arXiv:2302.08313v1 [math.CA] 14 Feb 2023

矩阵拉盖尔-索博列夫多项式的双谱性

FRANCISCO MARCELLAN 和 IGNACIO ZURRIAN

摘要

本文研究关于 Sobolev 型内积正交的多项式序列。根据这类多项式序列所满足的高阶差分方程，可为其关联一个带状对称算子。考虑相应矩阵的达布变换后，我们推导出该多项式序列与另一正交多项式序列之间的联系；后者关联于 Sobolev 型内积标准部分中所涉及测度的 Christoffel 扰动。本文还阐述了它与矩阵正交多项式之间的联系，并以 Laguerre-Sobolev 型情形作为说明性示例进行研究。最后，指出了这类矩阵正交多项式的双谱性。

数学主题分类：主要分类：42C05，33C45。次要分类：15 A23，34L10。

关键词：标准正交多项式、Sobolev 型正交多项式、达布变换、矩阵正交多项式、双谱性。

1. Introduction

关于支撑在实数轴上的测度向量 $(d\mu_0, d\mu_1, \cdots, d\mu_N)$ 所关联的内积的研究引起了许多研究者的兴趣，因为标准正交多项式的许多性质在此情形下不再成立（参见综述论文 [MX15]）。特别是，乘法算子乘以 x 对于这类内积并不对称，因此，相应的正交多项式序列不满足三项递推关系，而这一关系在标准正交多项式理论中起着核心作用（参见 [Ch78]）。三项递推关系的矩阵对应形式是一个三对角矩阵，在文献中称为雅可比矩阵。此类雅可比矩阵的谱理论由来已久，并由此得出所谓的 Favard 定理（参见 [Ch78]）。假设对移位后的雅可比矩阵分别进行 LU和 UL 因式分解，那么上述因式分解中的矩阵之间的交换关系会产生新的雅可比矩阵，其谱分解分别给出典范的 Christoffel 变换和 Geronimus 变换（参见 [BM04], [GMM21], [Ga02], [Ga04] [Y02], [Z97], 等文献）。它们是二阶线性微分算子达布变换的离散对应形式。对雅可比矩阵先进行典范的 Christoffel 变换，再进行典范的 Geronimus 变换，所得雅可比矩阵的谱分解就是所谓的 Uvarov 变换，即通过添加一个狄拉克质量点来扰动初始谱测度。这类变换出现在对多项式系数为多项式的四阶微分算子进行谱分析的框架中

正如开创性研究 [HLK40] 中所分析的那样。

多重 Christoffel 变换的实现，即对典范 Christoffel 变换进行迭代，已在 [Ga04] 中得到研究。另一方面，在 [DGM14] 中，作者将注意力集中于更一般框架下的多重 Geronimus 变换。

当你处理与上述测度向量相关的 Sobolev 内积时，若 $d\mu_k, k = 1, 2, \cdots, N$ 支撑在实数轴的有限子集上，就会出现所谓的 Sobolev 型内积。相应的正交多项式序列与关于测度 $d\mu_0$. 的标准正交多项式序列“相差不远”。这一事实在 [AMRR92] 中已有指出：当 $N = 1$ 且 $d\mu_1$ 的支撑集是实数轴上的一点 c ，该点也可以是测度 $d\mu_0$ 的一个质量点；而在 [MR90] 中则指出，当 $d\mu_k = 0, k = 1, 2, \cdots, N - 1$，且 $d\mu_N$ 的支撑集是实数轴上的一点 c 时，也有类似结论。文献中已对这类正交多项式的代数和解析性质进行了广泛研究。特别是，当 $d\mu_0$ 为伽马分布时，多位作者研究了这样的微分算子：其相应的特征函数是关于 Sobolev 型内积的正交多项式，并假设测度 $d\mu_k, k = 1, 2, \cdots, N$ 的支撑集为 $\{0\}$.。开创性工作 [K90] 对这类微分算子的存在性及其显式表达式进行了深入研究（参见 [DI15], [KKB98], [KM93], [M19]）。当 $d\mu_0$ 为贝塔分布时，在质量位于支撑集端点之一的情况下，即 $\{\pm 1\}$ ，也进行了类似分析（参见 [DI18], [M21], [Ma21], [M22]）。

关于 Sobolev 型内积的正交多项式满足与多项式乘法算子相关的高阶递推关系。相对于上述内积，这样的算子是对称的。其逆命题是 Favard 定理的一个类比，已在 [D93] 中得到研究：给出了一般对称实双线性型的表示，使得存在一个多项式乘法算子 x^{N+1} ，该算子相对于此双线性型是对称的B；也就是说，相应的正交多项式序列满足对称的$2N + 3$ 递推关系。此外，以下事实彼此等价（见 [D93]中的推论 7）。

- 关于双线性型 B，乘以 x^{N+1} 的乘法算子是一个对称算子；它与乘法算子 x 可交换，即，如果 p、q是多项式，那么 $B(x^{N+1}p(x)\ xq(x)) = B(xp(x)\ x^{N+1}q(x))$，并且$B(x^j, x^k) = B(1, x^{j+k})\ 1 \le j,\ k \le N.$
- 存在一个函数 μ_0 以及常数 M_k、$1 \le k \le N$，使得

$$B(p(x), q(x)) = \int p(x)q(x)d\mu_0(x) + \sum_{k=1}^{N} M_k p^{(k)}(0)q^{(k)}(0).$$

