解析模型将为改进双星—单星散射的解析模型铺平道路，见**??**，其中介绍了该主题的最新结果。

• 将结果统计扩展为三变量，从而与 E 的测量相匹配。

• 扩展 E 的测量。可以测量它随一个或两个近心点角的变化。此外，还可以将其扩展到不等质量的情况。

总之，我们证明了基于通量的统计理论所引入的三体结果统计简化方法的有效性Kol (2020)。

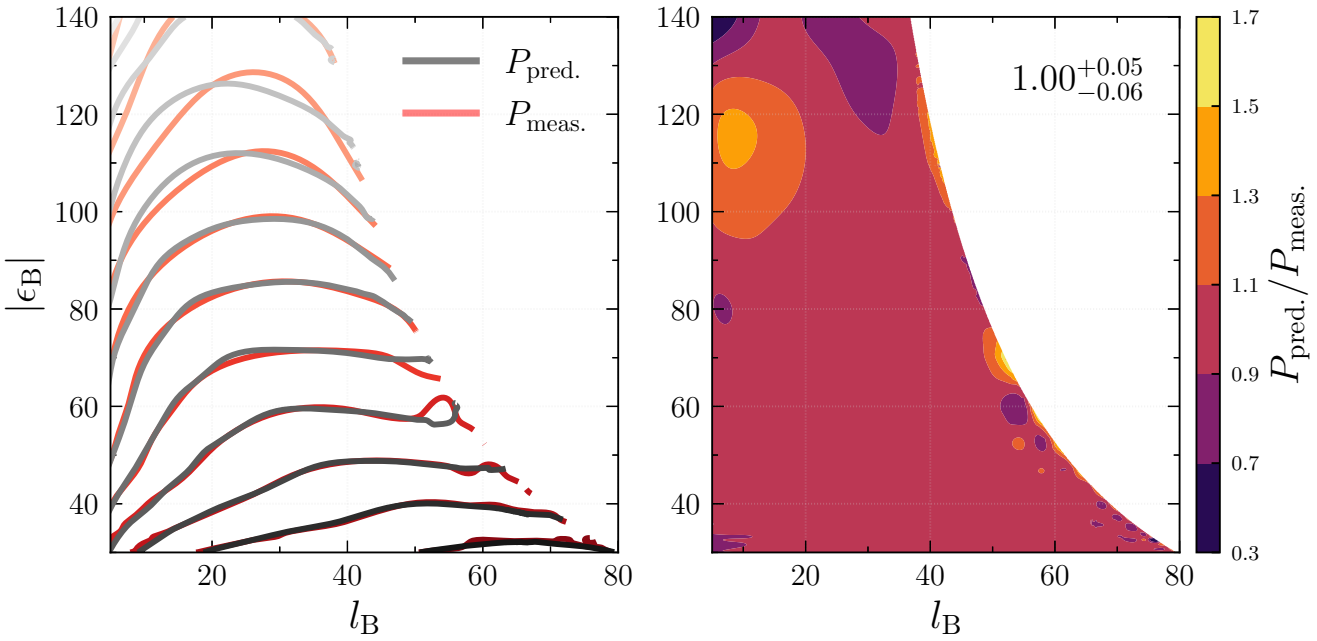

图8. 预测的（$P_{\rm pred.}$）与测量得到的（$P_{\rm meas.}$）结果分布的直接比较。（左图）叠加显示 $P_{\rm pred.}$ 和 $P_{\rm meas.}$的等高线图。请注意，这些等高线与图7中所示的相同。（右图）比值 $P_{\rm pred.}/P_{\rm meas.}$的彩色等高线图。右上角显示了图示区域内比值的第16和第84百分位数范围。

致谢

A.A.T. 感谢日本学术振兴会科研费（项目编号 21K13914）以及地平线2020通过高级 INTER-ACTIONS COFUND 奖学金提供的支持。BK 得到以色列科学基金会（项目编号 1345/21）的部分资助。本文的分析得益于以下免费软件包：`NumPy`(van der Walt 等，2011)、`Matplotlib`(Hunter，2007)、`emcee`(Foreman-Mackey 等，2013)和`Jupyter`(Kluyver 等，2016)。本研究广泛使用了美国国家航空航天局'的天体物理数据系统和 arXiv。

数据可用性

本文所依据的海啸代码、初始条件和模拟数据，可在合理请求下向通讯作者索取。

参考文献

AgekyanT.A.,AnosovaZ.P.,1967,Azh,44,1261 BlanchetL.,2014,《相对论生活评论》,17,2 Dandekar Y., Kol B., Lederer L., Mazumdar S., 2022, arXiv 电子预印本，第 arXiv:2205.04294 页Foreman-Mackey D., Hogg D. W., Lang D., Goodman J.,2013,《太平洋天文学会出版物》, 125,306Ginat Y. B., Perets H. B., 2020, arXiv 电子预印本，第 arXiv:2011.00010 页 Hunter J. D., 2007,《计算科学与工程》, 9, 90 Hut P., 1981,《天文学与天体物理学》，99, 126Kluyver T. 等，2016，载于 Loizides F., Scmidt B. 编，《学术出版中的定位与权力：参与者、代理人与议程》。IOS出版社，第 87–90 页，https://eprints.soton.ac.uk/403913/Kol B., 2020, arXiv 电子预印本，第 arXiv:2002.11496 页 Kol B., 2021, arXiv 电子预印本，第 arXiv:2107.12372 页

Manwadkar V., Trani A. A., Leigh N. W. C., 2020, MNRAS, 497, 3694 Manwadkar V., Kol B., Trani A. A., Leigh N. W. C., 2021, MNRAS, 506, 692 McMillan S. L. W., Hut P., 1996,《天体物理学杂志》, 467, 348 Mikkola S., Aarseth S. J., 1993, 天体力学与动力学天文学, 57, 439 Mikkola S., Tanikawa K., 1999a, 天体力学与动力学天文学, 74, 287 Mikkola S., Tanikawa K., 1999b, MNRAS, 310, 745 Monaghan J. J., 1976, MNRAS, 176, 63 庞加莱, 1890,《数学学报》, 13, 5 Samsing J., Leigh N. W. C., Trani A. A., 2018, MNRAS, 481, 5436 Stoer J., Bulirsch R., Mikulska M., 1980,《数值方法导论》。国家科学出版社 Stone N. C., Leigh N. W. C., 2019,《自然》, 576, 406 Trani A. A., Spera M., 2022, arXiv 电子预印本，第 arXiv:2206.10583 页 Trani A. A., Fujii M. S., Spera M., 2019,《天体物理学杂志》, 875, 42 Valtonen M., Karttunen H., 2006, 三体问题。剑桥大学出版社 van der Walt S., Colbert S. C., Varoquaux G., 2011,《计算科学与工程》, 13, 22

本文由作者提供的 TEX/LATEX 文件排版。