In 特别地， [ELMMR95] 表明，对于一个 Sobolev 型内积

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\, g(x)\, d\mu(x) + \sum_{k=0}^{N} M_k f^{(k)}(c)g^{(k)}(c), \quad M_N > 0,$$

其中， c是 $\mathbb{R}$中的一点，乘以$(x - c)^{N+1}$的算子（记作 E）是一个对称算子，而正交多项式序列 $\{s_n\}_{n\ge 0}$ 满足一个$(2N + 3)$项

形式的递推关系

$$(x-c)^{N+1}s_n(x)=\sum_{k=n-N-1}^{n+N+1}a_{n,k}\,s_k(x).$$

换言之， $s_n(x)$是关于变量n 的线性差分算子 E 的特征函数，其特征值为（$x-c$）$^{N+1}$。注意，根据 [ELMMR95], ，如果你有一个 Sobolev 内积

$$\langle f,g\rangle=\sum_{k=0}^{N}\int f^{(k)}(x)\,g^{(k)}(x)\,d\mu_k(x)$$

并且关于上述内积，（$x-c$）$^{N+1}$ 对应的乘法算子是对称算子，那么 $d\mu_k(x)$ $k=1$、2、$\cdots$、 N是在 $x=c$处支撑的狄拉克δ函数，且 $d\mu_N(x)$的质量是一个正实数。

另一方面，定理 6 [D93] 证明了以下陈述等价。

- 关于双线性型 B，由 x^{N+1} 定义的乘法算子是对称的，且它与乘法算子 x可交换，即 $B(x^{N+1}p(x)$ $xq(x))$ =$B(xp(x)$ $x^{N+1}q(x))$，其中 p、 q 是多项式。
- 存在一个函数 μ_0 和一个半正定矩阵 M，使得

$$B(p(x),q(x))=\int p(x)q(x)d\mu_0(x)+(p(0),p'(0),\cdots,p^{(N)}(0))M(q(0),q'(0),\cdots,q^{(N)}(0))^t.$$

这种内积称为非对角型索博列夫内积。关于上述内积的正交多项式序列的零点和渐近性质已在 [AMRR95] 中研究。 $d\mu_0(x)$ 为伽马分布时，与双谱问题的联系已在 [DI20] 中研究。

本文的结构如下。在第 2 节中，我们证明，对算子 E（即 $E=LU$）进行达布变换，会得到算子 UL，其特征函数为与 $(x-c)^{N+1}d\mu(x)$ 相关的正交多项式。此外，我们证明， UL 实际上是关于测度 $(x-c)^{N+1}d\mu(x)$ 正交的多项式序列所满足的标准三项递推关系（简称 TTRR）的 $(N+1)$ 次幂。因此，当 $N=1$ 时，我们推广了 [HHLM22] 中给出的一个结果。该结果涉及乘法算子的矩阵表示——在标准正交基 $s_n(x)$ 下，该表示为一个五对角矩阵——与移位矩阵 J_2-cI 的平方之间的联系，其中 J_2 是与测度 $(x-c)^2d\mu(x)$ 相关的雅可比矩阵。

在第3节中，我们通过 [DvA95] 建立一种矩阵值方法。为此，我们考虑特定的 Laguerre-Sobolev 型正交多项式序列，以构造一个首一矩阵值正交多项式序列 $\{P_n\}_{n\geq 0}$，使其满足一个具有矩阵系数的三项递推关系，并进行达布变换，从而发现它与 [DS02] 中的结果存在一个非常有趣的联系。具体而言，我们从一个矩阵值三项递推关系出发

$$xP_n(x)=P_{n+1}(x)+(\zeta_{2n+1}+\zeta_{2n})P_n(x)+\zeta_{2n}\zeta_{2n-1}P_{n-1}(x),n\geq 0,P_{-1}(x)=0,$$

经过达布变换后，它导出另一个首一矩阵正交多项式序列 $\{Q_n\}_{n\geq 0}$所满足的三项递推关系

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + (\zeta_{2n+2} + \zeta_{2n+1})Q_n(x) + \zeta_{2n+1}\zeta_{2n}Q_{n-1}(x), n \geq 0, Q_{-1}(x) = 0.$$

这里，系数 ζ_n 满足

$$xW_n(x) = W_{n+1}(x) + \zeta_n W_{n-1}(x), n \geq 0, W_{-1}(x) = 0,$$

其中，$\{W_n\}_{n\geq 0}$ 是一列首一矩阵正交多项式，由 $W_{2n}(x) = P_n(x^2)$ $n \geq 0$ 给出，且 $W_{2n+1}(x) = xQ_n(x^2)$ $n \geq 0$。

最后，在第 4 节中，我们考虑具有 $\alpha \in \mathbb{N}$、$N = 1$ 和 $M_1 > 0$、$M_0 = 0$ 的 Laguerre-Sobolev 型内积，以构造一个 8 阶微分算子，使每个 P_n 都是其特征函数，从而揭示潜在的矩阵值双谱性。最后，我们证明，借助 [DvA95] 由双谱标量多项式构造的任意矩阵值正交多项式也具有双谱性。此外，我们给出一种通用且显式的方法来构造相应的微分算子。

2. Sobolev polynomials under Darboux transformation

给定一个概率测度 μ，其支撑集是实数轴上的一个无限子集，以及实数轴上的一点 c 和一个正整数 N，我们考虑以下内积：引言中提到的内积

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\, g(x)\, d\mu(x) + \sum_{j,k=0}^{N} M_{j,k} f^{(j)}(c) g^{(k)}(c), \tag{2.1}$$

其中 $(M_{j,\,k})_{j,\,k=0}^{N}$ 是一个大小为 $(N+1) \times (N+1)$ 的半正定矩阵，而另一个内积具有如下形式

$$\langle f, g\rangle_{N+1} = \int f(x)\, g(x)\, (x-c)^{N+1} d\mu(x). \tag{2.2}$$

现在，分别记 $\{s_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ 为关于 (2.1) 和 (2.2) 的正交归一多项式序列。显然，由于

$$\langle s_n, p_j\rangle_{N+1} = \langle s_n, (x-c)^{N+1} p_j\rangle_0 = \langle (x-c)^{N+1} s_n, p_j\rangle \tag{2.3}$$

对于 $j < n - N - 1$，其值等于 0，因此我们有

$$s_n(x) = \sum_{j=n-N-1}^{n} T_{n,j} p_j(x),$$

对于某些系数 $T_{n,\,j}$。

对于任意两列多项式 $\{\alpha_j\}_{j\geq 0}$和 $\{\beta_j\}_{j\geq 0}$，可以采用向量记法 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)^t$ 和 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots)^t$。此外，对于任意内积 $B(\cdot,\cdot)$，我们还可以考虑双线性型 $B(\alpha, \beta)$，它不过是一个半无限矩阵，其(j,k)项由 $B(\alpha_j, \beta_k)$给出。采用这一记法，若记 $s = (s_0, s_1, \dots)^t$, $p = (p_0, p_1, \dots)^t$，并定义半无限非奇异矩阵 $T = (T_{n,j})_{n,j=0}^{\infty}$，那么我们有 $s = Tp$，因此

$$\langle s, s\rangle_{N+1} = \langle Tp, Tp\rangle_{N+1} = TT^*.$$

在此需要回顾的是，根据定义，矩阵 T 不仅是下三角且非奇异的，而且在第（$N+1$）条次对角线以下的元素也均为零。

另一方面，我们有正交归一多项式序列 $\{s_n\}_{n\geq 0}$满足如下形式的（$2N+3$）项递推关系

$$(x-c)^{N+1}s_n(x)=\sum_{k=n-N-1}^{n+N+1}h_{n,k}\,s_k(x).$$

这定义了一个矩阵 H，使得

$$(x-c)^{N+1}s=Hs. \tag{2.4}$$

由于

$$\langle s,s\rangle_{N+1}=\langle Hs,s\rangle=H,$$

我们还有 H 的如下因式分解

$$H=TT^*.$$

由 (2.4) 可得

$$(x-c)^{N+1}s=TT^*s \quad \text{and} \quad (x-c)^{N+1}p=T^*Tp. \tag{2.5}$$

可总结如下。

定理 2.1. 对于任意一个 μ 支撑在实数轴的无限子集上的概率测度、实数轴上的一点 c 以及一个正整数 N，关于 $\{s_n\}_{n\geq 0}$ 的索博列夫型正交归一多项式序列

$$\langle f,g\rangle=\int f(x)\,g(x)\,d\mu(x)+\sum_{j,k=0}^{N}M_{j,k}f^{(j)}(c)g^{(k)}(c),$$

是关于 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ 的正交归一多项式序列通过达布变换得到的

$$\langle f,g\rangle_{N+1}=\int f(x)\,g(x)\,(x-c)^{N+1}d\mu(x),$$

借助（2.5）。也就是说，若我们考虑由 $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$给出的正交归一多项式序列所满足的三项递推关系，用 $xp=J_{N+1}p$表示，则对称矩阵（$J_{N+1}-c$）$^{N+1}$可分解为 T^*T，其中 $s=Tp$. 注意，矩阵$T=(T_{n,\,j})_{n,\,j=0}^{\infty}$ 可以显式计算

$$T_{n,j}=\begin{cases}\langle s_n,p_j\rangle_{N+1} & n-N-1\leq j\leq n,\\ 0 & \textit{elsewhere.}\end{cases}$$

作为上述定理的直接推论，当在（2.1）中$M_{j,\,k}=0$、j、k =0、1、$\cdots$、N时，我们得到

推论 2.2. 对于任何支撑集为实数轴上无限子集的概率测度 μ、实数轴上的一点 c 以及正整数 N，相对于 $\{q_n\}_{n\geq 0}$ 的正交归一多项式序列

$$\langle f,g\rangle_0=\int f(x)\,g(x)\,d\mu(x)$$

是关于.....的正交归一多项式序列 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ 的达布变换

$$\langle f,g\rangle_{N+1}=\int f(x)\,g(x)\,(x-c)^{N+1}d\mu(x).$$

具体而言，若我们用向量记法 $xp = J_{N+1}p$ 表示 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ 所满足的三项递推关系，则对称矩阵 $(J_{N+1}-c)^{N+1}$ 可分解为 C^*C，其中 $p = Cq$. 此外，

$$C_{n,k} = \begin{cases} \langle q_n, p_k\rangle_{N+1} & n-N-1 \leq k \leq n, \\ 0 & elsewhere. \end{cases}$$

最后请注意，根据 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ 向量记法$xp = J_{N+1}p$ 下满足的三项递推关系，我们有

$$(x-c)^{N+1}p = (J_{N+1}-c)^{N+1}p.$$

根据上文的讨论，$(J_{N+1}-c)^{N+1}$ 可以进行 UL 因式分解，其中 $U = L^*$；当然，这种分解并不唯一。我们推测，所有此类因式分解都会导出上文已经讨论过的某个族。

3. Matrix-valued orthogonal polynomials

本节将仅讨论 $c = 0$ 这一特殊情形。此外，出于篇幅考虑，我们将简化记法，考虑 $\alpha = 0$、 $N = 1$ 以及内积

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx + f'(0)g'(0). \tag{3.6}$$

感兴趣的读者可以验证，本节的结果对于更一般的 α 和 N. 也成立。尽管如此，我们认为，采用$\alpha = 0$ 的 2×2 矩阵值构造足以说明这一情形。

记 $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 0}$ 为关于内积 (3.6) 的正交归一多项式序列。因此有

$$x^2\mathcal{L}_n(x) = a_n\mathcal{L}_{n+2}(x) + b_n\mathcal{L}_{n+1}(x) + c_n\mathcal{L}_n(x) + b_{n-1}\mathcal{L}_{n-1}(x) + a_{n-2}\mathcal{L}_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

with

$$a_n = \sqrt{\frac{(2\,n^2+7\,n+9)(2\,n^2-5\,n+6)(n+4)(n+2)(n+1)^3}{(2\,n^2+3\,n+4)(2\,n^2-n+3)(n+3)}},$$

$$b_n = 4\sqrt{\frac{(4\,n^7+16\,n^6+13\,n^5+10\,n^4+43\,n^3+64\,n^2+84\,n+36)^2(n+1)}{(2\,n^2+3\,n+4)(2\,n^2-n+3)^2(2\,n^2-5\,n+6)(n+3)(n+2)^2}},$$

$$c_n = 2\sqrt{\frac{(12\,n^8+12\,n^7-23\,n^6+57\,n^5+82\,n^4-81\,n^3+37\,n^2+120\,n+36)^2}{(2\,n^2-n+3)^2(2\,n^2-5\,n+6)^2(n+2)^2(n+1)^2}}.$$

设 $\{R_{0,n}\}_{n\geq 0}$、 $\{R_{1,n}\}_{n\geq 0}$ 为满足对任意 n 的多项式序列

$$\mathcal{L}_n(x) = xR_{1,n}(x^2) + R_{0,n}(x^2).$$

于是，按照 [DvA95], ，我们构造矩阵值多项式

$$R_n(y) = \begin{pmatrix} R_{0,2n}(y) & R_{1,2n}(y) \\ R_{0,2n+1}(y) & R_{1,2n+1}(y) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

序列 $\{R_n\}_{n\geq 0}$ 满足矩阵三项递推关系

$$xR_n(y) = A_{n-1}^*R_{n-1}(y) + B_nR_n(y) + A_nR_{n+1}(y), n \geq 0, \tag{3.8}$$

其中 A_n、 B_n 分别由下式给出

$$
\begin{aligned}
A_{n\,0,0} =& \frac{2\sqrt{8\,n^2+14\,n+9}\sqrt{4\,n^2-5\,n+3}(2\,n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{8\,n^2-2\,n+3}\sqrt{4\,n^2+3\,n+2}\sqrt{2\,n+3}},\\
A_{n\,0,1} =& 0,\\
A_{n\,1,0} =& -\frac{4\left(256\,n^7+1408\,n^6+3088\,n^5+3640\,n^4+2692\,n^3+1414\,n^2+570\,n+135\right)\sqrt{n+1}}{\sqrt{8\,n^2+14\,n+9}\sqrt{8\,n^2-2\,n+3}(4\,n^2+3\,n+2)(2\,n+3)\sqrt{n+2}},\\
A_{n\,1,1} =& \frac{2\sqrt{8\,n^2-2\,n+3}\sqrt{4\,n^2+11\,n+9}\sqrt{2\,n+5}\sqrt{2\,n+3}(n+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{8\,n^2+14\,n+9}\sqrt{4\,n^2+3\,n+2}\sqrt{n+2}},\\
B_{n\,0,0} =& \frac{2\left(768\,n^8+384\,n^7-368\,n^6+456\,n^5+328\,n^4-162\,n^3+37\,n^2+60\,n+9\right)}{(8\,n^2-2\,n+3)(4\,n^2-5\,n+3)(2\,n+1)(n+1)},\\
B_{n\,0,1} =& -\frac{4\left(128\,n^7+256\,n^6+104\,n^5+40\,n^4+86\,n^3+64\,n^2+42\,n+9\right)\sqrt{2\,n+1}}{(8\,n^2-2\,n+3)\sqrt{4\,n^2+3\,n+2}\sqrt{4\,n^2-5\,n+3}\sqrt{2\,n+3}(n+1)},\\
B_{n\,1,0} =& -\frac{4\left(128\,n^7+256\,n^6+104\,n^5+40\,n^4+86\,n^3+64\,n^2+42\,n+9\right)\sqrt{2\,n+1}}{(8\,n^2-2\,n+3)\sqrt{4\,n^2+3\,n+2}\sqrt{4\,n^2-5\,n+3}\sqrt{2\,n+3}(n+1)},\\
B_{n\,1,1} =& \frac{2\left(768\,n^8+3456\,n^7+6352\,n^6+6744\,n^5+5128\,n^4+2898\,n^3+1099\,n^2+303\,n+63\right)}{(8\,n^2-2\,n+3)(4\,n^2+3\,n+2)(2\,n+3)(n+1)}.
\end{aligned}
$$

因此， $\{R_n\}_{n\geq 0}$ 是关于下式给出的半正定矩阵值内积的一列矩阵正交归一多项式

$$
\langle F,G\rangle = \int_0^\infty F(y)\begin{pmatrix}1 & \sqrt{y}\\ \sqrt{y} & y\end{pmatrix}G^*(y)e^{-y}dy + F(0)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}G^*(0),
$$

对于 2×2 矩阵值函数 F,G。

现在，我们将探讨上述矩阵三项递推关系的达布过程，并将其应用于首一矩阵正交多项式。由于 R_n 的首项系数为

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\sqrt{4\,n^2-5\,n+3}\sqrt{2\,n+1}}{4\sqrt{8\,n^2-2\,n+3}(2\,n-1)\sqrt{n+1}(n-1)n(2\,n-3)!} & 0\\
\frac{\left(8\,n^3+6\,n^2-5\,n+3\right)(2\,n+1)}{4\sqrt{8\,n^2-2\,n+3}\sqrt{4\,n^2+3\,n+2}\sqrt{2\,n+3}(2\,n-1)(2\,n-3)\sqrt{n+1}(n-1)n(2\,n-4)!} & \frac{-\sqrt{8\,n^2-2\,n+3}\sqrt{n+1}}{\sqrt{4\,n^2+3\,n+2}\sqrt{2\,n+3}(2n)!}
\end{pmatrix},
$$

我们可以显式地构造首一矩阵正交多项式序列 $\{P_n\}_{n\geq 0}$。它们满足一个矩阵三项递推关系，使得相应的 (2×2) 分块雅可比矩阵可分解为 LU，其中 L 是分块下三角矩阵，U 是分块上三角矩阵。根据定理 2.1，达布变换将产生一个首一矩阵多项式序列 $\{Q_n\}_{n\geq 0}$，它们关于权 e^{-y} 乘以 $y=x^2$ 正交。更准确地说，序列 $\{P_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ 满足

$$
\begin{aligned}
xP_n(x) =& P_{n+1}(x) + (\zeta_{2n+1}+\zeta_{2n})P_n(x) + \zeta_{2n}\zeta_{2n-1}P_{n-1}(x), n\geq 0,\\
xQ_n(x) =& Q_{n+1}(x) + (\zeta_{2n+2}+\zeta_{2n+1})Q_n(x) + \zeta_{2n+1}\zeta_{2n}Q_{n-1}(x), n\geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

其中

$$
\zeta_{2n} = \begin{pmatrix}
-\frac{2\left(16\,n^2-12\,n-9\right)(2\,n-1)^2(n-1)n}{(4\,n^2-5\,n+3)(2\,n+1)} & \frac{4\left(8\,n^3-12\,n^2+4\,n+3\right)n}{(4\,n^2-5\,n+3)(2\,n+1)}\\
-\frac{2\left(16\,n^3-40\,n^2+28\,n-3\right)(2\,n+1)(2\,n-1)^2n}{4\,n^2-5\,n+3} & \frac{2\left(16\,n^3-36\,n^2+29\,n-6\right)(2\,n+1)n}{4\,n^2-5\,n+3}
\end{pmatrix},
$$

$$
\zeta_{2n-1} = \begin{pmatrix}
-\frac{2\left(32\,n^4+8\,n^3-14\,n^2+7\,n+3\right)(2\,n-1)n}{(4\,n^2-5\,n+3)(2\,n+1)} & \frac{4\left(8\,n^3-2\,n+3\right)n}{(4\,n^2-5\,n+3)(2\,n+1)}\\
-\frac{2\left(32\,n^4+16\,n^3-32\,n^2+14\,n+9\right)(2\,n+1)(2\,n-1)n}{4\,n^2-5\,n+3} & \frac{2\left(16\,n^3+4\,n^2-15\,n+12\right)(2\,n+1)n}{4\,n^2-5\,n+3}
\end{pmatrix}.
$$

这些三项递推关系通过达布变换相互关联。具体来说，我们有

$$x\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_4\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\\zeta_2&1&0&0&\cdots\\0&\zeta_4&1&0&\cdots\\0&0&\zeta_6&1&\ddots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\zeta_1&1&0&0&\cdots\\0&\zeta_3&1&0&\cdots\\0&0&\zeta_5&1&\ddots\\0&0&0&\zeta_7&\ddots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_4\\\vdots\end{pmatrix},$$

$$x\begin{pmatrix}Q_0\\Q_1\\Q_2\\Q_4\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\zeta_1&1&0&0&\cdots\\0&\zeta_3&1&0&\cdots\\0&0&\zeta_5&1&\ddots\\0&0&0&\zeta_7&\ddots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\\zeta_2&1&0&0&\cdots\\0&\zeta_4&1&0&\cdots\\0&0&\zeta_6&1&\ddots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_0\\Q_1\\Q_2\\Q_4\\\vdots\end{pmatrix}.$$

公式（3.9）可与 [DS02 引理 3.3] 相比较。

值得 注意， $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ 的三项递推关系的系数更为简洁。事实上 ，

$$\zeta_{2n+2}+\zeta_{2n+1}=4(n+1)\begin{pmatrix}-(4\,n+3)(2\,n+1)&2\\-2\left(4\,n^2+8\,n+5\right)(2\,n+3)(2\,n+1)&(4\,n+5)(2\,n+3)\end{pmatrix},$$

$$\zeta_{2n+1}\zeta_{2n}=4(n+1)n(2n+1)\begin{pmatrix}-(8\,n+3)(2\,n-1)&4\\-4\,(2\,n+3)(2\,n+1)^2(2\,n-1)&(8\,n+5)(2\,n+3)\end{pmatrix}.$$

这与第 2 节的结果相一致。事实上，首一矩阵多项式序列 $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ 由一个多项式序列构成，该序列满足一个五项递推关系；正如我们上文所证明的，这个递推关系是标准三项递推关系的平方迭代，因此我们可以得到其系数的一个非常简单的表达式。

4. 矩阵值双谱性

一旦认识到由 (3.7) 给出的矩阵值多项式序列 $\{R_n\}_{n\geq 0}$ 通过达布变换与经典标准正交多项式相关联，自然就会去寻找矩阵线性微分方程。与上一节一样，我们将设定 $c=0$、 $\alpha=0$、 $N=1$ 以及内积 (3.6)，作为初步示例；最后再讨论任意大小的 $N+1$ 和一般系数。

经过直接计算可以看出，对于以下 2×2 矩阵值算子，

$$\mathfrak{D}=\sum_{k=0}^{8}\frac{d^k}{dx^k}D_k(x),$$

作用于多项式 $R_n(x)$ 的右侧，得到

$$R_n(x)\mathfrak{D}=\Lambda_n R_n(x),$$

其中

$$D_0=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -3 & 3\end{pmatrix},\quad D_1=\begin{pmatrix} 9\,y-6 & -12\\ -105\,y+54 & 24\,y\end{pmatrix},$$
$$D_2=\begin{pmatrix} 27\,y^2+474\,y-72 & -276\,y\\ -6\,(151\,y+459)y & 3\,(19\,y+1100)y\end{pmatrix},$$
$$D_3=\begin{pmatrix} 24\left(y^2+166\,y+93\right)y & -12\,(53\,y+570)y\\ -4\,(287\,y+6852)y^2 & 8\left(4\,y^2+1278\,y+2205\right)y\end{pmatrix},$$
$$D_4=\begin{pmatrix} 4\left(y^2+1080\,y+4701\right)y^2 & -8\,(37\,y+2253)y^2\\ -8\,(47\,y+4908)y^3 & 4\left(y^2+1770\,y+14301\right)y^2\end{pmatrix},$$
$$D_5=\begin{pmatrix} 96\,(13\,y+252)y^3 & -32\,(y+348)y^3\\ -32\,(y+534)y^4 & 384\,(4\,y+123)y^3\end{pmatrix},$$
$$D_6=\begin{pmatrix} 96\,(y+101)y^4 & -2208\,y^4\\ -2656\,y^5 & 32\,(3\,y+443)y^4\end{pmatrix},$$
$$D_7=\begin{pmatrix} 1408\,y^5 & -128\,y^5\\ -128\,y^6 & 1664\,y^5\end{pmatrix},\quad D_8=\begin{pmatrix} 64\,y^6 & 0\\ 0 & 64\,y^6\end{pmatrix}$$

and

$$\Lambda_n=\begin{pmatrix} \left(4\,n^3-n+6\right)n & 0\\ 0 & \left(2\,n^3+3\,n^2+n+3\right)(2\,n+1)\end{pmatrix}.$$

此外，容易验证，不存在阶数小于 8、以 $\{R_n\}_{n\geq 0}$ 为特征函数的线性微分算子。另一方面，[KKB98]中的结果证明了存在一个阶数为 $2\alpha+8$ 的线性微分算子（见 [KKB98, 定理 3.1]）。当然，这并非巧合，下面我们将对此加以说明。

4.1. 一般阶数下的双谱性。按照 [DvA95，第 265],页中的构造，设 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\{s_n\}_{n\geq 0}$ 为满足（$2N+3$）项递推关系的一列正交归一多项式

$$x^{N+1}s_n(x)=\sum_{k=0}^{N+1}\left(c_{n,k}s_{n-k}(x)+\overline{c_{n+k,k}}s_{n+k}(x)\right),n\geq 0,$$

其中$c_{n,\ k}$ 为复数，$c_{n,\ N}=0$ 对任意 n，s_n 的次数为 n，且 $s_n=0$对于 $n<0$成立。

对于任意 n，设 $R_{k,\ n}$、$k=0$、.....、n 为满足以下条件的多项式

$$s_n(x)=R_{0,n}(x^{N+1})+xR_{1,n}(x^{N+1})+\cdots+x^NR_{N,n}(x^{N+1}).$$

Let

$$R_n(y)=\begin{pmatrix} R_{0,(N+1)n}(y) & R_{1,(N+1)n}(y) & \cdots & R_{N,(N+1)n}(y)\\ R_{0,(N+1)n+1}(y) & R_{1,(N+1)n+1}(y) & \cdots & R_{N,(N+1)n+1}(y)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ R_{0,(N+1)n+N}(y) & R_{1,(N+1)n+N}(y) & \cdots & R_{N,(N+1)n+N}(y)\end{pmatrix}.\tag{4.10}$$

在 [DvA95] 中证明了，$\{R_n\}_{n\geq 0}$ 是一个满足三项递推关系的矩阵多项式序列。我们将证明，若存在一个微分算子 D，使得每个 $s_n(x)$ 都是其特征函数，那么就存在一个矩阵值微分算子，使得每个 $R_n(y)$ 都是其特征函数。

在陈述定理之前，先引入一些记号。用 w 表示 $(N+1)$ 次单位根 $e^{i\frac{2\pi}{N+1}}$。对于 $y \neq 0$，用 $|y|^{\frac{j-1}{N+1}}$ 表示其唯一的正 $(N+1)$ 次根。于是，y 的所有 $(N+1)$ 次根为 $x = w^j|y|^{\frac{j-1}{N+1}}$，其中 $j = 0, 1, \dots, N$。给定一个系数属于变量 x 的微分算子 D，我们将其记为$D(x)$，以强调变量的作用；并用 $D\left(w^j|y|^{\frac{j-1}{N+1}}\right)$ 表示经变量替换 $x \to w^j|y|^{\frac{j-1}{N+1}}$ 后得到的算子。

定理 4.1. 假设存在一个具有多项式系数的（标量值）线性微分算子 $D(x)$，使得

$$D(x)\, s_n(x) = \lambda_n\, s_n(x), \quad n = 0, 1, \dots.$$

我们考虑作用于右侧的矩阵值微分算子 $\mathfrak{D}(y)$，其形式为

$$\mathfrak{D}(y) = A(y)\, B\, C(y)\, B^{-1}\, A(y)^{-1},$$

其中，$A(y)$ 是一个对角矩阵，B 是一个常数矩阵，$C(y)$ 是一个作用于右侧的（对角）矩阵值算子，它们的大小均为 $(N+1) \times (N+1)$，并且满足

$$A(y)_{j,j} = |y|^{\frac{j-1}{N+1}}, \quad B_{j,k} = w^{(j-1)(k-1)}, \quad C(y)_{j,j} = D\left(w^{j-1}|y|^{\frac{1}{N+1}}\right).$$

Then

$$R_n(y)\, \mathfrak{D}(y) = \Lambda_n R_n(y),$$

其中，R_n 是式（4.10）中给出的 $(N+1) \times (N+1)$ 矩阵值多项式，而 Λ_n 是对角特征值矩阵

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_{(N+1)n} & & & \\ & \lambda_{(N+1)(n+1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{(N+1)N} \end{pmatrix}.$$

证明。考察元素 $(R_n(y)\, A(y) B)_{j,\,k}$ 我们有

$$\begin{pmatrix} R_{0,(N+1)n+j-1}(y) & R_{1,(N+1)n+j-1}(y) & \dots & R_{N,(N+1)n+j-1}(y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} |y|^{\frac{0}{N+1}} w^{0(k-1)} \\ |y|^{\frac{1}{N+1}} w^{1(k-1)} \\ \dots \\ |y|^{\frac{N}{N+1}} w^{N(k-1)} \end{pmatrix}$$

即

$$R_{0,(N+1)n+j-1}(y)|y|^{\frac{0}{N+1}} w^{0(k-1)} + \dots + R_{N,(N+1)n+j-1}(y)|y|^{\frac{N}{N+1}} w^{N(k-1)} = s_{(N+1)n+j-1}\left(|y|^{\frac{1}{N+1}} w^{(k-1)}\right).$$

Since $\left(\left(R_n(y)\,A(y)B\right)\,C(y)\right)_{j,k} = D(w^{k-1}|y|^{\frac{1}{N+1}})\left(\left(R_n(y)\,A(y)B\right)_{j,k}\right)$, we have

$$\begin{aligned}\left(R_n(y)\,A(y)B\,C(y)\right)_{j,k} =& D(w^{k-1}|y|^{\frac{1}{N+1}})\left(s_{N,(N+1)n+j-1}\left(|y|^{\frac{1}{N+1}}w^{(k-1)}\right)\right)\\ =&\lambda_{(N+1)n+j-1}s_{(N+1)n+j-1}\left(|y|^{\frac{1}{N+1}}w^{(k-1)}\right)\\ =&\lambda_{(N+1)n+j-1}\left(R_n(y)\,A(y)B\right)_{j,k}.\end{aligned}$$

这意味着 $R_n(y)\,A(y)BC(y) = \Lambda_n R_n(y)\,A(y)B$.

Thus

$$R_n(y)\,A(y)B\,C(y)\,B^{-1}\,A(y)^{-1} = \Lambda_n R_n(y),$$

由此得到所需结论。 □

请注意，当 α 为正整数时，克拉尔-拉盖尔正交多项式（标准正交多项式的一个例子）的双谱性已在 [DI20] 中采用另一种方法进行了研究。

Acknowledgements

F. Marcell´an 的研究得到了西班牙欧洲区域发展基金/科学与创新部—国家研究署的资助，项目编号为 PID2021-122154NB-I00；此外，还获得马德里自治区政府（马德里自治区，西班牙）在与马德里卡洛斯三世大学签订的多年协议下、大学教授卓越项目的资助，项目编号为 EPUC3M23，该项目属于第五期区域研究与技术创新计划。作者 Ignacio Zurri´án 的研究部分得到了阿根廷国家科学与技术研究委员会和 VI PPIT-US 的资助。

References

[AMRR92] M. Alfaro, F. Marcell´an, M. L. Rezola 和 A. Ronveaux, 《关于 Sobolev 型正交多项式：代数性质与零点》。 *SIAM J. Math. Anal.*, 23 (3):737–757,1992。[AMRR95] M. Alfaro, F. Marcell´an, M. L. Rezola 和 A. Ronveaux, 《Sobolev 型正交多项式：非对角情形》。 *J. Approx. Theory* 83 (2): 266-287, 1995。[BM04] M. I. Bueno 和 F. Marcell´an, 《达布变换与线性泛函的扰动》, *Linear Algebra Appl.*, 384:215-242, 2004。[Ch78] T. S. Chihara, 《正交多项式导论》。Gordon and Breach, 纽约。1978[DGM14] M. Derevyagin, J. C. Garc´ıa-Ardila 和 F. Marcell´an, 《多重 Geronimus 变换》。*Linear Algebra Appl.*, 454:158–183, 2014。[DS02] H. Dette 和 W. J. Studden, 《区间上的矩阵测度、矩空间与 Favard 定理》 $[0,1]$ 和 $[0,\infty)$。 *Linear Algebra Appl.*, 345(1-3):169-193, 2002。[D93] A. J. Dur´an, 《满足递推关系的多项式的 Favard 定理推广》。 *J. Approx. Theory*, 74(1):83-109, 1993。[DI15] A. J. Dur´an 和 M. D. de la Iglesia, 《离散拉盖尔-索博列夫正交多项式的微分方程》。 *J. Approx. Theory*, 195:70-88, 2015。[DI18] A. J. Dur´an 和 M. D. de la Iglesia, 《离散雅可比-Sobolev 正交多项式的微分方程》。 *J. Spectr. Theory*, 8 (1):191-234, 2018。[DI20] A. J. Dur

´

Integral Transforms an 和 *Spec. Funct.* 31 2 133 151, 2020
M. D. de la Iglesia, 《双谱拉盖尔型多项式》。, ( ): - 。[DvA95] A. J. Dur´an 和 W. Van Assche, 《正交矩阵多项式与高阶递推关系》。 *Linear Algebra Appl*, . 219:261-280, 1995。[ELMMR95] W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcell´an, C. Markett 和 A. Ronveaux, 《关于 Sobolev 正交多项式的递推关系》。 *SIAM J. Math. Anal.* 26 (2):446-467, 1995。

[GMM21] J. C. Garc´ıa-Ardila, F. Marcell´an 和 M. E. Marriaga, 《正交多项式与线性泛函——代数方法及其应用》。 *EMS Series of Lectures in Mathematics* 。EMS 出版社，柏林，2021。[Ga02] W. Gautschi, 《经典分析与（数值）线性代数之间的相互作用——向 Gene Golub 致敬》 *ETNA*, 13:119-147, 2002。[Ga04] W. Gautschi, 《正交多项式：计算与近似》。 *Numerical Mathematics and Scientific Computation* 2004 。牛津大学出版社，牛津，。[HHLM22] C. Hermoso, E. J. Huertas, A. Lastra 和 F. Marcell´an, 《高阶递推关系、Sobolev 型内积与矩阵分解》。 *Numer. Algorithms.* 92:665-692, 2023。[K90] R. Koekoek, 《拉盖尔多项式的推广》。 *J. Math. Anal. Appl.*, 153 590, 1990 2 576( ): - 。[KKB98] J. Koekoek, R. Koekoek 和 H. Bavinck, 《关于 Sobolev 型拉盖尔多项式的微分方程》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (1):347-393, 1998。[KM93] R. Koekoek 和 H. G. Meijer, 《拉盖尔多项式的推广》。 *SIAM J. Math. Anal.* ( ): – 。[HLK 24 3 768 782, 1993
40] H. L. Krall, 《关于满足特定四阶微分方程的正交多项式》。*Pennsylvania State College Studies* 6，宾夕法尼亚州斯泰特科利奇，1940。[MR90] F. Marcell´an 和 A. Ronveaux, 《关于一类相对于离散 Sobolev 内积正交的多项式》。 *Indag. Math.*, 1(4):451-464, 1990。[MX15] F. Marcell´an 和 Yuan 3 308 352, 2015
Xu, 《关于 Sobolev 正交多项式》。 *Expo. Math.* 33 ( ): - 。[M19] C. Markett, 《关于拉盖尔-Sobolev 多项式的微分方程》。 *J. Approx.* , : - 。[M21] *Theory* 247 48 67, 2019
C. Markett, 《拉盖尔型与雅可比型 Sobolev 正交多项式的对称微分算子》。 *Integral Transforms Spec. Funct.*, 32 (5-8):568–587, 2021。[Ma21] C. Markett, 《拉盖尔-Sobolev 与雅可比-Sobolev 正交多项式的新表示》。载于：《从算子理论到正交多项式、组合学与数论——纪念 Lance Littlejohn 七十寿辰论文集》，305–327，算子理论：进展与应用，285，Birkh¨äuser/Springer，查姆，2021。[M22] C. Markett, 《具有两个线性扰动的雅可比-Sobolev 正交多项式的微分方程》。 *J. Approx. Theory*，280，论文编号 105782，24 页，2022。[Y02] G. J. Yoon, 《达布变换与正交多项式》， *Bull. Korean Math. Soc.*, 39:359- 376, 2002。[Z97] A. Zhedanov, 《有理谱变换与正交多项式》。 *J. Comput. Appl.* , : - 。 *Math.* 85 63 87, 1997

(F.Marcell´an) Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, Spain.
Email address: pacomarc@ing.uc3m.es (I. Zurri´an) Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla, Seville,
Spain.
Email address, 通讯作者：ignacio.zurrian@fulbrightmail.org